Oscillazioni

Oscillazioni armoniche

Consideriamo una molla ideale(cioè di massa trascurabile e completamente elastica) appoggiata su un piano orizzontale e privo di attrito con un estremo fisso e un punto materiale attaccato all'altro estremo (Fig. 1)

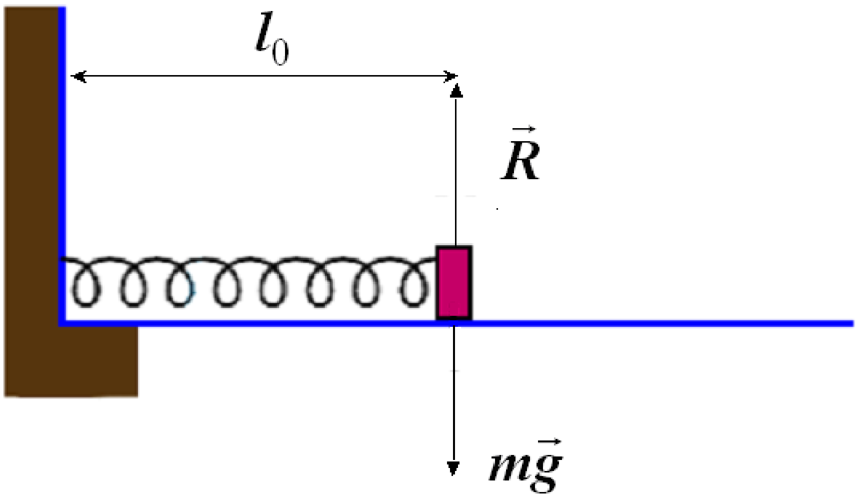


Fig.1 La molla ideale a riposo ha lunghezza l_0

In queste condizioni la lunghezza della molla è la cosiddetta "lunghezza a riposo" che indicheremo con l_0 e le uniche forze agenti sul punto sono il suo peso $m\vec{g}$ che è bilanciato dalla reazione vincolare $\vec{R}$ del piano di appoggio:

$$\vec{R} + m\vec{g} = 0,$$

quindi, nel seguito queste due forze verranno ignorate.
Se vogliamo che la molla eserciti una forza sul punto, occorre deformarla, cioè allungarla o accorciarla, cosicché la sua lunghezza sia diversa da quella a riposo l_0.
Per esprimere questo fatto quantitativamente (Fig. 2) conviene assumere un sistema di riferimento con l'asse x parallelo all'asse della molla e l'origine nel punto in cui la molla è fissata.

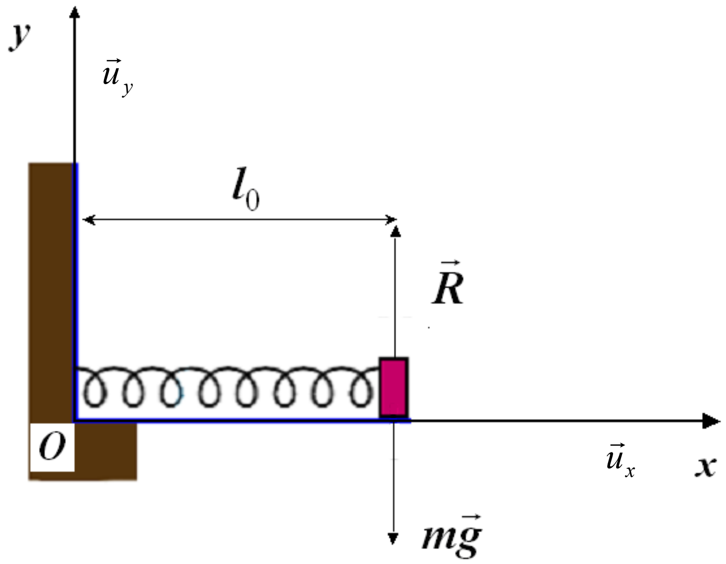


Fig.2 Sistema di riferimento utilizzato per descrivere il moto del punto materiale sotto l'azione della molla.

Con questa scelta la lunghezza della molle è misurata dalla posizione x del punto materiale: se $x > l_0$, la molla è allungata e la forza che esercita sul punto è diretta nel verso negativo dell'asse x; se $x < l_0$, la molla è compressa e la forza è nel verso positivo dell'asse x; ovviamente se $x = l_0$, la forza è nulla.
Se la molla, come supposto, è perfettamente elastica, la forza esercitata è proporzionale alla sua deformazione, cioè alla differenza fra la sua lunghezza effettiva (x) e la sua lunghezza a riposo (l_0)

$$\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{u}_x$$

dove la costante di proporzionalità k si chiama "costante elastica della molla": il suo valore numerico dipende dai dettagli strutturali della molla (spessore del materiale, densità e diametro delle spire). Si noti che $\vec{F}$ dipende da x, essa dunque varia durante il moto del punto.
Come abbiamo osservato a proposito del II Principio della Dinamica, una volta nota la forma di $\vec{F}$, per ricavare il moto del punto materiale, occorre uguagliare tale espressione al prodotto $m\vec{a}$, dove m è la massa del punto e $\vec{a}$ (accelerazione) . Poiché $\vec{F}$ è diretta lungo l'asse x e dipende solo da x, l'unica componente dell'accelerazione interessata è quella lungo l'asse x, che vale d^2x/dt^2 . Si ha dunque:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - l_0)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x - l_0) \qquad (1)$$

Si osservi che ***k/m*** è un numero positivo, per cui ha senso estrarne la radice quadrata e porre:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Cosicché la (1) si scrive:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x - l_0)$$

La soluzione di questa relazione (equazione differenziale) è:

$$x(t) = l_0 + A \cdot sin(\omega t + \varphi)$$

Dove A e φ sono due costanti il cui valore numerico dipende dalla deformazione iniziale della molla. Si noti che poiché la funzione $\sin(\omega t + \varphi)$, assume al variare del tempo, valori compresi fra –1 e 1, corrispondentemente:

$$l_0 - A \le x(t) \le l_0 + A$$

Cioè il punto materiale si muove in un intervallo di ampiezza 2*A* centrato in $x = l_0$ (posizione in cui la forza è nulla). Per questo motivo A si chiama ampiezza del moto.
Il punto materiale oscilla dunque attorno a l_0, diminuendo la propria velocità quanto più si allontana da l_0 (in un verso o nell'altro) fino ad arrestarsi quando giunge alla massima distanza (A e –A), mentre possiede la massima velocità (in un verso e nell'altro) quando transita in l_0. Un moto con queste caratteristiche si chiama "moto armonico semplice" per cui diremo che sotto l'azione di una molla perfettamente elastica, un punto materiale oscilla di moto armonico semplice attorno alla posizione l_0 di equilibrio ($\vec{F} = 0$.)
Il moto armonico semplice è un moto periodico: a intervalli regolari di tempo il moto si ripete con le stesse caratteristiche.
Si chiama periodo di un moto periodico, il minimo intervallo di tempo necessario a che il punto riassuma gli stessi valori di posizione e velocità.
Nel moto armonico semplice il periodo T è legato alla costante ω (detta pulsazione) dalla relazione:

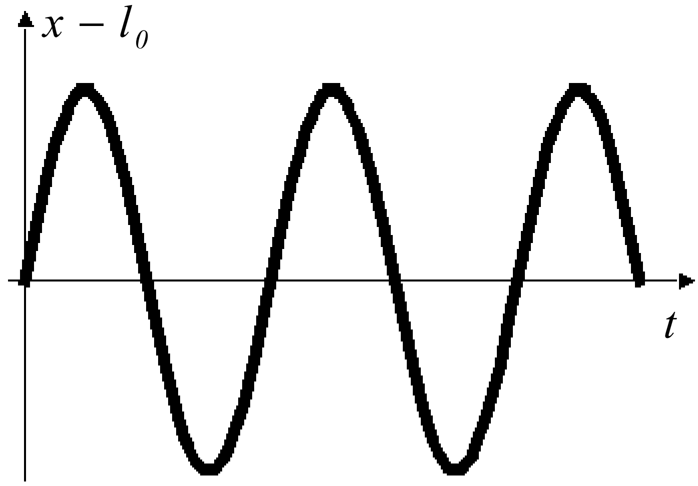
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Quindi ***T*** non dipende dalla ampiezza A. Alla pulsazione è legata la frequenza ν definita come:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

Poiché ***T*** è il tempo necessario a compiere un'oscillazione completa (di lunghezza 2A) riassumendo così la stessa posizione e la stessa velocità, la frequenza ν misura il numero di oscillazioni complete in 1s, e ω quelle in 2π secondi.

