COMPL. DI ANALISI MATEMATICA ED ELEMENTI DI PROBABILITA'(L-Z)

C.d.L. Ing. Civile - Università di Bologna – A.A.2009-2010 - Prof. G.Cupini

Alcuni esercizi di probabilità (aggiornato al 21-7-2010)

(Grazie agli studenti del corso che comunicheranno eventuali errori)

1. Vi sono 2 urne, ciascuna contenente 10 palle. Nella prima urna ci sono 8 palle bianche e 2 nere. Nella seconda ve ne sono 7 bianche e 3 rosse. Qual è la probabilità che estraendo una palla da ciascuna urna, almeno una delle due palle estratte sia bianca? [R: 0,94]

2. In una gabbia di 100 conigli ve ne sono 10 malati. Qual è la probabilità che scegliendo a caso 4 conigli uno solo sia malato? $\left[\text{R:}10\begin{pmatrix}90\\3\end{pmatrix}/\begin{pmatrix}100\\4\end{pmatrix}\right]$

3. Da un'urna contenente 3 palle rosse, 4 verdi e 5 blu si estraggono 3 palle (senza reinserimento). Determinare la probabilità che:
   (a) siano tutte di colore diverso
   (b) ve ne siano 2 blu e 1 verde
   (c) siano tutte rosse

   $[\text{R:}\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, \frac{1}{220}]$

4. Da un'urna contenente 3 palle rosse, 4 verdi e 5 blu si estraggono 3 palle (con reinserimento dopo ogni estrazione). Determinare la probabilità che:
   (a) siano tutte di colore diverso,
   (b) ve ne siano 2 blu e 1 verde,
   (c) siano tutte rosse.

   $[\text{R:}\frac{3!60}{12^3}, \frac{300}{12^3}, \frac{1}{64}]$

5. Da un mazzo di 52 carte se ne estraggono 5. Qual è la probabilità che si abbia un poker (cioè 4 carte con lo stesso valore)? $\left[\text{R:}624/\begin{pmatrix}52\\5\end{pmatrix}\right]$

6. Si lancia una moneta non truccata 6 volte. Determinare la probabilità di ottenere esattamente 2 teste. $\left[\text{R:}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}/2^6\right]$

7. Uno studente completamente impreparato deve rispondere a 13 quiz per ciasuno dei quali sono suggerite 3 risposte, una sola delle quali corretta. Lo studente tira a indovinare. Con quale probabilità risponderà esattamente 12 volte? E con quale probabilità sbaglierà tutte le risposte? $[\text{R}: 26/3^{13}, 2^{13}/3^{13}]$

8. Due macchine A e B eseguono la stessa operazione e ogni giorno hanno probabilità 0.2 e 0.3 rispettivamente di guastarsi. Sapendo che la probabilità che si guastino contemporaneamente è 0.05, calcolare la probabilità che in un dato giorno

   (a) almeno una delle macchine sia guasta,

   (b) una sola si guasti.

   $[\mathrm{R} : 0.45, 0.4]$

9. Si estrae un numero della tombola. Qual è la probabilità che il numero estratto sia

   (a) pari e divisibile per 4?

   (b) divisibile per 2 o per 3?

   $[\mathrm{R} : 11/45, 2/3]$

10. Una coppia ha 10 figli. Determinare la probabilità che

   (a) i primi 5 siano maschi e gli altri femmina,

   (b) il primo, il terzo, il quinto, il settimo e il nono siano maschi e e gli altri femmine,

   (c) 5 siano maschi e 5 femmine,

   (d) vi siano dalle 3 alle 8 femmine.

   $$\left[\mathrm{R} : 2^{-10}, 2^{-10}, \binom{10}{5}/2^{10}, \sum_{k=3}^{8}\binom{10}{k}/2^{10}\right]$$

