ANALISI MATEMATICA T-2 (C.d.L. Ing. per l'ambiente e il territorio)

A.A.2009-2010 - Prof. G.Cupini

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (lineari, a variabili separabili, di Bernoulli) ed equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

(Grazie agli studenti del corso che comunicheranno eventuali errori)

Esercizio 1.

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} y' = 2y + 2e^{-x} \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y' = y\cos x + \sin x \cos x \\ y(0) = 0, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' = 3xy - 2y \\ y(-1) = 1, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y' = 3xy - 4y \\ y(-1) = 0, \end{cases}$,

(e) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x(\log y - \log x)} \\ y(e^2) = e^3, \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y' = \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x} y \\ y(\pi) = 1. \end{cases}$

Esercizio 2.

Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y' = ye^{-t} - \alpha e^{-t} \\ y(0) = 100. \end{cases}$$

Determinare poi α in modo tale che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

[Sol.: Per $\alpha = 100$ la soluzione del problema di Cauchy è la soluzione stazionaria $y(x) \equiv 100$. Se $\alpha \neq 100$ la soluzione è $y(t) = (100-\alpha)e^{-e^{-t}+1} + \alpha$. Per avere la condizione sul limite, deve essere $\alpha = \frac{100}{e-1}$.]

Esercizio 3.

Risolvere

$$\begin{cases} y' = (-y^2+1)y \\ y(0) = 100. \end{cases}$$

[Sol.: La soluzione in forma implicita è

$$\frac{|y(x)|}{|y^2(x)-1|^{1/2}} = \frac{100e^x}{(100^2-1)^{1/2}}].$$

Esercizio 4. Siano $m, q \geq 0$. Determinare le soluzioni stazionarie e non stazionarie di

$$y' = (-my+q)y.$$

[Sol. (solo per $m, q > 0$): Soluzioni stazionarie: $y(x) = 0$ e $y(x) = \frac{q}{m}$. Soluzioni non stazionarie: $y(x) = \frac{q}{m+cqe^{-qx}}$.]

Esercizio 5. Determinare, se esistono, le soluzioni stazionarie di

$$y' = e^{-2x}x(2y-1)^2.$$

Determinare poi, se esiste, la soluzione non stazionaria tale che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

Esercizio 6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2yx\sin x + y^2 x \sin x \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Individuare poi le soluzioni stazionarie dell'equazione.

[Sol.:

$$y(x) = \frac{2e^{2(-x\cos x+\sin x)}}{2-e^{2(-x\cos x+\sin x)}}.$$

Le soluzioni stazionarie dell'equazione sono $y(x) = 0$ e $y(x) = -2$.]

Esercizio 7. Si consideri l'equazione differenziale

$$e^y y' = \frac{\pi}{2}\frac{e^{2y}+1}{(1+x)^3} \qquad \text{con } x \geq 0.$$

(a) Determinarne le soluzioni,
(b) Sia $\bar{y}$ la soluzione tale che $\lim_{x\to+\infty} \bar{y}(x) = +\infty$. Determinare $\bar{y}(0)$.

[Sol.: (a) Le soluzioni sono

$$y(x) = \log(\tan(-\frac{\pi}{4(1+x)^2} + c)) \qquad c \in \mathbb{R}$$

(b) Se si vuole $\lim_{x\to+\infty} \bar{y}(x) = +\infty$ deve essere $c = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dunque, dalla periodicità di periodo π della funzione tangente,

$$\bar{y}(x) = \log(\tan(-\frac{\pi}{4(1+x)^2} + \frac{\pi}{2})).]$$

Esercizio 8. Risolvere
$$y' = \frac{e^{2y}+1}{e^y} \cdot \frac{1}{1+x}.$$
[Sol.: Si ha $\arctan(e^y) = \log|1+x| + c$. Ponendo $c = \log k$ con $k > 0$, si ha $\arctan(e^y) = \log(k|1+x|)$. Dunque $y(x) = \log\tan\log(k|x+1|)$, $k > 0$.]

Esercizio 9. Determinare le soluzioni stazionarie di
$$y' = \frac{1}{2}(\sin x \cos x)y - \frac{\sin x \cos x}{y}.$$
Determinare inoltre la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = 3$.

[Sol.: Le soluzioni stazionarie sono $y(x) = \pm\sqrt{2}$.

Le soluzioni non stazionarie soddisfano
$$|y^2(x) - 2| = e^{\frac{1}{2}\sin^2 x + c}.$$
Per avere la condizione iniziale soddisfatta deve essere $c = \log 7 - \frac{1}{2}$. Dunque:
$$y(x) = \sqrt{2 + e^{\frac{1}{2}\sin^2 x + \log 7 - \frac{1}{2}}}.]$$

Esercizio 10. Risolvere
$$\begin{cases} xy' = y + 2x \\ y(1) = 0. \end{cases}$$
[Sol.: $y(x) = 2x\log x$ con $x > 0$.]

Esercizio 11. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = -xy + (1-x)e^x y^2 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 12. Determinare le soluzioni di
$$y' = \frac{y}{x+1} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \qquad x > 0.$$

Esercizio 13. Determinare $b(x)$ in modo tale che
$$y' = (\sin x \cos x)y + b(x)y^2$$
abbia come soluzioni stazionarie $y(x) = 0$ e $y(x) = -2$. Determinare poi tutte le altre soluzioni dell'equazione con il $b(x)$ trovato.

