Elettromagnetismo – Elettrodinamica
Introduzione

La trattazione finora svolta dei campi elettrici e dei campi magnetici non ha messo in evidenza alcuna reazione fra i due. Questo è dovuto al fatto che i campi finora considerati non mostrano dipendenze dal tempo: si tratta cioè di campi "statici" (elettrostatico e magnetostatico). I risultati ottenuti possono essere riassunti nelle seguenti equazioni.

1) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

Il lavoro del campo elettrico su un qualunque percorso chiuso è nullo. Ciò significa che il campo elettrico statico è conservativo e quindi ammette un potenziale.

2) $\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Teorema di Gauss; il flusso del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa è proporzionale alla carica netta contenuta all'interno della superficie. Questo teorema dipende da due proprietà del campo elettrico statico: a) le cariche sono le sorgenti di $\vec{E}$; b) il campo $\vec{E}$ dovuto a una carica puntiforme decresce con il quadrato della distanza.

3) $\oint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$

Il flusso dell'induzione magnetica attraverso qualunque superficie chiusa è nullo. Questo è dovuto al fatto che, non essendo possibile individuare sorgenti positive e negative per $\vec{B}$, le linee di forza dell'induzione magnetica sono chiuse.

A queste equazioni occorre aggiungerne una quarta nota come Teorema di Ampere

4) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i$

Il lavoro dell'induzione magnetica su un percorso chiuso è proporzionale alle correnti che attraversano la superficie delimitata dalla sua curva (chiusa) su cui si calcola il lavoro. Questo significa a) che il campo $\vec{B}$ non è conservativo (e quindi non esiste un potenziale magnetico), e b) che le sorgenti di $\vec{B}$ sono le correnti che circolano nei circuiti.

Queste quattro equazioni riassumono dunque le proprietà di $\vec{E}$ e $\vec{B}$: come si vede, le prime due esprimono proprietà di $\vec{E}$, le seconde due proprietà di $\vec{B}$. In alcuna di queste equazioni compaiono insieme $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ($\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono "disaccoppiati").
Quando si considerano campi dipendenti dal tempo, occorre modificare le equazioni 1) e 4) (mentre restano valide le equazioni 2) e 3)): queste modifiche risultano in equazioni in cui compaiono sia $\vec{E}$ che $\vec{B}$, legando così le proprietà dei due campi.

Corrente di spostamento

Fu J.C. Maxwell a realizzare che il passaggio di corrente in un circuito non è l'unico modo per ottenere un campo $\vec{B}$.
Consideriamo infatti una superficie chiusa contenente una carica netta q_{int} . In base al principio di conservazione della carica, se q_{int} varia, una pari quantità deve avere attraversato la superficie che la circonda, in entrata o in uscita a seconda che q_{int} aumenti o diminuisca.
Poiché una carica che entri o esca dà luogo, grazie al suo movimento, a una corrente, potremo concludere che una variazione di q_{int} corrisponde all'esistenza di una corrente i. Con riferimento alla Fig ED1, in cui la corrente *i* esce dalla superficie chiusa e quindi corrisponde a una diminuzione di q_{int} , potremo quindi scrivere

$$i = -\frac{dq_{\text{int}}}{dt}$$

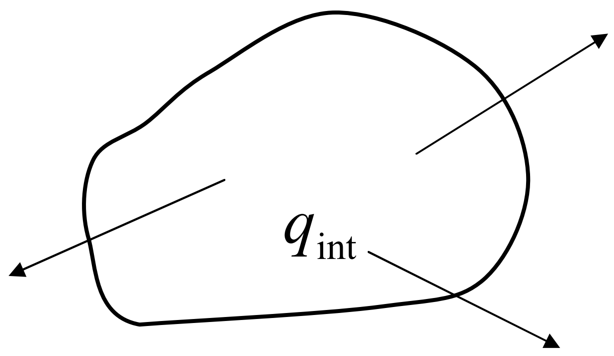

Fig Ed1. Poiché la carica si conserva, se q_{int} diminuisce, delle cariche devono uscire dalla superficie muovendosi nel verso delle frecce, dando luogo, complessivamente, a una corrente i.

Ora però, per il teorema di Gauss,

$$q_{\text{int}} = \varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$
$$\varepsilon_0 \Phi_{SC}\left(\vec{E}\right)$$

avendo indicato con $\Phi_{SC}\left(\vec{E}\right)$ il flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie chiusa (SC) che contiene q_{int} .