11. Un'urna contiene 100 palle numerate da 1 a 100. Le palle da 1 a 10 sono bianche, quelle da 11 a 100 sono nere. Estraggo 4 palle (con reinserimento). Qual è la probabilità che una sola delle 4 palle sia bianca? $\left[\mathrm{R} : \frac{4 \cdot 9^3}{10^4}\right]$

12. Due arcieri tirano con l'arco a un medesimo bersaglio. La probabilità che il primo arciere colpisca il bersaglio è $\frac{9}{10}$, quella del secondo arciere è $\frac{5}{6}$. I due arcieri tirano contemporaneamente. Determinare la probabilità che

   (a) entrambi gli arcieri colpiscono il bersaglio,

   (b) solo il secondo arciere colpisce il bersaglio.

   $[\mathrm{R} : 3/4, 1/12]$

13. Il successo di un esperimento, suddiviso in tre fasi indipendenti l'una dall'altra, dipende dal successo di ciascuna delle tre fasi. La probabilità di successo della prima fase è del 60%, della seconda fase è del 70%, della terza è del 90%. Qual è la probabilità di successo dell'esperimento? $[\mathrm{R} : 0.378]$

14. Un'urna contiene 3 palle bianche e 2 nere. Si estrae una prima pallina dall'urna e poi una seconda (senza reimbussolamento). Determinare la probabilità che

   (a) la seconda palla estratta sia nera, sapendo che la prima palla è bianca,

   (b) la seconda palla estratta sia nera, sapendo che la prima palla è nera,

   (c) la seconda palla estratta sia nera.

   $[\mathrm{R} : 1/2, 1/4, 2/5]$

15. Consideriamo 5 urne. Due di queste contengono 2 palle bianche e una nera, altre due contengono 3 palle bianche e una nera, l'ultima urna, infine, contiene 10 palle nere. Si sceglie a caso un'urna e da essa si estrae una palla.

    (a) Con che probabilità la palla estratta è bianca?

    (b) Con che probabilità la palla è estratta da una delle due urne contenenti 3 palle bianche e una nera, sapendo che la palla che ho estratto è bianca?

    $[\mathrm{R}: 17/30, 9/17]$

16. Il 2% della popolazione ha il diabete. Di queste, solo una metà è a conoscenza della propria condizione. Calcolare la probabilità che un individuo scelto a caso abbia il diabete e non lo sappia. $[\mathrm{R}: 0.01]$

17. Lancio una moneta non truccata 5 volte. Sapendo che nel primo lancio è uscito testa, determinare la probabilità che si abbia

    (a) testa nei primi due lanci,

    (b) testa nell'ultimo lancio,

    (c) testa in tutti i lanci.

    $\left[\mathrm{R}: 1/2, 1/2, 1/2^4\right]$

18. Due macchine M_1 e M_2 producono 400 e 600 pezzi al giorno, rispettivamente. Da rilevazioni statistiche si sa che la prima macchina, in media, ha uno scarto di pezzi del 5% e la seconda dell'8%. Scelto un pezzo a caso dal magazzino

    (a) qual è la probabilità che sia difettoso?

    (b) qual è la probabilità che esso sia stato prodotto dalla prima macchina sapendo che è difettoso?

    $[\mathrm{R}: 0.068, 5/17]$

19. Supponiamo che un test diagnostico di una certa malattia dia una risposta positiva, quando l'individuo è affetto dalla malattia, nel 99% dei casi, mentre per un soggetto sano il test è negativo nel 98% dei casi. I dati statistici mostrano che un paziente su 1000 ha tale malattia. Si cerca la probabilità che un individuo abbia la malattia nell'ipotesi che il suo test dia esito positivo. $\left[\mathrm{R}: \frac{0.99\cdot 0.001}{0.99\cdot 0.001+0.02\cdot 0.999} \sim 0.047\right]$

20. Il 50% dei fiori da un vivaio sono rose e di queste il 40% sono gialle. Inoltre il 30% dei fiori venduti dal vivaio sono gialli. Determinare la probabilità p_1 che un fiore venduto dal vivaio sia una rosa gialla. Determinare la probabilità p_2 che un fiore venduto dal vivaio sia giallo o una rosa.

