

## Meccanica dei fluidi

I fluidi sono sistemi in fase (fase è il nome appropriato per “stato di aggregazione”) liquida o gassosa. Come tali essi non posseggono forma propria, ma assumono quella del recipiente che li contiene. Mentre però i liquidi hanno un volume proprio, i gas assumono il volume del recipiente che li contiene, occupando tutto lo spazio a disposizione.

### Densità

Per un fluido omogeneo (le cui proprietà non dipendono cioè dal punto in cui si misurano) si definisce la densità  $\rho$  come:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

dove  $m$  è la massa del fluido e  $V$  il suo volume.

Nel S.I. l'unità di misura della densità è il  $\text{kg/m}^3$ . La tabella I mostra le densità di alcuni comuni liquidi.

Poiché il volume del gas varia con la pressione, la densità del gas varia con la pressione.

Tabella I Densità di alcuni liquidi e cenno alla densità dei gas

Tab. 1 Densità di alcuni liquidi

Liquido	$\rho \text{ kg/m}^3$
Etere	736
Alcool etilico	791
Acetone	792
Benzolo	809
Alcool metilico	810
Acqua	1000
Mercurio	13600

### Pressione

Consideriamo un fluido in equilibrio, e immaginiamo una superficie  $A$  immersa in esso (Fig. 1)

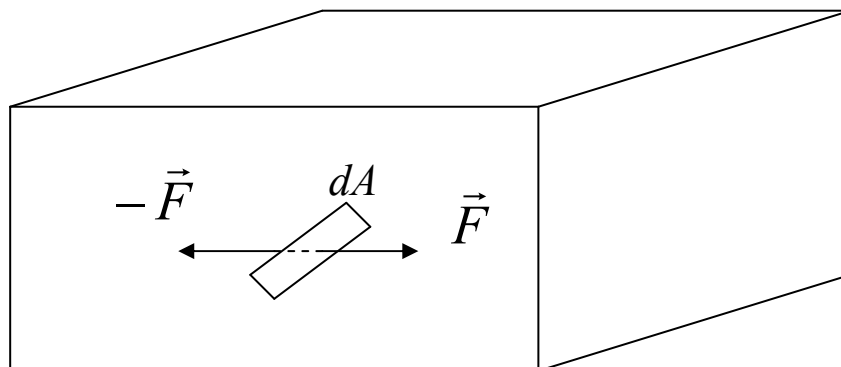


Fig 1 A causa degli urti molecolari su ogni faccia di una superficie ideale si esercita una forza

Siccome il fluido è in equilibrio, la forza totale agente su  $dA$  è nulla (Principio di solidificazione). Questa forza complessivamente nulla nasce dagli urti molecolari sulle due facce della superficie, che, all'equilibrio, bilanciano i loro effetti.

La forza  $\vec{F}$  che si esercita su una faccia di  $A$  può essere decomposta (Fig 2) in due componenti: una  $\vec{F}_n$  perpendicolare ad  $A$  ed una  $\vec{F}_t$ , parallela ad  $A$ .

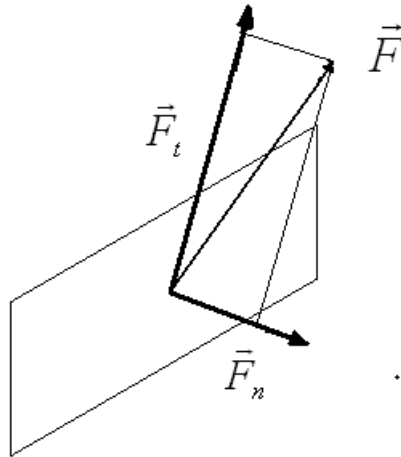


Fig 2 La forza  $\vec{F}$  può essere decomposta in due componenti: normale  $\vec{F}_n$  e tangenziale  $\vec{F}_t$ .

Si definisce pressione il rapporto tra il modulo di  $\vec{F}_n$  e l'area  $A$ :

$$P = \frac{|\vec{F}_n|}{A}$$

Nel S.I. la pressione si misura in  $\text{N/m}^2$ :  $1 \text{ N/m}^2$  prende il nome di Pascal (Pa).

$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ .

Un'altra unità di pressione molto utilizzata è l'atmosfera (atm), pur non facendo parte del S.I.

L'equivalenza è:

$$1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Dalla cosiddetta "esperienza di Torricelli" (dal nome del fisico che per primo la eseguì) ha origine un'altra unità di pressione.

Se si riempie di mercurio un tubo sufficientemente lungo chiuso a un estremo e lo si capovolge in una vaschetta contenente altro mercurio, il livello del mercurio nel tubo si stabilizza ad un'altezza  $h$  al di sopra del pelo libero della vaschetta (Fig 3)

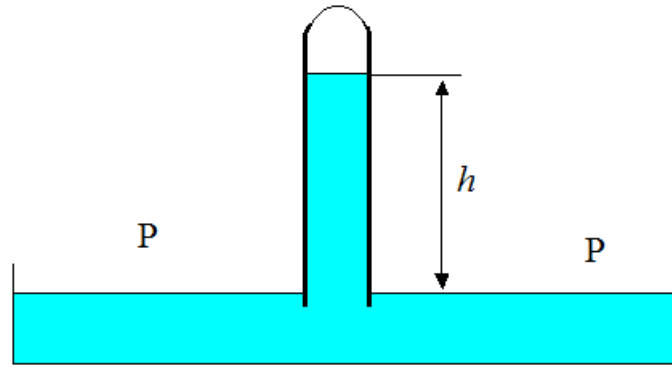


Fig 3 Capovolgendo un tubo pieno di mercurio in una vaschetta, all'equilibrio il mercurio raggiunge un'altezza superiore di  $h$  cm a quella del mercurio nella vaschetta.  $P$  è la pressione atmosferica esterna.

Consideriamo una superficie immaginaria di sezione  $A$  allineata con il livello di mercurio nella vaschetta. All'equilibrio le forze agenti su questa superficie devono equilibrarsi.

Forza dovuta alla pressione atmosferica  $P$  = Forza peso della colonna di mercurio sovrastante

$$PA = m_{Hg}g$$

Dove  $m_{Hg}$  è la massa del mercurio sovrastante. Se indichiamo con  $\rho$  la densità del mercurio,  $m_{Hg} = \rho \text{ volume} = \rho Ah$

$$PA = \rho Ahg \Rightarrow P = \rho gh$$

Misurando quindi l'altezza  $h$  della colonna di mercurio si può calcolare  $P$ .

Per questo motivo le pressioni vengono misurate in mm Hg. Se  $h = 1\text{mm}$  si ha:

$$P = 13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 10^{-3} \text{m} \cong 133 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 133 \text{Pa}$$

La pressione atmosferica è dell'ordine di 760 mm Hg quindi

$$P_{Atm} = 760 \times 133 \text{Pa} \cong 1.013 \times 10^5 \text{Pa}$$

## Gas ideali

Quando un gas si trova in equilibrio, il suo stato può essere descritto assegnandone la pressione, il volume e la temperatura.

I valori di queste tre grandezze all'equilibrio, non variano nel tempo e non sono indipendenti fra di loro. Esiste una relazione che consente, note due di esse, di calcolare la terza. Tale relazione si chiama "equazione di stato" e ogni sistema termodinamico in equilibrio ne possiede una.

Si chiama "gas ideale" o "gas perfetto" un gas i cui stati di equilibrio siano descritti dall'equazione:

$$PV = nRT$$

dove P è la pressione esercitata dal gas, V il suo volume, n è il numero di moli presenti (pari al rapporto tra la massa m e il peso molecolare M), R una costante che prende il nome di "costante universale dei gas" e vale:

$$R = 8.31 \frac{J}{mole \cdot K}$$

e T la temperatura Kelvin del gas (essendo in equilibrio, la temperatura è la stessa in tutti i punti del gas, così come la pressione).

