

Elettrostatica

Le forze gravitazionali costituiscono una delle categorie fondamentali delle forze presenti in natura. Esse si esercitano fra due oggetti dotati di massa e hanno la caratteristica di essere sempre attrattive.

Un'altra categoria fondamentale di forze è quella delle forze elettromagnetiche : esse sono responsabili della struttura della materia come noi la conosciamo. Gli atomi sono costituiti da elettroni e nuclei che interagiscono mediante forze elettriche; la struttura dei cristalli dipende dalle forze elettriche che si esercitano fra gli atomi.

Causa di queste interazioni è una proprietà diversa dalla massa, la cosiddetta carica elettrica: sperimentalmente si verifica che esistono due tipi di carica elettrica, convenzionalmente chiamati positiva e negativa. L'esistenza di due tipi di cariche fa sì che le forze elettromagnetiche possano essere attrattive o repulsive, poiché cariche dello stesso tipo si respingono, mentre cariche di tipo opposto si attraggono. Le dimensioni degli oggetti sono la conseguenza di questo equilibrio fra attrazioni e repulsioni.

Chiameremo forze elettriche le forze che si esercitano fra corpi carichi in quiete, e forze magnetiche quelle che si esercitano fra cariche in moto. Poiché il concetto di quiete o moto dipende dal sistema di riferimento adottato, l'interazione elettrica osservata in un sistema di riferimento fra particelle cariche in quiete potrà venire descritta come interazione magnetica in un sistema di riferimento rispetto a cui le particelle sono in moto. Per questa ragione le forze elettriche e le forze magnetiche non sono rigidamente separabili e si preferisce parlare di forze elettromagnetiche. L'elettrostatica si occupa delle forze fra particelle cariche in quiete o in moto con velocità abbastanza piccola da rendere trascurabile l'interazione magnetica.

La legge di Coulomb

Nel 1785 Coulomb verificò che la forza che si esercita fra due cariche puntiformi q_1 e q_2 vale in modulo,

$$\vec{F} = \text{costante} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

dove $|q_1 q_2|$ è il valore assoluto del prodotto delle cariche e r la loro distanza.

Il valore della costante dipende dal sistema di unità di misura scelto e dal mezzo interposto fra le due cariche. Nel S.I. l'unità di misura della carica è il Coulomb (C), che può essere definito sulla base della carica e dell'elettrone, pari a

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

(la carica dell'elettrone è convenzionalmente scelta come negativa). In questo sistema di unità di misura, le dimensioni della costante sono:

$$[\text{costante}] = N \cdot m^2 / C^2$$

Se il mezzo interposto fra le due cariche è il vuoto, il valore della costante è

$$\text{costante} = 9.0 \times 10^{-9} \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

Per semplificare alcune formule dell'elettrostatica si usa esprimere la costante relativa al vuoto nella forma

$$\text{costante} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

dove ϵ_0 prende il nome di costante dielettrica (o permittività elettrica) del vuoto e vale

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Con queste notazioni, la legge di Coulomb relativa a due cariche puntiformi nel vuoto si scrive

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

con F attrattiva se q_1 e q_2 hanno segno opposto e repulsiva se q_1 e q_2 hanno lo stesso segno.

Se il mezzo in cui si trovano le cariche q_1 e q_2 non è il vuoto, la legge di Coulomb si scrive:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

dove K è un numero puro che prende il nome di costante dielettrica relativa del mezzo interposto fra le cariche. Per l'acqua a 20 C $K = 80.4$.

Il campo elettrico

La legge di Coulomb esprime la forza che si esercita fra due cariche a distanza r . Come la legge di gravitazione, che esprime la forza che si esercita fra due masse a una certa distanza, la legge di Coulomb descrive le caratteristiche della cosiddetta "azione a distanza". In questo schema concettuale, la forza che si esercita su una carica dipende dalla posizione di una seconda carica. Si può tuttavia riformulare la legge di Coulomb in modo che la forza che agisce su una carica dipenda dalla posizione di tale carica.

Consideriamo a tal fine l'interazione fra due cariche puntiformi q e Q e scegliamo (Fig E1) un sistema di riferimento in cui la carica Q sia nell'origine

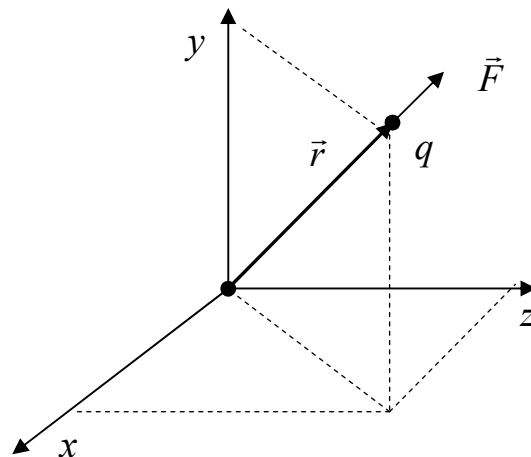


Fig E1 La forza che si esercita su q dipende dalla sua posizione \vec{r} . Viene mostrato il caso di interazione repulsiva

La forza F che Q esercita su q si può scrivere (in modulo, direzione e verso)

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

dove $\frac{\vec{r}}{r}$ è un versore diretto come il raggio r che esprime la posizione di q . Questa equazione può risciversi

$$\vec{F} = q \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \right] \quad (x)$$

e può essere letta nel seguente modo: la presenza di Q modifica le proprietà dello spazio circostante, nel senso che, in assenza di Q , la carica q in r non risentirebbe di alcuna forza. La presenza di Q rende lo spazio circostante sede di un “campo di forze” nel senso che la carica q risente di una forza che dipende dalla sua posizione. Questa proprietà dello spazio, dovuta alla presenza di Q , si chiama “campo elettrico” e la (x) si scrive

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (xx)$$

dove $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

è il campo elettrico dovuto a Q , che esprime quantitativamente le proprietà che lo spazio assume a causa della presenza di Q .

Se la carica Q anziché essere nell’origine è in un punto R (Fig E2), la (x) si generalizza in

$$\vec{F} = q \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{R}|^2} \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|} \right]$$

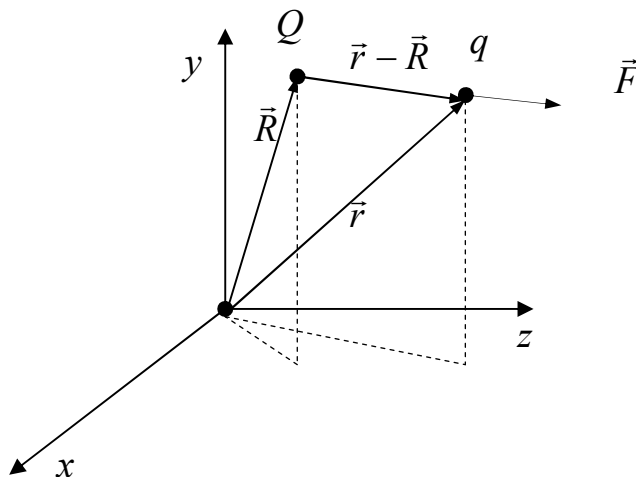


Fig E2. La forza \vec{F} (supposta repulsiva) che una carica Q in R esercita su una carica q in r

$$\text{con } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{R}|^2} \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|}$$

Nel caso che siano presenti n cariche Q_1, Q_2, \dots, Q_n rispettivamente nei punti R_1, R_2, \dots, R_n , il campo elettrico complessivo è la somma vettoriale dei campi dovuti a ciascuna carica

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) + \dots + \vec{E}_n(\vec{r})$$

$$\text{con } \vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{R}_1|^2} \frac{\vec{r} - \vec{R}_1}{|\vec{r} - \vec{R}_1|}$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{R}_2|^2} \frac{\vec{r} - \vec{R}_2}{|\vec{r} - \vec{R}_2|}$$

$$\vec{E}_n(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{R}_n|^2} \frac{\vec{r} - \vec{R}_n}{|\vec{r} - \vec{R}_n|}$$

e la forza che agisce su q è

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

Di qui si vede che se $q=1C$ $\vec{F} = \vec{E}$, per cui il campo elettrico può anche essere definito come la forza che agisce su una carica unitaria “esploratrice”, una carica cioè che rivela e misura il campo \vec{E} attraverso la forza che agisce su di esse quando viene posta in varie posizioni \vec{r} .

La formulazione della legge di Coulomb in termini di campo è del tutto equivalente a quella che fa riferimento all’azione a distanza.

In elettrostatica non esistono vantaggi sostanziali, ma, come vedremo il concetto di campo è suscettibile di generalizzazioni ed estensioni impensabili in uno schema di azione a distanza. Per queste ragioni esso è stato introdotto fin d’ora.

Rappresentazione del campo elettrostatico

Abbiamo visto che si può parlare di “campo” ogni volta che una zona dello spazio possiede delle proprietà che si manifestano come una forza che agisce su una particella carica.

L’intensità, la direzione e il verso di questa forza dipendono dalla posizione r in cui viene posta la particella esploratrice di carica q, cioè

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

$$\text{e poiché } \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$$

cioè le caratteristiche del campo (intensità, direzione e verso) variano da punto a punto. Queste caratteristiche possono essere rappresentate, come originariamente proposto da Faraday, mediante le cosiddette “linee di forza”.

Una linea di forza è una curva orientata dello spazio che ha come tangente in ogni punto il vettore campo elettrico in quel punto (Fig E3)

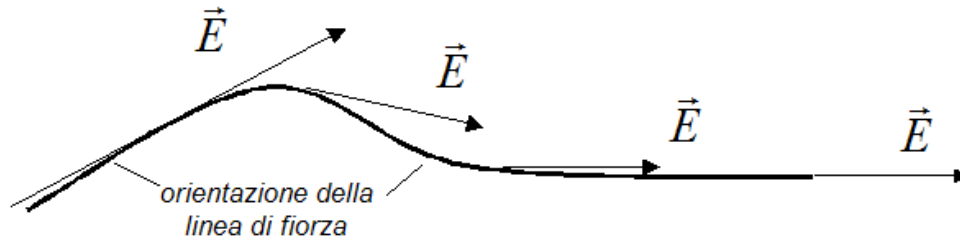


Fig E3. Il campo elettrico è tangente a ogni punto di una linea di forza

Naturalmente esistono infinite linee di forza in una zona di spazio in cui sia presente un campo elettrico. Di solito basta disegnarne solo alcune per avere una rappresentazione intuitiva dell'andamento di $E(r)$, come mostrato in Fig E4.

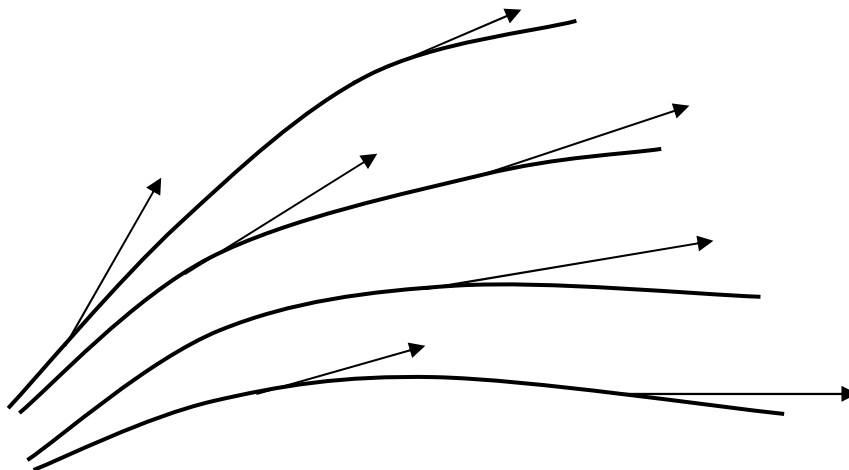


Fig E4. Bastano poche linee di forza per mostrare l'andamento di \vec{E}

Se la rappresentazione del campo mediante linee di forza mostra intuitivamente e globalmente l'andamento di \vec{E} in termini di direzione e verso, non dice nulla in merito alle sue variazioni di intensità.

Occorre dunque completare la rappresentazione introducendo un secondo criterio, sempre dovuto a Faraday, in base al quale l'intensità del campo è proporzionale alla densità delle linee di forza. Dove cioè le linee di forza si avvicinano, il campo è più intenso di dove si allontanano. Ad esempio, nella Fig. E4, il campo nella zona a sinistra è più intenso che non nella zona di destra dove le linee di forza si allontanano.

La Fig. E5 mostra, in termini di linee di forza, i campi dovuti ad alcune distribuzioni di carica. Si noti che le linee di forza hanno origine dalle cariche positive e terminano nelle cariche negative.

