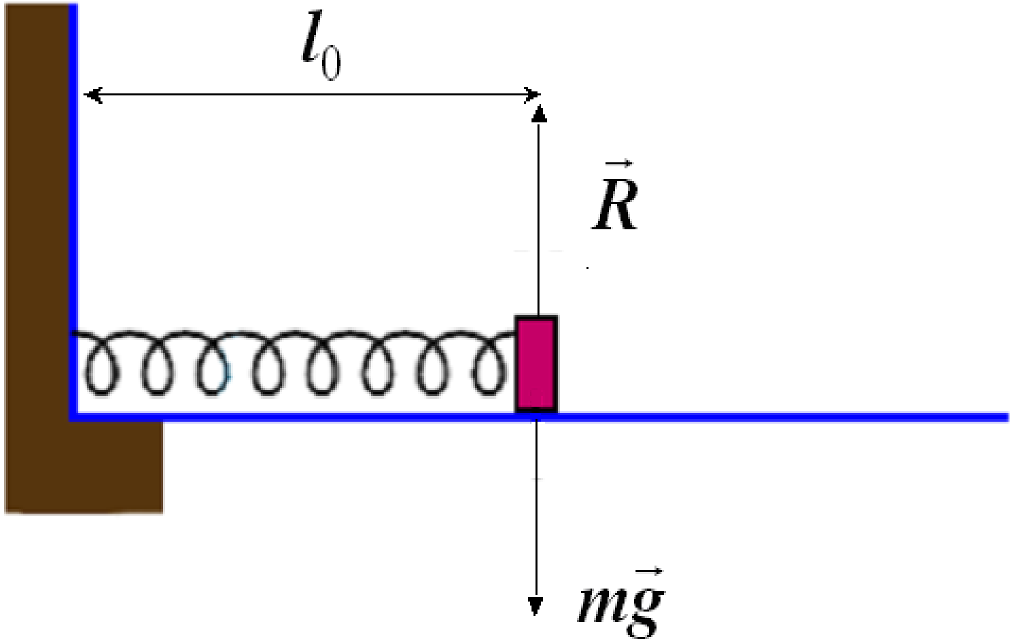
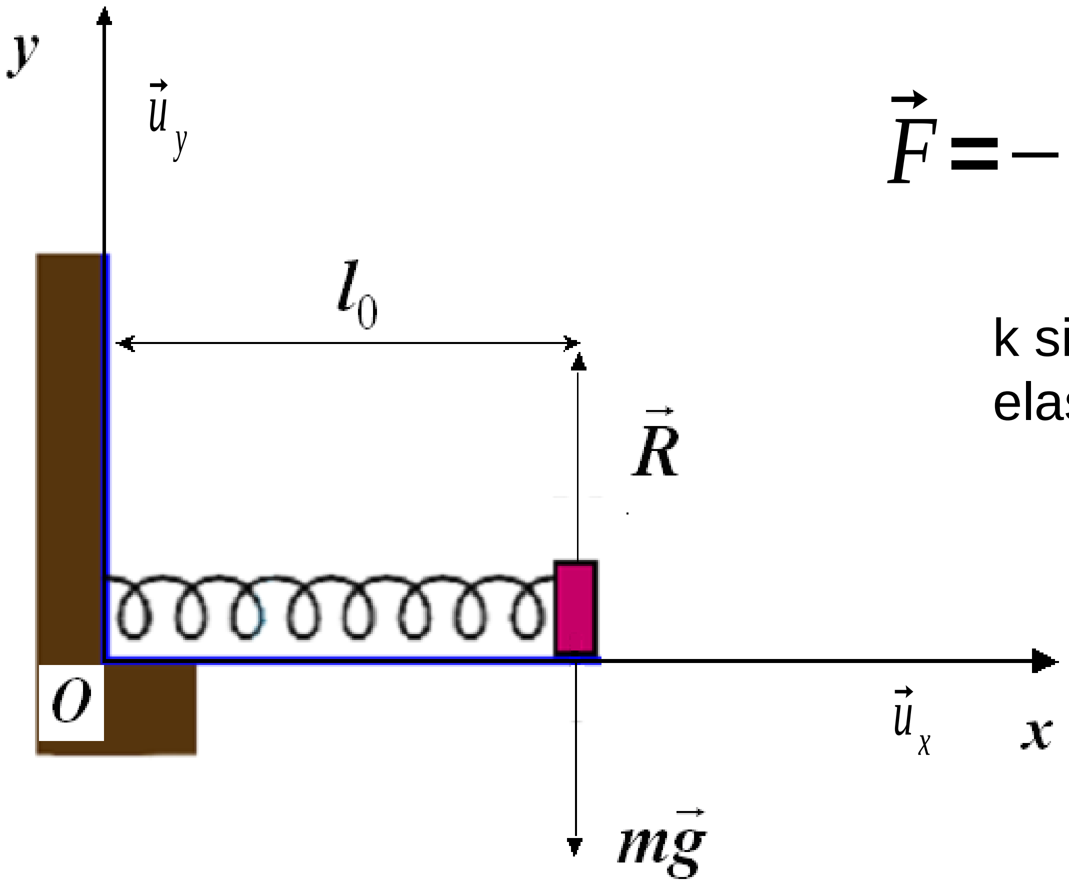
# Oscillazioni armoniche

## Oscillatore armonico semplice




$$\vec{R} - m\vec{g} = 0$$




$$\vec{F} = -k(x - l_0)u_x$$

k si chiama “costante elastica della molla”:

$$x(t) = l_0 + A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

Legge oraria

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

pulsazione

# Come si ricava la legge oraria?

Il secondo principio può essere scritto:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k\left(x - l_0\right)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(x - l_0\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2\left(x - l_0\right)$$

$$x(t) = l_0 + A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$l_0 - A \leq x(t) \leq l_0 + A$$

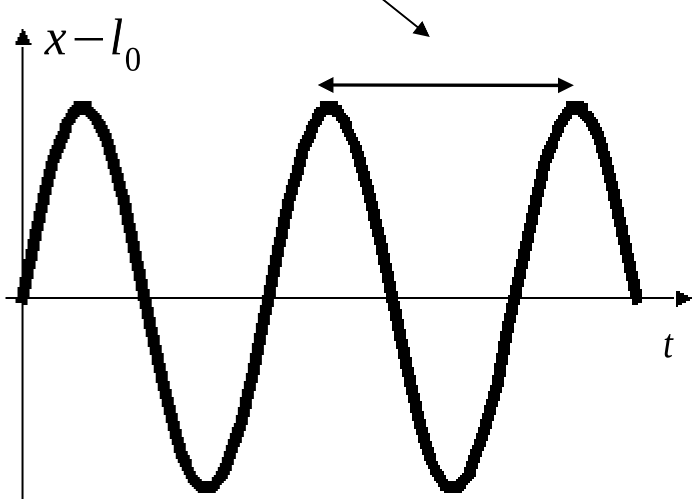
Il moto risulta confinato fra le posizioni di massima elongazione e di massima compressione

Il moto armonico semplice è un moto periodico: a intervalli regolari di tempo il moto si ripete con le stesse caratteristiche.
Si chiama periodo di un moto periodico, il minimo intervallo di tempo necessario a che il punto riassuma gli stessi valori di posizione e velocità.
Nel moto armonico semplice il periodo T è legato alla costante  w detta pulsazione) dalla relazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

Frequenza e pulsazione hanno dimensioni inverse a quelle del periodo T, che essendo un tempo si misura in s: dunque nel S.I. si misurano in s-1, 1 s-1 viene detto 1 Hertz (Hz).