L'equazione di stato nasce dallo studio del comportamento dei gas reali a basse pressioni. Comunque complicata infatti sia l'equazione di stato di un gas reale, sperimentalmente si verifica che:

$$\lim_{P \rightarrow 0} PV = nRT$$

Al limite in cui  $P \rightarrow 0$ , dunque, viene meno ogni riferimento alle caratteristiche specifiche e alla natura particolare di un gas: restano solo le proprietà comuni a tutti i gas. Il gas ideale possiede tali proprietà particolari: l'equazione di stato dei gas ideali è, per ogni valore di P, quella di ogni gas reale al limite per  $P \rightarrow 0$ .

Nella () l'unico elemento che può differenziare un gas dall'altro è  $n = \frac{m}{M}$ , in quanto gas diversi hanno diversi pesi molecolari, ma a parità di numero di moli, due gas ideali diversi hanno identico comportamento.

Con questa precisazione in mente, possiamo immaginare una miscela di gas ideali (inerti) diversi:

$n_1$  moli del gas 1 e  $n_2$  moli del gas 2. Essendo  $n = n_1 + n_2$ , si ha:

$$PV = (n_1 + n_2)RT = n_1RT + n_2RT \Rightarrow P = \frac{n_1RT}{V} + \frac{n_2RT}{V}$$

Le quantità a secondo membro rappresentano la pressione che ciascun gas eserciterebbe se occupasse, da solo, tutto il volume V. Esse prendono il nome di pressioni parziali:

$$P_1 = \frac{n_1RT}{V}; P_2 = \frac{n_2RT}{V} \Rightarrow P = P_1 + P_2$$

cioè la pressione complessiva esercitata da una miscela di gas ideali è la somma delle pressioni parziali. Questo risultato si generalizza immediatamente al caso di n gas:

$$P = \sum_{i=1}^N P_i$$

Dalla () si vede anche che fissata  $T$ , esistono diverse coppie di valori  $P, V$  che soddisfano l'equazione di stato. Esistono cioè, fissato un valore della temperatura, numerosi stati di equilibrio del gas. Richiama isoterma l'insieme degli stati di equilibrio di un sistema che corrispondono alla stessa temperatura. Le isoterme di un gas ideale possono essere utilmente rappresentate su un diagramma  $(P, V)$ . In tale diagramma (Fig 4) ogni punto corrisponde ad un valore definito di  $P$  e un valore definito di  $V$ . Conoscendo  $P$  e  $V$ , la () consente di ricavare  $T$ , cosicché in definitiva, ogni punto di un diagramma  $P, V$  rappresenta uno stato di equilibrio del gas

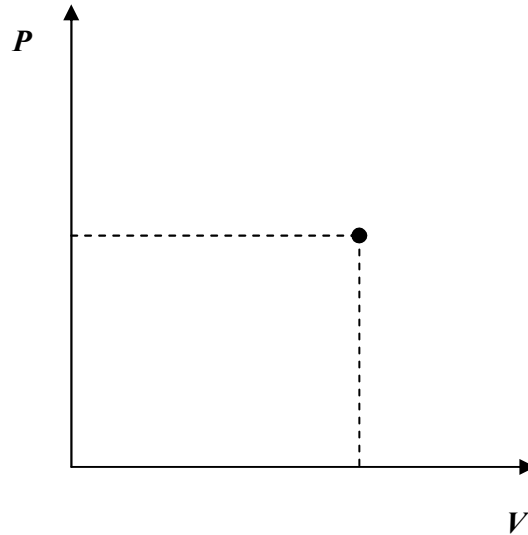


Fig 4, in un diagramma  $(P, V)$  ogni punto definisce uno stato di equilibrio del sistema.

Per tale motivo il diagramma  $(P, V)$  si chiama “diagramma di stato”. In tale diagramma ogni isoterma, essendo caratterizzata da  $T = \text{cost}$ , è costituita dall'insieme degli stati per cui:

$$PV = \text{cost}$$

Questa equazione, in un diagramma  $(P, V)$  definisce un ramo di iperbole equilatera e l'intera famiglia delle isoterme si ottiene attribuendo a  $T$  diversi valori e graficando le corrispondenti iperboli (Fig 5)

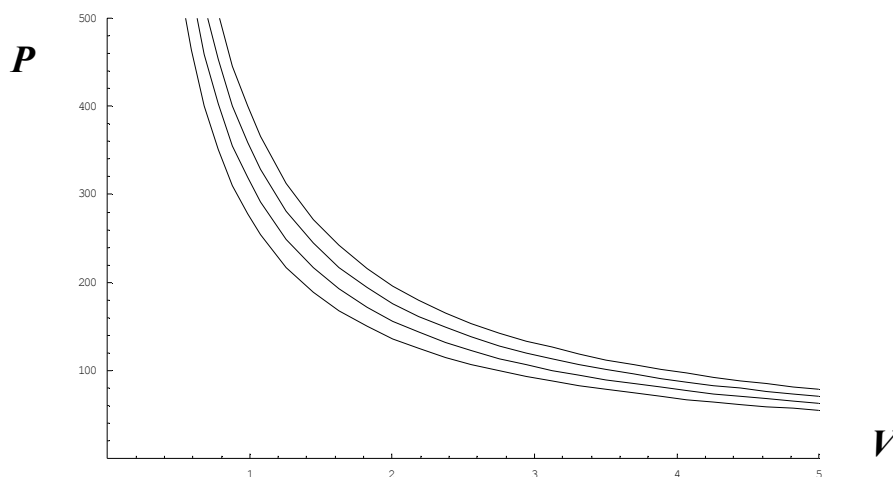


Fig 5 Quattro isoterme di gas ideale a temperature  $T_0, T_1, T_2, T_3$ , con  $T_0 < T_1 < T_2 < T_3$   $T = 273 + 40n$

## Gas reali

Le isoterme di un gas reale possono essere costruite sperimentalmente, identificando, per ogni fissato valore di  $T$ , le coppie  $(P, V)$  corrispondenti a stati di equilibrio. La figura 6 mostra una tipica isoterma di un gas reale

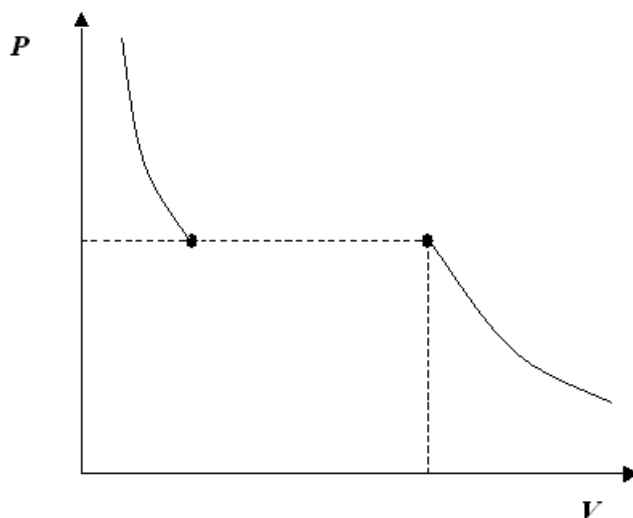


Fig 6 Tipica isoterma di un gas reale

Supponiamo che inizialmente il gas si trovi nello stato I. Se mantenendo costante la temperatura (cioè termostatando il gas) ora si riduce progressivamente il volume  $V$ , si osserva che corrispondentemente, per mantenere l'equilibrio, la pressione cresce e il gas attraversa gli stati compresi nel tratto IA (un tratto di curva è un insieme di punti, e su un diagramma  $(P, V)$ , ogni punto è uno stato di equilibrio).

Se però, a partire da A, si continua a ridurre il volume, mantenendo costante la temperatura, ci si accorge che la pressione non cresce più, anzi rimane costante, e il sistema attraversa gli stati compresi nel tratto AB.