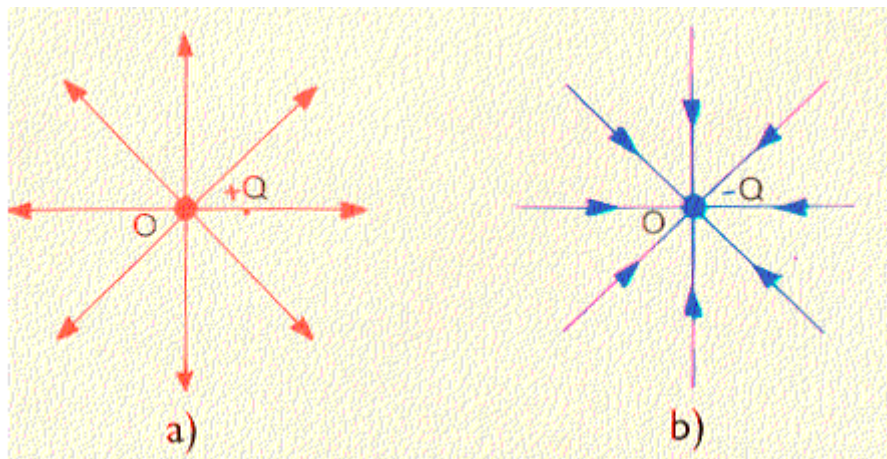


Fig. E5 Campi elettrici dovuti ad alcune distribuzioni di cariche.

Lavoro del campo elettrico

Abbiamo già introdotto in meccanica il concetto di lavoro compiuto da un campo di forze. In particolare abbiamo definito il lavoro infinitesimo:

$$dL = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Ora, essendo $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$ si ha

$$dL = q\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

La quantità $dL_E = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

Prende il nome di “lavoro infinitesimo del campo elettrico” ed è ovviamente proporzionale al lavoro compiuto dal campo di forze sulla carica q :

$$dL = qdL_E$$

Poichè la forza di Coulomb è conservativa, il lavoro dL può essere espresso come l'opposto della variazione di energia potenziale

$$dL = -dV$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

Pertanto

$$dL_E = \frac{dL}{q} = -\frac{dV}{q}$$

$$= d\left(-\frac{V}{q}\right) = dU$$

avendo posto

$$U = -\frac{V}{q}$$

La quantità U prende il nome di “potenziale del campo elettrico” e il risultato appena ottenuto mostra che il lavoro del campo elettrico è uguale alla variazione di potenziale.

Questo risultato vale anche nel caso in cui il campo elettrico sia dovuto a una qualunque distribuzione di cariche. In questo caso il potenziale U è la somma dei potenziali dei campi elettrici generati dalle singole cariche. La validità di queste conclusioni è limitata all'elettrostatica. Si possono estendere questi risultati al caso in cui la particella di carica q si sposti da una posizione iniziale \vec{r}_i a una posizione finale \vec{r}_f .

Indipendentemente dalla traiettoria seguita, il lavoro compiuto dal campo di forze è

$$L = V(\vec{r}_i) - V(\vec{r}_f)$$

e quello compiuto dal campo elettrico

$$L_E = \frac{V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)}{q} = U(\vec{r}_f) - U(\vec{r}_i)$$

Poiché l'energia potenziale nel SI si misura in J e la carica q in C, l'unità di misura del potenziale del campo elettrico è il J/C, che prende il nome di Volt (V):

$$1V = 1J/C$$

Concludiamo osservando che il valore assoluto del potenziale U in un punto \vec{r} non ha alcun significato fisico. Ciò che è fisicamente (cioè, sperimentalmente) determinabile è il lavoro del campo elettrico (quello che ad es, viene fatturato nella bolletta per la fornitura di energia elettrica) dunque la differenza di potenziale.

Dipolo elettrico

A partire dalla definizione di campo elettrico dovuto a una carica puntiforme Q

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

e del corrispondente potenziale

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

si può, in linea di principio, calcolare campo e potenziale dovuti a una qualunque distribuzione di carica, ma, in pratica, questi calcoli possono risultare estremamente complicati.

Capita spesso, tuttavia, che la conoscenza dettagliata del campo o del potenziale in ogni punto dello spazio non sia particolarmente interessante, essendo sufficiente la loro conoscenza a distanze relativamente grandi dalla distribuzione di carica. Questo accade, ad esempio, quando si parla dell'interazione fra atomi e molecole. Si consideri il caso di uno ione, ad esempio Na^+ : esso è costituito da un nucleo di carica positiva pari a $1|e|$, (dove $|e|$ è il valore assoluto della carica dell'elettrone) concentrata in un volume di raggio dell'ordine di 10^{-15} m, e immersa in una nuvola di carica negativa, complessivamente pari a $10e$, distribuita su un volume di raggio dell'ordine di 10^{-10} m.

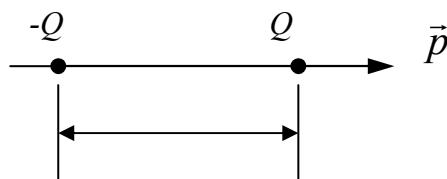
A grandi distanze, i dettagli della distribuzione di carica sono irrilevanti e il campo è sostanzialmente quello dovuto alla carica netta $|e|$, che è descritto dalla (1) con $Q = |e|$.

Molte molecole hanno carica totale nulla, ma la particolare distribuzione di carica (positiva e negativa) darà comunque luogo a un campo elettrico.

Consideriamo il caso di una distribuzione costituita da due cariche puntiformi $+Q$ e $-Q$ poste a distanza a . Questa distribuzione prende il nome di "dipolo elettrico" e il potenziale a distanza $r \gg a$ può essere facilmente calcolato introducendo il vettore \vec{p} detto "momento di dipolo elettrico", il cui modulo è:

$$|\vec{p}| = Qa$$

ed è diretto dalla carica $-Q$ alla carica $+Q$ (Fig E6)



Con riferimento alla Fig E7, il potenziale di dipolo elettrico in \vec{r} , vale

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^2}$$

Come si vede, il potenziale a grandi distanze non dipende dai dettagli della distribuzione di carica, ma solo da \vec{p} .

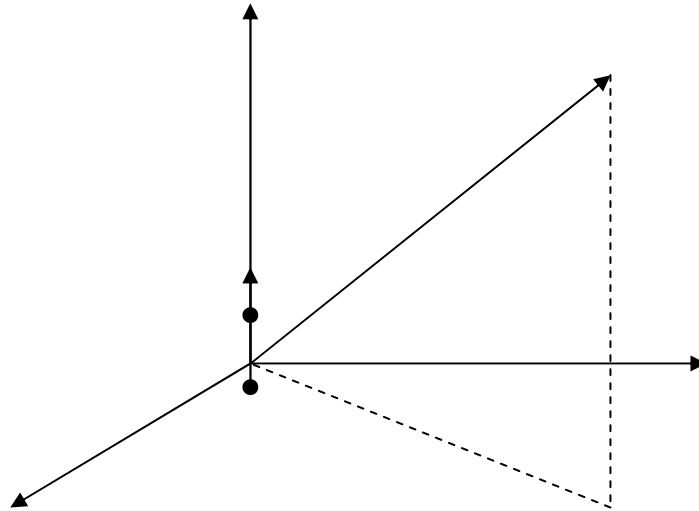


Fig E7 Per il calcolo del potenziale dovuto a un dipolo elettrico ($|\vec{r}| \gg a$)

Se ad esempio si raddoppiano i valori di $\pm Q$ e si dimezza la loro distanza, il potenziale a grandi distanze resta invariato. Il modulo $|\vec{p}|$ del momento di dipolo si misura, nel SI, in C·m. Ad esempio, la molecola d'acqua può essere approssimata con un dipolo il cui momento vale in modulo

$$|\vec{p}| = 6.2 \times 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}$$

ed è diretto come in Fig E8.

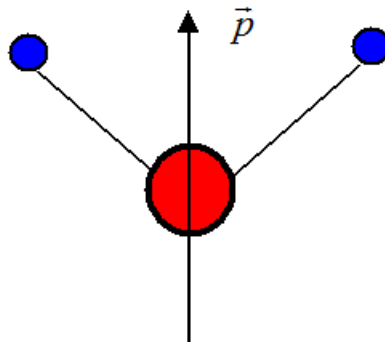


Fig E8 Il momento di dipolo elettrico di una molecola d'acqua

Se ora un dipolo elettrico viene immerso in un campo elettrico esterno \vec{E} uniforme (Fig E9), le forze che si esercitano sulle cariche $+Q$ e $-Q$, tenderanno a fare ruotare il dipolo in modo da allinearlo al campo. L'energia potenziale che il dipolo in tal caso possiede, vale:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

che è minimo per \vec{p} parallelo a \vec{E} .

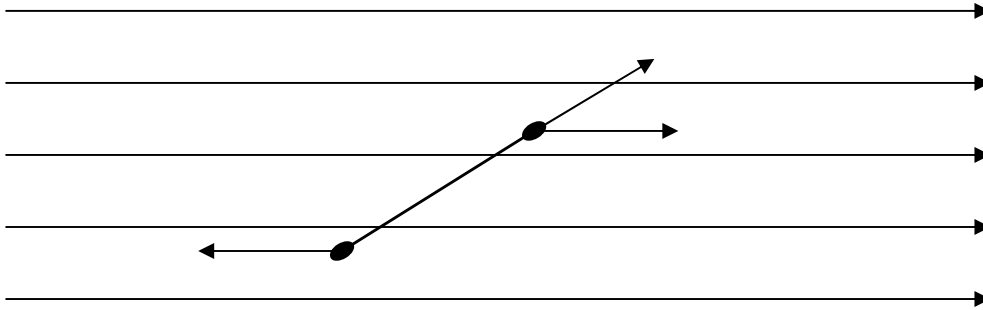


Fig E9 Un dipolo in un campo elettrico uniforme E tende a ruotare in modo da portare p parallelo a E

Il teorema di Gauss

Calcolare il campo elettrico dovuto a una distribuzione di carica sulla base dell'espressione derivata dalla legge di Coulomb può essere molto complicato. In condizioni di particolare simmetria può essere utilizzato il cosiddetto teorema di Gauss, la cui validità dipende sostanzialmente dal fatto che il campo elettrico di ogni carica puntiforme diminuisce con il quadrato della distanza. Consideriamo una superficie infinitesima dS all'interno di un campo elettrico e sia \vec{n} il versore ad essa normale. Se \vec{E} è il valore del campo elettrico nella posizione in cui si trova la superficie infinitesima dS (Fig E10), si definisce flusso infinitesimo del campo elettrico attraverso dS la quantità scalare

$$d\Phi \equiv \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E \cos \alpha dS$$

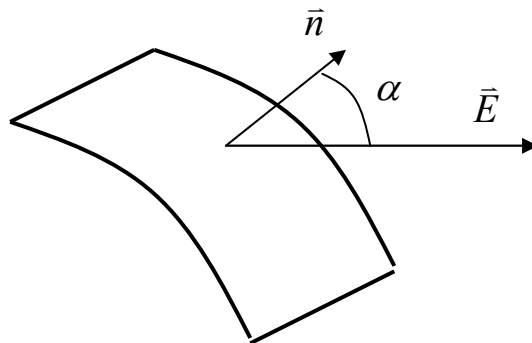


Fig E10 Flusso infinitesimo di E attraverso dS

Se ora consideriamo una superficie finita S , essa può essere sempre pensata come un insieme di infinite superfici infinitesime, per ciascuna delle quali abbiamo definito il flusso infinitesimo. Si chiama “flusso del campo elettrico attraverso la superficie S ” la somma degli infiniti flussi infinitesimi relativi alle superfici infinitesime che costituiscono dS , formalmente

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

dove \int_S denota la somma dei flussi infinitesimi (che sono quantità scalari) su tutti gli elementi dS che costituiscono S . Se la superficie S è una superficie chiusa si usa il simbolo

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

Il teorema di Gauss afferma che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla carica totale netta contenuta dentro la superficie, più precisamente:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{int}}$$

dove Q_{int} è la somma algebrica di tutte le cariche contenute all'interno della superficie.