Frequenza e pulsazione hanno dimensioni inverse a quelle del periodo T, che essendo un tempo si misura in s: dunque nel S.I. si misurano in s^{-1}, 1 s^{-1} viene detto 1 Hertz (Hz).
L'equazione oraria del moto armonico può essere rappresentata graficamente:



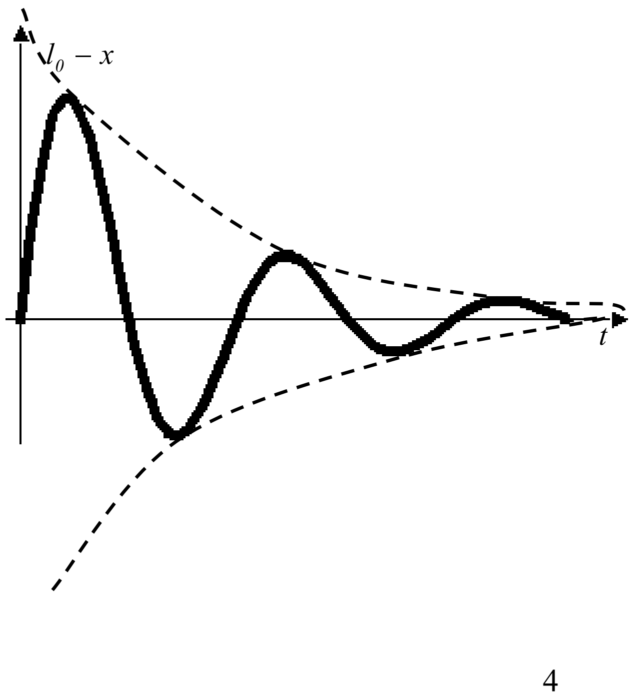
Oscillazioni armoniche smorzate

Riconsideriamo l'oscillatore di Fig 1 e 2 e supponiamo di immergerlo in un liquido viscoso (acqua o olio come negli ammortizzatori delle automobili). In questo caso, sulla massa m agirà, oltre alla forza esercitata dalla molla, anche una forza di attrito viscoso che tende a ridurre, in ogni istante la velocità del punto. Questa forza è proporzionale alla velocità del punto, ma è sempre diretta in senso opposto

$$\vec{F}_{visc} = -\beta\vec{v} \qquad (\beta > 0)$$

Nel caso unidimensionale la velocità $\vec{v}$ diventa dx/dt e la forza $-\beta\, dx/dt$. Applicando il secondo principio della dinamica si avrà:

$$-k(x-l_0) - \beta\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$



Cioè

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x-l_0) - C^2\frac{dx}{dt}$$

Avendo posto $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $C = \sqrt{\frac{\beta}{m}}$

La soluzione di questa equazione differenziale è

$$x(t) = l_0 + Ae^{-\frac{1}{2}C^2t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Dove A e φ, al solito sono due costanti che dipendono dalle condizioni iniziali.

Posto $\quad A^{'} = Ae^{-\frac{1}{2}C^2 t}$

La soluzione può scriversi $\quad x(t) = l_0 + A^{'} \cdot cos(\omega t + \varphi)$

Oss. La soluzione è $\quad x(t) = l_0 + A^{'} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

dove $\omega = \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \omega_0}$

Quindi la frequenza è minore di quella libera ω_0

.

Che è la stessa funzione già incontrata nel caso del moto armonico semplice, con la differenza che, in questo caso, l'ampiezza di oscillazione A' diminuisce al trascorrere del tempo (Fig.4). Notare che quando la forza di attrito è molto più piccola della forza elastica, il moto è ancora oscillatorio ma la sua ampiezza decresce nel tempo fino ad annullarsi. Ogni sistema che si comporta in questo modo viene detto un oscillatore smorzato

Infatti si ha che, pur diminuendo l'ampiezza di oscillazione (quindi diminuendo progressivamente la lunghezza del percorso di ogni oscillazione), il tempo necessario a percorrere un'oscillazione, cioè il periodo, rimane lo stesso:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Anche in questo caso dunque T non dipende dall'ampiezza, ma solo dalla pulsazione. Di questo si era già accorto Galileo osservando le oscillazioni smorzate di un lampadario nel duomo di Pisa. Utilizzando il battito del suo polso come rudimentale orologio egli stabilì che, nonostante la riduzione dell'ampiezza, il tempo necessario a compiere ogni oscillazione rimane costante.

Oscillazioni forzate

Per evitare lo smorzamento del moto di cui abbiamo appena discusso si può pensare, per ristabilire l'ampiezza iniziale, di intervenire con una forza esterna periodica, così da aumentare l'ampiezza del moto sia verso destra che verso sinistra.

Occorre a tal fine una forza che inverta la sua direzione, altrimenti aumenterebbe l'ampiezza in un verso e la diminuirebbe nell'altro. La più semplice forza con queste caratteristiche è una forza sinusoidale

$$F = F_0 \cdot \sin(\omega_{ext} t)$$

Aggiungendo questa forza il secondo principio si scrive:

$$-k(x - l_0) - \beta\, \dot{x} + F_0 \cdot \sin(\omega_{ext} t) = m\ddot{x}$$

E, ponendo al solito $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $C = \sqrt{\frac{\beta}{m}}$ e, inoltre $P = \frac{F_0}{m}$, l'equazione diventa:

$$\ddot{x} = -\omega^2 (x - l_0) - C^2 \dot{x} + P \cdot \sin(\omega_{ext} t)$$

$$x(t) = l_0 + A \cdot sin(\omega_{ext} t + \delta)$$

La soluzione di questa equazione è:

con $$A = \frac{P}{\sqrt{(\omega_{ext}{}^2 - \omega^2)^2 + C^4 \omega_{ext}{}^2}}$$ e $$\delta = arctg\left[-\frac{C^2 \omega_{ext}}{\omega^2 - \omega_{ext}{}^2}\right]$$

Come si vede dalla equazione oraria, il punto oscilla con una frequenza pari a quella della forza esterna applicata, mentre l'ampiezza dipende dalla differenza fra la pulsazione propria dell'oscillatore ω e quella della forza esterna ω_{ext} .

Normalmente l'intensità dello smorzamento viene descritta da una quantità Q, detta fattore di qualità definita come il numero di cicli richiesti affinché l'energia decada di un fattore 535 (545= $e^{2\pi}$, con e=2.71828, base dei logaritmi naturali.

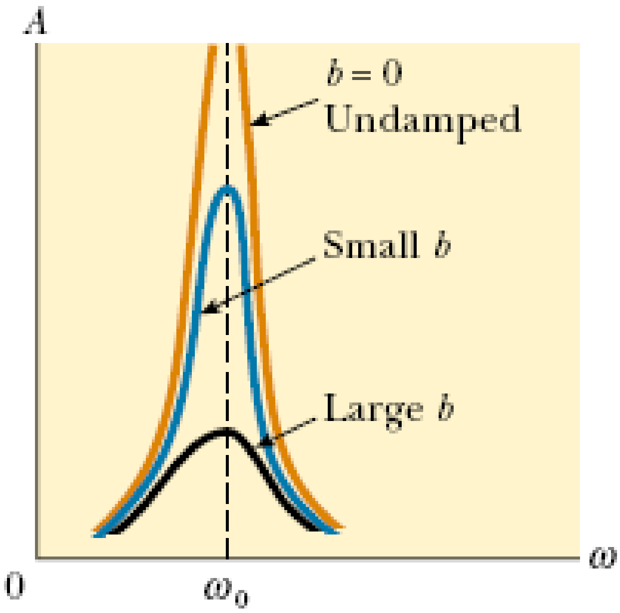


Grafico dell'ampiezza A in funzione della frequenza per un oscillatore armonico smorzato nel caso di forzante esterna periodica. Quando la frequenza della forzante uguaglia la frequenza naturale w0 si ha risonanza. Notare che la forma della curva di risonanza dipende dall'ampiezza del coefficiente di smorzamento b.

Se $\omega_{ext} = \omega$ si ha la cosiddetta "risonanza" e

$$A = \frac{P}{C^2 \omega} = \frac{F_0}{\beta \omega}$$

$$\delta = \frac{\pi}{2}$$

in questo caso, l'ampiezza ritorna costante ed è proporzionale a F0, l'intensità massima della forza esterna

Onde

Generalità sulle onde

Un'onda è una perturbazione che si propaga. Non importa quale sia la natura di questa perturbazione (meccanica, elettromagnetica): se essa è inizialmente confinata in una zona di spazio e progressivamente si estende ad altre zone, siamo in presenza di un'onda.
Se la propagazione avviene in un mezzo unidimensionale (un filo o una corda) si parla di onde a una dimensione, se il mezzo è bidimensionale (un piano), si parla di onde in due dimensioni, se tridimensionale (spazio) di onde a tre dimensioni.
Esempi di onde unidimensionali sono le vibrazioni delle corde degli strumenti ad arco: la perturbazione inizialmente confinata alla zona in cui la corda viene pizzicata (o sfregata dall'archetto) si estende a tutta la corda.
Esempi di onde bidimensionali sono le onde che si propagano in una superficie d'acqua ferma quando si lascia cadere un sasso: la perturbazione (oscillazione dell'acqua al di sopra o al di sotto del livello di quiete) inizialmente confinata alla zona di caduta del sasso, si estende a poco a poco a tutta la superficie.
Questo fatto è percepito dall'occhio sotto forma di cerchi concentrici di raggio crescente.
Esempi di onde tridimensionali sono le onde sonore: l'aria viene messa in vibrazione inizialmente in una zona ristretta (ad esempio dalla vibrazione di un diapason percosso) ma, successivamente, in qualunque direzione ci si ponga rispetto alla sorgente, si ode il suono.
Dunque la vibrazione si propaga in tutte le direzioni.
In generale si parla di onde trasversali quando la perturbazione è ortogonale alla direzione di propagazione, e di onde longitudinali quando la perturbazione è lungo la direzione di propagazione.
Trasversali sono ad esempio le onde meccaniche provocate dalla caduta di un sasso nell'acqua, longitudinali sono ad esempio le onde sonore e, in generale le onde di compressione.