    $[\mathrm{R}: p_1 = P(\text{rosa} \cap \text{f. giallo}) = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2, p_2 = P(\text{rosa} \cup \text{f. giallo}) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6]$

21. [Da prova scritta Mat.2, 19/9/01] Matteo lancia una moneta per 2 volte. Luca lancia una moneta 4 volte. Sapendo che le monete non sono truccate, determinare la probabilità che Matteo e Luca ottengano lo stesso numero di teste.

22. [Da prova scritta Mat.2, 22/2/02] Un esperimento ha il 70% di probabilità di successo e si può compiere al più 4 volte. Qual è il valore medio dei tentativi da fare perché l'esperimento riesca?

    [Suggerimento: Definire la variabile aleatoria discreta T che conta i tentativi...]

    $\left[\mathrm{R}: E(T) = 0.7 + 2 \cdot 0.3 \cdot 0.7 + 3 \cdot 0.3^2 \cdot 0.7 + 4 \cdot (0.3^3 \cdot 0.7 + 0.3^4) = 1.417\right]$

23. [Da prova scritta Met. Mat. Stat., 21/2/01] Un prodotto farmaceutico provoca un grave effetto collaterale a 3 pazienti su 100. Un'industria farmaceutica desidera sottoporre a prova il medicinale. Qual è la probabilità che l'effetto collaterale si verifichi in un campione casuale di 10 pazienti che prendono il medicinale? $\left[\mathrm{R}: 1-\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} 0.97^{10} \sim 0.2625\right]$

24. [Da prova scritta Mat.2, 18/4/02] Luca partecipa a un torneo di scacchi dove giocherà 4 partite. A ogni partita si estrae a sorte (con una moneta non truccata) chi gioca coi pezzi bianchi.

    (i) Qual è la probabilità che Luca giochi almeno una partita col nero? E che giochi tutte le partite col nero?

    (ii) Luca sa che se gioca col bianco ha il 20% di perdere, il 50% di pattare, mentre coi neri ha il 50% di perdere, il 40% di pattare. Luca vince la prima partita del torneo. Qual è la probabilità che l'abbia giocata col nero?

    $\left[\mathrm{R}:\ \text{(i) } 1-(1/2)^4,\ 1/2^4;\ \text{(ii) } 1/4\right]$

25. [Da primo preliminare Mat.2, 18/4/02] Vi sono due autobus: la linea n.1 e la linea n.2.

    Sul n.1 vi sono 40 passeggeri: 35 col biglietto e 5 senza.

    Sul n.2 vi sono 14 passeggeri: 11 con il biglietto e 3 senza.

    Alla fermata nessuno sale o scende, eccetto Luca che scende dal n.1 e sale sul n.2. Un controllore sceglie a caso un passeggero dal n.2. Qual è la probabilità che esso sia proprio Luca, sapendo che è senza biglietto? $[\mathrm{R}: 1/25]$

26. [Da primo preliminare Mat.2, 18/4/02] Vi sono due cassette di frutta, che per semplicità chiameremo cassetta A e cassetta B.

    Nella cassetta A vi sono 30 frutti: 25 maturi e 5 acerbi.

    Nella cassetta B vi sono 14 frutti: 11 maturi e 3 acerbi.

    A caso scegliamo un frutto dalla cassetta A e lo mettiamo nella B. Successivamente, Sempre a caso scegliamo un frutto da B. Qual è la probabilità che esso sia proprio quello che prima era in A, sapendo che è acerbo? $[\mathrm{R}: 1/19]$

27. [Da primo preliminare Mat.2, 18/4/02] Si lancia una moneta perfetta per 2 volte e si considerano i seguenti eventi:

    $A = \{$non si ottiene sempre testa o sempre croce $\}$

    $B = \{$non si ottiene più di una testa $\}$.

    Dire se i due eventi sono indipendenti. E se si fanno tre lanci?