Quello che accade è che, a partire da A, una riduzione di volume provoca una progressiva liquefazione del gas, cosicché gli stati compresi nel tratto AB.

Quello che accade è che a partire da A, una riduzione di volume provoca una progressiva liquefazione del gas, cosicché gli stati compresi nel tratto AB descrivono un sistema costituito da una miscela liquido-vapore: in A c'è solo vapore, in B c'è solo liquido; negli stati intermedi la percentuale di liquido cresce quanto più ci si avvicina a B. Fra A e B si realizza dunque una transizione di fase vapore-liquido, e tale transizione avviene a pressione e temperatura costanti. La pressione a cui avviene la transizione si chiama pressione (o tensione) di vapore del liquido, ovvero pressione del vapore saturo.

Se, mantenendo costante la temperatura, una volta che il sistema si trovi in B, si aumentasse progressivamente il volume, il sistema attraverserebbe gli stati fra B e A e si avrebbe la transizione di fase inversa, cioè la vaporizzazione del liquido. Per vaporizzare un liquido non è dunque necessario aumentare la temperatura, può bastare aumentare il volume a disposizione; analogamente, per liquefare un vapore, non occorre raffreddarlo, può bastare una riduzione di volume.

Una volta nello stato B, il sistema è costituito di solo liquido e, poiché i liquidi sono assai poco comprimibili, il successivo tratto di isoterma è costituito da un tratto di curva quasi verticale: per ridurre cioè, anche di molto poco, il volume  $V$  occorre un forte aumento di pressione.

Se si costruiscono altre isoterme a temperature successivamente crescenti, si ottengono andamenti qualitativamente analoghi, dove però l'intervallo di volumi a cui avviene la transizione di fase (la "lunghezza" del tratto AB) diminuisce al crescere della temperatura, fino a che, per un valore della temperatura, detta temperatura critica,  $T_c$ , il tratto di isoterma orizzontale sparisce e quindi non ha più luogo la transizione di fase.

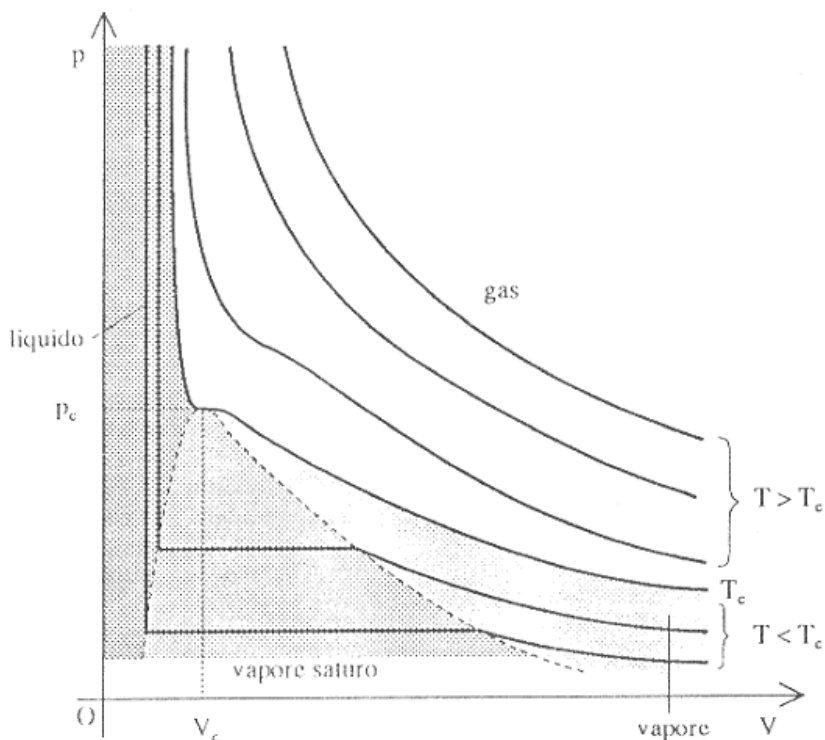


Fig 7: Alcune isoterme tipiche di un gas reale: alla temperatura  $T_c$  si ha l'isoterma critica.

Dalla Fig.7 si vedono alcune cose:

La tensione di vapore del liquido aumenta al crescere della temperatura

A temperature superiori a  $T_c$  non si può liquefare il vapore con una pura compressione: occorre prima raffreddarlo a  $T < T_c$ .

Unendo con un tratteggio gli stati all'estremo sinistro del tratto orizzontale e quelli dell'estremo destro, si ottiene una sorta di curva a campana. Questa curva, insieme all'isoterma critica divide l'insieme degli stati del piano  $(P,V)$  in quattro zone (Fig. 8).

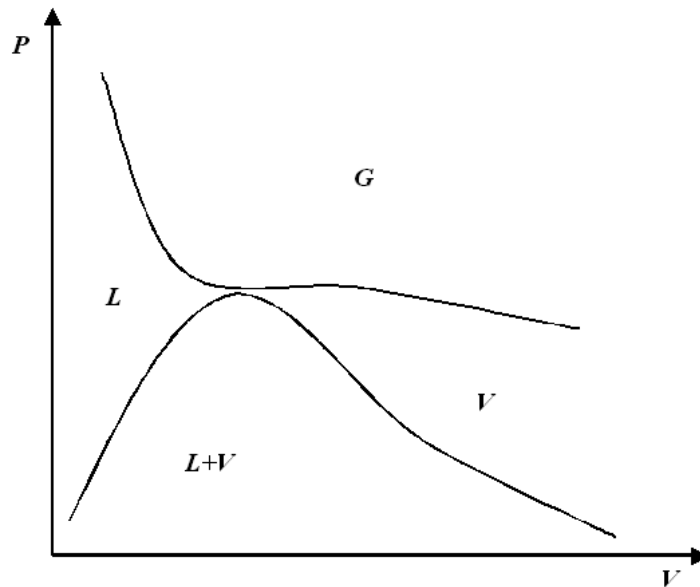


Fig 8: Suddivisione degli stati di equilibrio in base alla fase.

I punti nella zona L rappresentano stati in fase liquida, quelli in zona L+V stati in cui è presente una miscela liquido-vapore, quelli in zona V stati in cui è presente solo la fase vapore e, infine, quelli in zona G stati in fase vapore che non può essere liquefatto per pura compressione (qualcuno chiama gas un vapore siffatto).

Abbiamo visto che la transizione di fase avviene a pressione e temperatura costanti: la pressione a cui avviene la liquefazione (pressione di vapore del liquido) dipende solo dalla temperatura e rappresenta la massima pressione che il vapore può esercitare a quella temperatura.

Interessante per le sue applicazioni pratiche è il caso del vapor d'acqua presente nell'aria atmosferica. La pressione parziale del vapor d'acqua atmosferico a una certa temperatura è, di regola, inferiore alla tensione di vapore del liquido alla stessa temperatura. Si definisce umidità relativa il rapporto (espresso di solito in %) fra la pressione parziale a una certa temperatura e la corrispondente tensione di vapore del liquido.

Lavoro per cambiare il volume di un fluido



Consideriamo (Fig 9) un cilindro di sezione A dotato di un pistone mobile entro cui sia contenuto un gas

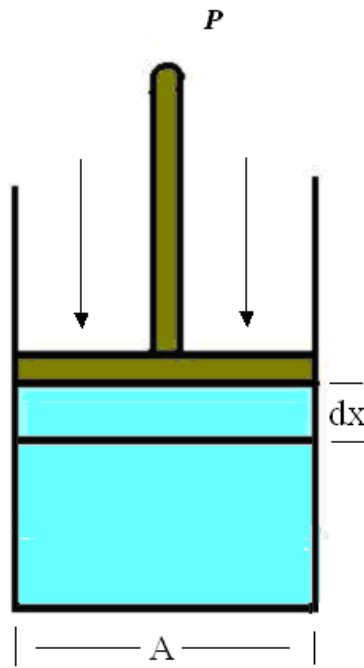


Fig 9. Un gas è contenuto in un cilindro dotato di pistone mobile.