# Oscillazioni armoniche smorzate

Oscillatore libero immerso in un liquido viscoso (acqua o olio come negli ammortizzatori delle automobili). In questo caso, sulla massa ***m*** agirà, oltre alla forza esercitata dalla molla, anche una forza di attrito viscoso che tende a ridurre, in ogni istante la velocità del punto. Questa forza è proporzionale alla velocità del punto, ma è sempre diretta in senso opposto

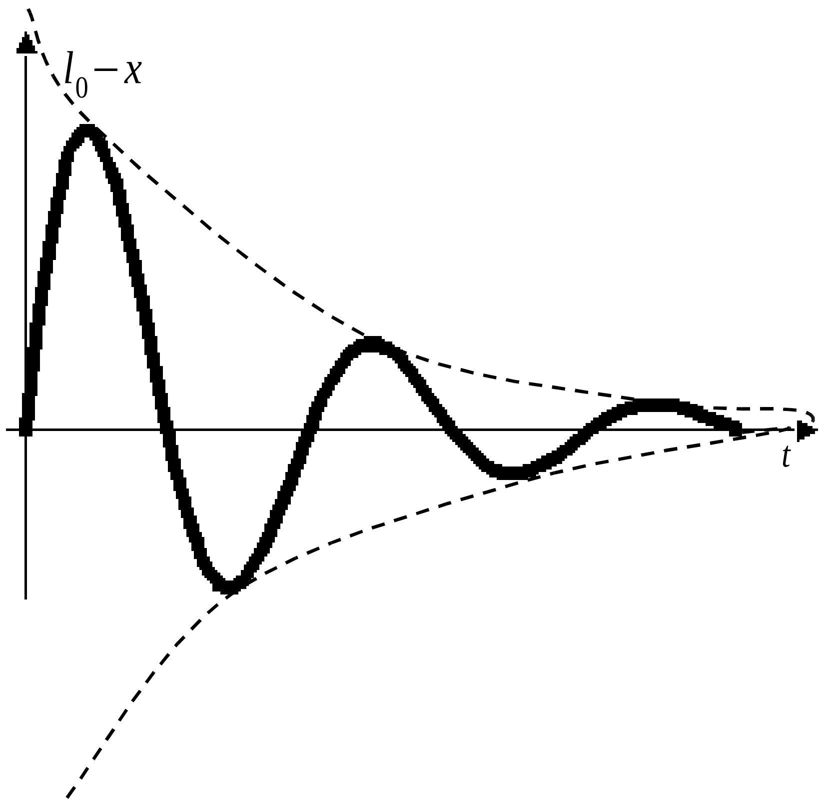
$$\vec{F}_{visc} = -\beta \vec{v} \quad (\beta > 0)$$

$$-k(x - l_0) - \beta \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = m \frac{d^2 x}{\mathbf{dt^2}} \qquad \frac{d^2 x}{\mathbf{dt^2}} = -\omega^2 (x - l_0) - C^2 \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad C = \sqrt{\frac{\beta}{m}} \qquad x(t) = l_0 + A e^{-\frac{1}{2} C^2 t} \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$A' = Ae^{-\frac{1}{2}C^2 t}$$

$$x(t) = l_0 + A' \cdot \sin(\omega t + \phi)$$




$$\omega = \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \omega_0}$$

Quindi la frequenza è minore di quella libera $\omega_0$

# Oscillazioni forzate

Per evitare lo smorzamento del moto si inserisce una forza esterna con caratteristiche opportune come, ad esempio, una forza sinusoidale

$$F = F_0 \cdot \sin(\omega_{ext} t)$$

$$-k(x - l_0) - \beta\,\dot{x} + F_0 \cdot \sin(\omega_{ext} t) = m\,\ddot{x}$$

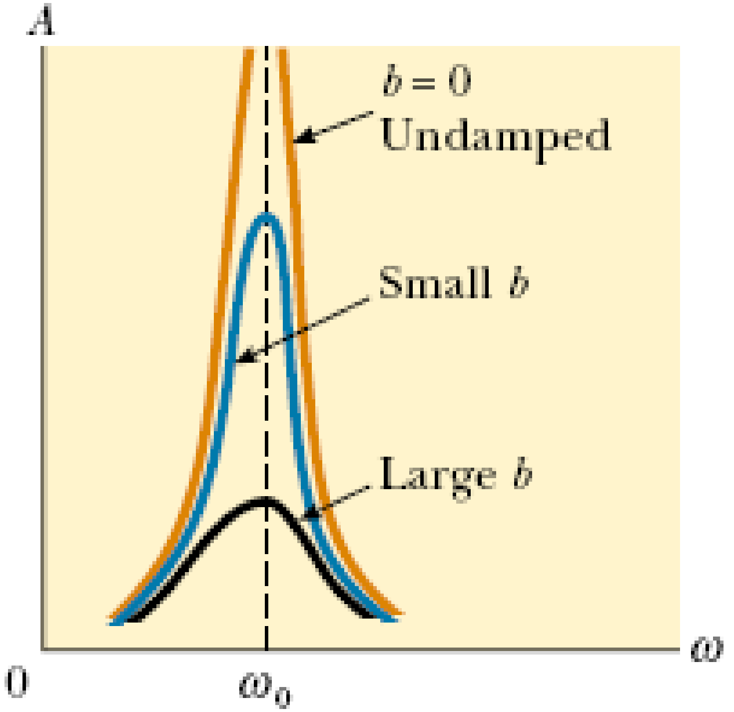
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad C = \sqrt{\frac{\beta}{m}} \qquad P = \frac{F_0}{m}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 (x - l_0) - C^2 \dot{x} + P \cdot \sin(\omega_{ext} t)$$

$$x(t) = l_0 + A \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

$$A = \frac{P}{\sqrt{(\omega_{ext^2} - \omega^2)^2 + C^4 \omega_{ext^2}}}$$

$$\delta = arctg\left[-\frac{C^2 \omega_{ext}}{\omega^2 - \omega_{ext^2}}\right]$$



## Generalità sulle onde

Un’onda è una perturbazione che si propaga (nello spazio e nel tempo).
Non importa quale sia la natura di questa perturbazione (meccanica, elettromagnetica) : se essa è inizialmente confinata in una zona di spazio e progressivamente si estende ad altre zone, siamo in presenza di un’onda.

Se la propagazione in un mezzo unidimensionale (corda) si parla di <u>onde a una dimensione</u>, se il mezzo è bidimensionale (un piano), si parla di <u>onde in due dimensioni</u>, se tridimensionale (spazio) di <u>onde a tre dimensioni</u>.

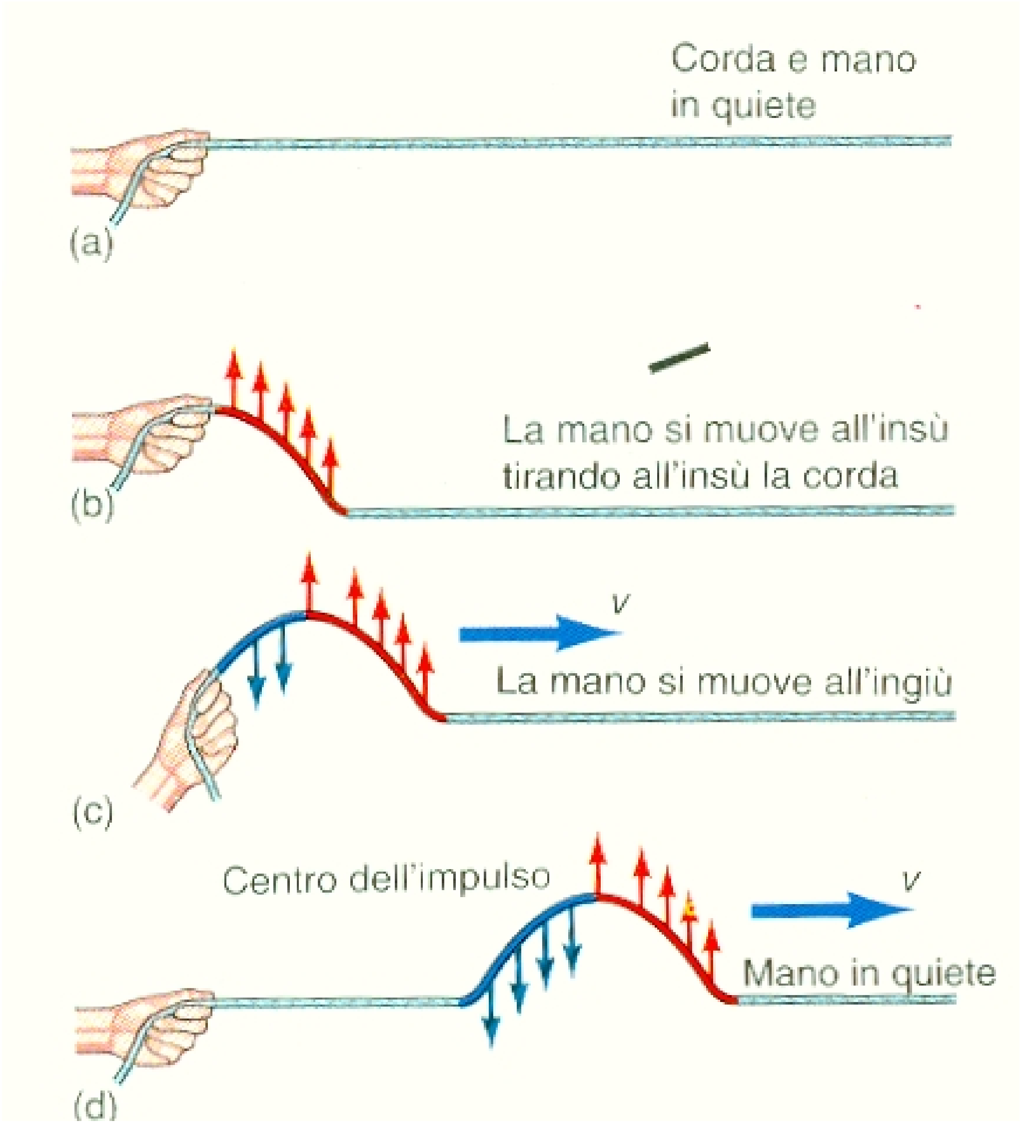
Esempi di onde unidimensionali sono le vibrazioni delle corde degli strumenti ad arco
Esempi di onde bidimensionali sono le onde che si propagano in una superficie d’acqua percepite dall’occhio sotto forma di cerchi concentrici di raggio crescente.
Esempi di onde tridimensionali sono le onde sonore: l’aria viene messa in vibrazione

