Lavoro ed Energia

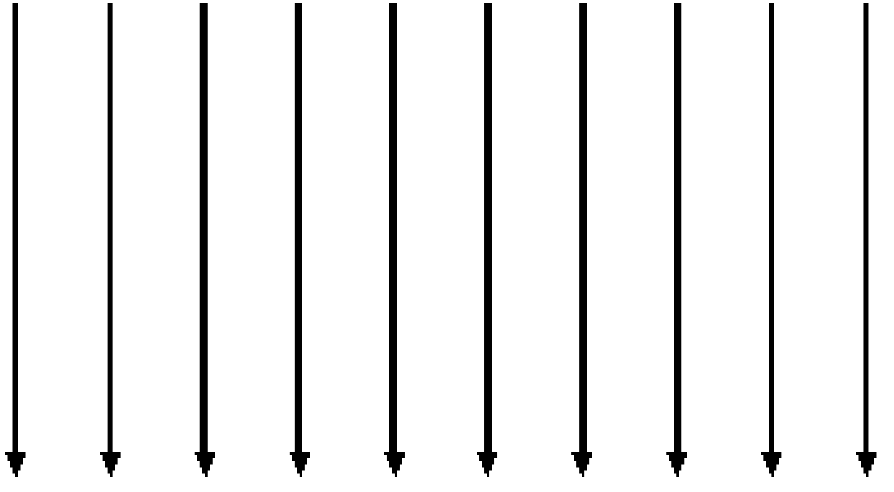
Si chiama “campo di forze” una zona di spazio in cui sia possibile associare ad ogni punto un vettore forza

$$\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}\right)$$

cioè la forza agente sul punto dipende dalla sua posizione.
Un campo di forze si dice uniforme quando

$\vec{F}$ non dipende dalla posizione r: $\vec{F} = \overrightarrow{Cost}$

Esempio di campo di forze costante è, almeno in prossimità della crosta terrestre il campo gravitazionale

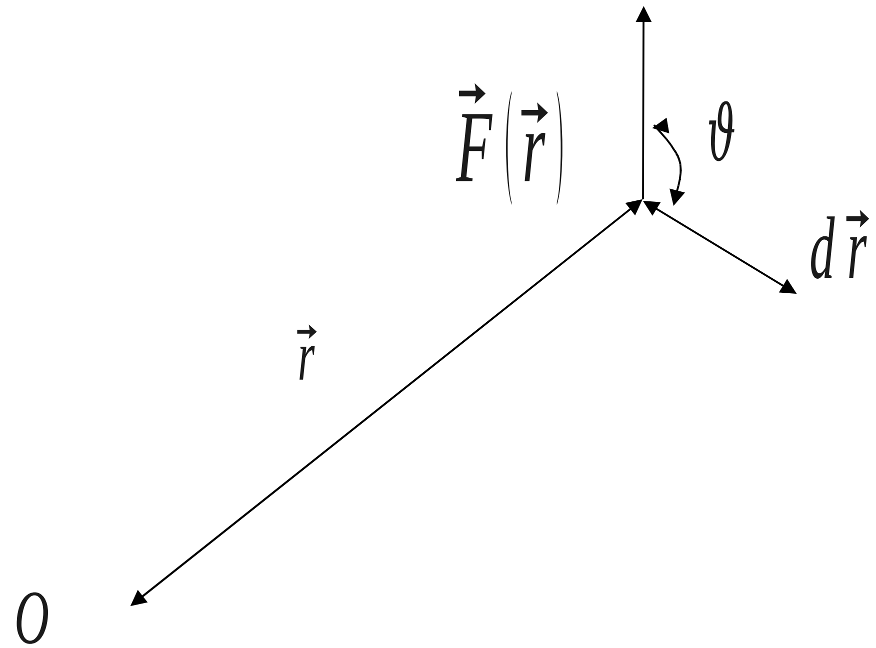


$$P = -mg$$

Concetto di lavoro

Un punto P, che ad un certo istante si trova nella posizione $\vec{r}$

in un campo di forze, $\vec{F}\left(\vec{r}\right)$ sperimenta una forza



.