Se  $P$  è la pressione esercitata dall'esterno, la forza che agisce sul sistema è  $PA$ . Se ora il pistone si sposta di  $dx$  nella direzione della forza, il lavoro infinitesimo compiuto dalla forza è

$$dL = |\vec{F}| |d\vec{x}| PA |d\vec{x}|$$

Ora,  $A|d\vec{x}|$  rappresenta il valore assoluto della variazione di volume del gas e corrisponde alla zona tratteggiata di Fig.9. Dunque:

$$dL = P|dV|$$

Ma essendo  $dV < 0$  (il volume diminuisce):

$$|dV| = -dV \Rightarrow dL = -PdV$$

Supponiamo che il sistema esegua una variazione finita di volume. Tale trasformazione può essere rappresentata come una successione di stati su un diagramma  $(P, V)$  come mostrato in Fig. 10.

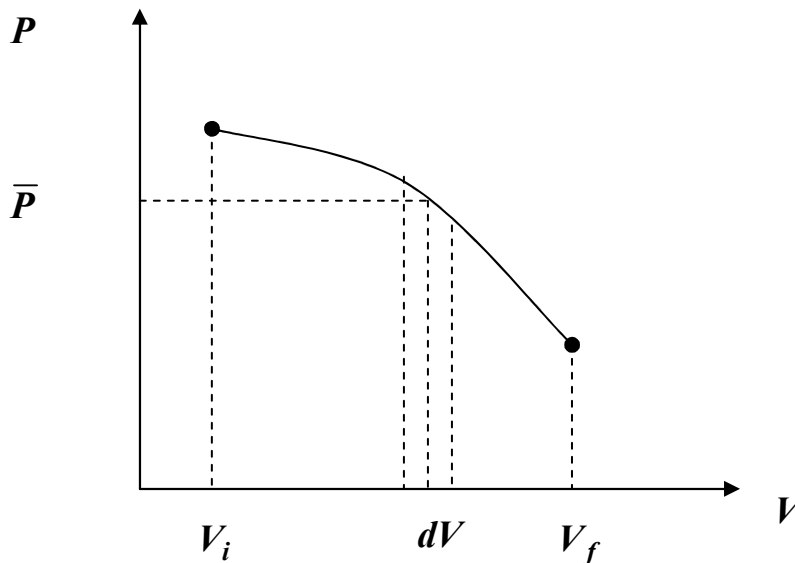


Fig 10 Una trasformazione è rappresentata da una curva nel piano  $(P, V)$ .

In un trattino infinitesimo di trasformazione il lavoro  $PdV$  è rappresentato, a meno di un segno, dall'area tratteggiata (infinitesima) di Fig.10. Pensando la trasformazione, come una successione di infinite trasformazioni infinitesime, il lavoro totale risulterà la somma di infiniti lavori infinitesimi, e, su un diagramma  $(P, V)$  sarà rappresentato, a meno del segno, dall'area totale compresa sotto la curva rappresentativa della trasformazione. Questa area dovrà essere considerata positiva se  $V_f < V_i$  e negativa se  $V_f > V_i$ . In formule

$$L = - \int_{V_i}^{V_f} P(V) dV$$

Nel caso particolare (Fig. 11) in cui la pressione resti costante durante la trasformazione

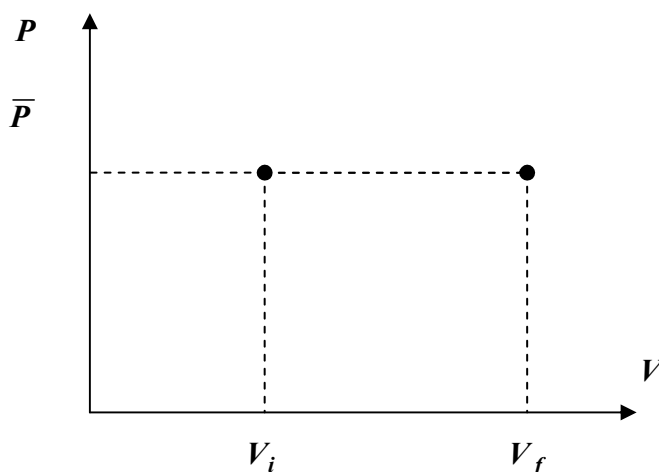


Fig. 11. Una trasformazione a pressione costante (isobara), il lavoro è dato dall'area positiva compresa nella regione tratteggiata

$$L = -P(V_f - V_i)$$

che è positivo per  $V_i > V_f$  e negativo per  $V_i < V_f$ .

Un caso particolare di lavoro è il cosiddetto “lavoro adiabatico”, il lavoro cioè che viene compiuto durante una trasformazione adiabatica (in cui non c'è scambio di calore). In base al primo principio essendo  $Q = 0$ ,

$$\Delta U = L_{ad}$$

Il lavoro adiabatico misura dunque la variazione di energia interna. Nel caso di un gas ideale, la cui energia interna dipende solo dalla temperatura

$$L_{ad} = \Delta U = U_f - U_i = U(T_f) - U(T_i)$$

dove gli indici  $i$  ed  $f$  denotano gli stati iniziale e finale rispettivamente. Se dunque  $L_{ad} > 0$ , se cioè viene compiuto lavoro sul gas riducendone il volume:

$$U(T_f) > U(T_i) \quad e \quad T_f > T_i$$

cioè, comprimendo adiabaticamente un gas ideale, la sua temperatura aumenta. Analogamente, l'espansione adiabatica di un gas ideale ne provoca il raffreddamento.

Conclusioni simili valgono anche per i gas reali. Cioè quando una massa d'aria e vapor d'acqua si muove verso l'alto, ha luogo una espansione dovuta alla diminuzione di pressione. Se la risalita (e quindi l'espansione) avviene abbastanza rapidamente, la massa non ha tempo di scambiare calore con l'aria circostante, cosicché l'espansione è praticamente adiabatica e la temperatura diminuisce. Se la diminuzione di temperatura è sufficiente, il vapor d'acqua si liquefa parzialmente e comincia a cadere la pioggia.

## **Soluzioni gas-liquido**

### **Pressione osmotica**

## **Moto di un fluido ideale**

Si definisce ideale un fluido incompressibile e privo di attrito interno, le cui parti cioè possono scorrere liberamente le une sulle altre. Consideriamo un tale fluido che scorre in un condotto a sezione variabile (Fig.12)

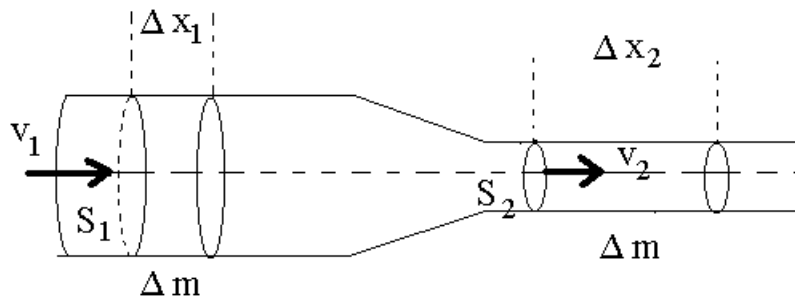


Fig 12. Un fluido ideale scorre in un condotto a sezione variabile. S1 e S2 sono le due sezioni del condotto.