In generale si parla di onde trasversali quando la perturbazione è ortogonale alla direzione di propagazione, e di onde longitudinali quando la perturbazione è lungo la direzione di propagazione.

Trasversali sono ad esempio le onde meccaniche provocate dalla caduta di un sasso nell’acqua, longitudinali sono ad esempio le onde sonore e, in generale le onde di compressione

# Onde in una dimensione

Se si imprime ad una corda tesa un brusco spostamento trasversale, la forma della corda varia nel tempo




La perturbazione indotta in una corda ad un certo istante in una certa zona (a), si propaga nel tempo (b), (c) e (d) ad altre zone della corda.

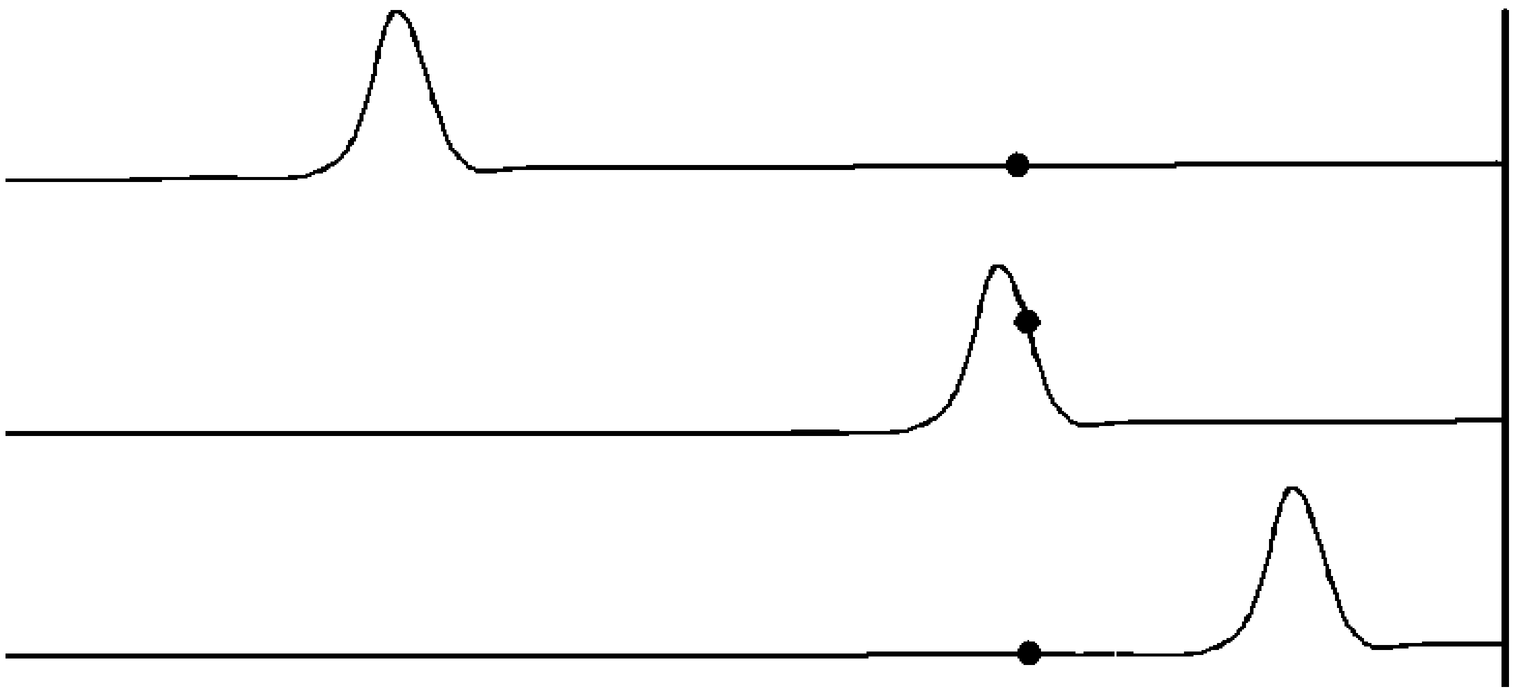
In base alla definizione che abbiamo dato siamo in presenza di un'onda, più precisamente di un'onda impulsiva o più semplicemente impulso. Un impulso è caratterizzato dal possedere un inizio e una fine.

Esempi di impulsi sono il rumore di uno sparo, il bagliore di un fulmine e un'onda di marea.

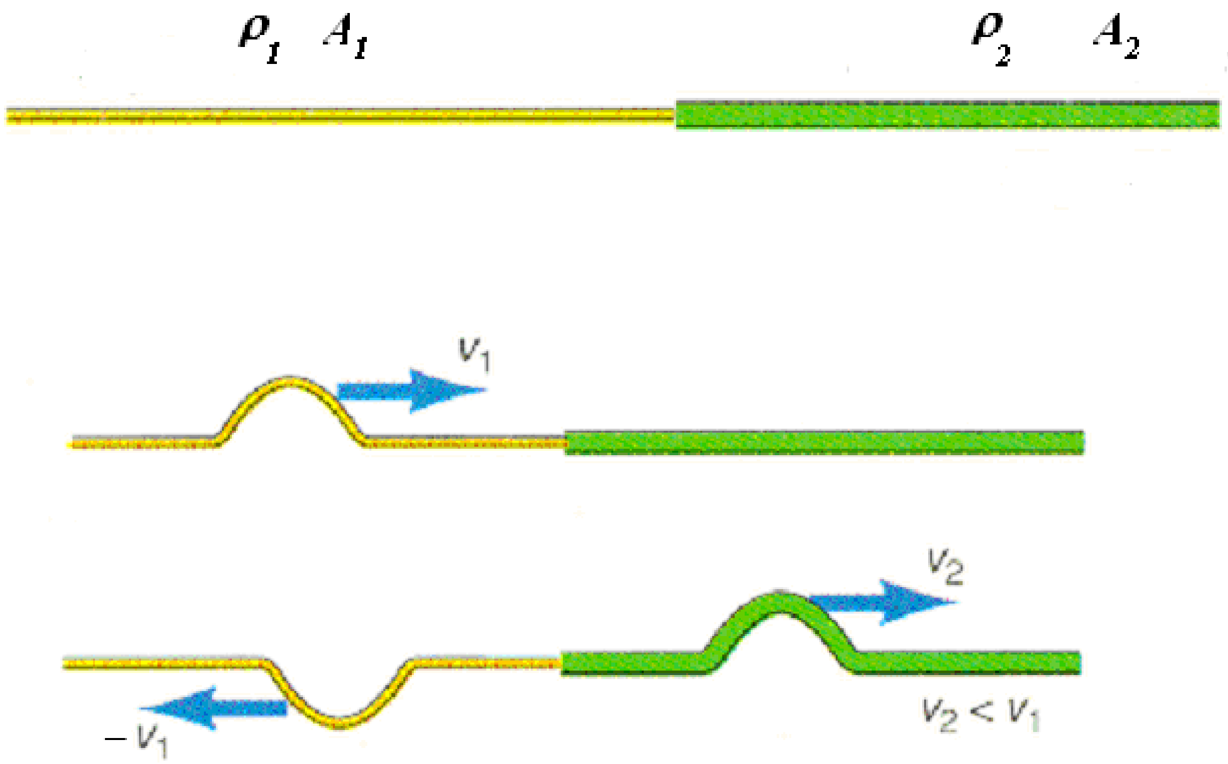
l'impulso si propaga lungo la corda con una velocità che dipende dalla natura della corda e della forza applicata per tenerla tesa. Più precisamente se $\rho$ è la densità del materiale di cui è costituita la corda e A la sua sezione si dimostra che