Pertanto

$$i = -\frac{dq_{\text{int}}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0 \Phi_{SC}(\vec{E})\right)$$
$$= -\varepsilon_0 \frac{d\Phi_{SC}(\vec{E})}{dt}$$
$$= -\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\oint \vec{E}\cdot\vec{n}dS$$

Quindi, la variazione per unità di tempo del flusso di campo elettromagnetico (moltiplicato per la costante ε_0) ha le stessa proprietà di una corrente, come tale può generare un campo $\vec{B}$. Questa conclusione richiede ovviamente che il flusso di $\vec{E}$ vari nel tempo, il che può avvenire in modo più naturale se $\vec{E}$ dipende dal tempo, oltre che dalla posizione $\vec{r}$:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t).$$

Partendo da considerazioni di questo tipo, Maxwell modificò il Teorema di Ampere nel modo seguente:

4') $$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0\left(i + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\oint \vec{E}\cdot\vec{n}dS\right)$$

e diede il nome di "corrente di spostamento" al termine $\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\oint \vec{E}\cdot\vec{n}dS$, termine che si annulla se $\vec{E}$ non dipende dal tempo. Più precisamente, nell'equazione 4') il flusso di $\vec{E}$ viene calcolato attraverso una qualunque superficie aperta che abbia come contorno il percorso chiuso su cui si calcola il lavoro di $\vec{B}$ (Fig ED2)

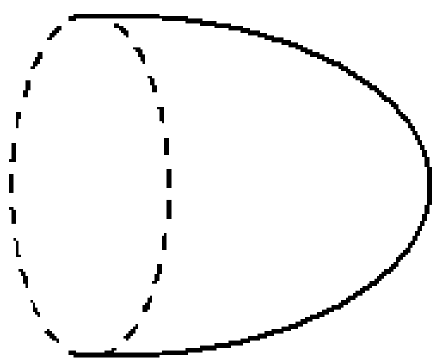

Fig ED2. Il flusso di $\vec{E}$ va calcolato lungo una qualsiasi superficie che abbia come contorno la curva su cui si calcola il lavoro di $\vec{B}$.

La modifica introdotta da Maxwell dà luogo a un legame fra $\vec{B}$ e $\vec{E}$, aggiungendo alle sorgenti di $\vec{B}$ i ampi elettrici dipendenti dal tempo.

La legge di Faraday

Così come i campi elettrici variabili nel tempo generano campi di induzione magnetica, campi $\vec{B}$ variabili nel tempo possono generare campi elettrici. M. Faraday si accorse che, in presenza di campi di induzione magnetica variabili nel tempo, nascono dei campi elettrici $\vec{E}$ che, a differenza dei campi elettrostatici non sono più conservativi. L'equazione 1) che esprime la conservatività del campo elettrostatico viene di conseguenza generalizzata in:

1')
$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} &= -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}\oint \vec{B} \cdot \vec{n}dS\end{aligned}$$

dove il flusso di $\vec{B}$ è calcolato attraverso una qualunque superficie che abbia come contorno la linea su cui si calcola il lavoro di $\vec{E}$ (analogamente a quanto mostrato nella Fig ED2). Anche in questo caso alle cariche, sorgenti del campo elettrostatico, occorre aggiungere una nuova classe di sorgenti di $\vec{E}$: i campi $\vec{B}$ variabili nel tempo:
$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$

Le equazioni di Maxwell

Le proprietà di $\vec{E}$ e $\vec{B}$, dopo le modifiche introdotte da Maxwell e Faraday sono dunque:

1') $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\oint \vec{B} \cdot \vec{n}dS$

2) $\oint \vec{E} \cdot \vec{n}dS = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

3) $\oint \vec{B} \cdot \vec{n}dS = 0$

4') $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0\left(i + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\oint \vec{E} \cdot \vec{n}dS\right)$

Queste equazioni, note come equazioni di Maxwell, riassumono le proprietà dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ su una carica elettrica q. Come abbiamo visto, la presenza di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si manifesta come una forza agente su q che complessivamente vale:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

ed è la somma della forza elettrostatica e della forza di Lorentz. Le equazioni di Maxwell creano legami fortissimi fra $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Supponiamo infatti che, per qualunque ragione, ad es. $\vec{E}$ vari nel tempo (è quello che accade ad esempio, ogni volta che si accende o si spegne un circuito elettrico). Le variazioni di $\vec{E}$ provocheranno una variazione del suo flusso $\Phi(\vec{E})$ e questo genererà un campo $\vec{B}$. Se questo $\vec{B}$, come spesso accade, dipende anche lui dal tempo, le variazioni del suo flusso $\Phi(\vec{B})$ daranno luogo a un nuovo campo elettrico $\vec{E}$ (questa volta non conservativo, come si vede dalla 1'), dove il lavoro di $\vec{E}$ su un percorso chiuso è nullo solo se non c'è variazione del flusso di $\vec{B}$), e così via.