    $[\mathrm{R}: 2 \text{ lanci: } P(B/A) = 1, P(B) = 3/4,\ \text{non sono indipendenti}]$

    $[\mathrm{R}: 3 \text{ lanci: } P(A) = 3/4, P(B) = 1/2, P(A \cap B) = 3/8,\ \text{sono indipendenti}]$

28. [Da primo preliminare Mat.2, 18/4/02] Si lancia una moneta perfetta per 2 volte e si considerano i seguenti eventi:

    $A = \{$non si ottiene mai testa al primo lancio $\}$

    $B = \{$si ottiene almeno una croce $\}$.

    Dire se i due eventi sono indipendenti.

    E se si fanno tre lanci?

    $[\mathrm{R}: 3 \text{ lanci: } P(B/A) = 1, P(B) = 7/8,\ \text{sono indipendenti}]$

29. [Da primo preliminare Mat.2, 18/4/02] Si lanciano 2 dadi non truccati e si considerano i seguenti eventi:

$A = \{$non si ottengono entrambi numeri pari o entrambi numeri dispari $\}$

$B = \{$la somma dei due numeri è minore o uguale di 5 $\}$.

Dire se i due eventi sono indipendenti. $\left[\mathrm{R}: P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{5}{18}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}. \text{ Non sono indipendenti}\right]$

30. [Da primo preliminare Mat.2, 18/4/02] Si lanciano 2 dadi non truccati e si considerano i seguenti eventi:

$A = \{$si ottengono entrambi numeri pari oppure un numero pari e un numero dispari $\}$

$B = \{$la somma dei due numeri è maggiore di 3 $\}$.

Dire se i due eventi sono indipendenti.

31. [Da primo preliminare Mat.2, 18/4/02] Vi sono due scatoloni di libri, che per semplicità indichiamo con A e B.

A contiene 50 libri: 40 di narrativa e 10 di saggistica.

In B vi sono 29 libri: 24 di narrativa e 5 di saggistica.

Per sbaglio un libro, scelto a caso da A viene riposto in B. Successivamente, a caso si sceglie un libro da B. Qual è la probabilità che esso sia proprio quello che prima era in A, sapendo che è di saggistica?

$\left[\mathrm{R}: \frac{\frac{10}{50}\frac{1}{30}}{\frac{10}{50}\frac{1}{30}+\frac{5}{29}\frac{29}{30}}\right]$

32. [Da prova scritta Mat.2, 10/9/02] Luca partecipa a un torneo di scacchi dove giocherà 4 partite. A ogni partita si estrae a sorte con una moneta truccata (la probabilità che venga testa è $\frac{1}{3}$) chi gioca coi pezzi bianchi e chi coi neri: se esce testa Luca gioca coi pezzi bianchi, se esce croce gioca coi neri.

(i) Qual è la probabilità che Luca giochi almeno una partita del torneo coi neri?

(ii) Luca sa che se gioca coi bianchi ha il 20% di probabilità di perdere e il 50% di pattare, mentre coi neri ha il 50% di probabilità di perdere e il 40% di pattare. Egli vince le prime due partite del torneo. Qual è la probabilità che le abbia giocate entrambe coi neri?

33. [Da prova scritta Mat.2, 8/7/03] Andrea e Paolo praticano il tiro al piattello. Per ogni piattello lanciato, comincia Andrea sparando un singolo colpo: se Andrea colpisce il piattello, Paolo non spara, se Andrea non lo colpisce, allora spara un colpo Paolo. La probabiltà che con un colpo Andrea colpisca il bersaglio è del 75%, la probabilità che Paolo colpisca il bersaglio è del 60%.

Vengono lanciati 5 piattelli.

(1) Sia X la variabile aleatoria che conta quante volte Paolo spara. Determinare il range di X e la sua media.

(2) Determinare la probabilità dei seguenti eventi: $\mathcal{A}$="Paolo non spara mai ." e $\mathcal{B}$= "Paolo colpisce il bersaglio una sola volta, sapendo che spara tre volte".