Fissiamo la nostra attenzione sulle sezioni  $S_1$  e  $S_2$ , di aree  $A_1$  e  $A_2$  e indichiamo con  $v_1$  e  $v_2$  le velocità lineari del fluido in  $A_1$  e  $A_2$  rispettivamente. La massa di fluido  $m_1$  che nell'unità di tempo attraversa la sezione  $S_1$  è quella contenuta in volume cilindrico  $C_1$  avente per base l'area della sezione  $A_1$  e per altezza lo spazio percorso nell'istante  $\Delta t$

$$C_1 = A_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = A_1 v_1$$

e quindi

$$m_1 = \rho C_1 = \rho A_1 v_1$$

Analogamente la massa di fluido che attraversa nell'istante di tempo  $\Delta t$  la sezione  $S_2$  è:

$$m_2 = \rho C_2 = \rho A_2 v_2$$

dove  $\rho$  è la stessa, essendo il fluido incompressibile.

Se il condotto non ha perdite, deve essere

$$m_1 = m_2$$

cioè

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Il che significa che la velocità del fluido aumenta al diminuire della sezione.

### Teorema di Bernoulli

Consideriamo un fluido ideale che si muove lungo un condotto di sezione e quota variabili in regime stazionario. Con questo termine si intende dire che la velocità del fluido varia a seconda della sezione che si considera, ma la velocità del fluido, quando attraversa una data sezione non varia nel tempo. In altre parole, la velocità dipende solo dalla sezione considerata.

Se ora consideriamo la massa di fluido compreso fra due sezioni A1 e A2 a un certo istante t, questa stessa massa, dopo un tempo dt, si sarà spostata nel verso in cui avviene il flusso, di una quantità infinitesima (Fig 13)

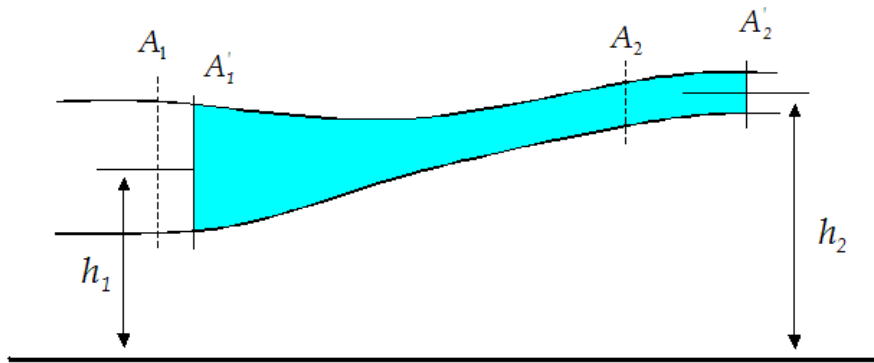


Fig 13. La massa del fluido compresa, all'istante t fra A1 e A2, all'istante t+dt, sarà compresa fra A'1 e A'2

La superficie A1 che delimita la massa a sinistra si sarà spostata di una quantità  $v_1 dt$ , raggiungendo la posizione A'1, mentre la superficie A2 si sarà spostata di una quantità  $v_2 dt$  raggiungendo la posizione A'2.

Su questa massa agiscono delle forze dovute alla pressione del fluido circostante. Queste forze di pressione si manifestano alle superfici A1 e A2 e sono dirette verso la massa considerata (Fig.14).

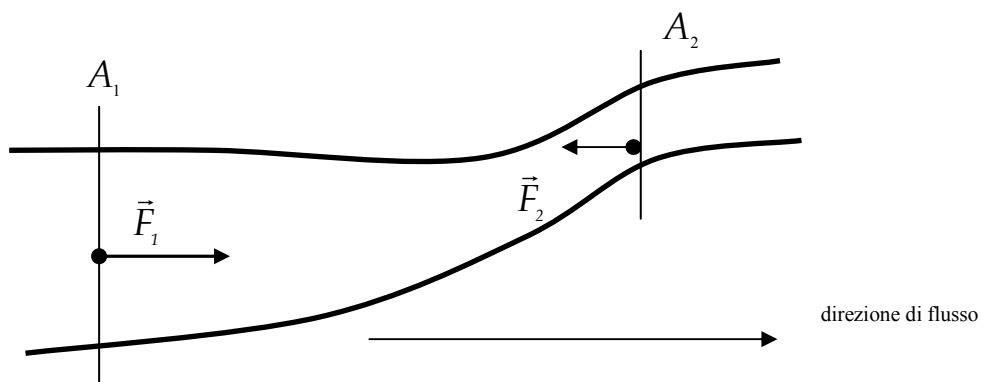


Fig 14. Forze agenti su una massa di fluido in virtù della pressione dovuta al fluido circostante

Se indichiamo con P1 e P2 le pressioni rispettivamente esercitate su A1 e A2 ( $P_1 > P_2$ , in quanto il flusso avviene da A1 verso A2), si ha

$$\vec{F}_1 = P_1 A_1 \quad e \quad \vec{F}_2 = P_2 A_2$$

Il lavoro compiuto da queste forze nel tempo  $dt$  è

$$dL_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1 dt = F_1 \cdot v_1 dt = P_1 A_1 v_1 dt$$

$$dL_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2 dt = -F_2 \cdot v_2 dt = -P_2 A_2 v_2 dt$$

in quanto, in  $A_1$ ,  $\vec{F}_1$  è nello stesso verso di  $\vec{v}_1$ , mentre, in  $A_2$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{v}_2$  hanno verso opposto. Il lavoro totale compiuto dalle forze di pressione nel tempo  $dt$  è dunque:

$$dL = dL_1 + dL_2 = (P_1 A_1 v_1 - P_2 A_2 v_2) dt = (P_1 - P_2) A_1 v_1 dt$$

in quanto  $A_1 v_1 = A_2 v_2$ , ora

$$A_1 v_1 dt = A_2 v_2 dt$$

rappresenta il volume infinitesimo di fluido  $dV$  compreso, con riferimento alla Fig.13, fra le superfici  $A_1$  e  $A'_1$  (o  $A_2$  e  $A'_2$ )

$$dV = A_1 v_1 dt = A_2 v_2 dt$$

Se  $\rho$  è la densità (costante) del fluido, sarà

$$dV = \frac{dm}{\rho}$$

per cui il lavoro totale delle forze di pressione si scrive

$$dL = (P_1 - P_2) \frac{dm}{\rho}$$

Tale lavoro deve uguagliare la variazione di energia cinetica e potenziale del fluido nel tempo  $dt$ . La variazione di energia cinetica, con riferimento alla Fig.13, corrisponde a quella di una massa  $dm$  che passa dalla velocità  $v_1$  alla velocità  $v_2$ , in quanto le proprietà del fluido compreso nel volume tratteggiato non cambiano (ipotesi di stazionarietà)

$$\frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2$$

Analogamente la variazione di energia potenziale gravitazionale è quella di una massa  $dm$  che passa dalla quota  $h_1$  alla quota  $h_2$ :

$$dmgh_2 - dmgh_1$$

Quindi

$$(P_1 - P_2) \frac{dm}{\rho} = dmgh_2 - dmgh_1 + \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2$$

cioè, una volta eliminato dm

$$\frac{P_1}{\rho} + gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{P_2}{\rho} + gh_2 + \frac{1}{2}v_2^2$$

da cui

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Abbiamo quindi identificato una quantità che ha lo stesso valore in corrispondenza della sezione A1 e della sezione A2. Poiché A1 e A2 sono due sezioni qualunque, tale quantità deve mantenere lo stesso valore per qualunque sezione, cioè

$$P + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$$

Se il fluido scorre in un condotto senza apprezzabili variazioni di quota, allora  $h = \text{cost}$  e quindi

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$$

Ne consegue che, se  $v$  cresce, deve calare  $P$ . Ma poiché  $v$  cresce quando cala la sezione  $A$ , ne consegue che  $P$  cala con  $A$ , cioè la pressione è minore dove il tubo si restringe.