Onde in una dimensione

Se si imprime ad una corda tesa un brusco spostamento trasversale, la forma della corda varia nel tempo. In base alla definizione che abbiamo dato siamo in presenza di un'onda, più precisamente di un'onda impulsiva o più semplicemente impulso. Un impulso è caratterizzato dal possedere un inizio e una fine.
Esempi di impulsi sono il rumore di uno sparo, il bagliore di un fulmine e un'onda di marea.
Come si vede dalla Fig 1, l'impulso si propaga lungo la corda con una velocità che dipende dalla natura della corda e della forza applicata per tenerla tesa. Più precisamente se ρ è la densità del materiale di cui è costituita la corda e A la sua sezione si dimostra che

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

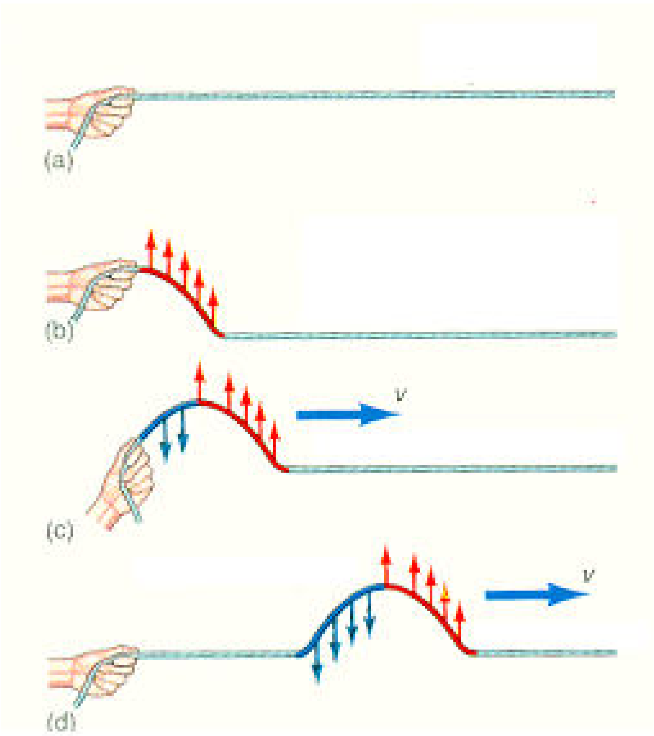


Fig 1 La perturbazione indotta in una corda ad un certo istante in una certa zona (a), si propaga nel tempo (b), (c) e (d) ad altre zone della corda.

Se si appende un piccolo peso alla corda in un certo punto, si vede che, quando tale punto viene raggiunto dalla perturbazione, il peso acquisisce energia e quantità di moto (Fig 2); se ne deduce che l'onda trasporta energia e quantità di moto.

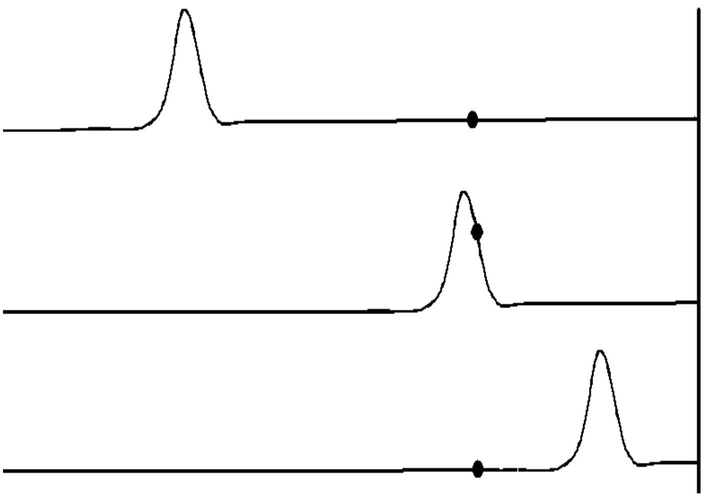


Fig 2 Quando il pesetto (•) viene raggiunto dall'onda acquista energia e quantità di moto

Funzione d'onda

Consideriamo (Fig 3) l'impulso in una corda all'istante t=0. La forma della corda per t=0 può essere rappresentata da una funzione

$$y = f(x)$$

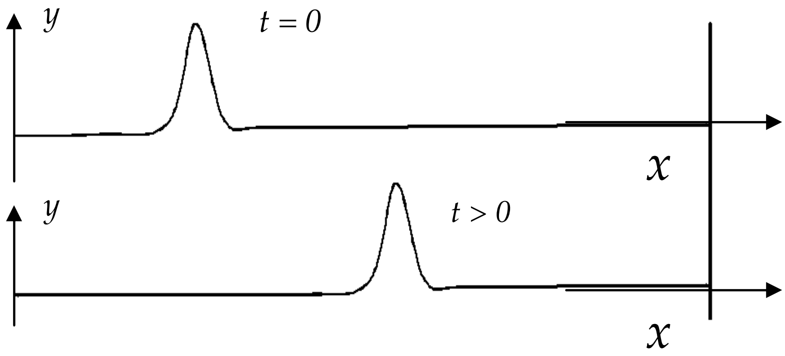


Fig 3 A t=0 la perturbazione è descritta da una funzione y=f(x)
mentre a un t generico la funzione è diversa
A un generico istante successivo t la forma della corda è rappresentata da una funzione diversa, che descrive una eguale deformazione, ma centrata in una diversa posizione.

Se ora introduciamo un secondo sistema di riferimento (x',y') che si muova rispetto a (x,y) con una velocità v pari a quella con cui viaggia la perturbazione lungo la corda (Fig 4), rispetto a questo riferimento l'impulso è fermo e la sua forma è descritta da una funzione y'=f(x') che non dipende dal tempo

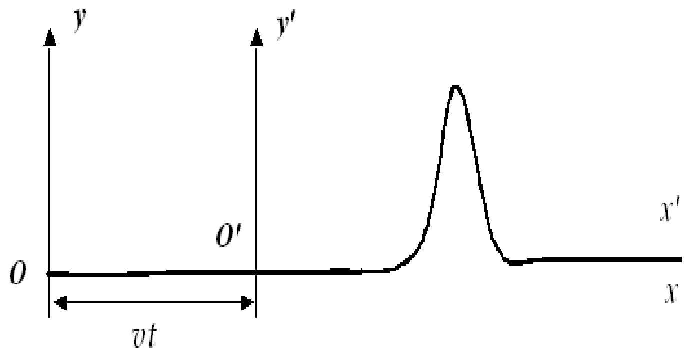


Fig 4 In un riferimento (x',y') in moto rispetto a (x,y) con la stessa velocità dell'impulso l'impulso è fermo.

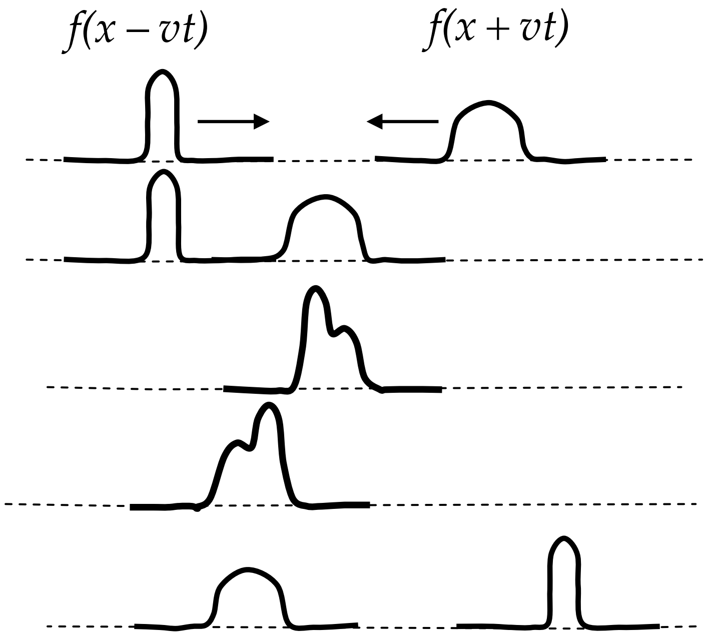
Ora, evidentemente

$y' = y$ e $x = x' + vt \Rightarrow x' = x - vt$
quindi la funzione $y' = f(x')$ in O' diventa in O $y = f(x - vt)$.
Ovviamente se l'impulso si propaga nel verso opposto v diventa $-v$ e la funzione d'onda diventa $y = f(x + vt)$

Questa funzione descrive come si deforma la corda al trascorrere del tempo e prende il nome di funzione d'onda. Pur avendo ricavato la struttura della funzione d'onda nell'ipotesi di un'onda impulsiva, la conclusione vale per ogni tipo di onda.

Principio di sovrapposizione

Tale principio afferma che:
Due onde si propagano in un dato mezzo indipendentemente l'una dall'altra: in ogni punto dello spazio la perturbazione complessiva è la somma delle perturbazioni dovute a ciascuna onda.