Si definisce “lavoro infinitesimo compiuto dalla forza del campo” la quantità scalare

$$dL \equiv \vec{F}\left(\vec{r}\right) \cdot d\vec{r} = \left|\vec{F}\left(\vec{r}\right)\right| \left|d\vec{r}\right| \cos\left(\vartheta\right)$$

Si noti che il segno del lavoro infinitesimo dipende da

$$\cos(\vartheta)$$

:

Se $$0 \le \vartheta < \pi/2 \Rightarrow \cos(\vartheta) > 0 \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{s} > 0$$

il lavoro sviluppato dalla forza è positivo (lavoro motore).

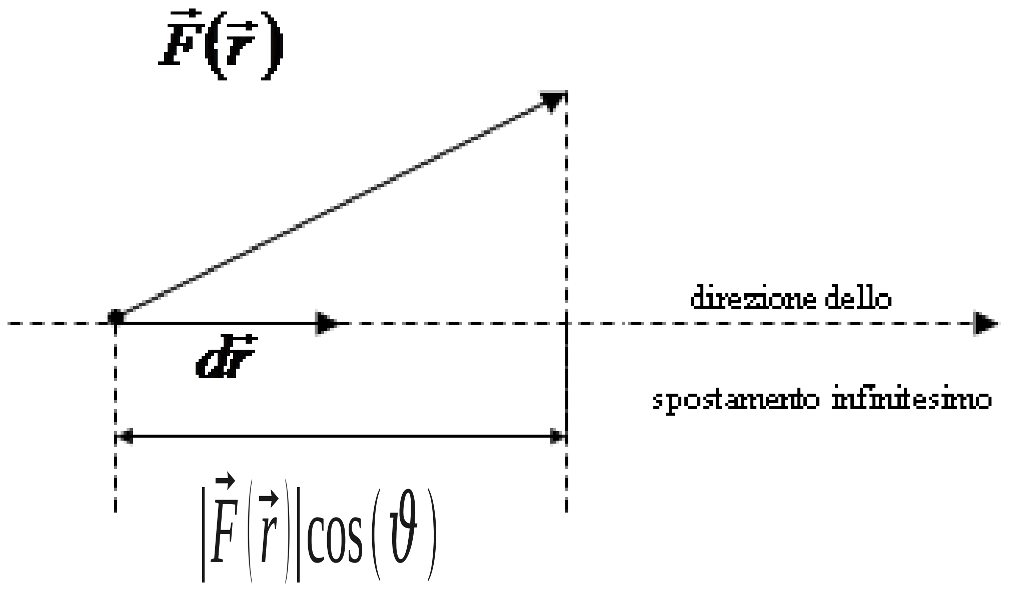
Se $$\pi/2 < \vartheta \le \pi \Rightarrow \cos(\vartheta) < 0 \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{s} < 0$$

il lavoro compiuto dalla forza è negativo (lavoro resistente).

Se $$\vartheta = \pi/2 \Rightarrow \cos(\vartheta) = 0 \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{s} = 0$$

lavoro nullo.

$$dL \equiv \vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r} = \left|d\vec{r}\right|\left|\vec{F}\left(\vec{r}\right)\right|\cos\left(\vartheta\right)$$