$\left[\mathrm{R}: P(A) = 0.75^5,\ P(B) = 3 \cdot 0.6 \cdot 0.4^2\right]$

34. [Da prova scritta Mat.2, 11/9/03] Un sacchetto contiene tre monete: due sono perfette e una no (la probabilità che lanciandola venga testa è $\frac{1}{3}$). Ne estraggo due. Qual è la probabilità che tra quelle estratte non vi sia quella truccata, sapendo che lanciandole entrambe una volta ottengo due teste?

$$\left[\mathrm{R}: \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{3}{7}\right]$$

35. [Da prova scritta Mat.2, 26/9/03] Si lancia per 5 volte una moneta truccata (la probabilità che esca testa è $\frac{1}{3}$). Si considerino gli eventi

$$A = \text{“escono esattamente 3 teste”}\,, \quad B = \text{“nel primo lancio esce testa”}.$$

(a) Calcolare $P(A)$ e $P(B)$.

(b) Determinare la probabilità che si verifichi A, sapendo che si è verificato B.

$\left[\text{R} : (a)\ P(A) = \binom{5}{3} (\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2,\ P(B) = \frac{1}{3},\ \ (b)\ P(A/B) = \binom{4}{2} (\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2\right]$

36. [Da prova scritta Mat.2, 24/9/02] Si lancia una moneta perfetta per 4 volte e si considerano i seguenti eventi:

$A = \{$non si ottiene testa all'ultimo lancio $\}$

$B = \{$non si ottiene più di una croce $\}$.

(i) Dire se i due eventi sono indipendenti.

(ii) Se la moneta è truccata (la probabilità di avere testa è $\frac{1}{3}$) i due eventi sono indipendenti?

37. Un dado è lanciato tre volte. Sia X la variabile che conta quante volte nei tre lanci è uscito il 6. Determinarne il range e la media.

$\left[\text{R} : X \sim \mathcal{B}(3, \frac{1}{6}), \text{Range}(X) = \{0, 1, 2, 3\}, E(X) = 3 \cdot \frac{1}{6}\right]$

38. Una variabile aleatoria X può assumere solo i valori $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Sapendo che X ha la stessa probabilità di assumere i valori $1, 2, 3, 4$ e che $E(X) = 1.5$, determinare $P(X = 0)$.

$[\text{R} : 0.4]$

39. [Da prova scritta Mat.2, 10/6/03] Si consideri l'esperimento: un dado è lanciato tre volte.

(1) Sia X la variabile aleatoria che conta quante volte nei tre lanci è uscito il 6. Determinare il range di X e la sua media.

(2) Siano A l'evento “escono almeno due numeri pari” e B “escono esattamente due 2”. Sono eventi indipendenti?

$\left[\text{R} : (1)\ \text{Range} = \{0, 1, 2, 3\},\ E(X) = \frac{1}{2}.\ (2) P(A/B) = 1,\ P(A) = \frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \text{non sono indipendenti.}\right]$

40. [Da prova scritta Mat.2, 18/2/04] Un sacchetto contiene 3 dadi, D1, D2 e D3. D1 non è truccato, D2 ha solo i numeri pari (due facce con il 2, due con il 4 e due con il 6) e D3 ha tre facce con il 2 e tre con il 6. Si estrae a caso uno di dadi, lo si lancia ed esce il 6. Qual è la probabilità che sia stato estratto D1?

$\left[\text{R} : \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1/6\right]$

41. [Da prova scritta Mat.2, 24/9/02] Data una moneta, sia X la variabile aleatoria che conta il numero delle teste dopo 5 lanci. Sia F_X la funzione di distribuzione di X. Sapendo che $F_X(4) = \frac{242}{243}$ calcolare la probabilità di avere testa facendo un solo lancio.