Consideriamo ad esempio due onde impulsive che si propagano lungo la corda in direzioni opposte, con velocità rispettivamente v e $-v$.
Se $f_1(x - vt)$ è la funzione d'onda della prima e $f_2(x + vt)$ quella della seconda, in base al principio di sovrapposizione, la funzione d'onda che descrive la deformazione complessiva della corda è:

$$\phi(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

Fig. 05 Due onde impulsive viaggiano in verso opposto lungo la stessa corda. Le illustrazioni da (a) a (e) mostrano come si deforma la corda in istanti successivi.

Onde armoniche unidimensionali

Un tipo di funzione d'onda particolarmente importante è quella che ha la forma di una funzione circolare (seno o coseno)

$$y(x,t) = y_0 \sin[k(x - vt)]$$

dove k prende il nome di numero d'onda e y_0 di ampiezza. Questa funzione si può anche scrivere come:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_0 \sin[kx - kvt)] \\ &= y_0 \sin[kx - \omega t)] \end{aligned}$$

avendo posto $\omega = kv$
ω prende il nome di pulsazione
Tali onde si dicono armoniche o sinusoidali e possono essere realizzate ad esempio attaccando l'estremo libero della corda a un diapason che vibri di moto armonico semplice con pulsazione ω perpendicolarmente alla corda stessa.
Supponiamo ad un certo istante di scattare un'istantanea a una corda che vibra armonicamente: si otterrà un'immagine come quella di Fig 4:

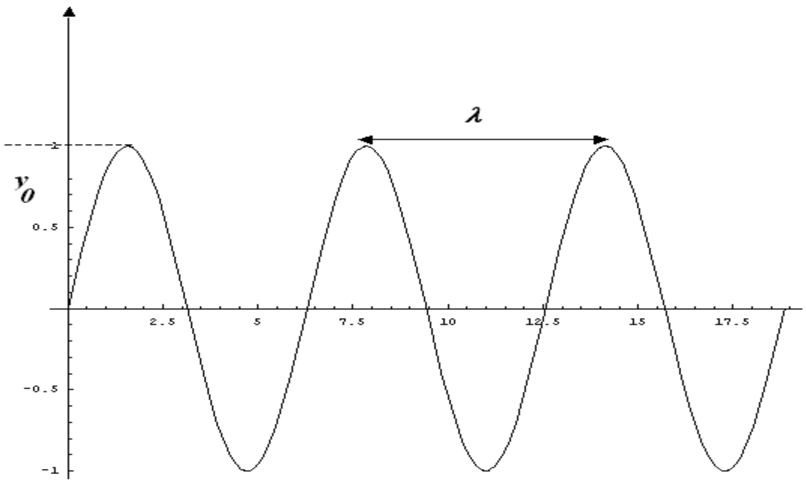


Fig 5 La forma della corda a un istante fissato t_0. E' indicata la lunghezza d'onda L'equazione di questa immagine è

$$y(x,t_0) = y_0 \sin[kx - \omega t_0]$$
$$= y_0 \sin[kx - \delta]$$

avendo posto $\delta = \omega t_0 = \cos t$

Si chiama lunghezza d'onda la distanza minima fra due punti della corda che producano lo stesso valore della funzione y.

Dette x_1 e x_2 le ascisse di tali punti, perché ciò accada occorre che gli argomenti della funzione seno corrispondente differiscano di 2π , cioè:

$kx_2 - \delta = kx_1 - \delta + 2\pi \Rightarrow k(x_2 - x_1) = \lambda$

ma essendo $(x_2 - x_1) = \lambda$ si ha che :

$$k\lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Se ora invece di fissare il tempo, fissiamo la nostra attenzione su un punto della corda di ascissa x_0, tale punto al trascorrere del tempo, oscillerà lungo *y* secondo la legge:

$$y(x,t) = y_0 \sin[kx_0 - \omega t]$$

si tratta cioè di un moto armonico di pulsazione ω e di periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{v}$$

Ricordando la definizione della frequenza ν

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$$

si ottiene:

$$\lambda \nu = v$$

Il prodotto fra lunghezza d'onda e frequenza è pari alla velocità di propagazione dell'onda.
Abbiamo visto che v dipende dalla forza con cui viene tesa la corda e dalle sue proprietà. Se dunque consideriamo due corde con caratteristiche diverse e facciamo vibrare gli estremi liberi alla stessa frequenza, poiché le velocità di propagazione sono diverse, le onde che si creano avranno diversa lunghezza d'onda.

Flusso di energia

Abbiamo già osservato come, nella sua propagazione, un'onda trasporti energia e quantità di moto.
Si definisce "intensità" di un'onda **I** l'energia che fluisce nell'unità di tempo attraverso un'area unitaria perpendicolare alla direzione di propagazione.
Occorre precisare meglio il concetto di area unitaria: esso dipende dalla dimensionalità dell'onda. Nel caso di onde unidimensionali come le onde meccaniche in una corda, non c'è nessuna area unitaria e l'intensità è semplicemente l'energia trasportata attraverso un punto della corda nell'unità di tempo. Nel caso di onde bidimensionali, come le onde in una superficie d'acqua, l'area unitaria si riduce a un segmento di lunghezza unitaria. Solo nel caso di onde tridimensionali il concetto di area unitaria acquista pienamente senso.
E' piuttosto complicato scrivere l'espressione dell'intensità di un'onda, per un'onda di forma qualsiasi. Nel caso di un'onda armonica, tuttavia, si può mostrare che l'intensità dell'onda varia nel tempo e che il valore medio dell'intensità < I > su un intervallo di tempo pari al periodo T è proporzionale al quadrato dell'ampiezza A dell'onda

$$< I > \propto A^2$$

Riflessione delle onde

Abbiamo finora implicitamente supposto che le caratteristiche del mezzo in cui l'onda si propaga siano omogenee, che cioè siano le stesse in tutti i punti.
In particolare, nel caso delle onde trasversali in una corda, abbiamo visto che la velocità di propagazione dipende dalla sezione e dalla densità della corda.
Se ora immaginiamo (Fig 09) che, a partire da un certo punto, le caratteristiche fisiche della corda cambino, si può assistere a un nuovo fenomeno:

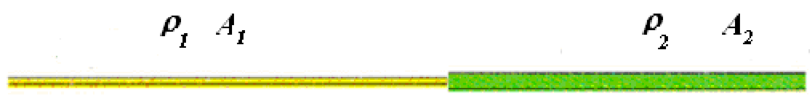
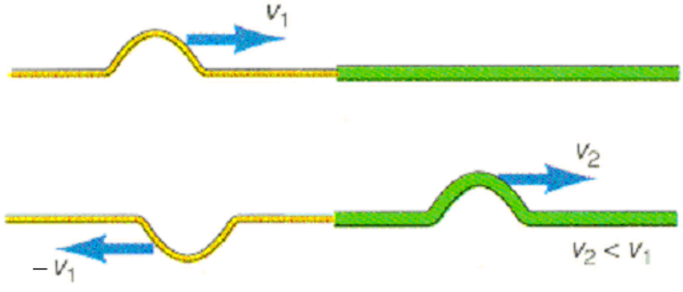


Fig 09 Una corda costituita di due parti con proprietà fisiche diverse.

Quando la perturbazione raggiunge il punto di discontinuità, essa si divide in due, una (onda riflessa) che ritorna indietro, e una (onda rifratta) che prosegue lungo il tratto con diverse caratteristiche.
Con riferimento alla Fig.09, supponiamo di generare una perturbazione nel tratto di caratteristiche (ρ_1, A_1) che viaggia verso destra con velocità

$$v_1 = \sqrt{\frac{F}{\rho_1 A_1}}$$

Giunta nel punto D quest'onda si divide in un'onda rifratta che prosegue lungo il tratto di caratteristiche (ρ_2, A_2) con velocità:



$$v_2 = \sqrt{\frac{F}{\rho_2 A_2}}$$

e un'onda riflessa che retrocede lungo il tratto di caratteristiche (ρ_1, A_1) con velocità $-v_1$.
Più precisamente, poiché la velocità dipende solo dal prodotto ρA, se $\rho_1 A_1 < \rho_2 A_2$ si ha la situazione di

Fig.10.

Fig 10 Una perturbazione si scinde in un'onda riflessa e in una rifratta. Poiché $\rho_1 A_1 < \rho_2 A_2$ la perturbazione riflessa si inverte.