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

Se si appende un piccolo peso alla corda in un certo punto, si vede che, quando tale punto viene raggiunto dalla perturbazione, il peso acquisisce energia e quantità di moto (Fig 2); se ne deduce che l'onda trasporta energia e quantità di moto.



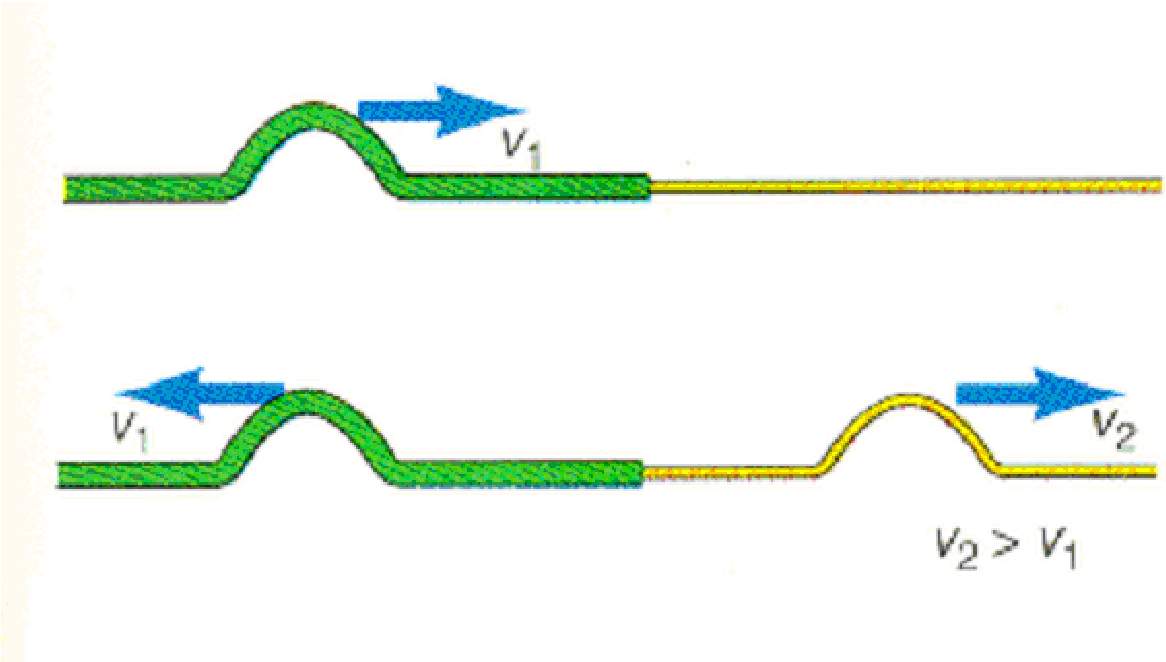
# Riflessione delle onde




$$v_1 = \sqrt{\frac{F}{\rho_1 A_1}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{F}{\rho_2 A_2}}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1}} > 1$$

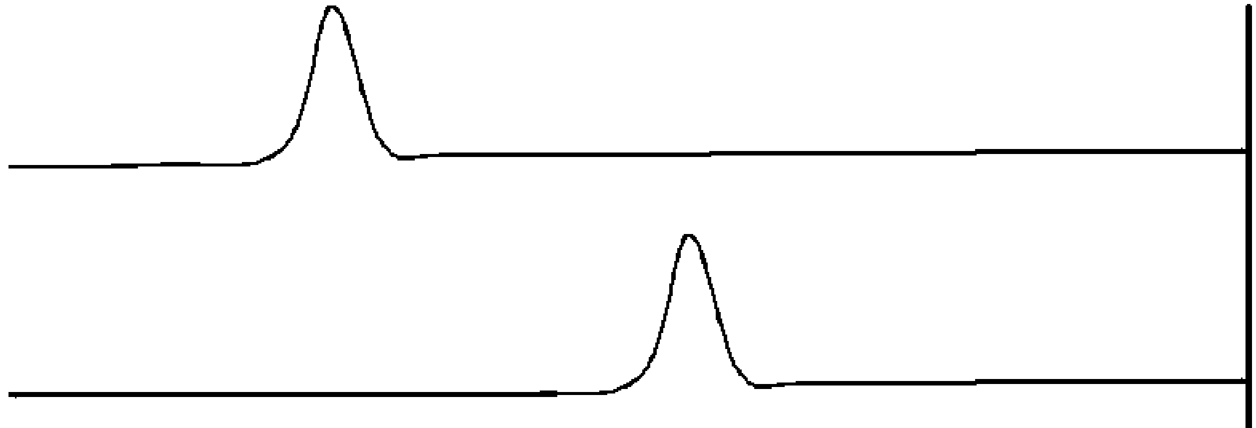



$v_1 < v_2$

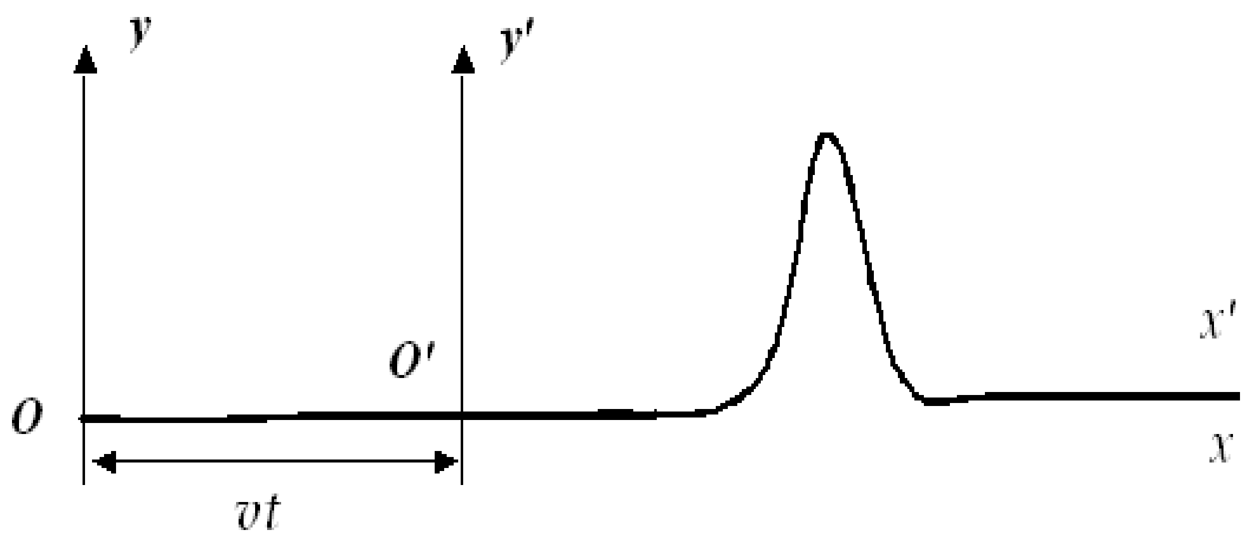
# Funzione d'onda

L'impulso in una corda all'istante t=0. La forma della corda per t=0 può essere rappresentata da una funzione

$$y = f\left(x, t\right)$$



A un generico istante successivo t la forma della corda è rappresentata da una funzione diversa, che descrive una eguale deformazione, ma centrata in una diversa posizione.