Vediamo come si possa utilizzare il teorema di Gauss per il calcolo del campo elettrico. Supponiamo che una carica $Q > 0$ sia uniformemente distribuita in un volume di raggio R . Poiché la distribuzione di carica possiede simmetria sferica (essa cioè appare allo stesso modo quando venga ruotata attorno a qualunque asse passante per il centro) anche il campo da essa generato avrà la stessa simmetria. Il campo $\vec{E}(\vec{r})$ avrà dunque direzione radiale e il suo modulo dipenderà solo dalla distanza r dal centro (avrà cioè lo stesso valore su tutti i punti di una superficie sferica di raggio r) potremo quindi scrivere

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

dove $\frac{\vec{r}}{r}$ è il versore del raggio. Applichiamo ora il teorema di Gauss a una superficie sferica di raggio $r < R$. La normale ad ogni punto di questa superficie coincide con il raggio e quindi

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

per cui $\vec{E} \cdot \vec{n} = E(r) \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = E(r)$

Siccome in tutti i punti di questa superficie $E(r)$ ha lo stesso valore, il flusso sarà semplicemente dato dal prodotto del valore del campo per l'area della superficie sferica:

$$\Phi = E(r) 4\pi r^2$$

La carica contenuta entro la superficie sferica di raggio r , sarà una frazione della carica totale pari al rapporto fra il volume della sfera di raggio r e quello della sfera di raggio R , cioè

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = Q_{\text{int}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} Q = \frac{r^3}{R^3} Q$$

In base al teorema di Gauss dunque

$$\Phi = \vec{E}(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{r^3}{R^3} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

da cui

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} Q$$

Il campo E dunque cresce mano a mano che ci si allontana dal centro della distribuzione sferica (dove E=0). Se ora ripetiamo la stessa procedura per una superficie sferica di raggio $r > R$, troviamo che:

$$Q_{\text{int}} = Q$$

e quindi

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

cioè all'esterno della distribuzione di carica il campo è lo stesso che si avrebbe se tutta la carica Q fosse concentrata nel centro della sfera. La Fig E11 mostra graficamente il risultato ottenuto.

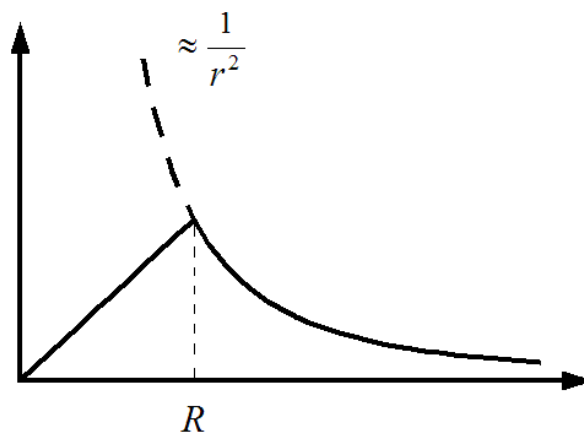


Fig E11 Andamento del campo elettrico dovuto a una distribuzione uniforme sferica di carica.

Conduttori

Nei conduttori (ad es. metalli) esistono degli elettroni liberi di muoversi. Ne consegue che l'esistenza di un campo elettrico in un qualunque punto interno a un conduttore provocherebbe una forza (e quindi un'accelerazione) sugli elettroni e verrebbero meno le condizioni di stabilità. Se ne conclude che, in elettrostatica, il campo elettrico all'interno di un conduttore è nullo.

Poiché $\vec{E} = 0$, anche il lavoro del campo elettrico è nullo. Se consideriamo due punti A e B del conduttore, allora:

$$U(B) - U(A) = \int_A^B \vec{E} d\vec{r} = 0$$

cioè tutti i punti di un conduttore sono allo stesso potenziale. Connettendo due conduttori con un filo metallico (esso pure conduttore), i due conduttori si portano allo stesso potenziale. Supponiamo ora di caricare un conduttore con una certa carica Q:

poiché all'interno del conduttore $\vec{E} = 0$, l'applicazione del teorema di Gauss a una qualunque superficie chiusa interna al conduttore (Fig E12) fornisce

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0$$

Quindi la carica contenuta entro ogni superficie chiusa interna al conduttore deve essere nulla: il che significa che, in un conduttore carico, le cariche si dispongono sulla superficie. Questo risulta resta valido nel caso di un conduttore cavo: le cariche statiche si raccolgono sulla superficie esterna

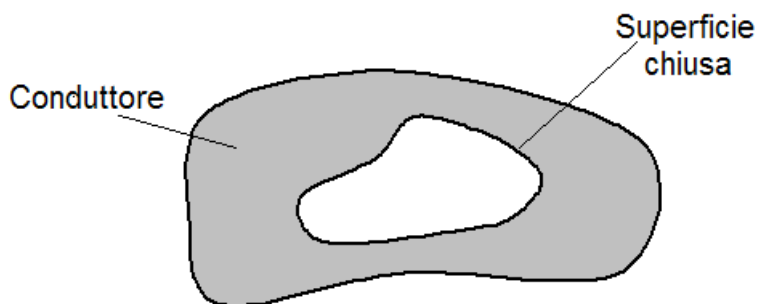


Fig E12 L'applicazione del teorema di Gauss a una qualunque superficie chiusa interna a un conduttore.

Applicando ripetutamente il teorema di Gauss si può vedere che il campo elettrico nelle immediate vicinanze di un conduttore è perpendicolare al conduttore e vale, in modulo:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

dove σ è la densità superficiale di carica (cioè la carica per unità di superficie) nella zona interessata (Fig E13)

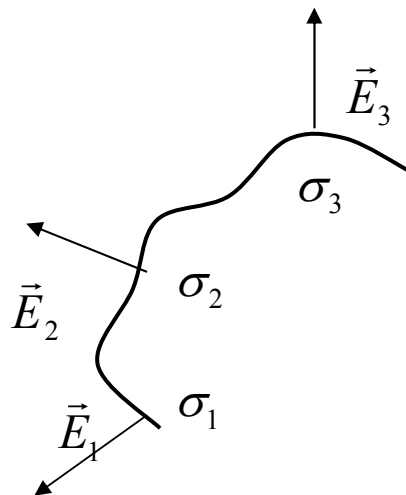


Fig E13 Nei punti vicini alla superficie di un conduttore carico, il campo è perpendicolare alla superficie e dipende dalla densità di carica nella zona immediatamente prossima.

Condensatori

Si chiama condensatore l'insieme di due conduttori isolati, uno dei quali possiede una carica positiva $+q$ e l'altro possiede una carica negativa $-q$ (le due cariche sono uguali in valore assoluto). I due conduttori sono detti le "armature" del condensatore.

Si suole indicare con V la differenza di potenziale (in valore assoluto) fra le armature e si definisce "capacità" del condensatore la quantità

$$C = \frac{q}{V}$$

Poiché si può dimostrare che V è proporzionale a q , se ne conclude che C dipende solo dalla geometria cioè dalla forma e dalla posizione relativa delle armature.

Nel SI le capacità si misurano in C/V; l'unità di misura è chiamata Farad (F) così definita:
 $1F=1C/V$

Nella pratica si usano condensatori di geometria piuttosto semplice. I più comuni sono:

- a) Condensatore piano (Fig E14): le armature sono due piastre parallele di area A poste a distanza d.

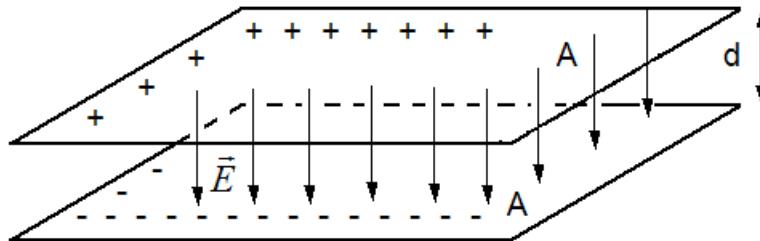


Fig E14 Condensatore piano

Il campo elettrico è praticamente uniforme nello spazio fra le armature e nullo altrove. Applicando il teorema di Gauss si può vedere che

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Mentre la capacità C risulta

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Che dunque è tanto maggiore quanto più grande è A e più piccola è d.

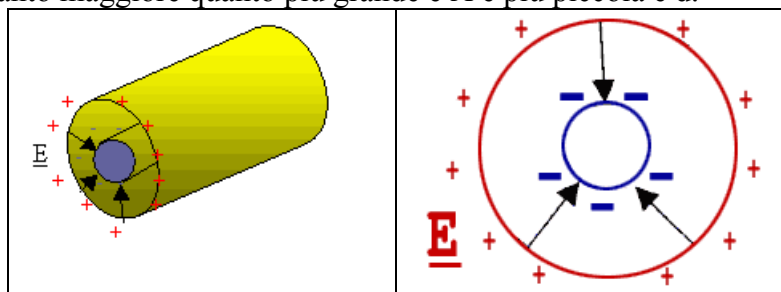


Fig E15 Condensatore cilindrico

- b) Condensatore cilindrico (Fig E15): le armature sono cilindri coassiali (di raggio r e R) di lunghezza L. Il campo elettrico è concentrato nella zona fra le armature e la capacità vale:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 LA}{\lg(R/r)}$$

Nelle applicazioni elettrotecniche un condensatore è indicato con il simbolo $\text{—}|\text{—}$. Spesso si utilizzano sistemi costituiti da due condensatori che possono essere collegati “in serie” o “in parallelo” (Fig E16).

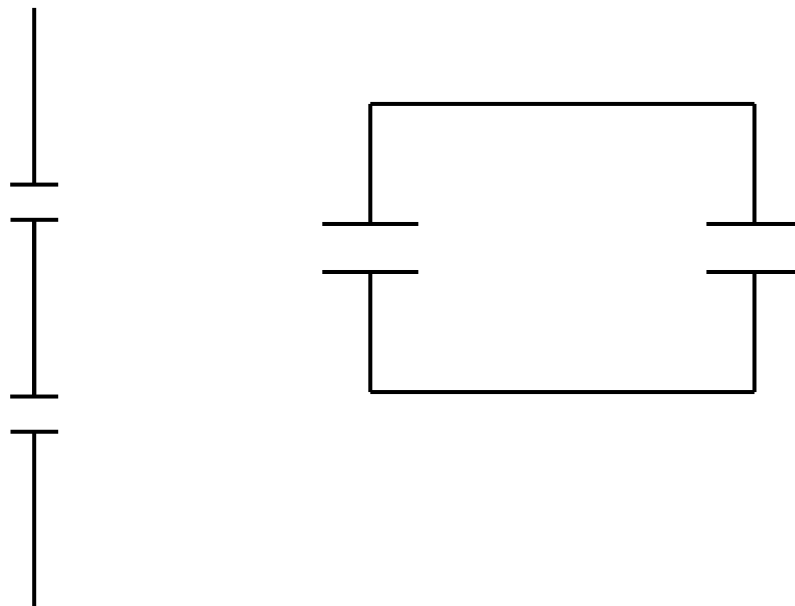


Fig E16 Schema di collegamento di due condensatori (a) in serie e (b) in parallelo.

Si può dimostrare che due condensatori in serie sono equivalenti a un unico condensatore di capacità complessiva

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

mentre due condensatori in parallelo sono equivalenti a un unico condensatore di capacità

$$C = C_1 + C_2$$

Energia accumulata in un condensatore

Supponiamo che fra le armature di un condensatore in cui sono depositate le cariche $+q$ e $-q$ ci sia una differenza di potenziale V . Se si sposta una quantità di carica infinitesima dq da una placca all'altra, si deve compiere un lavoro

$$dL = Vdq$$

ed essendo $V = q/C$, si ha

$$dL = \frac{qdq}{C}$$

Quindi il lavoro dipende solo dalla carica accumulata (q) e dalla capacità C che è una caratteristica geometrica indipendente da q .

Il lavoro totale necessario a caricare un condensatore inizialmente scarico ($q=0$) con una carica Q è quindi

$$L = \int_0^Q \frac{q dq}{C} = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

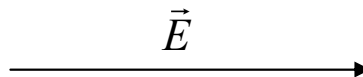
Poiché quando il condensatore è scarico non c'è campo elettrico fra le armature, mentre quando è carico è presente un campo elettrico, si può pensare al lavoro L come il lavoro necessario a stabilire un campo elettrico, e che tale lavoro corrisponde all'energia del campo elettrico. Questa energia viene ovviamente resa disponibile quando il condensatore viene scaricato.