Essendo

$$v_1 = \sqrt{\frac{F}{\rho_1 A_1}} \text{ e } v_2 = \sqrt{\frac{F}{\rho_2 A_2}}$$

si ha

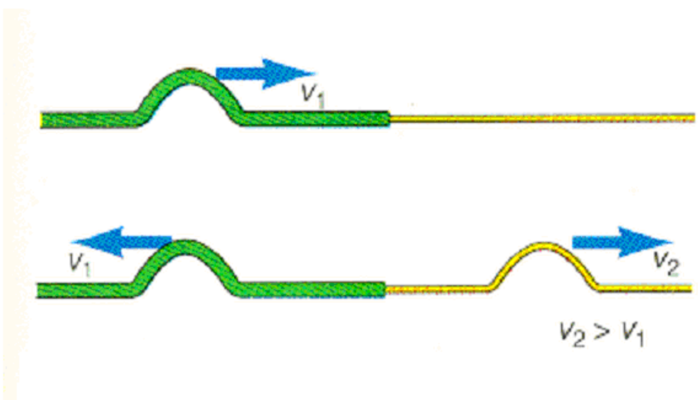
$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1}} > 1$$

cioè v1>v2. Quindi l'onda rifratta si muove più lentamente dell'onda riflessa.
Questo risultato può essere espresso in modo leggermente diverso. Poiché la frequenza ni della perturbazione dipende solo dalle caratteristiche della sorgente, si ha

$$v_1 = \nu\lambda_1 \; e \; v_2 = \nu\lambda_2$$

Per cui da $v_1 > v_2$, segue

$$\lambda_1 > \lambda_2$$



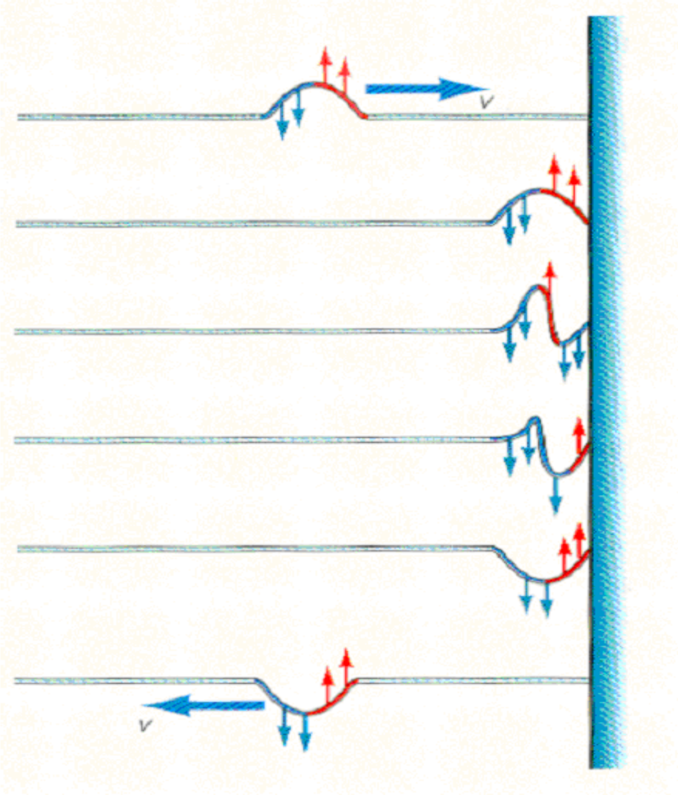
cioè l'onda rifratta ha lunghezza d'onda inferiore rispetto all'onda riflessa.
Se invece (Fig. 11) $\rho_1 A_1 > \rho_2 A_2$ l'onda riflessa non cambia segno e $v_1 < v_2$, cioè

$$\lambda_1 < \lambda_2$$

cioè l'onda rifratta ha lunghezza d'onda superiore all'onda riflessa

Fig.11 Un'onda si propaga da un mezzo più denso a uno meno denso

$(\rho_1 A_1 > \rho_2 A_2)$.



Come caso particolare di questi risultati possiamo chiederci che cosa succede a una perturbazione quando essa raggiunge l'estremo fisso dalla corda. Possiamo immaginare che l'estremo fisso rappresenti un cambio nelle proprietà della corda dal valore (ρ, A) al valore infinito.
In tal caso $\upsilon_I = 0$ e non c'è onda trasmessa, mentre l'onda riflessa cambia segno (Fig.12).

Fig. 12 Riflessione di un'onda all'estremo fisso.

Onde sonore

A differenza delle onde finora esaminate (come ad esempio le onde meccaniche in una corda), le onde sonore sono onde longitudinali, in cui la vibrazione delle particelle del mezzo è nella stessa direzione di propagazione dell'onda.
Si consideri ad esempio una molla a spirale tesa in cui (Fig 14) un'estremità viene alternativamente spinta e tirata: lungo la molla si propagano una serie di compressioni (zone in cui le spirali sono più vicine fra loro) e di espansioni o rarefazioni (zone in cui le spirali sono più lontane fra loro).

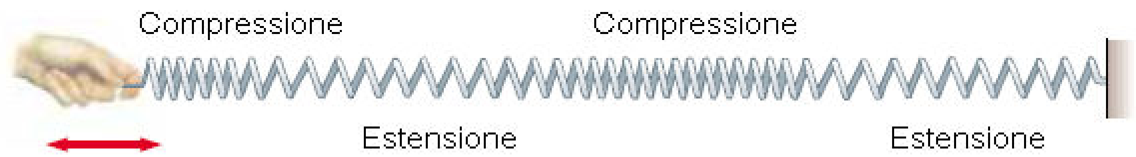


Fig. 14 Muovendo alternativamente avanti e indietro l'estremo libero di una molla si propagano rarefazioni e compressioni.

Consideriamo il caso della membrana di un a tamburo che viene percossa: la membrana (Fig. 15) oscilla comprimendo e rarefacendo l'aria circostante e queste rarefazioni e compressioni si propagano per gli strati d'aria successivi.
Fig. 15 Quando la membrana di un tamburo si alza (a) crea una zona di compressione, quando si abbassa (b) una zona di rarefazione.

Le onde sonore dunque, per propagarsi, richiedono l'esistenza di un mezzo le cui particelle vengano messe in vibrazione. Di regola questo mezzo è l'aria ma il suono può propagarsi anche in altri mezzi, seppure con velocità diversa (Tab. 1)

Tab 1 Velocità delle onde sonore in alcuni materiali

Materiale	*Velocità (m/s)*
Aria	343
Elio	1005
Idrogeno	1300
Acqua	1440
Ferro	5000
Legno	4000

Poiché, come abbiamo visto sussiste la relazione

$$\lambda\nu = \mathrm{v}$$

dove ni è la frequenza della sorgente e v è la velocità di propagazione dell'onda, la lunghezza d'onda di un'onda sonora cresce proporzionalmente alla velocità. Nel passaggio da aria ad acqua, ad esempio, la velocità, e quindi la lunghezza d'onda, cresce circa di quattro volte.

Caratteristiche del suono

Le onde sonore possono essere caratterizzate sulla base di tre parametri:

1. Tono
2. Volume o intensità
3. Timbro o qualità

Fa parte dell'esperienza di ciascuno il distinguere fra suoni più acuti e suoni con tono più grave (si pensi rispettivamente al suono di un violino e di un contrabbasso).
Galileo associò per primo queste sensazioni alla frequenza dell'onda sonora: più bassa è la frequenza, più grave è il suono, mentre più alta è la frequenza, più acuto è il suono. L'orecchio umano è in grado di percepire suoni la cui frequenza sia compresa nell'intervallo 20 Hz-20000 Hz (banda dell'udibile).
I suoni a frequenza maggiore di 20000 Hz vengono detti ultrasuoni e possono essere percepiti da molti animali. I cani ad esempio sentono suoni fino a 50000 Hz e i pipistrelli fino a 100000 Hz.
I suoni a frequenza minore di 20 Hz sono detti infrasuoni. Sono sorgenti di infrasuoni i terremoti, i tuoni e le vibrazioni di alcuni macchinari pesanti. Questi suoni, sebbene non udibili, possono recare notevoli danni al corpo umano attraverso fenomeni di risonanza.

La distinzione fra suoni più forti e suoni più deboli dipende dall'intensità dell'onda. Come abbiamo visto l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda e rappresenta l'energia trasportata nell'unità di tempo attraverso un'area unitaria perpendicolare alla direzione di propagazione: come tale si misura in W/m^2.
L'orecchio umano può percepire suoni di intensità compresa fra 10^{-12} W/m^2e 1 W/m^2 (al di sopra di questo valore si avverte una sensazione dolorosa). La percezione soggettiva del volume di un suono non è tuttavia proporzionale all'intensità dell'onda sonora: è vero che quanto maggiore è l'intensità dell'onda tanto maggiore appare il volume del suono, ma un suono che dia la sensazione di un volume doppio richiede un'onda di intensità circa dieci volte superiore. Per esempio, un'onda di intensità 10^{-2} W/m^2 dà la sensazione di un suono circa due volte più forte di un'onda di intensità dieci volte più piccola, cioè 10^{-3} W/m^2 e quattro volte più forte di un'onda di intensità 10^{-4} W/m^2
A causa di questa relazione fra volume percepito e intensità dell'onda, si preferisce misurare l'intensità del suono (cioè la grandezza fisicamente determinabile) usando una scala logaritmica.
L'unità di misura di questa scala è il bel, anche se comunemente viene usato il decibel (dB) pari a 1/10 di bel.
Il livello di intensità B di un'onda è definito dall'equazione:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{dB}) = 10\log_{10}\left(\frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{I}_0}\right)$$

dove I è l'intensità dell'onda e I_0 è un'intensità di riferimento, di solito assunta pari alla soglia di udibilità (1.0×10^{-12} W/m^2).
Ad esempio, il livello di intensità di un suono la cui intensità sia
I= 1.0×10^{-10} W/m^2.sarà

$$\boldsymbol{B} = 10\log_{10}\left(\frac{10^{-10}}{10^{-12}}\right) = 10\log_{10}\left(10^2\right) = 20$$

si nota che il livello di intensità corrispondente alla soglia di udibilità 10^{-12} W/m^2 è $\boldsymbol{B} = 10\log_{10}\left(\dfrac{10^{-12}}{10^{-12}}\right) = 10\log_{10}(1) = 0$.