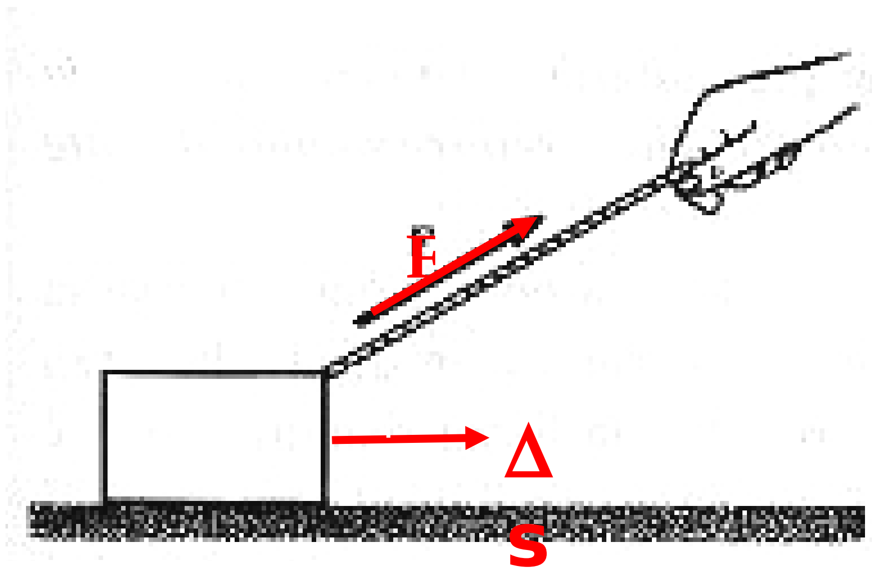


il lavoro infinitesimo è il prodotto del modulo dello spostamento per la proiezione della forza nella sua direzione

Forze & Lavoro

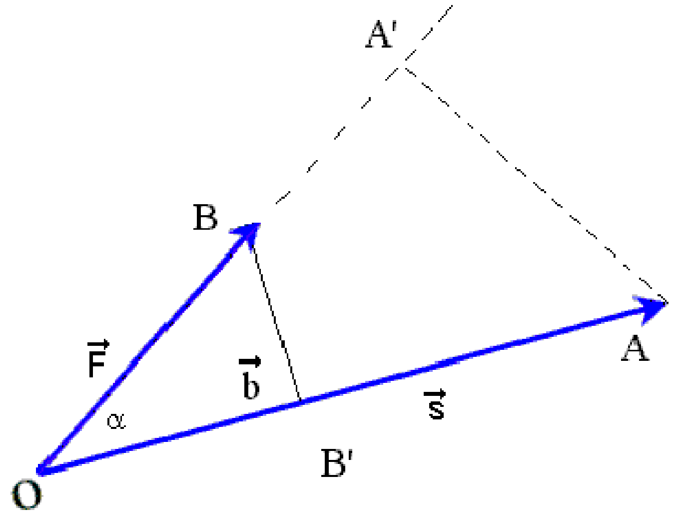
Dalla definizione segue che la sola componente di **F** che compie lavoro è quella parallela a **Δ s** (F_s) di valore:

$$F_s = F \cos\theta$$



LAVORO FINITO: forza costante e spostamento finito

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}|\cos(\alpha) = \left(|\vec{F}|\cos(\alpha)\right)|\vec{s}|$$



Lavoro: dimensione

- Matematicamente il lavoro è uno scalare
- Le dimensioni del lavoro sono

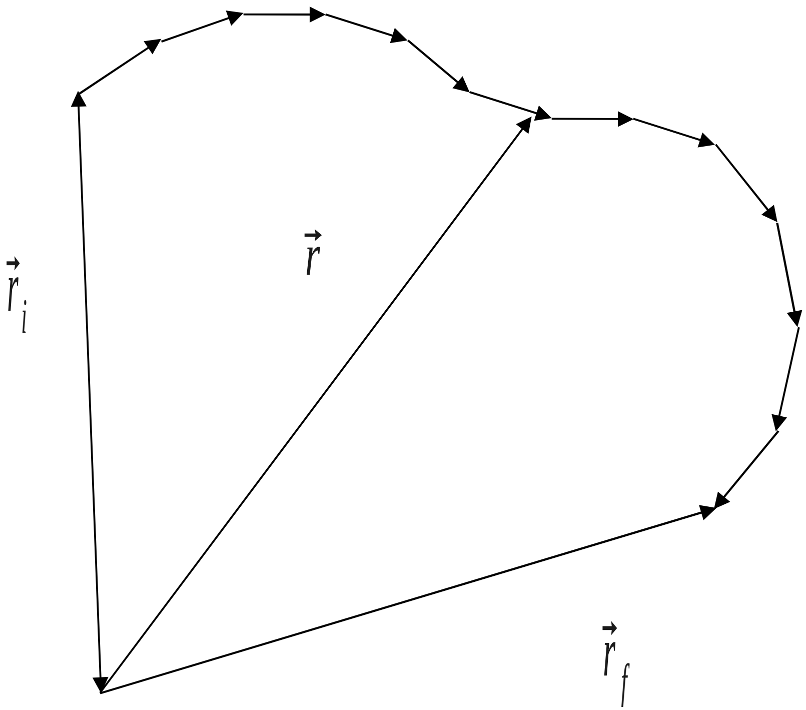
  $[F \cdot l] = [M \cdot L^{2} \cdot T^{-2}]$ e la sua unità di misura nel SI è il Joule (J):