[Sol.: Perché ci siano due soluzioni stazionarie dobbiamo avere $b(x) = k \sin x \cos x$. Imponendo che le soluzioni stazionarie siano $y(x) = 0$ e $y(x) = -2$ deve essere $b(x) = \frac{1}{2} \sin x \cos x$. Con tale $b(x)$ le soluzioni non stazionarie dell'equazione soddisfano

$$\left| \frac{y(x)}{y(x)+2} \right| = c e^{\frac{1}{2} \sin^2 x}.$$

Queste soluzioni sono espresse in forma implicita.]

Esercizio 14.
Risolvere

$$x^2 y' = y(y + x).$$

Esercizio 15.
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, risolvere l'equazione differenziale

$$2x'' - \alpha x = t^2 - 1\,. \tag{1}$$

[Sol.: Se $\alpha = 0$ basta integrare due volte primo e secondo membro in t. In alternativa, ma più complicato, si ha che, avendo l'equazione caratteristica $2\lambda^2 = 0$ la sola soluzione 0, di molteplicità 2, allora l'integrale dell'omogenea associata è $x_{\mathrm{om}}(t) = c_1 e^{0t} + c_2 t e^{0t} = c_1 + c_2 t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ad essa va aggiunta una soluzione $x_p(t)$ nella forma $t^2(At^2 + Bt + C)$.

Se $\alpha > 0$, l'integrale generale è $x(t) = c_1 e^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}} t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{2}} t} + x_{\mathrm{p}}(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dove $x_{\mathrm{p}}(t)$ va cercata nella forma $At^2 + Bt + C$ in quanto 0 non risolve l'equazione caratteristica e il termine noto è un polinomio di grado 2.

Se $\alpha < 0$, l'equazione caratteristica $2\lambda^2 - \alpha = 0$ ha le soluzioni complesse $\pm i\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}$ dunque integrale generale è $x(t) = c_1 \cos(\sqrt{-\frac{\alpha}{2}} t) + c_2 \sin(\sqrt{-\frac{\alpha}{2}} t) + x_{\mathrm{p}}(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dove $x_{\mathrm{p}}(t)$ va cercata nella forma $At^2 + Bt + C$.]

Esercizio 16.
Risolvere l'equazione differenziale

$$2x'' - x' - x = \sin t + (t-1)^2$$

[Sol.: L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $x_{\mathrm{om}}(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2} t} + c_2 e^t \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Una soluzione particolare di $2x'' - x' - x = \sin t$ è

$$x_{\mathrm{p}_1}(t) = \frac{1}{10} \cos t - \frac{3}{10} \sin t.$$

Una soluzione particolare di $2x'' - x' - x = (t-1)^2$ va cercata nella forma $At^2 + Bt + C$ in quanto 0 non risolve l'equazione caratteristica e il termine noto è un polinomio di grado 2.]

Esercizio 17.
Determinare tutte le soluzioni di

$$y'' + y' - 2y = e^x \cos x$$

tali che $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$.

[Sugg.: La soluzione particolare $y_p(x)$ va cercata nella forma $e^x(A \cos x + B \sin x)$ in quanto $1 + i$ non risolve l'equazione caratteristica.]

Esercizio 18.

(1) $y'' = \sin x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$ [Sugg: integrare due volte]
(2) $y'' = y'^2, \quad y(1) = 1, y'(1) = 1$ [Sugg: porre $y' = z$]
(3) $y''' = e^{2y''}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$ [Sugg: porre $y'' = z$]
(4) $y'' + y = \sin x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
(5) $y''' + 4y' = 3x - 1$ [Sugg: porre $y' = z$]
(6) $y'' - 2\alpha y' + 2\alpha^2 y = x - \dfrac{1}{\alpha}$ al variare di $\alpha \neq 0$
(7) $y'' + y' - 2y = x^2 - 1$,
(8) $y'' + 2y' - y = \cos(2x)$,
(9) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos(2x)$,
(10) $y'' - 3y' + 2y = -e^{2x}\sin x$,
(11) $y'' - 3y' + 2y = e^{x}(\cos x - \sin x)$,

[Sol.: (1) $y(x) = -\sin x + 2x + 1$.

(2) $y(x) = 1 - \log|2 - x|$.

(4) Siccome $\sin x = e^{0x}\sin x$, ed essendo $0 + i$ soluzione dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 1 = 0$, la soluzione particolare $y_{\mathrm{p}}(x)$ va cercata nella forma $x(c_1\cos x + c_2\sin x)$.

(5) Posto $y' = z$ l'equazione diventa $z'' + 4z = 3x - 1$. Una soluzione particolare $z_{\mathrm{p}}(x)$ va cercata nella forma $Ax + B$.

(7) La soluzione particolare $y_{\mathrm{p}}(x)$ va cercata nella forma $Ax^2 + Bx + C$.

(8) La soluzione particolare $y_{\mathrm{p}}(x)$ va cercata nella forma $c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$..

(9) Siccome l'equazione caratteristica è risolta da $-1 \pm i\sqrt{2}$ ed il termine noto è $e^{-x}\cos(2x)$, debbo cercare la soluzione particolare $y_{\mathrm{p}}(x)$ nella forma $xe^{-x}(c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x))$..

(10) Cerco la soluzione particolare $y_{\mathrm{p}}(x)$ nella forma $e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$.

(11) Cerco la soluzione particolare $y_{\mathrm{p}}(x)$ nella forma $e^{x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$.]