Poiché $C = Q/V$, la () si può anche scrivere:

$$L = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$

Cenno ai dielettrici

Un materiale isolante è un materiale in cui non esistono elettroni liberi di muoversi. Le proprietà di un materiale isolante sono tuttavia influenzate dalla presenza di campi elettrici. Gli atomi infatti sono costituiti da un nucleo carico positivamente circondato da una "nuvola" di elettroni carichi negativamente. In presenza di un campo elettrico, sul nucleo agisce una forza diretta come il campo, mentre sugli elettroni una forza diretta in senso opposto. La nuova configurazione all'equilibrio che si crea mostra un eccesso di carica positiva nella direzione del campo e una di carica negativa in direzione opposta (Fig E16)



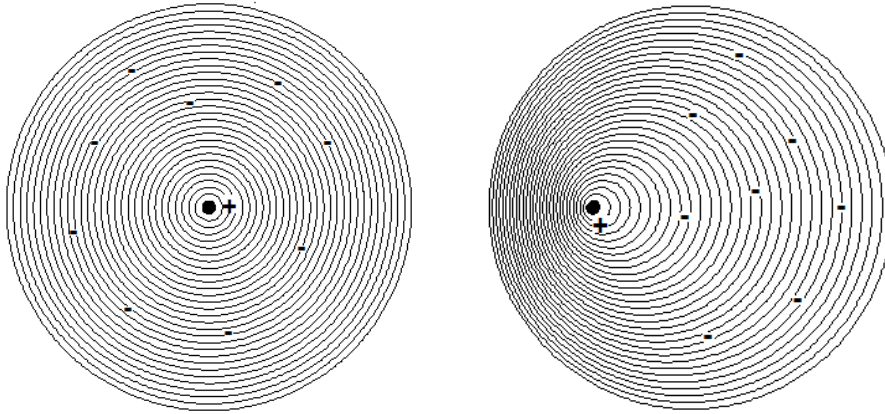


Fig E17 In Presenza di un campo elettrico la distribuzione di cariche positive e negative, originariamente simmetrica (a) mostra (b) un eccesso di carica positiva da un lato e negativa dall'altro.

L'atomo acquista in tal modo un momento di dipolo e si dice che il dielettrico è "polarizzato". Annullando il campo, il momento di dipolo (e quindi la polarizzazione del dielettrico) sparisce. Esistono tuttavia dei materiali le cui molecole possiedono un momento di dipolo anche in assenza di campo esterno (molecole "polari", come ad esempio l'acqua). Normalmente l'orientazione dei momenti di dipolo delle varie molecole è completamente casuale (in virtù dei moti di agitazione termica) cosicché il valore medio del momento di dipolo in ogni elemento di materiale è zero. In presenza di un campo elettrico tuttavia, i momenti di dipolo tendono a orientarsi nella direzione del campo (Fig E18) e si raggiunge una nuova situazione di equilibrio in cui l'orientazione dei dipoli è prevalentemente (non completamente, a causa dell'agitazione termica) nella direzione del campo

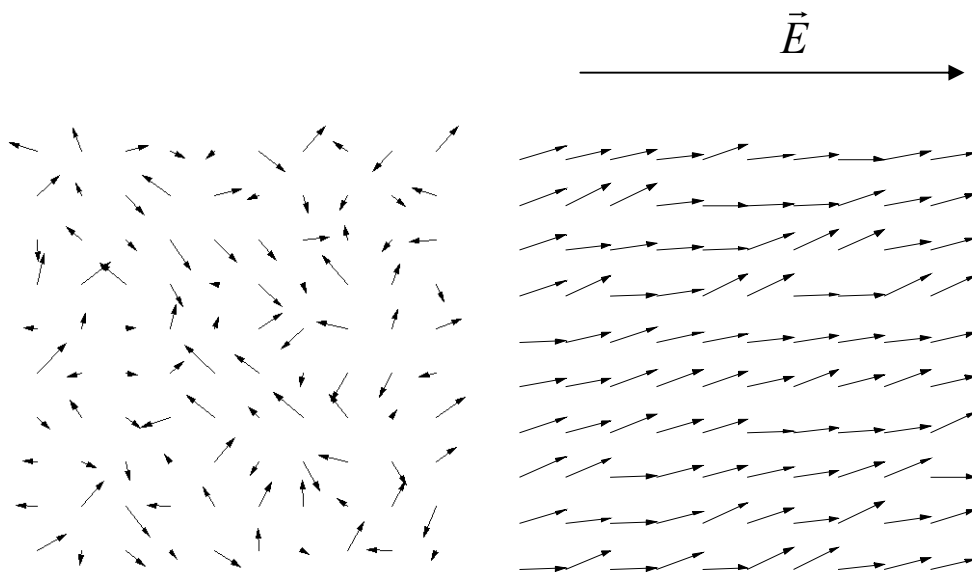


Fig E18 In assenza di campo i momenti di dipolo sono orientati a caso (a), mentre in presenza di un campo elettrico sono prevalentemente orientati nella direzione di E

Anche in questo caso si dice che il dielettrico è stato polarizzato. Consideriamo l'effetto di introdurre un materiale isolante fra le armature di un condensatore che supporremo piano per semplicità (Fig E19). L'orientazione dei dipoli nella direzione del campo (che, nella Fig E19 è, per semplicità supposta completa) crea un eccesso di carica positiva su una faccia del dielettrico e negativa sull'altra, il che provoca l'apparire di un nuovo campo elettrico E , all'interno del dielettrico, diretto in verso opposto al campo esterno E .

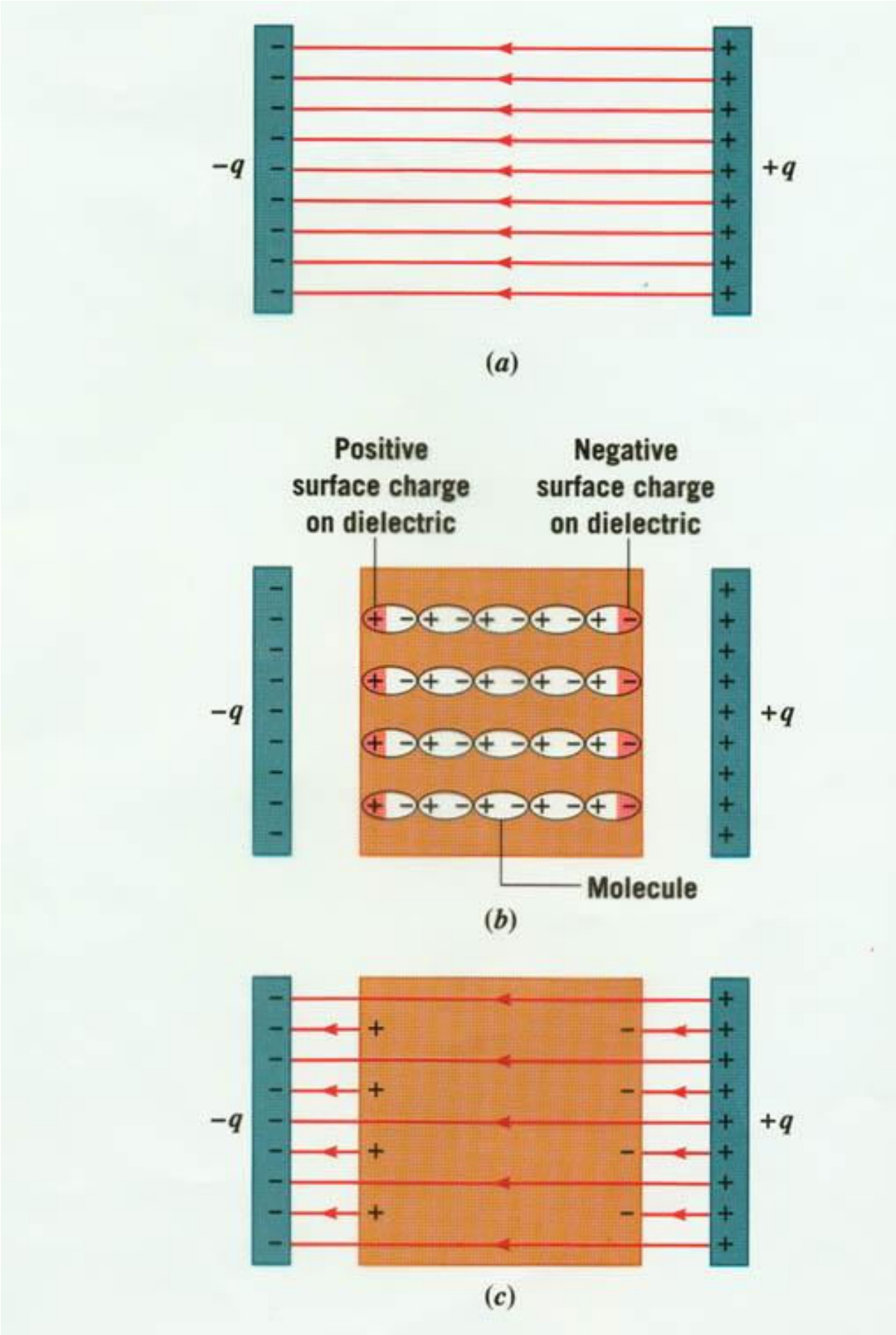


Fig E19. La polarizzazione del dielettrico crea un nuovo campo E' opposto a E

Il campo totale nel dielettrico fra le armature del condensatore è quindi

$$\vec{E}_D = \vec{E} + \vec{E}'$$

e

$$E_D = E - E' < E$$

Ne consegue che la differenza di potenziale fra le armature in presenza di un dielettrico è minore di quella che si avrebbe se fra le armature ci fosse il vuoto!

$$V_D = E_D d < Ed = V$$

Il rapporto

$$K = \frac{V}{V_D} > 1$$

prende il nome di “costante dielettrica relativa del materiale” e il suo valore dipende esclusivamente dalla natura del dielettrico. Nel caso dell’acqua $K=80$. In presenza di dielettrico, la capacità del condensatore diventa:

$$C_D = \frac{Q}{V_D} > \frac{Q}{V} = C$$

Cioè la presenza di un dielettrico, aumenta, a parità di geometria la capacità del condensatore.

La corrente elettrica continua

Consideriamo un filo costituito da un materiale conduttore di sezione uniforme A . Se agli estremi viene applicata una differenza di potenziale (ad esempio connettendoli ai poli di una batteria) all'interno del conduttore si crea un campo elettrico \vec{E} . Su ogni elettrone libero presente nel conduttore agirà una forza $-e\vec{E}$ (dove e è in valore assoluto il valore della carica dell'elettrone) che, in base al secondo principio della dinamica, accelererà gli elettroni nel verso opposto al campo. Pertanto gli elettroni cominceranno a muoversi lungo il filo. Detta dq la quantità di carica che attraversa una sezione del filo nel tempo dt si definisce "intensità di corrente elettrica" la quantità

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Si noti che la quantità dq essendo dovuta al moto degli elettroni sarebbe negativa: per evitare di avere a che fare con correnti negative, si assume, convenzionalmente, che, anziché essere gli elettroni che si spostano, sia un'equivalente quantità di carica positiva che si sposta in senso opposto: in altri termini, si assume che la corrente elettrica sia dovuta al moto di cariche positive, cosicché il verso della corrente elettrica dovuto alla presenza di un campo \vec{E} è lo stesso del campo (dall'estremo a potenziale maggiore verso quello a potenziale minore).

Esistono anche casi (soluzioni elettrolitiche) in cui la corrente è dovuta sia al moto di cariche positive sia a quello di cariche negative: in questo caso la corrente complessiva è la somma di quelle dovute al moto dei due tipi di cariche. Infatti la quantità di carica che attraversa una sezione della soluzione è pari al flusso di cariche positive in un verso più quello di cariche negative in verso opposto. Data la convenzione sul verso della corrente, quest'ultimo viene considerato un ulteriore flusso di cariche positive. Si chiama "densità di corrente" la corrente che attraversa nell'unità di tempo un'area unitaria: nel caso di un filo di sezione A

$$j = \frac{i}{A}$$

Vediamo ora, sempre nel caso del moto di cariche lungo un filo conduttore come le espressioni di i e j possano essere scritte in termini di proprietà microscopiche.

Supponiamo che il filo contenga N elettroni liberi per unità di volume e che ciascuno possieda una carica $+e$ (per evitare segni $-$, in accordo con la convenzione, già introdotta, di considerare il verso della corrente concorde con il moto delle cariche positive), Nel tempo dt (Fig CE1) attraverseranno una sezione di area A del filo tutti gli elettroni contenuti in un volume cilindrico di base A e altezza vdt dove v è la velocità con cui gli elettroni si muovono sotto l'azione del campo elettrico.