In condizioni stazionarie ( $v_1 = v_2 = 0$ ) la relazione xx diventa

$$P_1 + \rho gh_1 = P_2 + \rho gh_2 \text{ cioè } P_1 - P_2 = +\rho g(h_2 - h_1)$$

Questa relazione, nota come legge di Stevino è illustrata nella Fig 15.

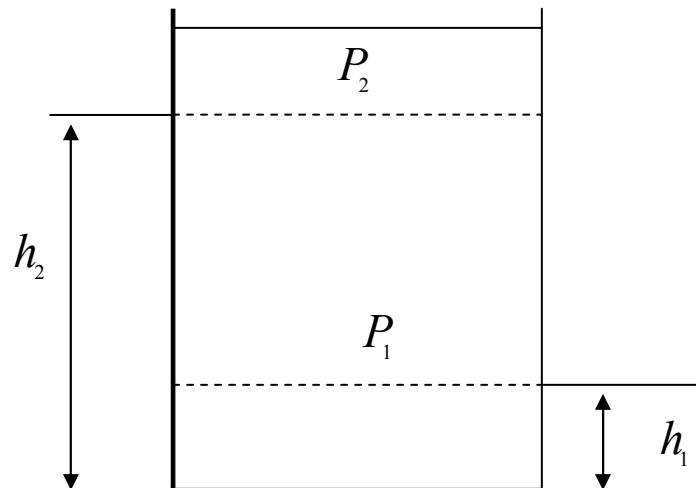


Fig 15 Legge di Stevino: la differenza di pressione fra due sezioni del fluido a diverse profondità è proporzionale alla differenza di quota.

La quantità  $\rho gh$  prende il nome di pressione idrostatica.

Moto dei fluidi viscosi

I fluidi reali possiedono un attrito interno fra i vari strati che li costituiscono: tale attrito interno è responsabile della cosiddetta viscosità.

Per definire un coefficiente di viscosità consideriamo (Fig. 16) due lastre di vetro di area A, parallele a distanza d, fra le quali sia contenuto il fluido.

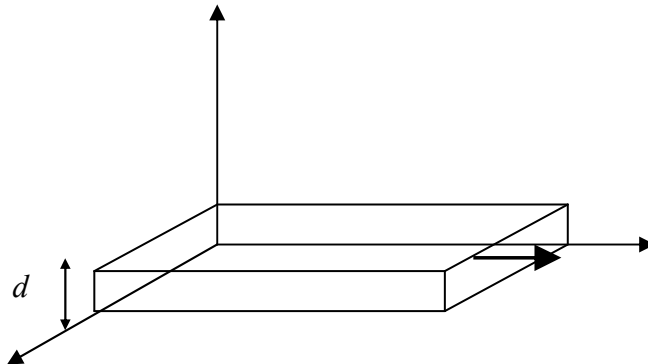


Fig 16 Fra due lastre di area A è compreso un fluido

La lastra inferiore ( $y=0$ ) sia ferma, mentre la superiore ( $y=d$ ) si muova a velocità costante  $v$  nella direzione dell'asse  $x$ . Per mantenere questa velocità costante occorre applicare una forza  $\vec{F}$ . In queste condizioni, lo strato di fluido a contatto con la lastra superiore si muove a velocità  $v$ , quello a contatto con la lastra inferiore ha velocità nulla, mentre gli strati intermedi si muovono con velocità comprese fra 0 e  $v$ .

La forza  $\vec{F}$  che deve essere applicata per mantenere la velocità  $v$  vale

$$F = \eta A \frac{v}{d}$$

dove  $\eta$  è il coefficiente di viscosità. Questa equazione può essere generalizzata al caso di due strati a distanza infinitesima  $dy$ . Se  $dv$  è la loro differenza di velocità (diretta lungo  $x$ ) allora

$$F = \eta A \frac{dv}{dy}$$

Da questa relazione si ricavano le unità di misura della viscosità

$$F = \eta A \frac{dv}{dy} \Rightarrow \frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy} \Rightarrow \eta = \frac{F dy}{A dv}$$

$$[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$$

$$[\eta] = \frac{N}{m^2} \times s \equiv Pa \times s$$

Nel sistema CGS:  $[\eta] = g \cdot cm^{-1} s^{-1} = poise(p)$  coefficiente di viscosità.

Il coefficiente di viscosità dipende dalla temperatura. Nell'illustrare la  $x$  abbiamo supposto che i vari strati di fluido scorrano gli uni rispetto agli altri con velocità definita. Quando ciò accade si parla di flusso laminare.



Consideriamo ora il caso di un flusso laminare in un tubo cilindrico di sezione uniforme. In questo caso gli strati di fluido sono cilindrici e coassiali (Fig F17)

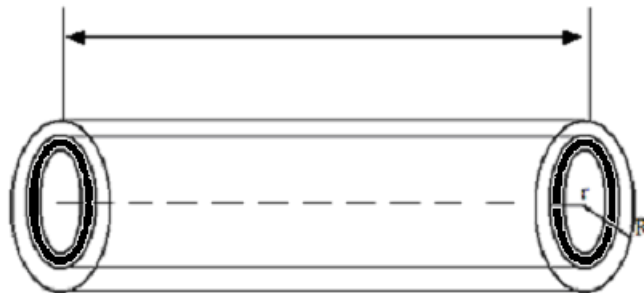


Fig F17 Il flusso laminare di un fluido in un tubo cilindrico può essere considerato come l'insieme di strati cilindrici coassiali di raggio  $r$  compresi fra 0 e  $R$ .

Applicando la () a questa geometria, si può dimostrare che, se  $P_1$  e  $P_2$  sono le pressioni agli estremi di un tubo di lunghezza  $l$ , la velocità di ogni strato cilindrico dipende dalla sua distanza  $r$  dall'asse secondo la legge:

$$v(r) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{P_1 - P_2}{l} \right] (R^2 - r^2)$$

Di qui si vede che la velocità è massima per  $r=0$ , cioè sull'asse del tubo, mentre si annulla per lo strato a contatto con la parete ( $r=R$ ). La Fig. 18 illustra le variazioni di  $v$  con  $r$ .

A partire da questa equazione si può calcolare la portata  $Q$ , cioè il volume di fluido che attraversa una sezione del tubo nell'unità di tempo

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{P_1 - P_2}{l}$$

Questa equazione è nota come legge di Poiseuille : si osservi la dipendenza della portata dalla quarta potenza del raggio. A parità di ogni altra condizione, se un condotto ha raggio doppio di un altro, la sua portata è 16 volte maggiore.

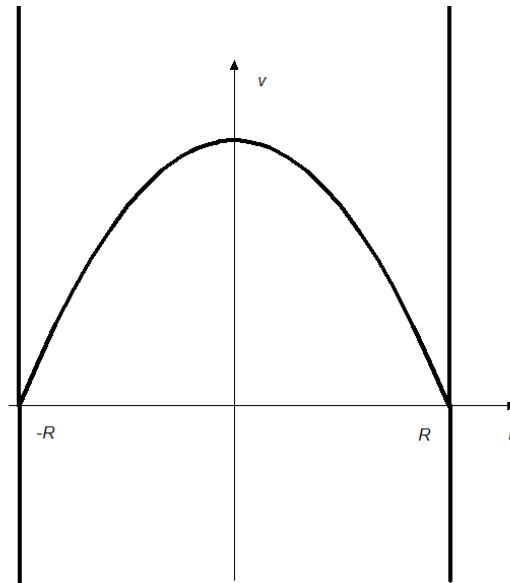


Fig F18. Variazione di  $v$  con la distanza  $r$  dall'asse del tubo cilindrico.

Queste considerazioni valgono in condizione di flusso laminare. Il moto dei fluidi, tuttavia, dà spesso luogo a turbolenza.