$$1\ J = 1N \cdot 1m$$

- Altre unità di misura valide sono:
- 1 erg = 1dina · 1cm = 10^{-5}N $\cdot 10^{-2}$m = 10^{-7} J
- caloria: 1 Cal = 4,186 J
- elettronvolt: 1 eV $\quad$ 1,6 $\cdot 10^{-19}$ J

Se un punto materiale si muove su una traiettoria curva *TR*
Identificata da una posizione iniziale e una finale

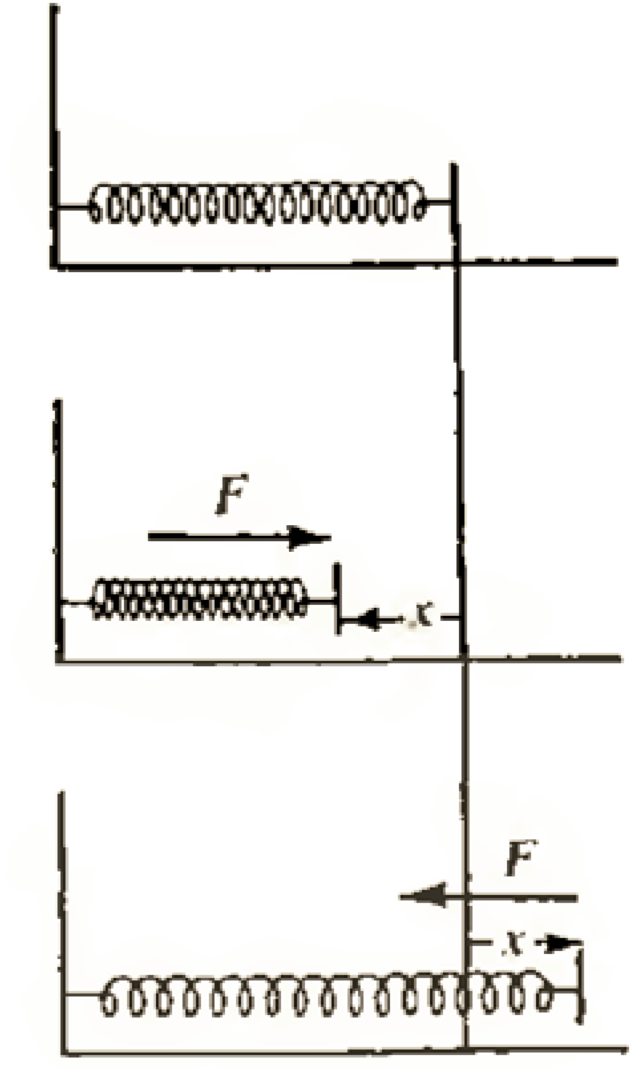
$\vec{r}_i$ $\vec{r}_f$



Si suddivide la traiettoria in infiniti spostamenti Infinitesimi, si calcola, per ognuno, il corrispondente lavoro infinitesimo. Sommando questi infiniti lavori infinitesimi si ottiene il lavoro totale.

$$L\left(\vec{r}_i \xrightarrow{TR} \vec{r}_f\right) = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} dL = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r}$$

Lavoro di una forza non costante: la Molla



Forza elastica della molla

$$\boxed{F = -kx}$$

Lavoro fatto per deformare la molla (segno opposto)

$$W = \int_0^x F\ dx = \int_0^x kx\ dx$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\, kx^2}$$

Campi conservativi

Esistono dei campi di forze il cui lavoro, fissati $\vec{r}_i$ $\vec{r}_f$

non dipende dalla traiettoria (è cioè lo stesso qualunque sia la traiettoria)

tali campi si dicono “conservativi.