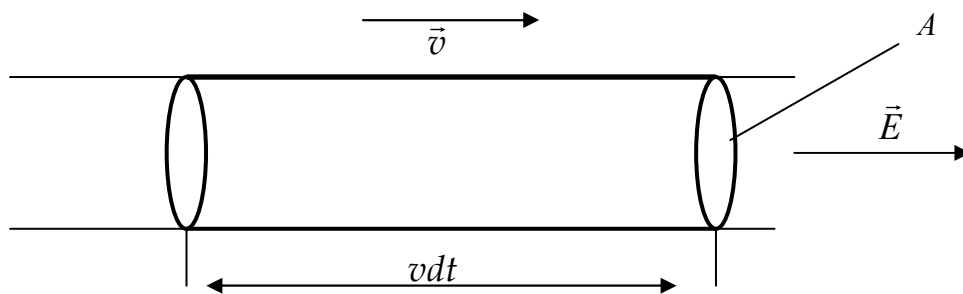


Fig CE1 Nel tempo dt gli elettroni percorrono una distanza pari a vdt . Quindi attraverseranno A tutti quelli che distano meno di vdt .

Tale numero vale

$$dn = NAvdt$$

e quindi la carica che attraversa A nel tempo dt è

$$dq = +edn = NeAvdt$$

ne segue che

$$i = \frac{dq}{dt} = NeAv$$

$$j = \frac{i}{A} = Nev$$

Se ne conclude che i e j sono proporzionali alla velocità v con cui si spostano gli elettroni. Nel S.I. l'unità di misura dell'intensità di corrente è l'Ampere (A) così definito:

$$1 A = 1 C/s$$

mentre la densità di corrente si misura in A/m^2

Resistenza

Abbiamo visto che i è proporzionale a v . Sotto l'azione del campo elettrico, le cariche subiscono un'accelerazione pari a E/m_e (dove m_e è la massa dell'elettrone). Ne consegue che gli elettroni sotto l'azione di un campo elettrico E costante e uniforme si muovono con accelerazione costante e la loro velocità cresce continuamente nel tempo

$$v(t) = v_0 + \frac{eE}{m_e}t$$

(v_0 velocità degli elettroni all'istante $t = 0$ in cui viene applicato il campo)

Se ne conclude che applicando agli estremi di un filo una differenza di potenziale si dovrebbe generare una corrente che cresce continuamente nel tempo.

Sappiamo che non è così: quando si accende la luce in una stanza, dopo un brevissimo transitorio iniziale, la corrente che circola raggiunge un valore stazionario (se così non fosse, le lampadine diventerebbero sempre più brillanti fino a fulminarsi). Valore stazionario della corrente significa valore stazionario della velocità degli elettroni: in base al principio di inerzia questo vuol dire che la forza costante che agisce sugli elettroni è nulla. Deve quindi esistere un'altra forza che annulla quella (eE) dovuta al campo elettrico. In effetti gli elettroni non possono muoversi liberamente entro un conduttore, in quanto il loro moto avviene attraverso zone in cui sono presenti gli elettroni degli atomi che costituiscono il materiale conduttore. Gli elettroni di conduzione urtano continuamente gli elettroni atomici e come effetto si ha una continua riduzione della loro velocità dovuta al campo elettrico. Si dice che il materiale presenta una "resistenza elettrica".

L'effetto della resistenza è dunque quello di rendere stazionario il valore della velocità di spostamento degli elettroni: questo valore stazionario dipende dal valore del campo presente nel conduttore ed è tanto maggiore quanto maggiore è E .

La legge di Ohm

In molti materiali conduttori, detti "conduttori ohmici", la dipendenza dal campo E è una semplice proporzionalità

$$j = \sigma E$$

dove σ si chiama "conducibilità elettrica" ed è una costante. La () prende il nome di "legge di Ohm" e può essere scritta in una forma più utile per le applicazioni.

Consideriamo (Fig. CE2) un tratto di filo conduttore di lunghezza l e sezione A ai cui estremi sia applicata una differenza di potenziale V

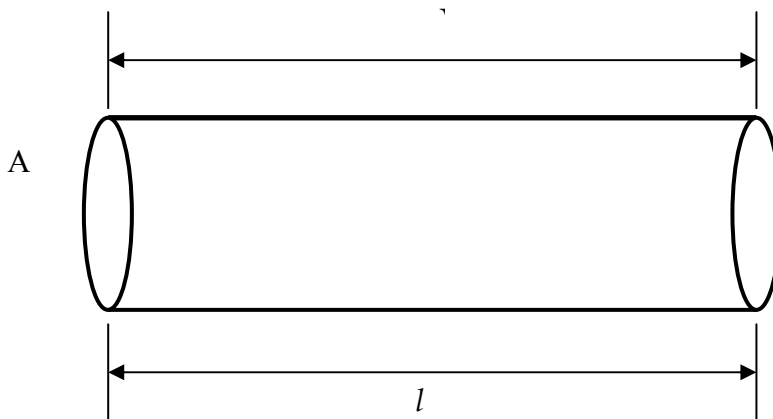


Fig CE2. Un tratto di filo conduttore cui è applicata una differenza di potenziale V

All'interno del tratto di filo, il campo elettrico E vale

$$E = V / l$$

per cui

$$j = \sigma E = \sigma V / l$$

e

$$i = jA = \frac{\sigma A}{l} V$$

da cui

$$V = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A} i$$

La quantità $\frac{1}{\sigma}$ viene denotata con ρ

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

e si chiama resistività, per cui

$$V = \rho \frac{l}{A} i$$

$$V = Ri$$

avendo posto

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

R prende il nome di “resistenza elettrica”: il suo valore dipende dalla natura del materiale di cui è costituito il filo (ρ) e dalla sua geometria (l/A)

L'equazione (1) è nota come “legge di Ohm” e da essa si desume l'unità di misura della resistenza, che, nel S.I. prende il nome di Ohm (Ω).

$$1\Omega = 1V/A$$

A parità di geometria, la resistenza di un tratto di circuito dipende dal materiale di cui è costituito il filo. La Tab I riporta i valori delle resistività ρ per alcuni materiali.

Tabella I. Valori della resistività per alcuni materiali

Materiale	Resistività ($\Omega \cdot m$)
Acciaio	1.8×10^{-7}
Argento	1.6×10^{-8}
Rame	1.7×10^{-8}
Tungsteno	5.5×10^{-8}
Grafite	8×10^{-6}

La resistenza di un tratto di circuito dipende dalla temperatura: ad esempio nel filamento di una lampadina a incandescenza esso è molto maggiore alla temperatura di esercizio che non alla temperatura ambiente.

Energia dissipata in un resistore

Abbiamo visto che la resistenza rende conto del fatto che la velocità, e quindi l'energia cinetica, degli elettroni non aumenti continuamente sotto l'azione del campo elettrico. In altri termini, la presenza della resistenza sottrae all'elettrone l'energia che gli fornirebbe il campo elettrico. Tale energia viene dissipata nel conduttore sotto forma di calore (calore di Joule o effetto Joule).

Possiamo calcolare facilmente il valore dell'energia dissipata per unità di tempo. Se una carica infinitesima dq attraversa un tratto di conduttore ai capi del quale è stabilita una differenza di potenziale V , la sua energia elettrostatica diminuisce di Vdq , mentre la sua energia cinetica resta costante, poiché, come abbiamo visto, la presenza della resistenza fa sì che gli elettroni si muovano con velocità di regime costante.

Quindi l'energia totale della carica dq diminuisce di Vdq e, per il primo principio della termodinamica, tale energia deve uscire dal filo sotto forma di calore dQ .

$$dQ = Vdq$$

Ne consegue che il calore prodotto per unità di tempo, cioè la potenza P vale:

$$P = \frac{dQ}{dt} = V \frac{dq}{dt} = Vi$$

che può anche scriversi, in base alla legge di Ohm

$$P = Vi = i^2 R = \frac{V^2}{R}$$

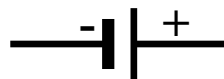
Dunque, se si mantiene costante la differenza di potenziale ai capi di un tratto di circuito ($V = \text{costante}$) P è inversamente proporzionale a R , mentre, se si mantiene costante la corrente P è direttamente proporzionale a R .

Pile e forza elettromotrice

Abbiamo visto che le cariche (positive) nei conduttori si muovono dai punti a potenziale maggiore verso quelli a potenziale minore, perdendo così energia. Se si vuole mantenere una corrente in un circuito occorre quindi inserire un elemento che restituisca alle cariche l'energia persa, riportandole a un'energia elettrostatica più alta.

Tale elemento è detto "generatore di differenza di potenziale" o "generatore di tensione" o "batteria" o, più comunemente "pila".

Consideriamo (Fig CE3) un semplice circuito e immaginiamo che tutta la resistenza sia concentrata in un tratto cd . Indicheremo il generatore con il simbolo



dove - e + denotano i punti a potenziale minore e maggiore rispettivamente

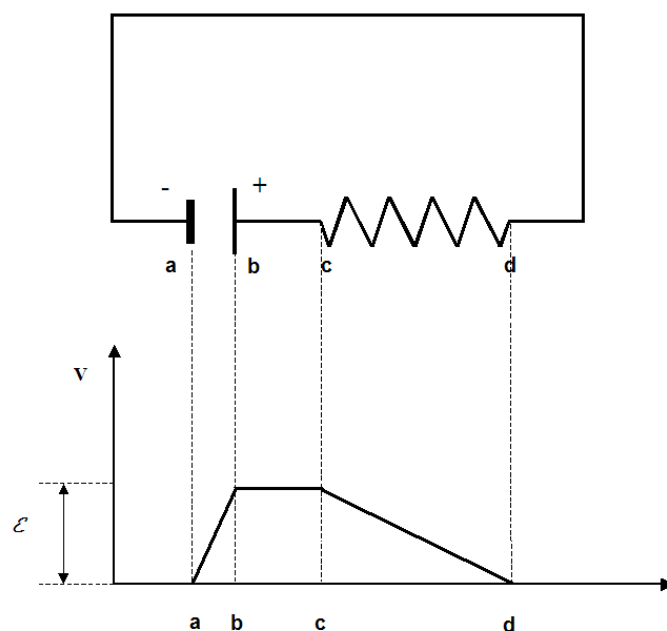


Fig CE3 (a) un semplice circuito resistivo; (b) diagramma del potenziale V corrispondente ai vari punti del circuito.

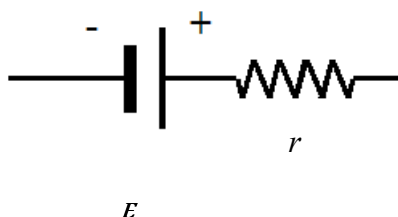
Una carica che si trovi in b possiede elevata energia elettrostatica che perde attraversando il resistore (tale energia perduta si manifesta come calore). La carica mantiene tale (basso) livello di energia elettrostatica finché giunge nel punto a (connettore a bassa energia potenziale del generatore, detto anche “polo negativo”). A questo punto il generatore compie lavoro sulla carica aumentandone l’energia potenziale, cosicché, quando giunge in b , la carica ha riacquisito l’originale (alto) livello di energia potenziale (si noti che, entro il generatore, la carica si muove da un punto a potenziale più basso a verso un punto a potenziale più alto).

Il lavoro compiuto dal generatore su una carica unitaria che lo attraversi prende il nome di “forza elettromotrice” e di solito si indica con il simbolo \mathcal{E} (Fig CE3 (b)). Quando la carica torna in a dopo aver attraversato R deve avere perso esattamente la stessa energia che le era stata fornita dal generatore, cioè

$$\mathcal{E} = i \cdot R$$

Dove i è la corrente che circola nel circuito.

In realtà i generatori possiedono una resistenza interna r che fa sì che l’aumento di potenziale fornito a una carica sia più basso di \mathcal{E} (Fig CE3 (b)). Un generatore è più correttamente rappresentato dal simbolo :



e la differenza di potenziale V agli estremi del generatore è

$$V = E - i \cdot r$$

Ne consegue che la (*) andrebbe più correttamente scritta

$$E - i \cdot r = i \cdot R$$

La correzione è irrilevante finché $r \ll R$, ma va tenuta presente nei casi in cui (a causa ad esempio dell'invecchiamento di una batteria) r cresce fino a diventare confrontabile con R .

Resistori in serie e in parallelo

Consideriamo (Fig CE 4) un circuito in cui siano inseriti due elementi di resistenza rispettivamente R_1 e R_2 (trascuriamo la resistenza interna del generatore).