$\left[\text{R} : \frac{242}{243} = 1 - p^5\ \Rightarrow\ p = 1/3\right]$

42. [Da prova scritta Mat.2, 27/1/04] Sia X una v.a. discreta il cui range è $\{0, 1, 2, 3\}$. Sia f_X la sua funzione di densità di probabilità. Determinare a e b reali sapendo che $f_X(0) = 0,2,\ f_X(1) = 0,3,\ f_X(2) = a$, $f_X(3) = 2b$ e che la media di X vale $1,7$.

$\left[\text{R} : \begin{cases} a + 2b = 0.5 \\ 2a + 6b = 1.4 \end{cases} \Rightarrow\ a = 0.1,\ b = 0.2\right]$

43. [Da prova scritta Mat.2, 18/2/04] Sia X una v.a. discreta definita su uno spazio campionario costituito da tutti gli esiti del lancio di due dadi. Ad ogni lancio che ha come esito 2 numeri dispari uguali X associa il valore 10, a ogni lancio che ha come esito 2 numeri dispari diversi X associa il valore 3, negli altri casi associa x. Determinare x in modo tale la media di X sia 0.

    Si consideri poi la v.a. $Y = -\frac{1}{3}|X| + 3$. Determinare la probabilità che Y assuma valori strettamente minori di 2, sapendo che X assume valori strettamente maggiori di 2.

    $\left[\mathrm{R:}\ x = \frac{16}{9},\ P(Y < 2/X > 2) = \frac{P(X>3)}{(X>2)} = \frac{1}{3}\right]$

44. Sia X una v.a. che assume valore 10 con probabilità 0.3, il valore 2 con probabilità 0.4, il valore 8 con probabiltà 0.1, il valore 4 con probabilità 0.2. Determinare la funzione di densità e di distribuzione di X e disegnarne il grafico. Calolare poi media e varianza di X.

45. Sia X una v.a. con range $\{10, 20, 30, 40, 50\}$. Sia f la sua funzione di densità, $f(10) = 0.2, f(20) = 0,3, f(30) = 0.35, f(40) = 0.1, f(50) = 0.05$. Calcolare la funzione di distribuzione di X, la media e la varianza.

46. Una urna contiene 4 palle numerate da 1 a 4. Se ne estraggono due. X è la variabile aleatoria che ad ogni coppia di palle estratte associa la somma dei numeri sulle palle. Determinare le funzioni di densità e di distribuzione, la media e la varianza.

47. Una urna contiene 5 palle bianche e 3 palle nere. Si estraggono 3 palle. La v.a. X conta il numero delle palle bianche estratte. Determinare la funzione di distribuzione di X.

48. Un'urna contiene 25 palle numerate da 1 a 25. X è la v.a. che assegna ad ogni palla la somma delle cifre del numero riportato su di essa. Determinare la funzione di densità, di distribuzione, la media e la varianza di X.

    $[\mathrm{R:}\ E(X) = 5.08\ ]$

49. Lancio un dado. Se esce il 4 vinco 10 euro, se no, ne perdo 2. Dire se il gioco è equo.

    [R : Sì]

50. [Da prova scritta Mat.2, 19/9/01] La durata in ore di una lampadina è una variabile aleatoria X la cui funzione di densità di probabilità è data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{20}e^{-x/20} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

    (i) Determinare la durata media di una lampadina.

    (ii) Calcolare la probabilità che una lampadina duri più di due giorni sapendo che è accesa da 12 ore.

    $\left[\mathrm{R:}(b) = \frac{P(X\geq 48)}{P(X\geq 12)} = \frac{e^{-12/5}}{e^{-3/5}}\right]$

51. [Da prova scritta Met. Mat. Stat., 21/2/01] Un certo prodotto è costituito da 3 componenti. La lunghezza totale Z del prodotto è uguale alla somma delle 3 lunghezze X_1, X_2, X_3 delle sue componenti. Supponiamo inoltre che tali lunghezze siano, a causa della variabilità della produzione, delle v.a. indipendenti, ognuna distribuita normalmente con le seguenti medie e varianze:

$$\begin{array}{ll} \mu_1 = 1, & \sigma_1^2 = 0.002 \\ \mu_2 = 2, & \sigma_2^2 = 0.01 \\ \mu_1 = 3, & \sigma_3^2 = 0.01 \end{array}$$

    Su 100 prodotti scelti a caso quanti ce ne possiamo aspettare di lunghezza compresa tra 5.80 e 6.20?