Qualitativamente, tali turbolenze appaiono nelle zone in cui il fluido possiede un'alta velocità ovvero in cui si ha una brusca variazione della direzione del moto. In questo caso le linee di corrente acquistano una struttura complessa e la legge di Poiseuille non vale più. La Fig. F19 mostra l'andamento delle linee di corrente di un fluido attorno a un cilindro con l'asse perpendicolare alla direzione del flusso: si vede che, al crescere della velocità, cominciano a formarsi dei gorgi (vortici) vicino al cilindro, in particolare subito al di là. Poiché la velocità nei vortici è elevata, si ha corrispondentemente una diminuzione di pressione al di là del cilindro e questa dà luogo a una forza che si oppone al moto del fluido (resistenza di pressione)

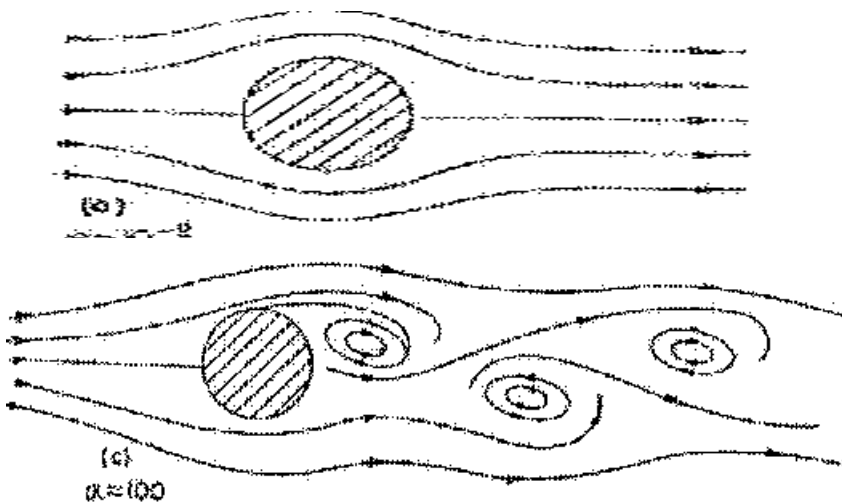


Fig F19. (a) A velocità relativamente basse il flusso è laminare, mentre (b) quando la velocità cresce si formano vortici al di là dell'ostacolo.

Gli oggetti aerodinamici hanno profili progettati in modo da ridurre la formazione di vortici e quindi la resistenza di pressione. Le condizioni in cui comincia a manifestarsi il moto vorticoso dipendono dalla velocità del fluido, dalla sua densità e viscosità e dalla forma dell'oggetto. Se questo è un cilindro di diametro  $D$ , si definisce una grandezza adimensionale detta numero di Reynolds

$$R = \frac{\rho}{\eta} vD$$

e si trova empiricamente che il moto comincia a diventare turbolento per  $R \approx 2000$ . Questa conclusione vale anche per il moto entro tubi cilindrici: in tal caso  $D$  è il diametro del tubo. La velocità a cui  $R$  raggiunge il valore 2000 si chiama velocità critica  $v_c$

$$v_c = 2000 \frac{\eta}{\rho D}$$

Come si vede la velocità critica aumenta con la viscosità del fluido.

## Tensione Superficiale

Le superfici dei liquidi (e anche dei solidi) hanno proprietà molto diverse da quelle compressive del materiale. Questo è dovuto al fatto che una molecola che si trovi all'interno di un materiale è circondata da altre molecole dello stesso tipo cosicché la forza totale che agisce su di esse è nulla.

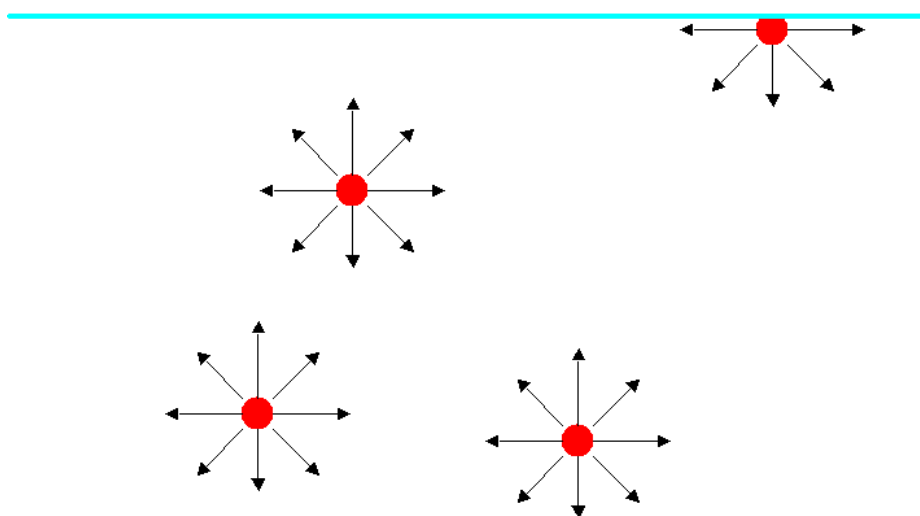


Fig 20 Una molecola all'interno di un liquido è attratta simmetricamente dalle altre molecole (a), mentre una molecola superficiale è preferenzialmente attratta verso il liquido.

Le molecole superficiali viceversa sentono l'attrazione delle molecole del fluido, ma questa attrazione non è bilanciata, non esistendo altre molecole dello stesso tipo al di fuori della superficie, cosicché le molecole superficiali sono soggette a una forza netta diretta verso la massa di liquido (Fig. 20).

Il modo più semplice di mettere in evidenza le proprietà delle superfici, consiste nel prendere una pellicola di liquido (di solito una soluzione saponosa) su un telaietto costituito da un sottile filo metallico con un lato mobile (Fig.21).

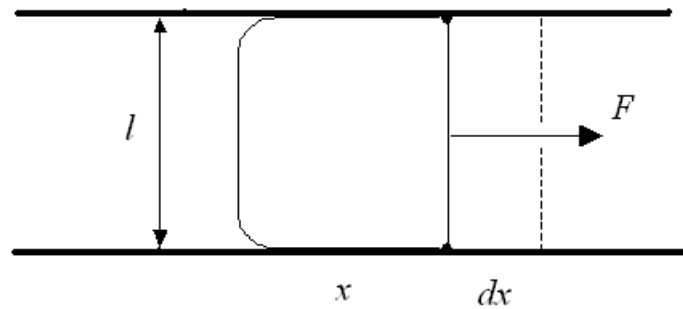


Fig 21 Una sottile pellicola di soluzione saponosa viene tesa su un telaietto con un lato mobile

La pellicola consta di due superfici e di uno strato di liquido di spessore molto piccolo, ma finito. Si vede sperimentalmente che, per mantenere la pellicola in equilibrio, occorre applicare una forza  $F$  al lato mobile del telaietto.

Questa forza è direttamente proporzionale alla lunghezza  $l$  del lato cui è applicata, mentre è indipendente da  $x$ . Siccome al variare di  $x$  varia lo spessore della pellicola, questo vuole dire che  $F$  è indipendente da tale spessore e che quindi l'origine delle proprietà di  $F$  sta nelle proprietà delle superfici e in quelle del loro interno.

Si definisce tensione superficiale la quantità

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{F}{l}$$

La tensione superficiale è quindi la forza, dovuta alla superficie, che agisce all'interfaccia del liquido per unità di lunghezza della linea di separazione. Tale forza è perpendicolare ad ogni elemento di tale linea. Nel SI l'unità di misura della tensione superficiale è il N/m. In tabella I sono riportati i valori di  $\gamma$  per alcune sostanze. Se ora sotto l'azione della forza  $F$  il lato mobile del telaietto di Fig.21 si sposta di  $dx$  nella direzione della forza, il lavoro infinitesimo vale

$$dL = Fdx = 2\gamma dx$$

$$\text{Ma } 2\gamma dx = dA$$

è l'aumento della superficie complessiva della pellicola, per cui

$$dL = \gamma dA$$

da cui

$$\frac{dL}{dA} = \gamma$$

cioè la tensione superficiale rappresenta il lavoro per unità di superficie che deve essere compiuto per variare la superficie. Se immaginiamo che questo lavoro venga immagazzinato dalla superficie come energia potenziale, allora  $\gamma$  può essere pensato come l'energia immagazzinata per unità di area della superficie. La tensione superficiale puro dipende dalla temperatura.