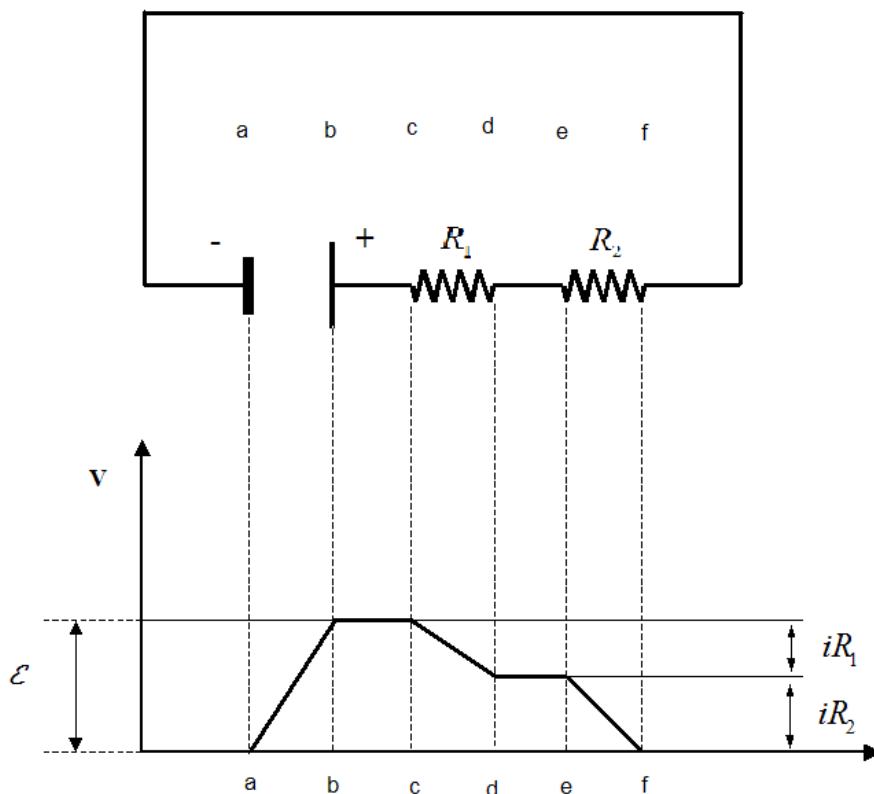


Fig CE4 (a) Circuito con due resistenze in serie, e (b) diagramma del potenziale nei vari punti del circuito

I due resistori sono attraversati dalla stessa corrente e si dicono disposti in serie. Come si vede dal diagramma di Fig CE4 (b) la differenza di differenza di potenziale agli estremi dei due resistori non è la stessa: una prima diminuzione si ha quando le due cariche attraversano R_1 e una successiva quando attraversano R_2 . dallo stesso diagramma si vede che:

$$\begin{aligned} E - i \cdot R &= i \cdot R_1 + i R_2 \\ &= i(R_1 + R_2) \end{aligned}$$

cioè due resistori in serie sono equivalenti a un unico resistore di resistenza
 $R = R_1 + R_2$

Questo risultato è riassunto nella Fig CE5

Fig CE5. Due resistori in serie sono equivalenti a un unico resistore di resistenza pari alla somma delle resistenze.

Consideriamo ora (Fig CE6) un circuito contenente due resistori ai capi dei quali si ha la stessa differenza di potenziale. I due resistori si dicono allora in parallelo.

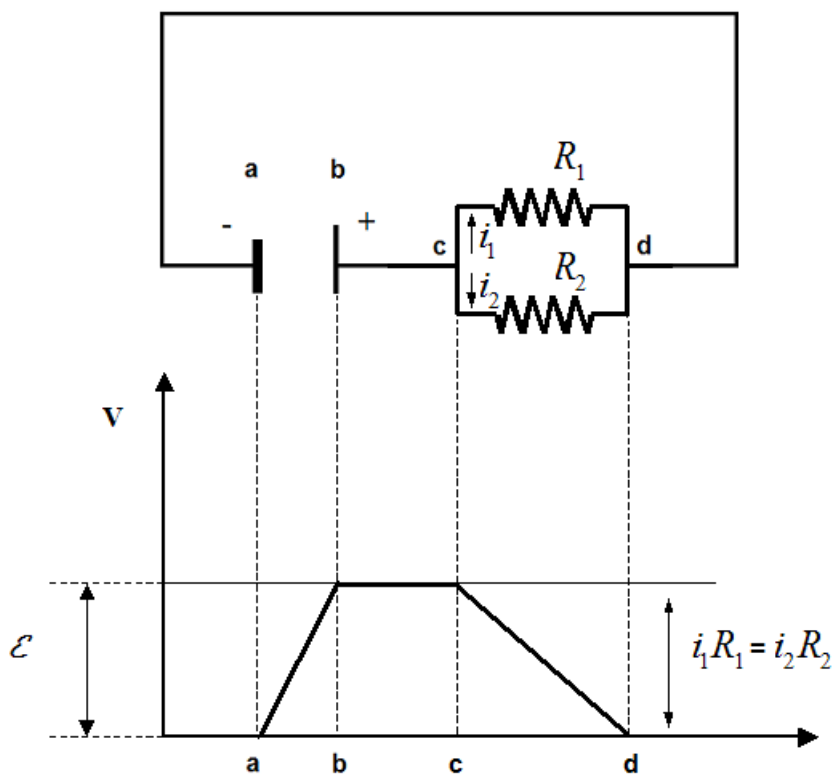


Fig CE6 (a) Circuito con due resistori in parallelo e (b) diagramma del potenziale nei vari punti del circuito.

Una carica che giunge in c proseguirà o lungo il ramo di R1 o lungo quello di R2: le cariche lungo R1 daranno luogo a una corrente i_1 , quelle lungo R2 a una corrente i_2 . Per la conservazione della carica, la somma di queste due correnti deve uguagliare la corrente i :

$$i = i_1 + i_2$$

Inoltre poichè la diminuzione di potenziale attraverso R1 eguaglia quella attraverso R2, sarà:

$$i_1 R_1 = i_2 R_2 = E$$

cioè

$$i_1 = E/R_1 \text{ e } i_2 = E/R_2$$

$$i = i_1 + i_2 = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} = E \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

il che significa che due resistori in parallelo sono equivalenti a un unico resistore di resistenza R tale che:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\text{cioè } R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Questo risultato è riassunto nella Fig CE7

Fig CE7 Due resistori in parallelo sono equivalenti a un'unica resistenza di valore $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

Si noti che, mentre due resistenze in serie sono equivalenti a una resistenza di valore maggiore di ciascuna delle due, due resistenze in parallelo equivalgono a un'unica resistenza minore della più piccola fra R_1 e R_2 (in effetti, mettendo due resistenze in parallelo, si aumenta la possibilità di passaggio delle cariche).

Le regole di combinazione di resistenze in serie e in parallelo consentono di semplificare lo studio di molti circuiti elettrici.

Le leggi di Kirchhoff

Esistono evidentemente moltissimi modi di connettere resistenze fra di loro, ma non tutti sono riconducibili a insiemi di resistenze in serie e in parallelo; la Fig CE8 mostra una disposizione non analizzabile in termini di serie e parallelo.

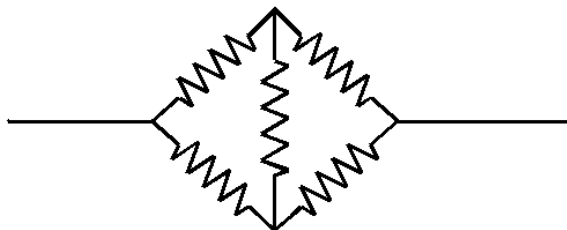


Fig CE8 resistori collegati in modo tale da non potere essere descritti in termini di serie e parallelo

In questi casi, i circuiti possono essere analizzati sulla base delle cosiddette “leggi di Kirchhoff”. In un circuito si definisce “nodo” ogni punto in cui concorrono due o più conduttori, mentre si

definisce “maglia” ogni percorso chiuso che si può individuare partendo da un nodo e terminando nello stesso nodo.

Ad esempio, nel circuito della Fig CE9, si possono individuare due nodi (b,e)

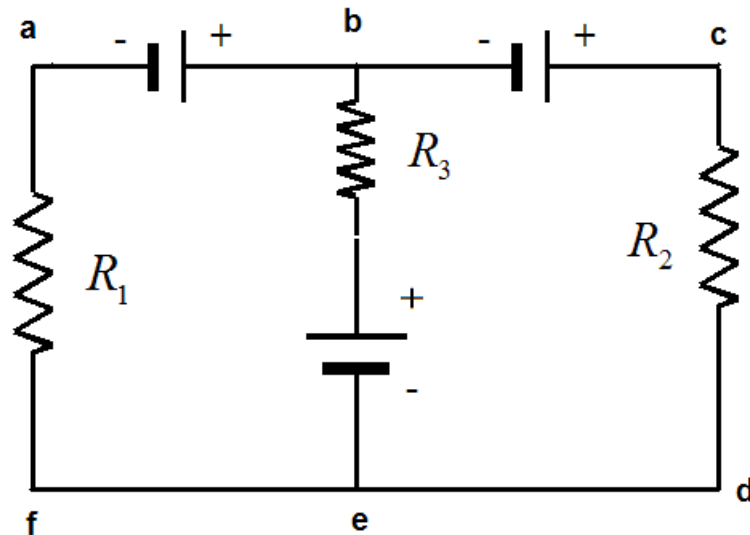


Fig CE9. Un circuito elettrico con tre nodi e due maglie

Le leggi di Kirchoff affermano che

- 1 La somma algebrica di tutte le correnti che confluiscono in un nodo è nulla (legge dei nodi)
- 2 la variazione complessiva di potenziale lungo ogni maglia è nulla (legge delle maglie).

La prima legge esprime, in sostanza la conservazione della carica e, nella sua applicazione, si considerano positive le correnti che entrano nel nodo e negative quelle che escono.

La seconda regola esprime la conservatività del campo elettrico: essendo conservativo, il lavoro di E lungo ogni percorso chiuso è nullo (il lavoro di E è pari alla variazione di V).

“Risolvere un circuito” significa determinare le correnti che circolano in ognuno dei suoi rami. Con riferimento all’esempio di Fig.CE9, questo può essere fatto attribuendo un verso arbitrario di circolazione delle correnti in ogni maglia e una intensità delle correnti che confluiscono in ogni nodo. Applicando le leggi di Kirchoff all’esempio di Fig CE9 si ottiene:

Nodo b	$i_1 - i_2 - i_3 = 0$
Maglia abef	$E_1 - i_3 R_3 - E_3 - i_1 R_1 = 0$
Maglia bcde	$E_2 - i_2 R_2 + E_3 + i_3 R_3 = 0$

L’applicazione delle leggi di Kirchoff al nodo e e alla maglia abcdef fornirebbe, come si può verificare, due equazioni non indipendenti da quelle già scritte.

Note le resistenze e le forze elettromotrici, abbiamo così ottenuto un sistema di equazioni lineari in tre incognite che può essere risolto ricavando i_1 , i_2 e i_3 (si ricordi che un valore negativo di una corrente significa che essa fluisce in verso opposto a quello presunto).

Carica e scarica di un condensatore

Consideriamo il circuito di Fig CE10

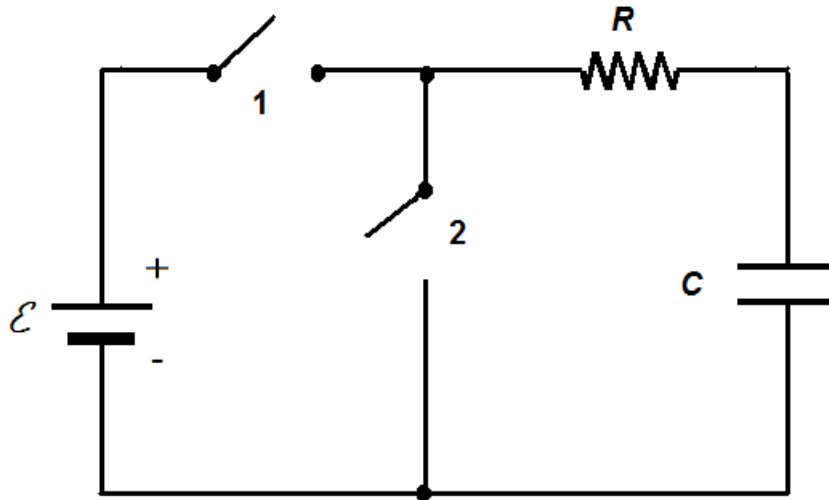


Fig CE10. Un circuito contenente un generatore di fem E , un resistore di resistenza R e un condensatore di capacità C .

Chiudendo l'interruttore 1 (e lasciando aperto 2) il circuito viene percorso da una corrente i , che porta cariche positive in un'armatura del condensatore e negative sull'altra. Il moto delle cariche cessa quando la carica Q accumulata sulle armature raggiunge il valore compatibile con la capacità C e la differenza di potenziale E (trascurando la resistenza interna del generatore $Q = CE$).