Un campo uniforme è un esempio di campo conservativo. Se:

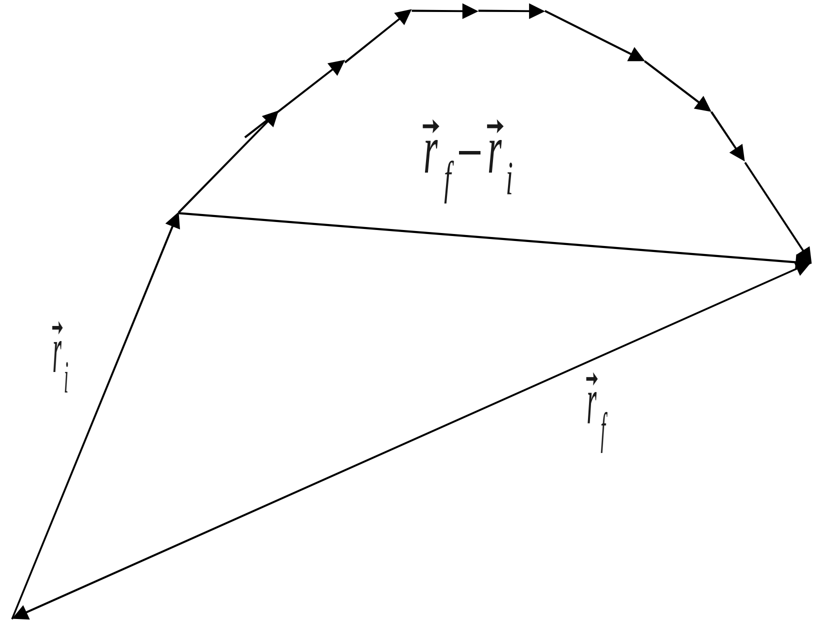
$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{k}$$

$$L\left(\vec{r}_i \xrightarrow{TR} \vec{r}_f\right) = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} = \vec{k} \cdot \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} d\vec{r} = \vec{k} \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_i)$$

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} d\vec{r}$$

È la somma di tutti gli spostamenti infinitesimi e quindi per la regola del parallelogramma ci da lo spostamento totale

$$\vec{r}_f - \vec{r}_i$$



Se il campo uniforme è quello delle forze di gravità

$$L\left(\vec{r}_i \xrightarrow{TR} \vec{r}_f\right) = m\vec{g}\cdot(\vec{r}_f - \vec{r}_i)$$

L'unità di misura del lavoro è il Joule (J). Dalla definizione di lavoro si ha:

1 J = 1 N m = 1 kg m^2/s^2

Teorema delle forze vive ed energia cinetica

Si definisce “energia cinetica
di un punto materiale” la quantità

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

$$L\left(\vec{r}_i \xrightarrow{TR} \vec{r}_f\right) = E_C\left(\vec{r}_f\right) - E_C\left(\vec{r}_i\right) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Energia cinetica: Energia posseduta da un punto materiale in moto

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = m\vec{a} \cdot \vec{s}$$

Ricordando il moto uniformemente accelerato

$$v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a} \qquad s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a}$$

Quindi il lavoro dovuto al moto di un punto materiale di massa m può essere scritto come

$$L = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = at + v_0 \qquad x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$t = \frac{v - v_0}{a} \qquad x = v_0 \frac{(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2}\, a \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

$$2ax = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2v_0 v + v_0^2 \qquad v^2 = v_0^2 + 2ax$$

$$a = F/m \qquad v^2 = v_0^2 + \frac{2Fx}{m} \qquad W = Fx.$$

$$\boxed{W = \tfrac{1}{2}\, mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2}$$