    [R: $X = X_1 + X_2 + X_3 \sim \mathcal{N}(6; 0.022) \Rightarrow P(5.8 \leq X \leq 6.2) = P(-1.35 \leq Z \leq 1.35) \sim 0.823$.Dunque: ~ 82]

52. [Da secondo prel. Mat.2, 3/6/02] Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{an}{\pi} + \frac{\sin(2nx)}{\pi} & \text{se } 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare il parametro a tale che f_n sia una funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X_n.

(ii) Si chiami $E(X_n)$ la media della variabile aleatoria X_n. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$.

$\Big[$R: (i) $a = \frac{1}{n}$, (ii) $E(X_n) = \int_0^\pi x(\frac{1}{\pi} + \frac{\sin(2nx)}{\pi})\, dx \to_{n\to\infty} \frac{\pi}{2}\Big]$

53. [Da prova scritta Mat.2, 13/6/02] Vi sono due cespugli di alloro. La lunghezza di una foglia del cespuglio A è una variabile aleatoria avente una funzione densità

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{256}x^2 + \frac{3}{32}x & \text{se } 0 \le x \le 8 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La lunghezza di una foglia del cespuglio B è una variabile aleatoria avente una funzione densità

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{se } 0 \le x \le 10 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si sceglie un cespuglio a caso e si strappa una foglia. Qual è la probabilità che essa provenga dal primo cespuglio, sapendo che è lunga più di 4 cm?

$\Big[$R: $P(A/(L \ge 4)) = \frac{P((L\ge4)/A)\,P(A)}{P((L\ge4)/A)\,P(A)+P((L\ge4)/B)\,P(B)} = \frac{\int_4^8[-\frac{3}{256}x^2+\frac{3}{32}x]\,dx\cdot\frac{1}{2}}{\int_4^8[-\frac{3}{256}x^2+\frac{3}{32}x]\,dx\cdot\frac{1}{2}+\int_4^{10}\frac{1}{10}\,dx\cdot\frac{1}{2}}\Big]$

54. [Da prova scritta Mat.2, 24/9/02] Data una moneta, sia X la variabile aleatoria che conta il numero delle teste dopo 5 lanci. Sia F_X la funzione di distribuzione di X. Sapendo che $F_X(4) = \frac{242}{243}$ calcolare la probabilità di avere testa facendo un solo lancio.

$\big[\mathrm{R}: \frac{242}{243} = 1 - p^5 \;\Rightarrow\; p = 1/3\big]$

55. [Da prova scritta Mat.2, 20/1/03] Sia X la variabile aleatoria che misura la presenza di una certa sostanza in un farmaco. X ha distribuzione normale con media 0.5 e varianza 0.04. Determinare la probabilità che la media campionaria misurata su 36 confezioni sia compresa tra 0.51 e 0.53.

$\Big[\mathrm{R}: \bar{X}_n \sim \mathcal{N}(0.5; \frac{0.04}{36}) \Rightarrow P(0.51 \le \bar{X}_n \le 0.53) = P(\frac{0.01}{0.2/6} \le Z \le \frac{0.03}{0.2/6}) \sim 0.198\Big]$

56. [Da prova scritta Mat.2, 20/1/03] Sia X una variabile aleatoria continua tale che la probabilità che X assuma valori compresi tra $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ sia del 50%. Supponendo che la probabilità che X assuma valori minori a $\frac{1}{4}$, con la condizione $X < \frac{1}{2}$, sia del 20%, determinare $P(X < \frac{1}{4})$.