La corrente i che carica il condensatore dipende dal tempo ($i=i(t)$). Quanto maggiore è infatti la carica depositata in un'armatura, ad es. positiva, tanto più si farà sentire l'effetto repulsivo delle nuove cariche in arrivo, per cui ci si aspetta che i diminuisca nel tempo, mentre ovviamente Q cresce nel tempo, così come la differenza di potenziale V ai capi del condensatore, che, inizialmente uguale a zero, diventa pari a E al termine della carica. Dunque:

$i = i(t)$ cala nel tempo
 $Q = Q(t)$ cresce nel tempo
 $V = V(t)$ cresce nel tempo

Per rendere quantitative queste considerazioni, osserviamo che, se a un certo istante t la corrente vale $i(t)$, in un intervallo infinitesimo dt la carica su un'armatura aumenterà di una quantità infinitesima

$$dQ=i(t)dt$$

Se allo stesso istante t , sulle armature del condensatore si è raccolta una carica $Q(t)$, allora la differenza di potenziale ai suoi capi vale:

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Ne consegue che, ai capi della resistenza R la differenza di potenziale è:

$$E - V(t)$$

per cui la corrente $i(t)$ vale

$$i(t) = \frac{E - V(t)}{R}$$

$$\text{cioè } R \frac{dQ}{dt} = E - \frac{Q(t)}{C}$$

Questa equazione differenziale ha come incognita la funzione $Q(t)$: sappiamo che per $t=0$, $Q(0)=0$, mentre la carica totale accumulata sarà:

$$Q_{tot} = CE$$

Si può vedere che la funzione $Q(t)$ che soddisfa all'equazione differenziale e alle condizioni appena indicate è:

$$Q(t) = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

dove la quantità $\tau = RC$ prende il nome di “costante di tempo del circuito”.

Si vede che $Q(t)$ diventa uguale a CE solo per $t \rightarrow \infty$: in pratica questo avviene dopo un tempo t pari a 4 ÷ 5 volte τ poicè, in tal caso l'esponenziale è del tutto trascurabile rispetto a 1. La Fig CE10 mostra l'andamento grafico di $Q(t)$, per diversi valori di $t=RC$

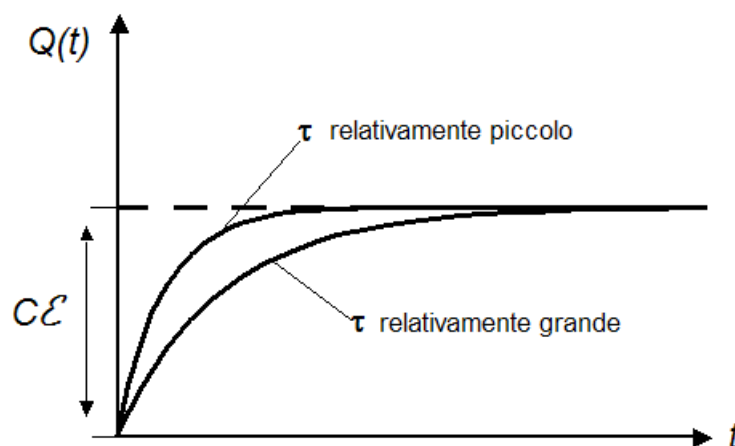


Fig CE11 Andamento temporale della carica sulla armatura di un condensatore.

Si vede che, quanto maggiore è RC , tanto più lentamente viene caricato il condensatore: se τ è molto piccolo la carica del condensatore è praticamente istantanea. Se ad es. $R=1\text{k}\Omega$ e $C=10\ \mu\text{F}$ si ha

$$\tau = RC = 10^3\ \Omega \times 10^{-5}\ \text{F} = 10^{-2}\ \text{s} = 10\ \text{ms};$$

in pratica, dopo qualche decina di millisecondi, il condensatore è completamente carico. A partire dall'espressione di $Q(t)$ possiamo vedere l'andamento della corrente di carica:

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Come previsto, $i(t)$ diminuisce nel tempo: anche in questo caso la diminuzione è più o meno rapida a seconda del valore $\tau = RC$ (a rigore, la carica richiede un tempo infinito e quindi la corrente si annulla dopo un tempo infinito). La Fig CE11 mostra l'andamento temporale di $i(t)$ per due diversi valori di $\tau = RC$

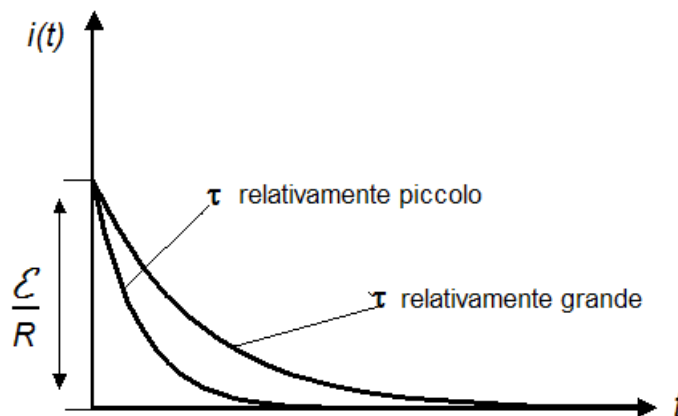


Fig CE11 Andamento temporale della corrente di carica di un condensatore.

Se, al termine del processo di carica, si apre l'interruttore 1 di Fig CE9 (ormai inutile) e si chiude l'interruttore 2, il condensatore C si comporta come un generatore di corrente, seppure con una differenza di potenziale variabile nel tempo: il campo che si crea nel conduttore infatti muove la carica positiva verso l'armatura negativa, il che riduce progressivamente la differenza di potenziale ai capi del condensatore, cioè ai capi di R , il che provoca una progressiva diminuzione della corrente di scarica.

Detta $V(t)$ la differenza di potenziale presente a un certo istante t ai capi del condensatore, sarà $V(t)=Q(t)/C$,

ma poichè, come abbiamo osservato, la stessa differenza di potenziale è presente ai capi di R : $V(t)=Ri(t)$

Poichè, in questo caso, il condensatore si sta scaricando, la corrente $i(t)$ dipende dalla diminuzione della carica Q sulle armature del condensatore, cioè:

$$i(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

$$\text{per cui } -R \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q(t)}{C}$$

Anche questa equazione differenziale può essere risolta, ricordando che, per $t=0$ (quando cioè si apre l'interruttore 1 e si chiude 2) Q vale CE . Si ottiene così:

$$Q(t) = CE e^{-\frac{t}{RC}}$$

da cui

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

L'andamento della corrente di scarica è dunque uguale a quello della corrente di carica mostrato nella Fig CE11, si ricordi che, durante la carica, le cariche positive si muovono verso l'armatura positiva del condensatore, mentre, durante la scarica, esse lasciano l'armatura positiva: la corrente, cioè, cambia verso.

Magnetismo

Introduzione

Nel 1820 A.M. Ampere scoprì che fra due fili paralleli percorsi da corrente si esercita una forza attrattiva se le correnti fluiscono nello stesso verso repulsiva se esse fluiscono in verso opposto. Più precisamente (Fig M1), consideriamo due fili paralleli di lunghezza L in cui scorrono rispettivamente le correnti i_1 e i_2 :

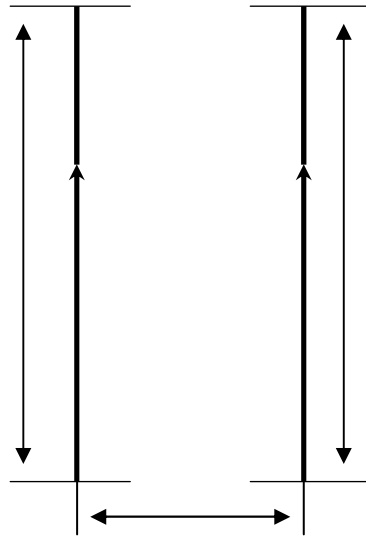


Fig M1 Due fili paralleli percorsi da correnti equiverse.

Ampere riuscì a stabilire che la forza totale che il filo 1 esercita sul filo 2 vale in modulo (nel caso della figura la forza è attrattiva)

$$F_{12} = C \frac{i_1 i_2 L}{d} \quad ()$$

per il terzo principio della dinamica, tale forza è uguale in modulo a quella (F_{21}) che il filo 2 esercita sul filo 1, come d'altronde mostra la simmetria dell'espressione () negli indici 1 e 2. In altre parole, la forza che agisce sull'unità di lunghezza di ciascuno di due fili vale in modulo:

$$\frac{F_{12}}{L} = \frac{F_{21}}{L} = C \frac{i_1 i_2}{d}$$

La costante si suole scrivere $\mu_0/2\pi$ dove:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-6} \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$$

prende il nome di “permeabilità magnetica del vuoto”.

Dunque

$$\frac{F_{12}}{L} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}$$

In questa espressione, come nella legge di Coulomb, si descrive una forza che si esercita fra due oggetti posti a una certa distanza. Analogamente alla legge di Coulomb, essa può venire interpretata in termini di campo, scrivendo

$$\frac{F_{12}}{L} = \left(\frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \right) i_2 \quad ()$$

cioè, la corrente i_1 , scorrendo nel filo, modifica le proprietà dello spazio circostante creando un campo la cui intensità dipende dalla corrente e dalla distanza d . Fornendo una seconda corrente (i_2) a distanza d , questa risente di una forza dovuta alla presenza del campo. Tale campo, che ha natura diversa dal campo elettrostatico, prende il nome di “induzione magnetica” e si suole indicare con il simbolo B .

Ne concludiamo che un filo percorso da corrente origina nelle sue circostanze un campo di induzione magnetica il cui modulo

$$\frac{F_{12}}{L} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

ha simmetria cilindrica ed è inversamente proporzionale alla distanza dal filo (si ricordi che il campo elettrico generato da una carica puntiforme ha simmetria sferica ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza). Tale campo si manifesta attraverso una forza che si esercita su un filo percorso da corrente, cioè su cariche elettriche in moto.

Dalla () si vede che le dimensioni del campo B sono N/Am.

L'induzione magnetica

Concetto di campo magnetico

Scomponiamo un circuito in un insieme di vettori infinitesimi dl tutti percorsi dalla stessa corrente i

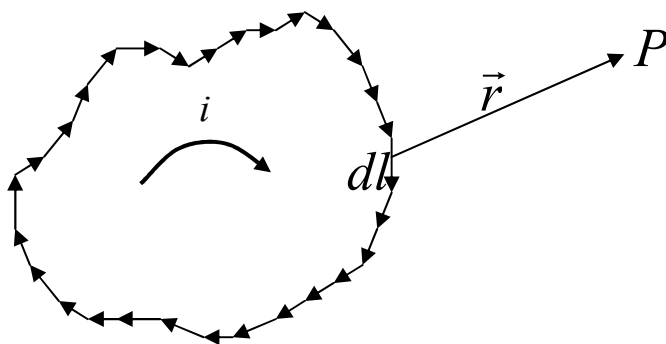


Fig M2. Un circuito può essere pensato come una successione di infiniti vettori infinitesimi dl .

Ciascuno di questi elementi infinitesimi produce un campo di induzione magnetica infinitesimo, che si esprime con la cosiddetta legge di Biot e Savart:

L'induzione dovuta a un generico elemento $d\vec{l}$ in un punto P dello spazio identificato dal vettore \vec{r} è data da:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B}(P) = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Questa somma diventa semplice in casi simmetrici come ad es. circonferenze perpendicolari ai fili o campo B al centro di una spira.

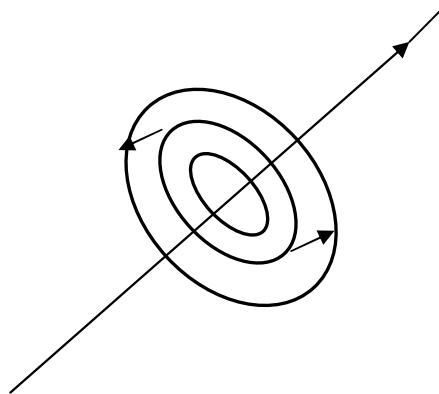


Fig M3 Alcune linee di forza del campo di induzione generate da un filo rettilineo

Notare che le linee di forza di B sono chiuse (campo solenoidale).