Introducendo un secondo sistema di riferimento (x',y') che si muova rispetto a (x,y) con una velocità ***v*** pari a quella con cui viaggia la perturbazione lungo la corda rispetto a questo riferimento l'impulso è fermo e la sua forma è descritta da una funzione

## Quindi il legame fra (x,y) e (x’,y’) risulta

$$x = \mathbf{x'} + \mathbf{vt} \Rightarrow \mathbf{x'} = \mathbf{x\text{-}vt} \qquad \mathbf{y'} = y$$

quindi la funzione in O’

$$\mathbf{y'} = f\left(\mathbf{x'}\right)$$

diventa in O

$$y = f\left(\mathbf{x\text{-}vt}\right)$$

Questa funzione descrive come si deforma la corda al trascorrere del tempo e prende il nome di funzione d’onda. Pur avendo ricavato la struttura della funzione d’onda nell’ipotesi di un’onda impulsiva, la conclusione vale per ogni tipo di onda.

# Onde armoniche unidimensionali

$$y(\mathbf{x,t}) = y_0 \sin\left[k(\mathbf{x\text{-}vt})\right]$$

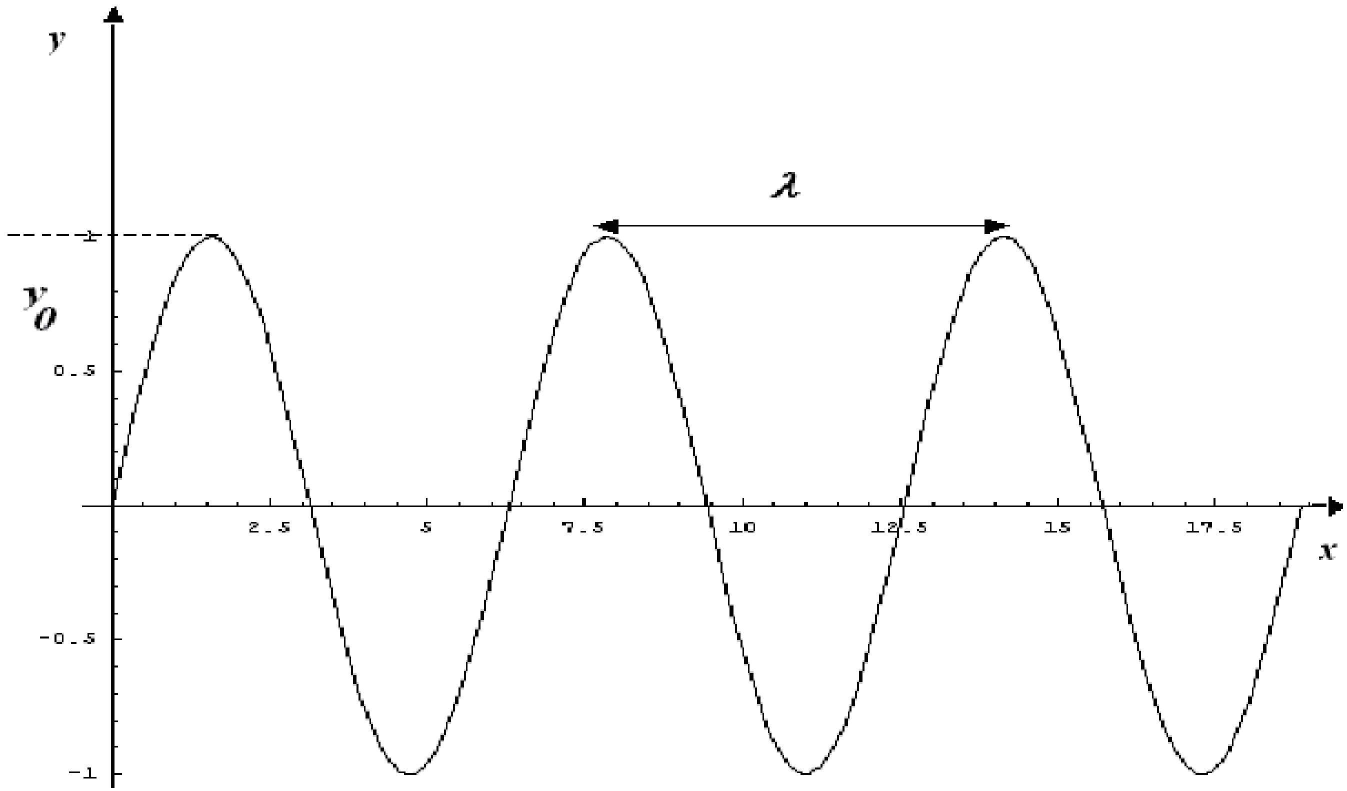
$k$ numero d'onda $y_0$ ampiezza.

Se $\omega = \mathbf{kv}$

$$y(\mathbf{x,t}) = y_0 \sin\left[\mathbf{kx\text{-}kvt}\right]$$
$$= y_0 \sin\left[\mathbf{kx\text{-}}\omega t\right]$$

$\omega$ pulsazione

Tali onde si dicono armoniche o sinusoidali e possono essere realizzate ad esempio attaccando l'estremo libero della corda a un diapason che vibri di moto armonico semplice



L’equazione dell’”immagine”, ottenuta “congelando” il tempo t è

$$y(\mathbf{x},\mathbf{t_0}) = y_0 \sin[\mathbf{kx\text{-}}\,\omega t_0] = y_0 \sin[\mathbf{kx\text{-}}\,\delta] \qquad \delta = \omega t_0 \mathbf{= cost}$$

La lunghezza d’onda $\lambda$ è la distanza minima fra due punti della corda con lo stesso valore della funzione y.

$$\sin[\mathbf{x+2}\pi] \mathbf{=} \sin[x]$$

$$x_2 - x_1 = \lambda$$

$$k\lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$kx_2 - \delta = kx_1 - \delta + 2\pi$$

$$\Rightarrow k(x_2 - x_1) \mathbf{=} 2\pi$$

Se si fissa $x_0$, il punto oscilla lungo y

$$y(\mathbf{x,t}) = y_0 \sin[\mathbf{kx_0} - \omega t]$$

Moto armonico di pulsazione $\boldsymbol{\omega}$ e periodo **T:**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \mathbf{=} \frac{2\pi}{kv} \mathbf{=} \frac{\lambda}{v}$$