Capillarità

L'esistenza di una tensione superficiale è responsabile del noto fenomeno della capillarità. In questo caso la superficie di separazione fra liquido e aria forma un angolo  $\alpha$  con la parete del tubo capillare;  $\alpha$  prende il nome di "angolo di contatto".

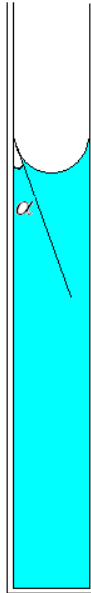


Fig 22 L'angolo formato dalla superficie aria-liquido con le pareti del capillare. Nella figura  $\alpha < \pi/2$

Se  $\alpha < \pi/2$ , si dice che il liquido "bagna" il vetro. Nel caso del mercurio invece  $\alpha > \pi/2$  e il mercurio non bagna il vetro. L'angolo di contatto per un dato liquido dipende dal materiale con cui si realizza il contatto. Ad esempio l'angolo di contatto acqua-paraffina è  $110^\circ$  cosicchè l'acqua non bagna la paraffina. Se si aggiunge un detersivo l'angolo di contatto diminuisce e la soluzione bagna la paraffina.

### Bolle in un liquido

Consideriamo una bolla d'acqua sferica in un liquido. In presenza delle sole forze idrostatiche, la pressione dentro la bolla sarebbe sostanzialmente uguale a quella esterna, ma la presenza della tensione superficiale modifica questa situazione.

Con riferimento alla Fig. 23, consideriamo la metà di una bolla di raggio  $r$ . Su di essa agiscono le seguenti forze:

- la forza dovuta alla sezione superficiale, che vale  $\gamma 2\pi r$  ed è diretta verso destra
- la forza idrostatica sulla superficie tratteggiata dovuta alla pressione interna  $P_i$ , diretta verso sinistra, che vale

$$P_i \pi r^2$$

c) la forza idrostatica, diretta verso destra, dovuta alla pressione idrostatica sulla superficie emisferica della bolla. Tale forza si può calcolare moltiplicando la pressione esterna  $P_e$  per la

proiezione della superficie semisferica sul piano che divide la bolla. Poiché tale proiezione vale  $\pi r^2$  la forza risulta  $P_e \pi r^2$

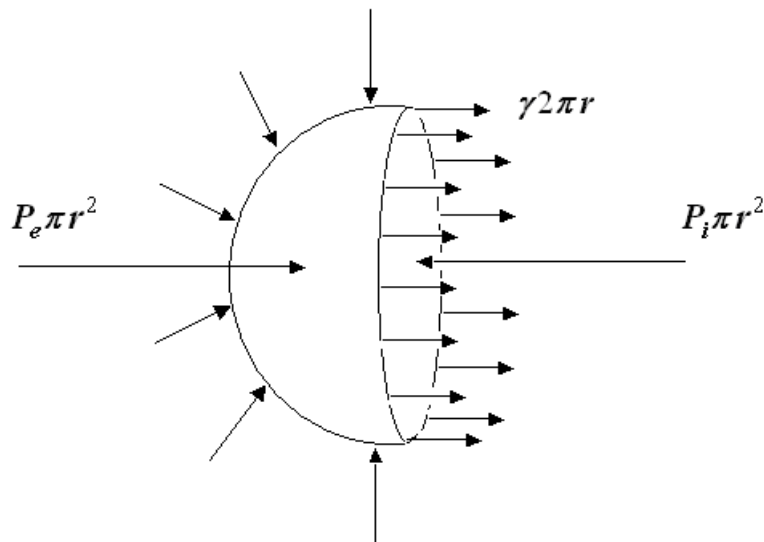


Fig. 23 Le forze agenti sulla metà di una bolla

All'equilibrio queste forze devono bilanciarsi. Tenendo conto dei versi, si ha:

$$P_e \pi r^2 + \gamma 2 \pi r = P_i \pi r^2 \Rightarrow P_i - P_e = \frac{2\gamma}{r}$$

Quindi per una bolla di raggio finito, la pressione interna è maggiore di quella esterna tanto più quanto minore è il raggio. Ad esempio nel caso di una bolla d'aria in mercurio ( $\gamma = 476 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$ ) se  $r = 10^{-4} \text{ m}$  si ha:

$$P_i - P_e = \frac{2 \times 476 \times 10^{-3}}{10^{-4}} \cong 9500 \text{ Pa} \cong 0.094 \text{ atm}$$

Utilizzando questi concetti è possibile ricavare un'espressione per il livello  $h$  a cui sale (o scende) un liquido in un capillare. Infatti i liquidi che bagnano il vetro salgono nel capillare a una quota  $h$  mentre quelli che non lo bagnano scendono.

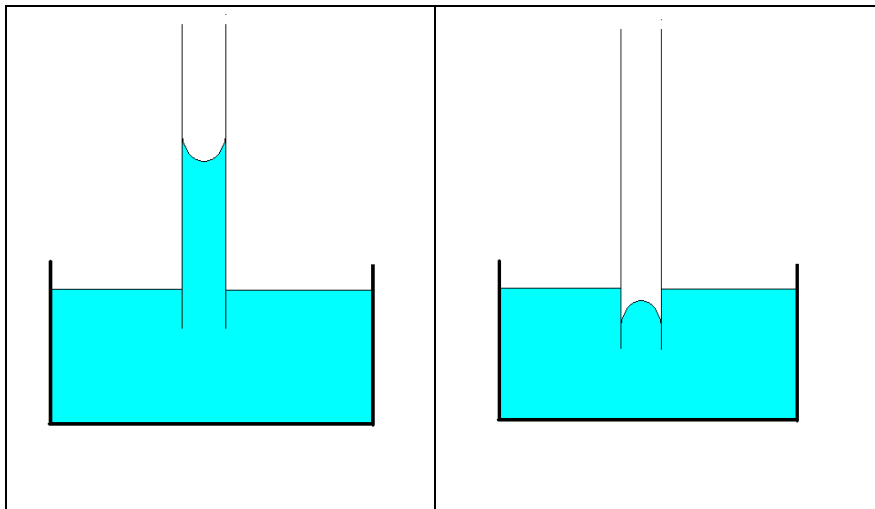


Fig 24. Risalita di un liquido lungo un capillare (a) quando il liquido bagna le pareti e (b) discesa se non bagna.

Se consideriamo il caso di un menisco semisferico all'interfaccia liquido/aria e supponiamo (Fig. 25) che l'angolo di contatto sia zero, allora, trattando la superficie semisferica come una mezza bolla, si trova

$$h = \frac{2\gamma}{\rho r g}$$

dove  $\rho$  è la densità del liquido.

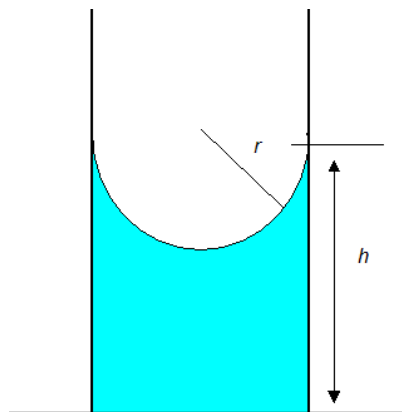


Fig 25. Per il calcolo della quota raggiunta da un liquido in un capillare