Campi magnetici notevoli

Sull'asse di una spira circolare (nel punto centrale)

$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$ al centro della spira diventa: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l}}{r^2}$ dove r è il raggio della spira (fissandoci al centro)

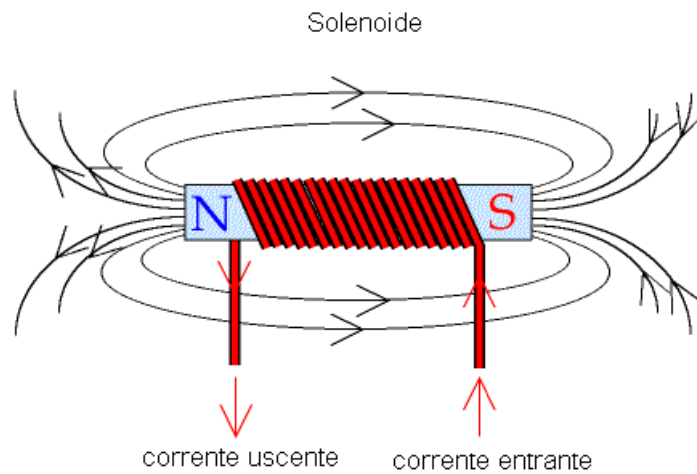
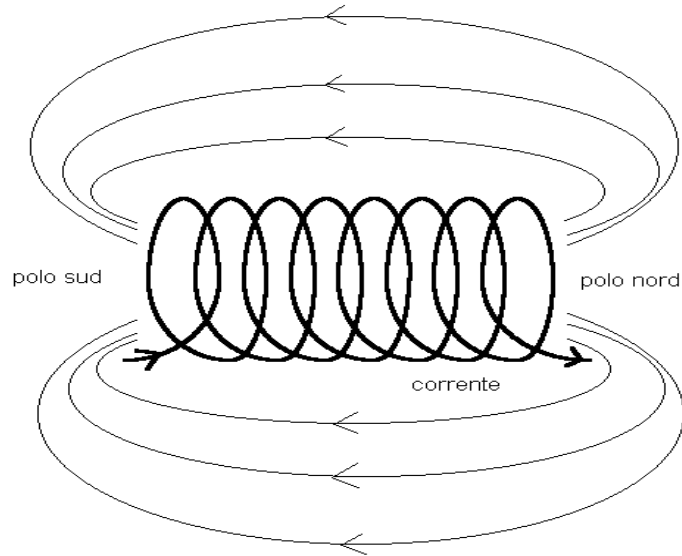
Il campo quindi diventa:

$$\vec{B}(P) = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{2\pi r}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{2r}$$

Sull'asse del Solenoide

$$\vec{B} = \mu_0 Ni$$

$N=n/l$ (numero di spire su lunghezza del solenoide)



Poichè le linee di forza del campo magnetico sono chiuse, applicando il teorema di Gauss si ricava che il flusso di B attraverso ogni superficie chiusa è zero.

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$$

La forza magnetica

Se immaginiamo di porre in una zona dello spazio in cui è presente un campo B un circuito percorso da una corrente i, su ogni elemento infinitesimo dl appartenente al circuito agisce una forza infinitesima che vale:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}_{(o)}$$

questa forza può essere espressa in funzione della velocità con cui si muove nel filo la carica dq

$$\begin{aligned} i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow d\vec{F} &= \frac{dq}{dt} d\vec{l} \times \vec{B} = \\ &= dq \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} \\ &= dq \vec{v} \times \vec{B} \end{aligned}$$

Questo risultato può essere immediatamente generalizzato al caso di una carica q che si muove a velocità v in un campo B (ad esempio un elettrone), in tal caso:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

F prende il nome di “forza di Lorentz”

Notare che la forza di Lorentz, essendo perpendicolare alla velocità compie lavoro nullo e quindi non cambia il modulo della velocità ma può solo deflettere la traiettoria.

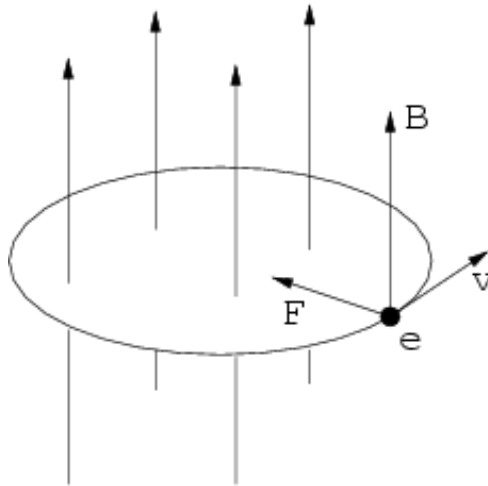


Fig M6 Se una particella entra in un campo B uniforme perpendicolarmente a B, la sua traiettoria giace su un pian perpendicolare a B

Se ora si considera il moto di una particella di massa m e carica q in un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla velocità della particella si ha che:

$$m \frac{v^2}{R} = qvB \quad R = \frac{mv}{qB} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$$

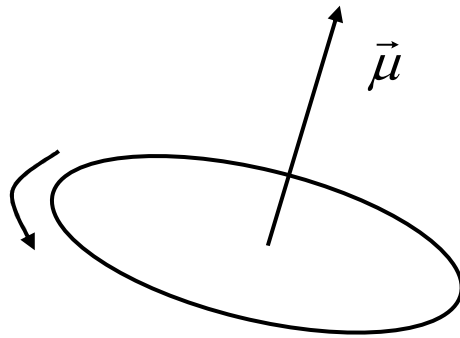
Moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio R

Il dipolo magnetico

Si definisce, nel caso di un circuito chiuso, una grandezza detta “momento di dipolo magnetico”

$$\vec{\mu} = iA$$

Nel caso di un circuito circolare $A = \pi r^2$



Se questo circuito viene immerso in un campo B , su di esso agisce una coppia di forze di momento

$$m = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

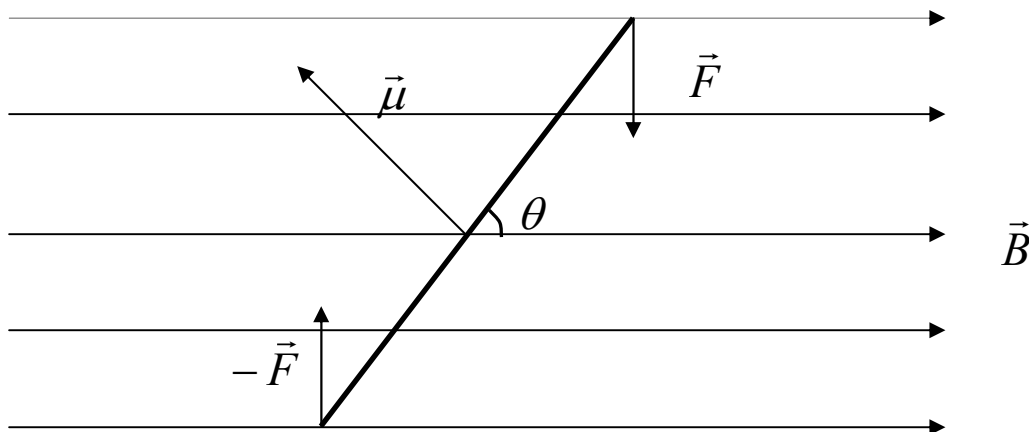


Fig M8 Un circuito immerso in un campo B uniforme sente una forza che tende ad allineare il suo momento magnetico con il campo B

A questa configurazione si può, in analogia col dipolo elettrico, associare un'energia potenziale

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Il concetto di momento magnetico è importante in quanto parecchi nuclei atomici hanno momenti magnetici diversi da zero.

I magneti permanenti

Consideriamo un elettrone atomico (carica $-e$) e supponiamo, in un modello classico, che ruoti attorno al nucleo su un'orbita circolare di raggio R . Indicando con m_e la sua massa e con v_e la sua velocità, tale elettrone possiede una quantità di moto $\mathbf{q}_e = m_e \mathbf{v}_e$ e un momento angolare che in modulo vale:

$$l_e = m_e v_e R$$

Questa carica in moto circolare può essere descritta come una corrente di intensità

$$i = e / T$$

Dove T è il periodo di rotazione

$$T = 2\pi R / v_e$$

Quindi

$$i = \frac{ev_e}{2\pi R}$$

Tale corrente dà luogo ad un momento magnetico di modulo

$$\mu_e = iA = \frac{ev_e \pi R^2}{2\pi R} = \frac{ev_e R}{2} = \frac{1}{2} \frac{el_e}{m_e}$$

E, poiché la carica dell'elettrone è negativa

$$\vec{\mu}_e = -\frac{e\vec{l}_e}{2m_e}$$

Tenendo conto anche dello spin si ha

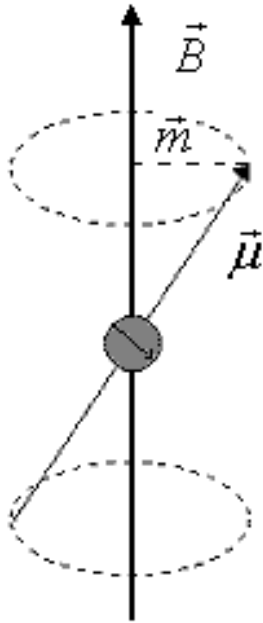
$$\vec{\mu} = -\frac{e\vec{l}}{m_e}$$

Frequenza di Larmor

Se un momento magnetico μ viene immerso in un campo magnetico B si ha il fenomeno della precessione di m attorno all'asse di B a causa del momento torcente m esercitato da B su μ .

$$\vec{m} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Si dimostra che questo moto di precessione, analogo a quello della trottola attorno all'asse identificato dall'accelerazione di gravità ha una frequenza, detta frequenza di Larmor data da :



$$\omega = \gamma \cdot B$$

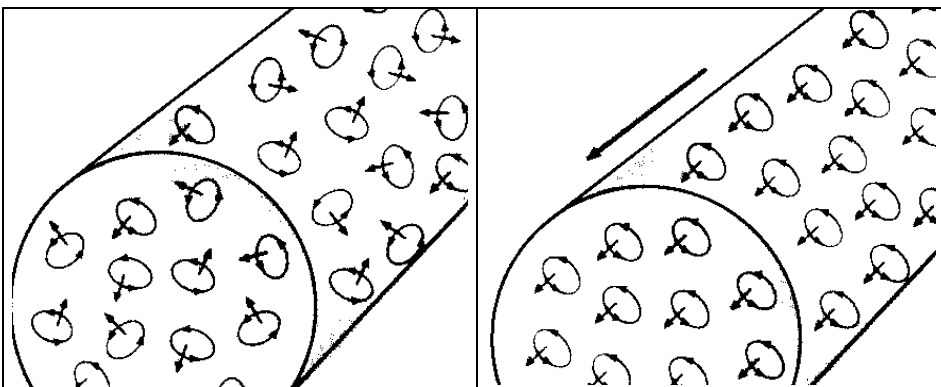
$$\gamma = \frac{e}{2m} \text{ viene detto rapporto giromagnetico}$$

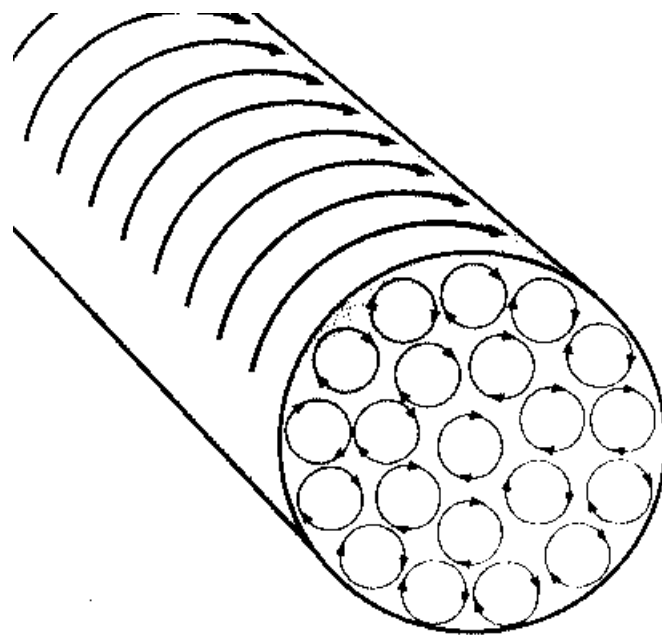
$$\omega_{\text{electron spin}} = \frac{2\mu_e B}{\hbar} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} (5.79 \times 10^{-5} \text{ eV/T})(1\text{T})}{6.58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}} = 1.7608 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 28.025 \text{ GHz} \quad \text{Larmor frequency}$$

$$\omega_{\text{proton spin}} = \frac{2\mu_p B}{\hbar} = \frac{2(2.79)(3.15 \times 10^{-8} \text{ eV/T})(1\text{T})}{6.58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}} = 2.6753 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 42.5781 \text{ MHz} \quad \text{Larmor frequency}$$





\vec{B}



\vec{m}

$\vec{\mu}$