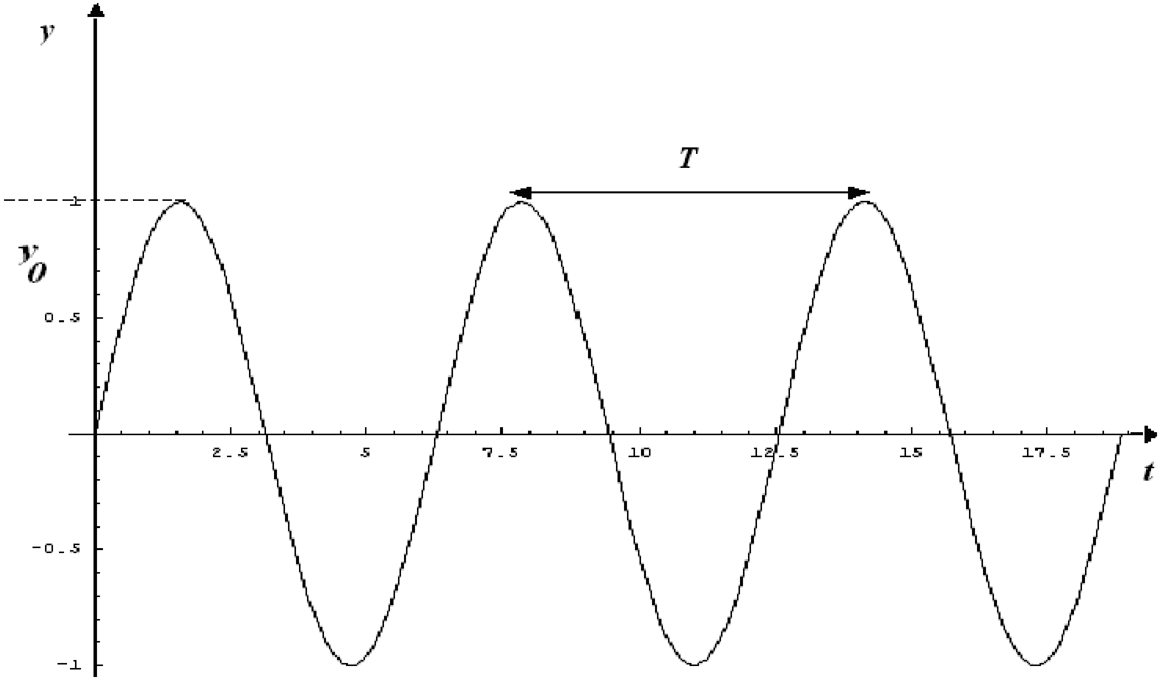



Grafico della funzione d’onda armonica ottenuto fissando lo spazio

Ricordando la definizione della frequenza ν

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$$

Da cui si ottiene: $\lambda \nu = v$

Il prodotto fra lunghezza d’onda e frequenza è pari alla velocità di propagazione dell’onda. *v* dipende dalla forza con cui viene tesa la corda e dalle sue proprietà. Se dunque consideriamo due corde con caratteristiche diverse e facciamo vibrare gli estremi liberi alla stessa frequenza, poiché le velocità di propagazione sono diverse, le onde che si creano avranno diversa lunghezza d’onda.

**Problem 16.1** A string wave is described by $y = 0.002 \sin(0.5x - 628t)$. Determine the amplitude, frequency, period, wavelength, and velocity of the wave.

# Principio di sovrapposizione

Se due onde si propagano in un dato mezzo indipendentemente l'una dall'altra allora in ogni punto dello spazio la perturbazione complessiva è la somma delle perturbazioni dovute a ciascuna onda.

due impulsi di velocità *v* e – *v*.

$$f_1(x-vt) \qquad f_2(x+vt) \qquad \varphi(x,t)=f_1(x-vt)+f_2(x+vt)$$

**Flusso di energia**

Un'onda trasporti energia e quantità di moto.Intensità di un'onda ***I*** è l'energia che fluisce nell'unità di tempo attraverso un'area unitaria perpendicolare alla direzione di propagazione.

Nel caso di un'onda armonica, tuttavia, si può mostrare che l'intensità dell'onda varia nel tempo e che il valore medio dell'intensità < I > su un intervallo di tempo pari al periodo T è proporzionale al quadrato dell'ampiezza A dell'onda

$$\langle I \rangle \simeq A^2$$

# Energia trasportata da un'onda

Ricordando l'energia dell'oscillatore armonico:

$$E=\frac{k}{2}A^2=\frac{m\omega^2 A^2}{2}$$

Se consideriamo un elemento di lunghezza dx della corda, questo avrà una massa dm=μ dx con μ =m/l e quindi

$$E=\frac{1}{2}\mu dx\omega^2 A^2$$

Questa energia sarà trasmessa alle porzion
Successive della corda e quindi:

$$P=\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}\mu\frac{dx}{dt}\omega^2 A^2=\frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$$

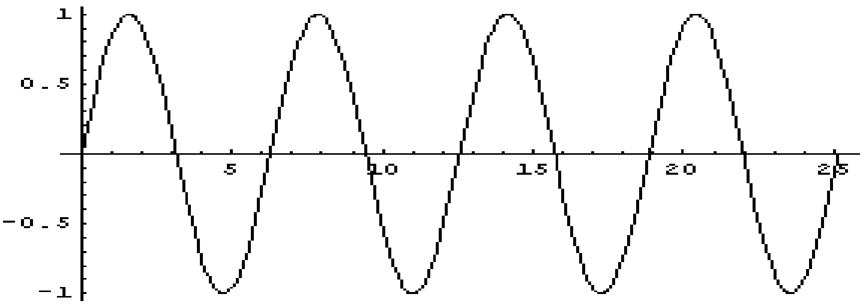
**Problem 16.2** A string of linear mass density 480 g/m is under a tension of 48 N. A wave of frequency 200 Hz and amplitude 4.0 mm travels down the string. At what rate does the wave transport energy?

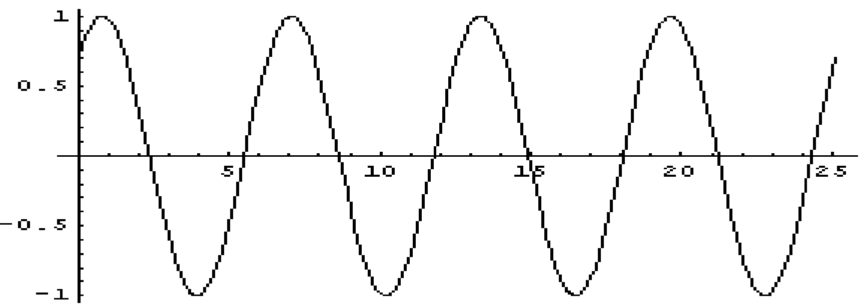
**Solution** $\omega = 2\pi f = 2\pi\,(200) = 400\pi\,\mathrm{s}^{-1}$ $\qquad v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{48\,\mathrm{N}}{0.48\,\mathrm{kg/m}}} = 10\,\mathrm{m/s}$

$$P = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2 = (0.5)(0.480\,\mathrm{kg/m})(10\,\mathrm{m/s})\,(400\,\pi\,\mathrm{s})^2(4\times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 = 61\ \mathrm{W}$$

## Interferenza

Le onde possono essere sommate Es due onde sinusoidali di eguale ampiezza, frequenza e lunghezza d’onda che si propagano nella stessa direzione e che differiscono solo nella fase iniziale




$$y_1(\mathbf{x,t}) = A\cos[\mathbf{kx\text{-}}\omega t]$$

$$y_2(\mathbf{x,t}) = A\cos[\mathbf{kx\text{-}}\omega\,\mathbf{t\text{-}}\,\delta]$$

$$y(\mathbf{x,t}) = y_1(\mathbf{x,t}) + y_2(\mathbf{x,t}) = A\left[\cos[\mathbf{kx\text{-}}\,\omega t] + \cos[\mathbf{kx\text{-}}\omega\,\mathbf{t\text{-}}\,\delta]\right]$$

$$\alpha = kx - \omega t$$

$$\cos[\alpha] + \cos[\beta] = 2\cos\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\cos\left[\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

$$\beta = kx - \omega t - \delta = \alpha - \delta$$

cosicché:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\alpha-\delta}{2}=\alpha-\frac{\delta}{2}=kx-\omega t-\frac{\delta}{2} \qquad \frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\alpha-\alpha+\delta}{2}=+\frac{\delta}{2}$$

$$y(\mathbf{x,t})=\mathbf{2A}\cos\left[\mathbf{kx\text{-}}\omega\,\mathbf{t\text{-}}\frac{\delta}{2}\right]\cos\left[\frac{\delta}{2}\right]=\mathbf{2A}\cos\left[\frac{\delta}{2}\right]\cos\left[\mathbf{kx\text{-}}\omega\,\mathbf{t\text{-}}\frac{\delta}{2}\right]$$