Onde elettromagnetiche

Il meccanismo di produzione di campi elettrici e magnetici che abbiamo sommariamente descritto trova la sua manifestazione più importante nelle cosiddette "onde elettromagnetiche". Una trattazione rigorosa richiede la soluzione delle equazioni di Maxwell nel vuoto (cioè con q=0 e i=0), per cui ci limiteremo ad illustrare il fenomeno in via qualitativa. Come tutte le onde, anche le onde elettromagnetiche rappresentano la propagazione di una perturbazione: in questo caso la perturbazione è costituita dalle variazioni temporali di $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Tali variazioni, inizialmente confinate in una zona limitata di spazio, si propagano progressivamente nello spazio circostante con una velocità di propagazione che può essere ricavata direttamente dalle equazioni di Maxwell e vale nel vuoto:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cong 3 \times 10^8 \, m/s \, .$$

Il fatto che tali valori coincidano con la velocità della luce nel vuoto, dimostra la natura elettromagnetica della luce. Le onde elettromagnetiche sono onde trasversali: i campi $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ sono perpendicolari alla direzione di propagazione, oltre che perpendicolari l'uno all'altro. Chiameremo "superficie d'onda" l'insieme dei punti dello spazio in cui ad es. il campo $\vec{E}$ ha un valore prefissato. Se le superfici d'onda sono piani paralleli fra loro e perpendicolari alla direzione di propagazione, si parla di "onda elettromagnetica piana". Se le superfici d'onda sono superfici sferiche concentriche, si parla di "onda elettromagnetica sferica". In quest'ultimo caso l'origine della perturbazione è un singolo punto dello spazio (Fig OM1)