Se un campo è conservativo il lavoro non dipende dalla traiettoria ma solo da

$\vec{r}_f$ e $\vec{r}_i$

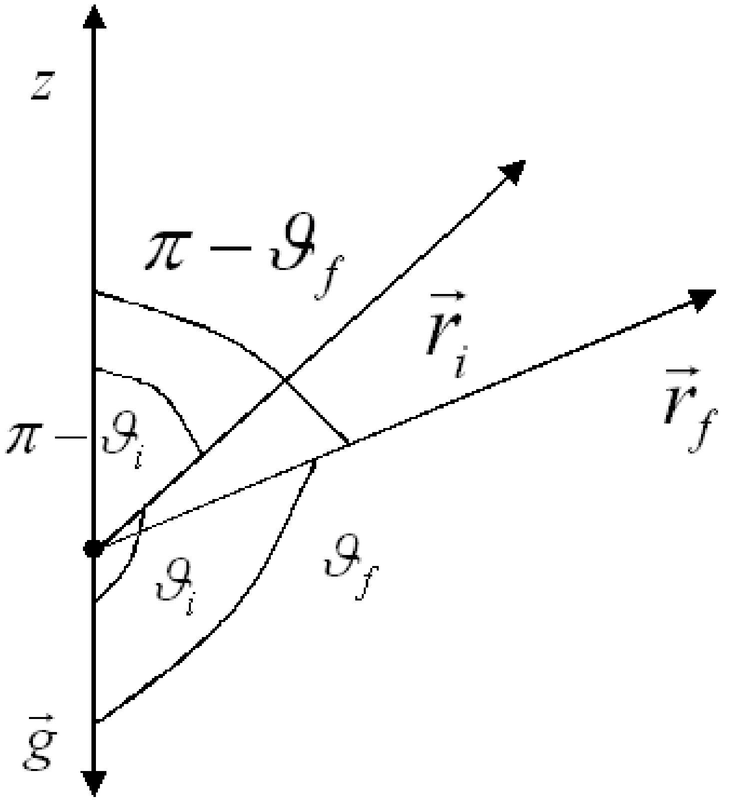
Si dimostra che, in tal caso, il lavoro può essere sempre scritto come la differenza fra il valore di una funzione in $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_f$

Questa funzione si chiama "energia potenziale".
Nel caso del campo delle forze di gravità si ha:

$$L\left(\vec{r}_i \xrightarrow{TR} \vec{r}_f\right) = m\vec{g}\cdot(\vec{r}_f - \vec{r}_i)$$
$$= m\vec{g}\cdot\vec{r}_f - m\vec{g}\cdot\vec{r}_i$$
$$= \left(-m\vec{g}\cdot\vec{r}_i\right) - \left(-m\vec{g}\cdot\vec{r}_f\right)$$

$-m\vec{g}\cdot\vec{r}$

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU}{dx}}$$



$$-m\vec{g}\cdot\vec{r}_i=-m|g||\vec{r}_i|\cos(\vartheta_i)$$
$$=m|g||\vec{r}_i|\cos(\pi-\vartheta_i)$$

$$-m\vec{g}\cdot\vec{r}_i=mgz_i$$

$$-m\vec{g}\cdot\vec{r}_f=mgz_f$$

$$L(\vec{r}_i\rightarrow\vec{r}_f)=mg\cdot(z_i-z_f)$$

$$U(z)=mgz$$ Energia Potenziale Gravitazionale

Energia potenziale gravitazionale (approssimazione)

- Il lavoro fatto dalla forza peso su un corpo che si sposta da A a B lungo un cammino qualsiasi si può esprimere come:

$$W_{AB} = m \cdot g \cdot h_A - m \cdot g \cdot h_B = m \cdot g \cdot (h_A - h_B) = m \cdot g \cdot \Delta\, h$$

- Nel caso della forza di gravità, l'energia potenziale gravitazionale vale quindi: $U_i = m \cdot g \cdot h_i$

(h_i è l'altezza del punto i misurata rispetto ad una superficie di riferimento)

Energia potenziale gravitazionale (vera)

In realtà la forza di gravità fra due corpi vale:

$$\vec{F}_{\text{Gravità}} = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}\,\vec{u}$$

E la relativa energia potenziale gravitazionale è:

$$U_G = -G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{d}$$

Energia potenziale elastica

Data la forza elastica: $\vec{F}_{EL} = -k\,\Delta\,\vec{x}$

L'energia potenziale di una forza elastica è:

$$U_{EL} = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$$

Il suo valore è massimo nel punto di massima estensione (o compressione) della molla, ed è minimo nel punto di riposo della molla

Teorema di conservazione dell’energia meccanica

Si può dimostrare che “ se un punto materiale si muove in un campo conservativo, la somma dell’energia cinetica e dell’energia potenziale del punto rimane costante nel tempo”.