La risultante è un'onda armonica della stessa frequenza e lunghezza d'onda ma di ampiezza:

$$\mathbf{A'=2A}\cos\left[\frac{\delta}{2}\right]$$

e di intensità

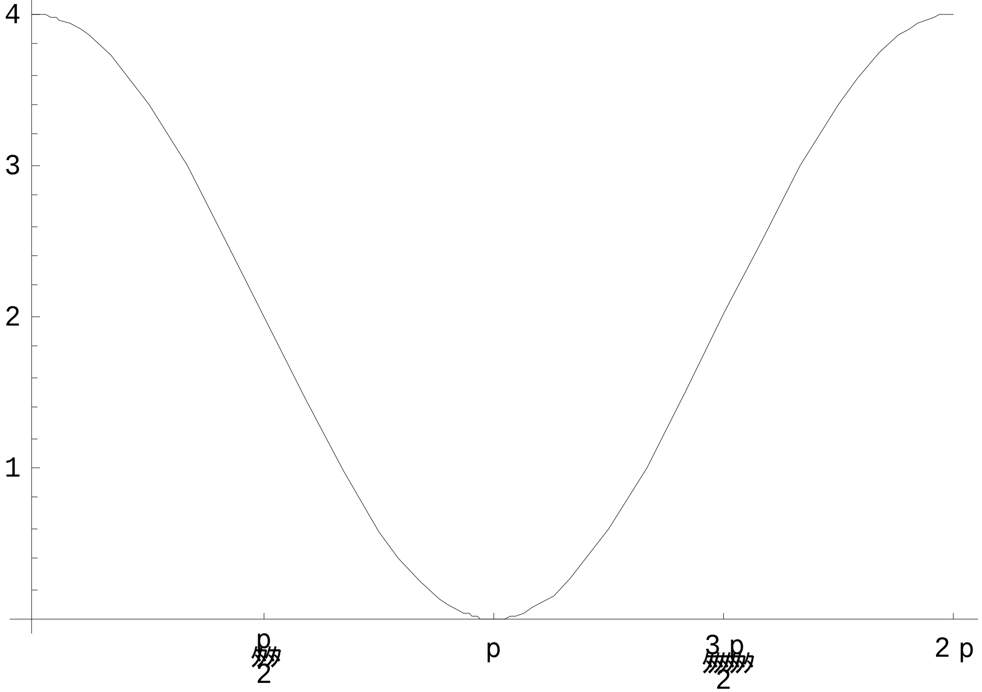
$$I\propto A^2=\mathbf{4A^2}\cos^2\left[\frac{\delta}{2}\right]$$

l'intensità di ciascuna delle due onde è proporzionale ad $A^2$

$$I_1=I_2\propto A^2$$

L'intensità dell'onda risultante varia fra 4 volte l'intensità di ciascuna delle due onde (se $\delta=0$) e 0 (se $\delta=\pi$), quindi sovrapponendo due onde di data intensità (che trasportano dunque una data quantità di energia) non si ottiene un'intensità pari alla loro somma $2I_1$ (cioè un'onda che trasporti energia pari alla somma delle energie trasportate da ciascuna) ma un'intensità compresa fra 0 e quattro volte l'intensità di ciascuna.

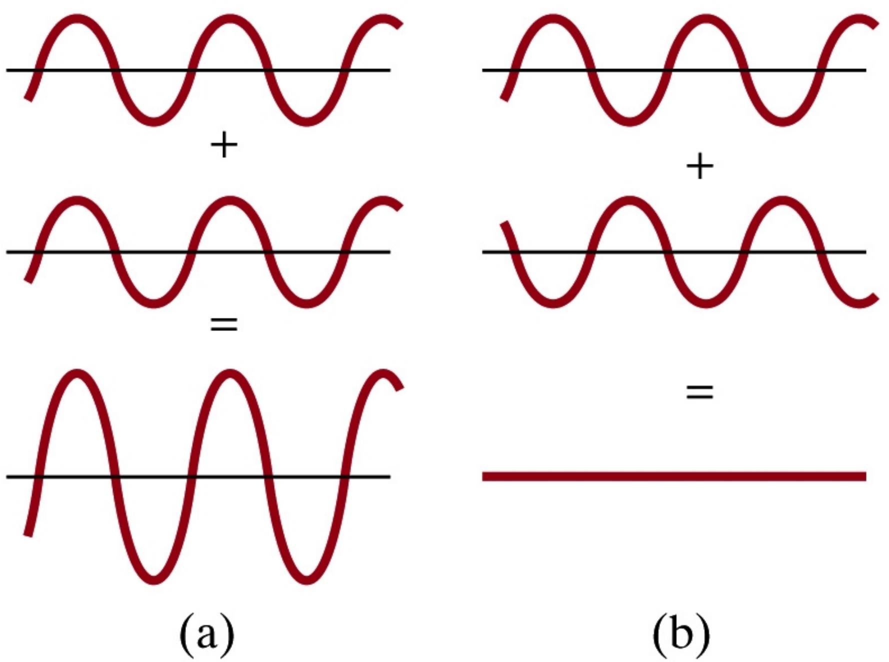
$$I\propto\mathbf{4I_1}\cos^2\left[\frac{\delta}{2}\right]$$




$$I \propto \mathbf{4I_1}\cos^2\left[\frac{\delta}{2}\right]$$

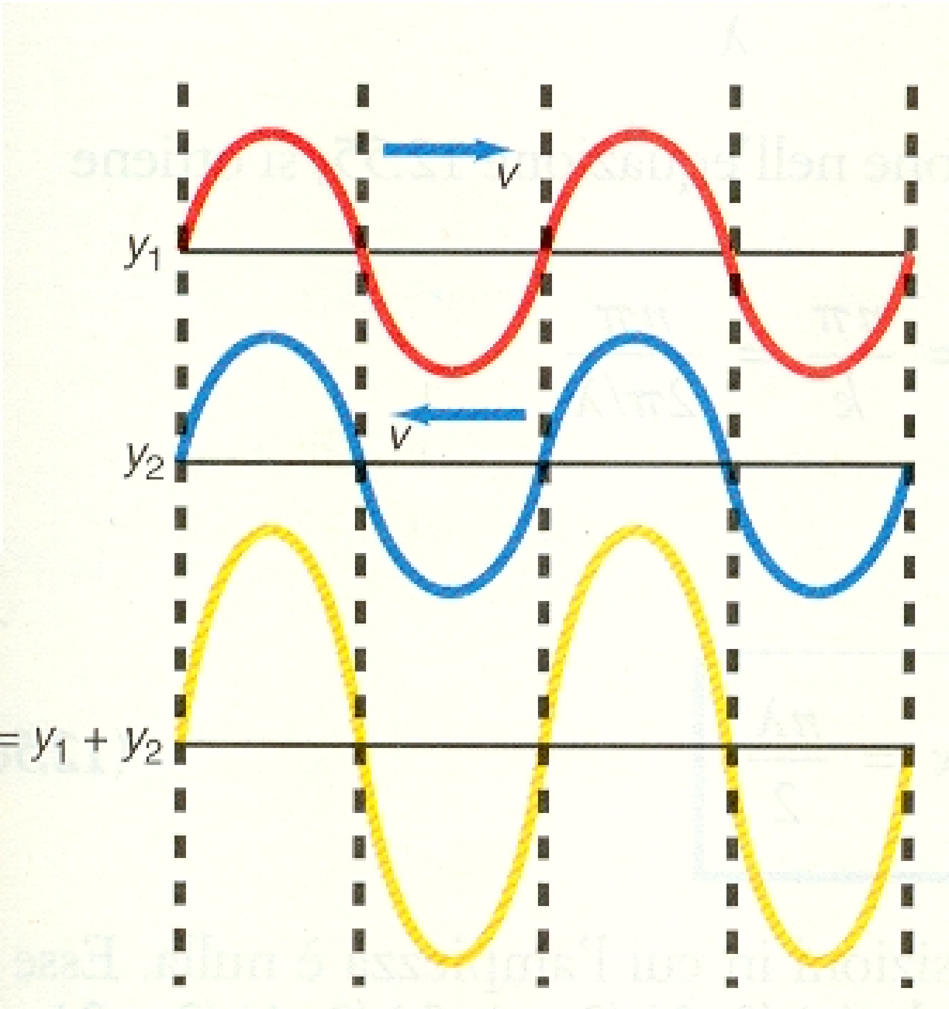
Intensità di un’onda ottenuta sovrapponendo due onde di intensità $I_1$ in funzione dello sfasamento $\delta$ .