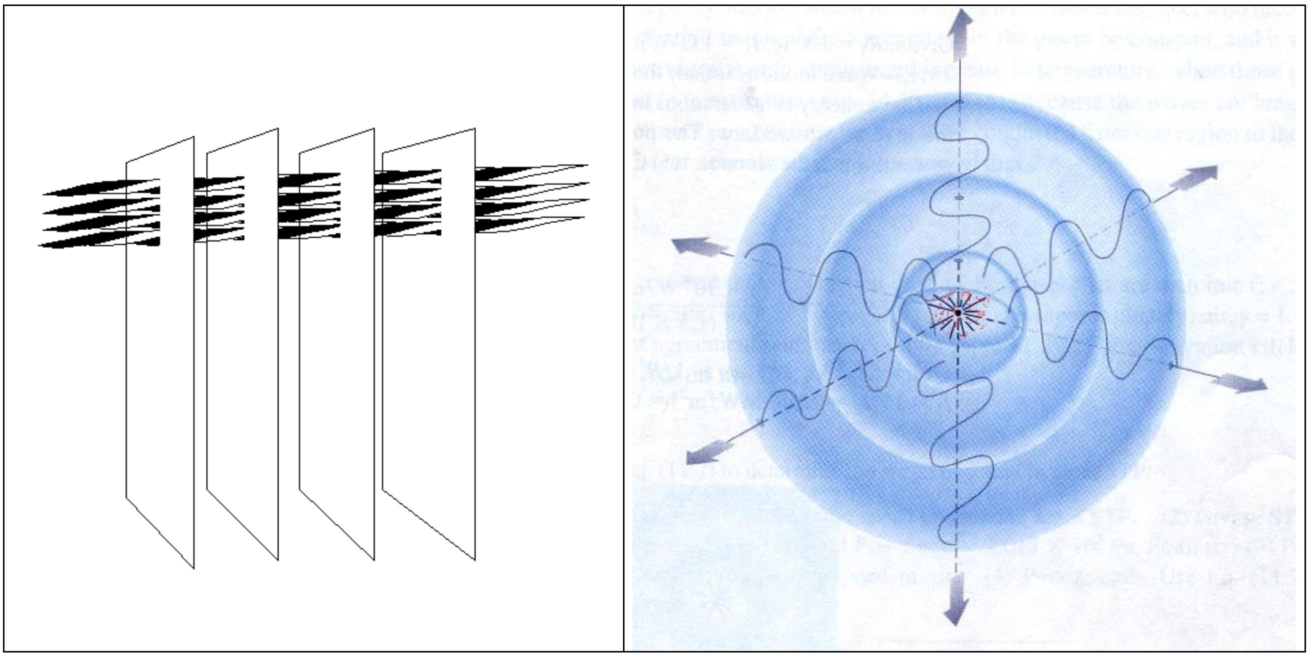

Fig OM1 In un’onda elettromagnetica piana i punti in cui E ha lo stesso valore sono piani perpendicolari a v, in un’onda sferica sono superfici sferiche concentriche, mentre v ha in ogni punto direzione radiale.

In un’onda elettromagnetica piana i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono, in ogni punto dello spazio, proporzionali l’uno all’altro

$\vec{E} = c\vec{B}$.

Se si immagina di visualizzare a un istante fissato la struttura dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$, si ottiene la situazione mostrata in Fig OM2, in cui $\vec{E}$, $\vec{B}$ e la direzione di propagazione costituiscono una terna destrorsa

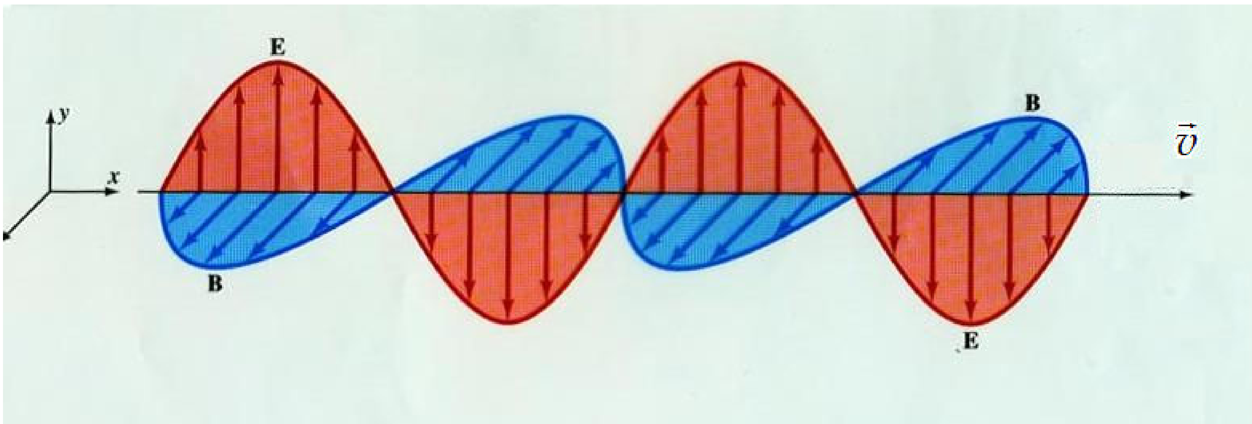

Fig OM2. In un'onda piana $\vec{B}$, $\vec{E}$ e la direzione di propagazione dell'onda sostituiscono una terna destrorsa. Inoltre $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono proporzionali.

Il fatto che $\vec{E}$ (e $\vec{B}$) sia perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda, vuol dire che la direzione di $\vec{E}$ può essere una qualunque di quelle giacenti su un piano perpendicolare alla direzione di propagazione. In generale, la direzione di $\vec{E}$ varia nel tempo (sempre perpendicolare alla direzione di propagazione) in modo irregolare.
Un'onda si dice "polarizzata linearmente" se la direzione di $\vec{E}$ non cambia nel tempo (e quindi neppure quella di $\vec{B}$). Il campo $\vec{E}$ cioè varia continuamente la propria intensità (cresce, diminuisce, si annulla, si inverte, etc.) ma il vettore rappresentativo mantiene sempre la stessa direzione.
Un'onda si dice "polarizzata circolarmente" se la direzione di $\vec{E}$, al trascorrere del tempo ruota con velocità angolare costante attorno alla direzione di propagazione.
Si può dimostrare che un'onda polarizzata circolarmente può essere descritta come la sovrapposizione di due onde polarizzate linearmente lungo due direzioni ortogonali.