Poiché la somma dell’energia cinetica e dell’energia potenziale prende il nome di “energia meccanica totale”, questo risultato viene spesso enunciato dicendo che “in un campo conservativo l’energia meccanica totale di un punto materiale si conserva”

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \mathbf{costante}$$

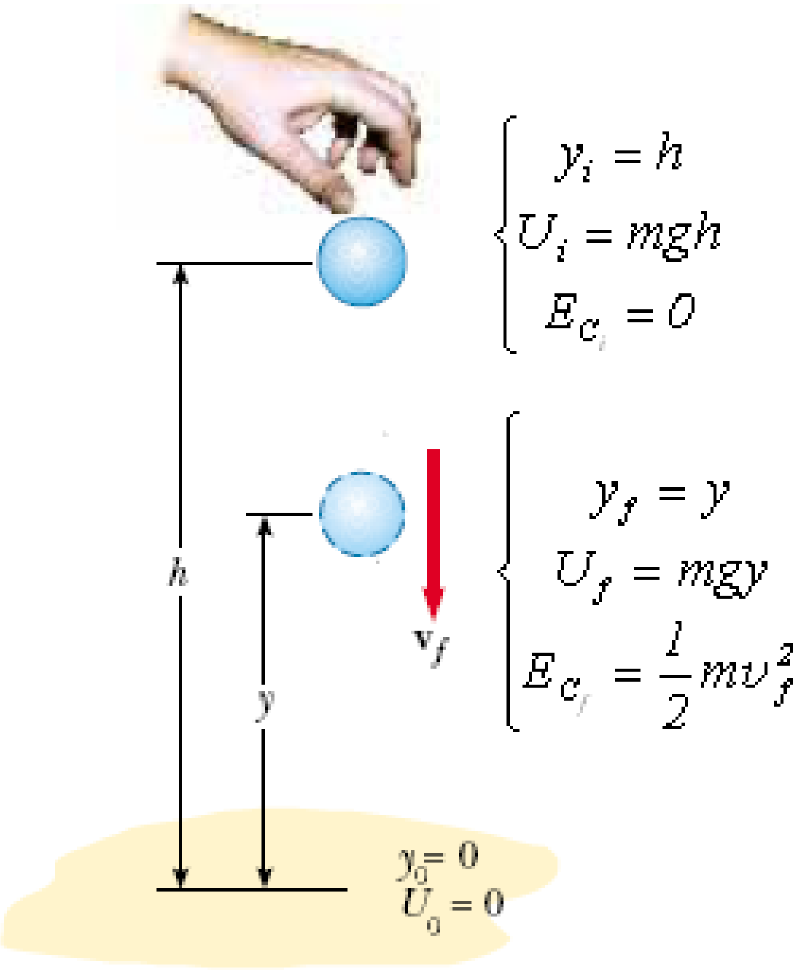
$$E_M = E_P + E_C$$

Esempio: conservazione dell'energia nella caduta dei gravi

$$E_{P_i} + E_{C_i} = E_{P_f} + E_{C_f}$$

$$mgh + 0 = mgy + \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$v_f = \sqrt{2g(h-y)}$$



Potenza

Nella definizione di lavoro non compare il tempo : ci sono solo forza e spostamento. Nel momento in cui si vuole tenere conto del tempo si definisce la potenza:

$$P = \frac{dL}{dt}$$

$$P = \frac{L}{t} \qquad [P] = \frac{\mathrm{joule}}{s} = watt\ (W)$$

Potenza: note

Per **macchina** in fisica si intende ogni oggetto (anche un essere vivente) in grado di compiere lavoro

Dalla definizione di potenza, se il lavoro è prodotto da una forza costante (l’unico caso che consideriamo) abbiamo:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = F\frac{\Delta s}{\Delta t} = F \cdot v$$

Metabolismo

- Negli animali (uomo) la velocità di utilizzazione dell'energia (potenza) è detta **metabolismo**
- Un uomo di 70 kg (686 N) utilizza mediamente circa 10^7 J/giorno,con variazioni legate all'attività fisica che egli compie
- Il suo metabolismo medio risulta:

$$R = \frac{10^7 J}{24 \cdot 3600\, s} = 121\, W$$

- Il metabolismo scende a 75 W durante il sonno e sale a 230 W quando cammina