La Tab II raccoglie le intensità e i livelli di intensità di alcuni suoni

<u>Tab II Intensità media di alcuni suoni</u>

Sorgente	Livello di intensità (dB)	Intensità W/m^2
Fruscio di foglie	10	1.0×10^{-11}
Sussurro	20	1.0×10^{-10}
Conversazione	65	3.2×10^{-6}
Traffico intenso	70	1.0×10^{-5}
Sirena a 30 m	100	1.0×10^{-2}
Concerto rock	120	1.0
Jet a 30 m	140	100

Timbro (o qualità): se un violino e un pianoforte emettono la stessa nota con la stessa intensità, si percepisce comunque una chiara differenza fra i due suoni: questa differenza viene espressa come differenza di timbro o qualità del suono.
Se un diapason che vibra emette una sola frequenza, uno strumento musicale emette di regola note che sono la sovrapposizione di varie frequenza.
Limitandoci al caso degli strumenti a coda e con riferimento alla Fig 012, abbiamo visto che le onde stazionarie con cui una corda fissa agli estremi può vibrare corrispondono a valori definiti delle frequenze: la frequenza più bassa prende il nome di fondamentale, le successive quello di prima, seconda, … armonica.
Quando uno strumento emette un suono vengono simultaneamente emesse diverse frequenze, seppure con diversa ampiezza, che, in base al principio di sovrapposizione, costituiscono la forma d'onda definitiva.

La Fig 019 mostra il risultato della sovrapposizione delle tre forme d'onda stazionarie di Fig 012 con le ampiezze nel rapporto 1:0.5:0.3.

Fig 019 Sovrapposizione delle tre forme d'onda di Fig 012 (fondamentale e prime due armoniche) con diversa ampiezza.

Il suono emesso da uno strumento può essere dunque caratterizzato dalle armoniche presenti e dalla loro ampiezza relativa. Tale procedura prende il nome di analisi armonica e il risultato è espresso nel cosiddetto Spettro di Frequenza che esprime l'intensità relativa delle frequenze presenti.
La Fig 020 mostra un esempio di tale analisi a una nota di ….HZ.

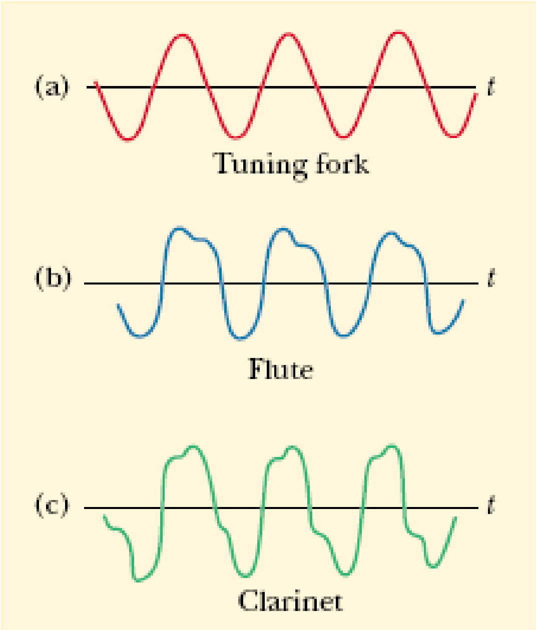


Figure 18.19 Sound wave patterns produced by (a) a tuning fork, (b) a flute, and (c) a clarinet, each at approximately the same frequency.

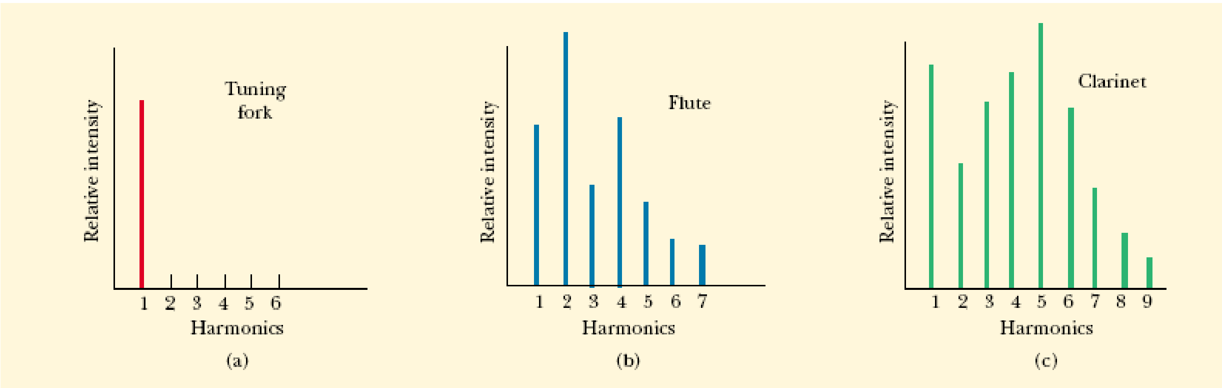


Figure 18.20 Harmonics of the wave patterns shown in Figure 18.19. Note the variations in intensity of the various harmonics.

Fig 020 Spettro delle frequenze presenti nella nota emessa da…l'altezza dei segmenti misura l'intensità relativa della corrispondente frequenza.

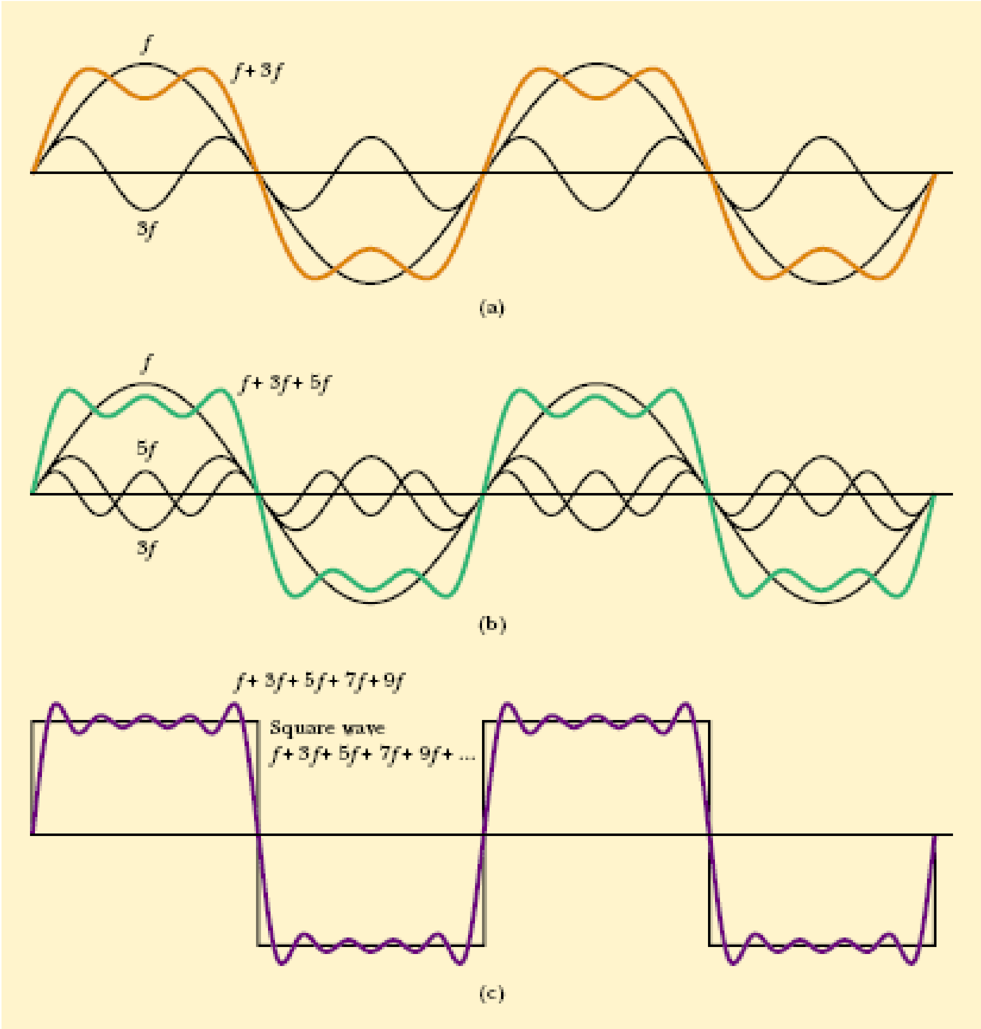


Figure 18.21 Fourier synthesis of a square wave, which is represented by the sum of odd multiples of the first harmonic, which has frequency f. (a) Waves of frequency f and $3f$ are added. (b) One more odd harmonic of frequency $5f$ is added. (c) The synthesis curve approaches the square wave when odd frequencies up to $9f$ are added.