$$\left[\mathrm{R}: \begin{cases} 0.2 = P((X \le \frac{1}{4})/(X \le \frac{1}{2})) = \frac{P(X\le\frac{1}{4})}{P(X\le\frac{1}{2})} \\ 0.5 = P(\frac{1}{4} \le X \le \frac{1}{2}) = P(X \le \frac{1}{2}) - P(X \le \frac{1}{4}) \end{cases} \Rightarrow\; P(X < \tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{8}\right]$$

57. [Da prova scritta Mat.2, 20/2/03] Sia X la variabile aleatoria con funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \le -1 \\ 1\,, & \text{se } -1 < x < 0 \\ 0\,, & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la funzione di distribuzione di X.

(b) Determinare la funzione di distribuzione della variabile aleatoria $Y = |X|$.

$$\left[\text{R}: \; F_Y(t) = P(|X| \le t) = \begin{cases} 0 & \text{se}\, t \le 0 \\ t & \text{se}\, t \in [0,1] \\ 1 & \text{se}\, t \ge 1 \end{cases} \right]$$

58. [Da prova scritta Mat.2, 26/9/03] Si consideri la funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X

$$f_X(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < -\log 2 \\ \frac{1}{2}e^x\,, & \text{se } -\log 2 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2}(x+1)\,, & \text{se } 0 < x \le 1 \\ 0\,, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Determinare la funzione di distribuzione della variabile aleatoria X.

$$\left[\text{R}: \; F_X(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < -\log 2 \\ \frac{1}{2}(e^x - \frac{1}{2})\,, & \text{se } -\log 2 \le x \le 0 \\ \frac{1}{4}(1 + 2x + x^2)\,, & \text{se } 0 < x \le 1 \\ 1\,, & \text{se } x > 1. \end{cases} \right]$$

59. [Da prova scritta Mat.2, 14/11/03] Si consideri la funzione di densità di probabilità di una v.a. X

$$f_X(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \le 0 \\ 2\cos(2x)\,, & \text{se } 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 0\,, & \text{se } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Determinare la funzione di distribuzione della variabile aleatoria $Y = X^2$.

60. Una v.a. X ha funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0 \\ a(3x - x^2)\,, & \text{se } 0 \le x \le 3 \\ 0\,, & \text{se } x > 3\,. \end{cases}$$

Determinare a in modo tale che f sia realmente una funzione di densità e disegnarne il grafico. Determinare la funzione di distribuzione, media e varianza di X e infine calcolare $P(X \in (1,2))$.

$\left[\text{R}: \; a = \frac{2}{9}\right]$

61. Determinare a tale che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,, & \text{se}\, |x| < a \\ 0\,, & \text{atrimenti}\,, \end{cases}$$

sia una funzione di densità di probabilità.

$\left[\text{R}: \; a = \frac{1}{\pi} \right]$

62. [Da prova scritta Mat.2, 13/6/02] Vengono esaminate 6 confezioni di acqua minerale. Il contenuto di una certa sostanza ha una distribuzione normale di media μ ignota e varianza 0.5 e risulta presente nelle bottiglie del campione nelle seguenti quantità:

$$2,8 - 1,8 - 3,3 - 2,8 - 2,8 - 3,9\, mg.$$

Calcolare l'intervallo di confidenza al 98% per la media μ di tale sostanza.

63. [Da prova scritta Mat.2, 10/6/03] Sia X una variabile aleatoria con distribuzione normale e varianza $\sigma^2 = 16$. Da un campionamento di dimensione 10 si ottiene una media campionaria pari a 50. Determinare un intervallo di confidenza al 95% della media μ.

64. [Da prova scritta Mat.2, 8/7/03] Sia X la variabile aleatoria con distribuzione normale del valore della pressione sistolica nella popolazione maschile di deviazione standard 10 mmHg. Su un campione di 30 individui si trova una pressione media (campionaria) di 120 mmHg. Determinare l'intervallo di confidenza al 90% per la media μ.