Effetto Doppler

Consideriamo il caso di una sorgente sonora che emette onde sonore in aria di frequenza ν. Se υ è la velocità del suono in aria la lunghezza d'onda corrispondente è:

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}$$

mentre il periodo T dell'onda (il tempo cioè intercorrente fra due successive compressioni o rarefazioni) è

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{\upsilon}$$

Supponiamo ora che la sorgente si muova con velocità υ_S rispetto all'aria (si pensi alla sirena di un'ambulanza o al fischio di un treno): mentre la zona di compressione ha compiuto, nel tempo T, una distanza $d = \upsilon T = \lambda$ (essendo υ la velocità del suono), la sorgente si è spostata di $d_S = \upsilon_S T$, cosicchè quando si crea seconda zona di compressione, questa dista dalla prima:

$$d - d_S = \lambda - \upsilon_S T = \lambda - \upsilon_S \frac{\lambda}{\upsilon} = \lambda\left(1 - \frac{\upsilon_S}{\upsilon}\right)$$

Ma poichè $d - d_S$ è la distanza fra due zone di compressione, esso rappresenta la lunghezza d'onda λ' del suono, cioè:

$$\lambda' = \lambda\left(1 - \frac{\upsilon_S}{\upsilon}\right)$$

Un osservatore che veda la sorgente sonora avvicinarsi, percepisce dunque la frequenza

$$\nu' = \frac{\upsilon}{\lambda'} = \frac{\upsilon/\lambda}{1 - \frac{\upsilon_S}{\upsilon}} = \frac{\nu}{1 - \frac{\upsilon_S}{\upsilon}}$$

e, poichè il denominatore è < 1, $\nu' > \nu$.

Se ad esempio $\upsilon_S = 30\ m/s$, essendo v=343 m/s, una frequenza di emissione $\nu = 400\,Hz$ verrà percepita come

$$\lambda' = \frac{400Hz}{1 - \frac{30m/s}{343m/s}} \cong 440Hz$$

Se invece la sorgente si allontana dall'osservatore, la nuova lunghezza d'onda sarà $\lambda' = d + d_S$, cosicchè

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{\upsilon_S}{\upsilon}}$$

L'effetto Doppler si manifesta anche quando è l'osservatore a muoversi rispetto alla sorgente: se v0 è la velocità dell'osservatore, con considerazioni analoghe a quelle precedenti si può mostrare che

$$\nu' = \left(1 + \frac{\upsilon_O}{\upsilon}\right)\nu$$

se l'osservatore si avvicina alla sorgente, mentre

$$\nu' = \left(1 - \frac{\upsilon_O}{\upsilon}\right)\nu$$

se l'osservatore si allontana dalla sorgente.

Si possono riassumere tutte le relazioni sin qui trovate in un'unica formula

$$\nu' = \left(\frac{\upsilon \pm \upsilon_O}{\upsilon \mp \upsilon_S} \right) \nu$$

dove i segni superiori si utilizzano nel caso dell'avvicinamento fra sorgente e osservatore, e quelli inferiori in caso di allontanamento.
Quando un'onda sonora è riflessa da un ostacolo in movimento, la frequenza dell'onda riflessa, a causa dell'effetto Doppler, sarà diversa da quella dell'onda incidente.

Consideriamo ad esempio il caso di un'onda sonora di frequenza ν = 6000 *Hz* che incide su un oggetto che si sta avvicinando alla sorgente alla velocità di 4 m/s . In questo caso si ha a che fare con due spostamenti Doppler: il primo in quanto l'oggetto si comporta come un osservatore in movimento che si sta avvicinando alla sorgente; come tale esso percepisce una frequenza

$$\nu' = \left(1 + \frac{\upsilon_O}{\upsilon} \right) \nu = \left(1 + \frac{4}{343} \right) 6000 \cong 6070 Hz$$

In secondo luogo, l'oggetto si comporta nel riflettere il suono, come una sorgente in movimento, cosicchè la frequenza riflessa è

$$\nu'' = \frac{1}{1 - \frac{\upsilon_S}{\upsilon_O}} \nu' = \frac{1}{1 - \frac{4}{343}} 6070 \cong 6140 Hz$$

L'effetto Doppler è utilizzato in una serie di applicazioni diagnostiche in medicina.

Interferenza

Abbiamo visto che, in base al principio di sovrapposizione, due onde possono essere sommate dando così luogo ad una nuova forma d'onda. Vediamo ora di approfondire questo fatto con un esempio semplice. Consideriamo due onde sinusoidali di eguale ampiezza, frequenza e lunghezza d'onda che si propagano nella stessa direzione. Le due onde differiscono solo nella fase iniziale (Fig 6)

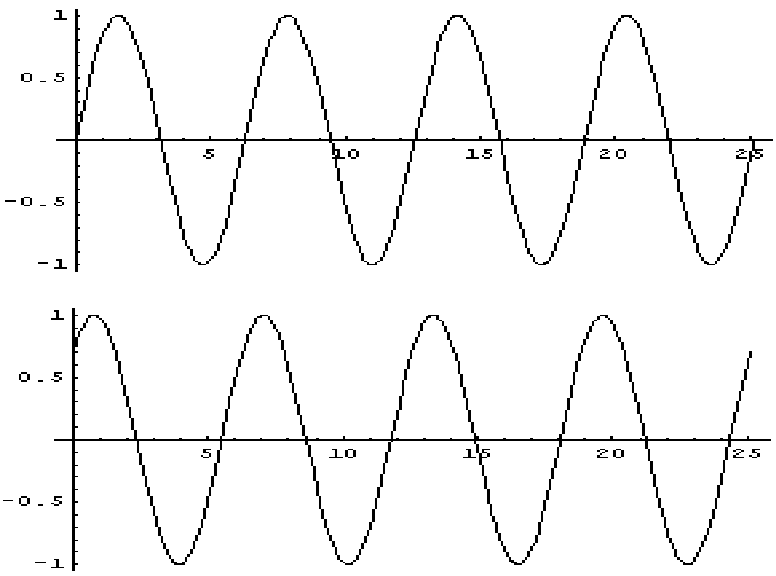


Fig 6 Due onde sinusoidali di eguale ampiezza, lunghezza d'onda e frequenza ma diversa fase iniziale

Matematicamente le funzioni d'onda delle due onde saranno:

$$y_1(x,t) = A\cos[kx - \omega t]$$
$$y_2(x,t) = A\cos[kx - \omega t - \delta]$$

dove δ = costante è lo sfasamento fra le due onde.

In base al principio di sovrapposizione, la perturbazione complessiva è:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A[\cos[kx - \omega t] + \cos[kx - \omega t - \delta]]$$

Applicando le formule di prostaferesi:

$$\cos[\alpha] + \cos[\beta] = 2\cos\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\cos\left[\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

con $\alpha = kx - \omega t$ e $\beta = kx - \omega t + \delta = \alpha - \delta$

cosicché:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2\alpha-\delta}{2} = \alpha - \frac{\delta}{2} = kx - \omega t - \frac{\delta}{2}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha-\alpha+\delta}{2} = +\frac{\delta}{2}$$

Per cui

$$\begin{aligned} y(x,t) &= 2A\cos\left[kx - \omega t - \frac{\delta}{2}\right]\cos\left[\frac{\delta}{2}\right] \\ &= 2A\cos\left[\frac{\delta}{2}\right]\cos\left[kx - \omega t - \frac{\delta}{2}\right] \end{aligned}$$

L'onda risultante è dunque ancora un'onda armonica della stessa frequenza e lunghezza d'onda ma di ampiezza:

$$A' = 2A\cos\left[\frac{\delta}{2}\right]$$

che dipende dallo sfasamento iniziale delle due onde. Il valore di A' varia fra 2 (se δ=0) e 0 (se δ=π).

Per quanto riguarda l'intensità dell'onda risultante, sappiamo che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, cioè:

$$I \propto A^2 = 4A^2 \cos^2\left[\frac{\delta}{2}\right]$$

Ora, l'intensità di ciascuna delle due onde è proporzionale ad A_2

$$I_1 = I_2 \propto A^2$$

per cui

$$I \propto 4I_1 \cos^2\left[\frac{\delta}{2}\right]$$

Cioè l'intensità dell'onda risultante varia fra 4 volte l'intensità di ciascuna delle due onde (se $\delta=0$) e 0 (se $\delta=\pi$). Se ne conclude, contrariamente all'intuizione, che sovrapponendo due onde di data intensità (che trasportano dunque una data quantità di energia) non si ottiene un'intensità pari alla loro somma $2I_1$ (cioè un'onda che trasporti energia pari alla somma delle energie trasportate da ciascuna) ma un'intensità compresa fra 0 e quattro volte l'intensità di ciascuna.

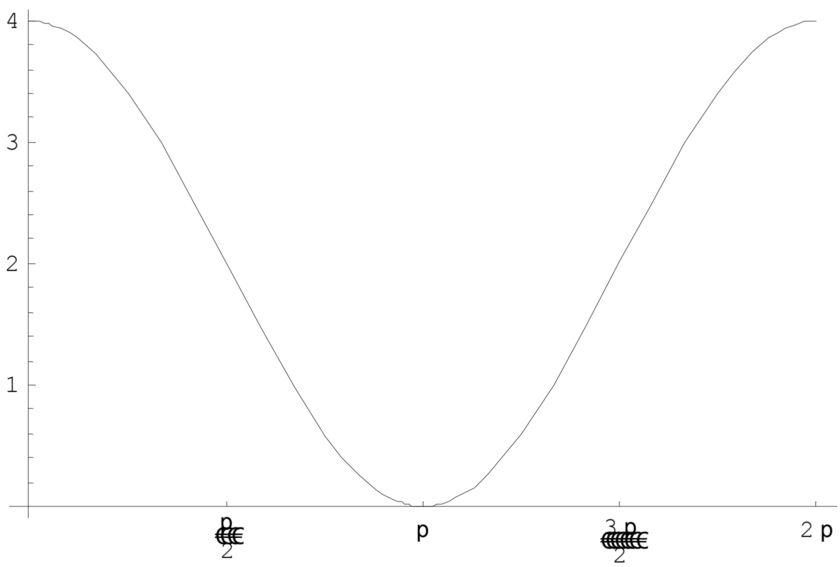
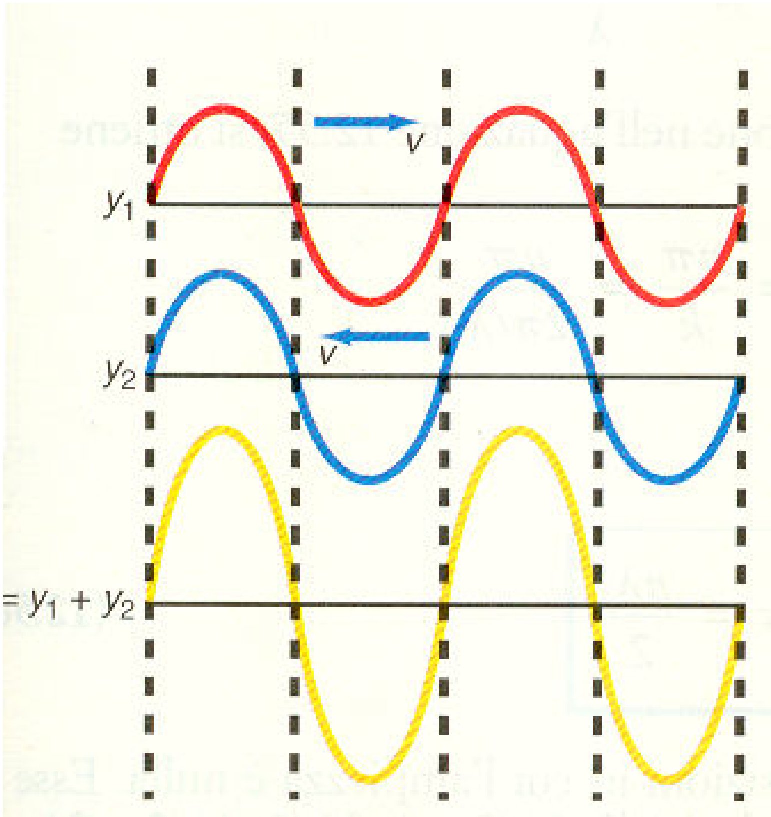


Fig 6 Intensità di un'onda ottenuta sovrapponendo due onde di intensità I_1 in funzione dello sfasamento δ.

Onde stazionarie

Se ora supponiamo che la corda sia fissata ad entrambi gli estremi, l'impulso invertirà la direzione di propagazione e la polarità ogni volta che raggiunge ciascun estremo. Nell'ipotesi che non venga dissipata energia lungo la corda. Nell' ipotesi che non venga dissipata energia lungo la corda, questo significa che viene creato un regime stazionario in cui ogni elemento della corda è raggiunto periodicamente da un impulso di un segno e da uno di segno opposto.

Se anzichè un'onda impulsiva, consideriamo un'onda armonica, anche l'onda riflessa sarà un'onda armonica, ma poiché, come abbiamo visto, ad ogni istante l'onda armonica interessa tutta la corda, se ne conclude che la corda sarà simultaneamente sede sia dell'onda incidente che dell'onda riflessa. Le due onde dunque interferiranno l'una con l'altra.



La trattazione matematica di questa situazione permette di concludere che le onde stazionarie generate da questa interferenza possono avere solo alcune frequenze espresse dalla formula:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho A}}\frac{1}{2L}n\,;(n = 1,2,\ldots)$$

dove L è la distanze fra i due estremi a cui è fissata la corda. La Fig.13 mostra le onde stazionarie corrispondenti ad alcuni valori di n: come si vede per ogni valore di n esistono alcuni punti della corda (nodi) in cui y=0, e altri in cui y raggiunge il valore massimo.

Fig 13 Onde stazionarie in una corda fissata agli estremi.

La formula che esprime le possibili frequenze delle onde stazionarie in una corda fissata agli estremi rappresenta la base della progettazione di tutti gli strumenti musicali a corda.

Battimenti

L'interferenza, come abbiamo visto, nasce dalla sovrapposizione di due o più onde con la stessa frequenza. Poiché l'onda risultante dipende dalle coordinate del mezzo di propagazione, il fenomeno viene detto interferenza spaziale (quello che succede nelle corde e nei tubi sonori). Si può considerare anche un altro caso di interferenza, quello che risulta dalla sovrapposizione di due onde con una piccola differenze in frequenza. Si può dimostrare che in questo caso le onde risulteranno in concordanza e in opposizione di fase in modo periodico in maniera tale da avere quella che viene detta interferenza temporale. Se, per esempio si mettono in vibrazione due diapason di frequenze leggermente diverse si udirà un suono periodico di intensità variabile: fenomeno è detto battimenti.
Battimenti è la variazione periodica in intensità di un dato punto provocata dalla sovrapposizione di due onde di frequenza leggermente diversa. Il numero dei massimi di intensità al secondo o frequenza di battimenti, è uguale alla differenza in frequenza fra le due onde. Il massimo della frequenza udibile dall'orecchio umano è di circa 20 battimenti/sec. Quando la frequenza di battimenti supera questo valore i battimenti si mescolano in modo indistinguibile con i suoni che li producono. Consideriamo due onde sonore di uguale ampiezza che si propagano in un mezzo con frequenze f_1 e f_2 . E' possibile sommare queste onde, in base al principio di sovrapposizione, e mediante un'identità trigonometrica, esprimere la risultante come:

$$y = \left[2A\cos\left(2\pi\frac{f_1 - f_2}{2}t\right)\right]\cos\left(2\pi\frac{f_1 + f_2}{2}t\right)$$

Notiamo che il termine di ampiezza è dato da:

$$A_R = 2A\cos\left(2\pi\frac{f_1 - f_2}{2}t\right)$$

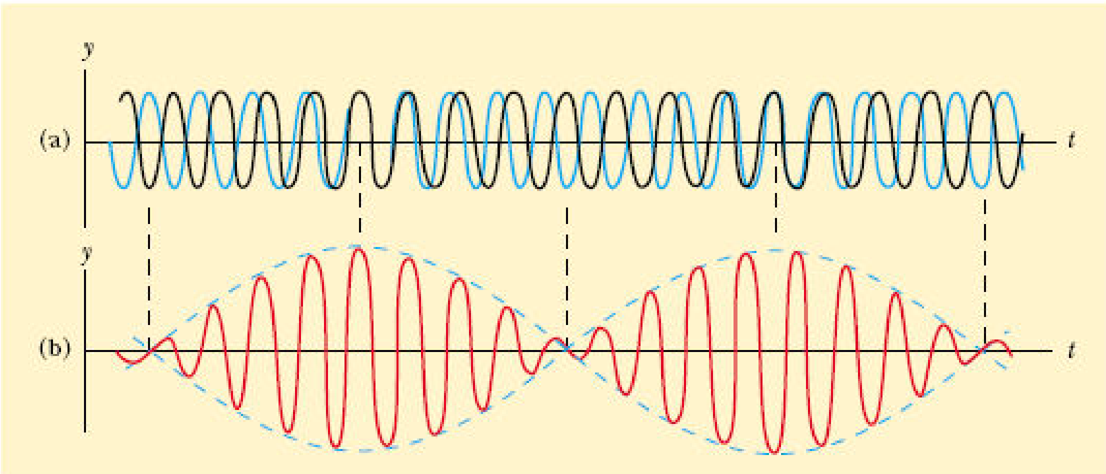
Quindi, l'ampiezza e conseguentemente l'intensità del suono risultante variano nel tempo. La linea blu tratteggiata nella Figura XXXX è la rappresentazione grafica di questa ampiezza. Notare che i massimi di ampiezza si hanno quando

$$\cos\left(2\pi\frac{f_1 - f_2}{2}t\right) = \pm 1$$

Cioè ci sono due massimi in ogni periodo dell'onda risultante. Poiché l'ampiezza varia in funzione della frequenza come $(f_1 - f_2)/2$, il numero di battimenti per secondo, cioè la frequenza di battimenti è il doppio:

$$f_B = |f_1 - f_2|$$

Se per esempio un diapason vibra a 438 Hz e un altro a 442 Hz, l'onda Sonora risultante avrà una frequenza di 440 Hz (la nota musicale La) e una frequenza di battimenti di 4 Hz. Un ascoltatore udirà un suono di 440 Hz di intensità massima 4 volte al secondo.



Active Figure 18.22 Beats are formed by the combination of two waves of slightly different frequencies. (a) The individual waves. (b) The combined wave has an amplitude (broken line) that oscillates in time.