Visualizzazione grafica dell’ interferenza costruttiva (a) e distruttiva (b)



# Onde stazionarie sulla corda vibrante

Se due onde sinusoidali con stessa ampiezza e lunghezza d'onda, viaggiano su una corda con verso opposto, la risultante può essere calcolata tramite il principio di sovrapposizione




$$y_2 = A\sin\left(kx+\omega t\right)$$

$$y_1 = A\sin\left(kx-\omega t\right)$$

$$\sin\left(B\right)+\sin\left(C\right) = 2\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$$B=kx-\omega t,\quad C=kx+\omega t$$

$$y_1+y_2 = 2A\sin\left(kx\right)\cos\left(-\omega t\right)$$

I nodi di vibrazione sono i punti in cui l'ampiezza risultante è nulla

$$kx = n\pi, \quad x = \frac{n\pi}{k}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow x = n\frac{\lambda}{2}$$

I massimi di vibrazione sono i punti in cui l'ampiezza risultante è massima

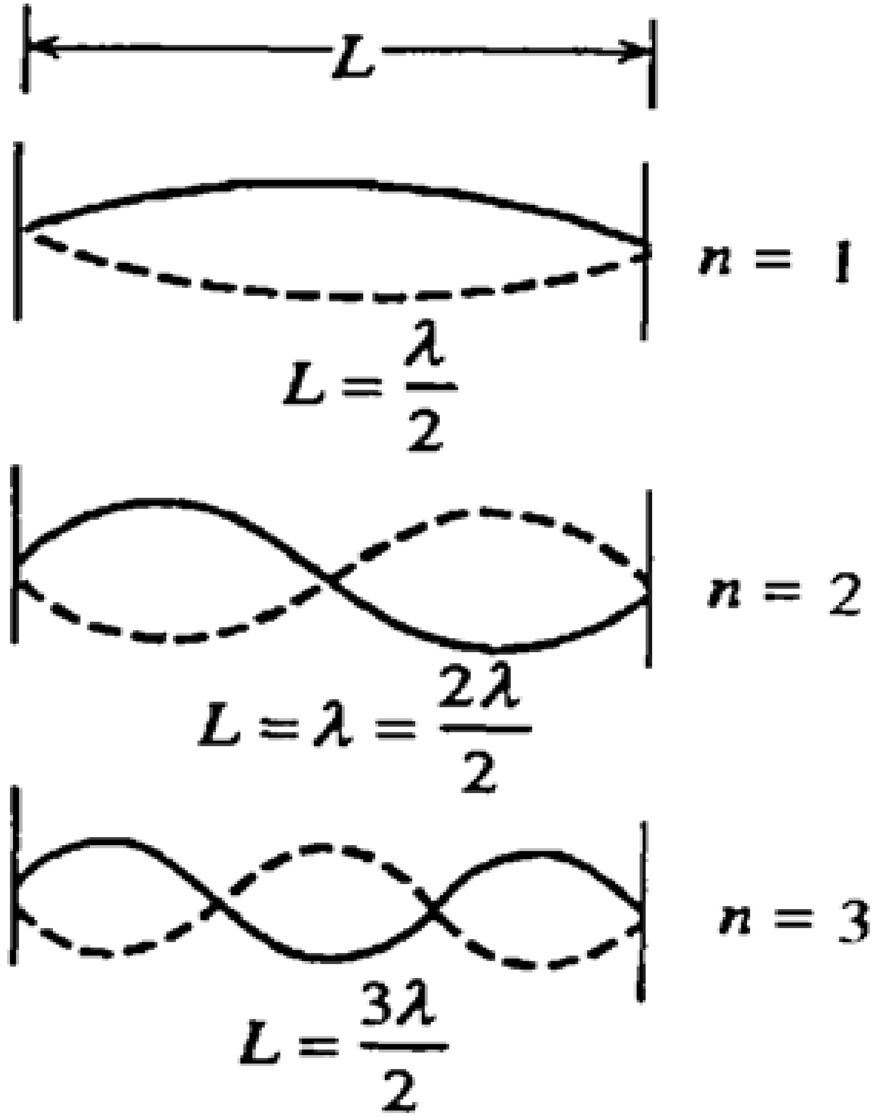
$$kx = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{2n-1}{2k}\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow x = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

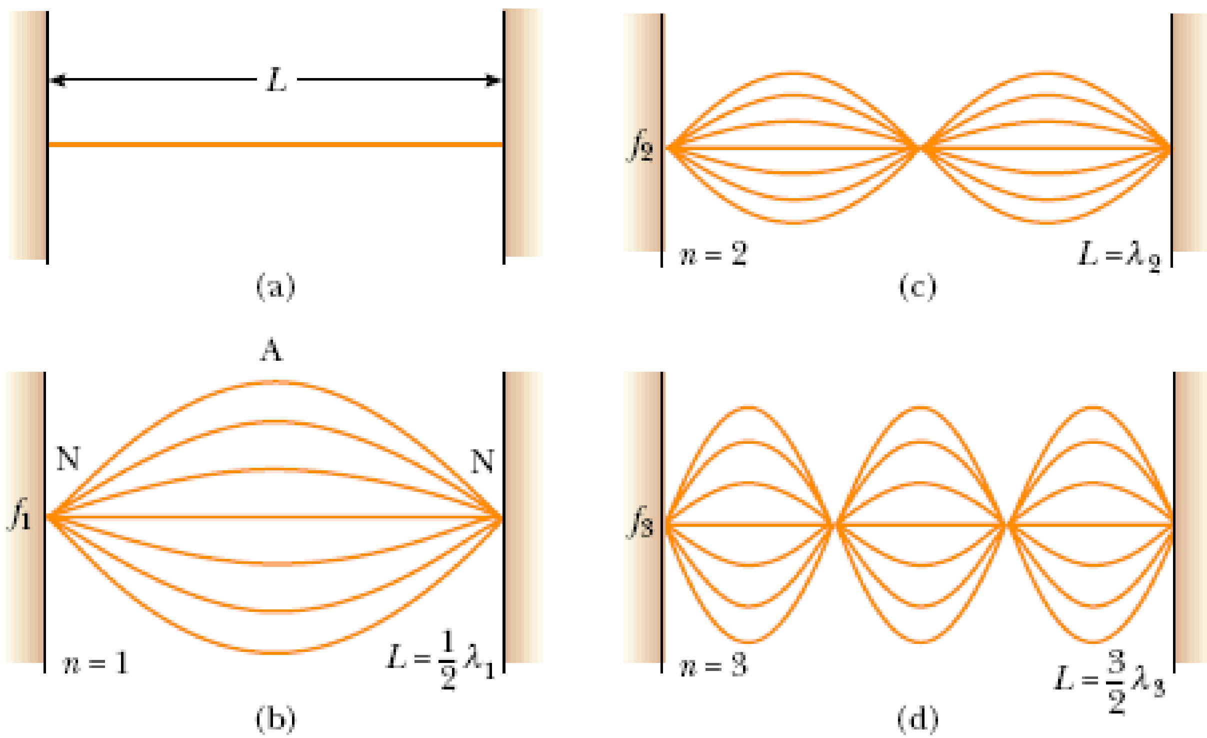
Corda fissata ai due estremi

$$2A\sin(kx)\cos(-\omega t) = 0 \,; x = 0, x = L$$

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$




The lowest resonant frequency ($n = 1$ in Eq. 16.9) is the **fundamental frequency** or the **first harmonic** $f_1$. The second harmonic is the mode with $n = 2$ and frequency $f_2 = 2f_1$, and so on for the higher harmonics $f_3$, $f_4$, and so on.




The boundary condition results in the string having a number of natural patterns of oscillation, called normal modes, each of which has a characteristic frequency that is easily calculated. This situation in which only certain frequencies of oscillation are allowed is called quantization

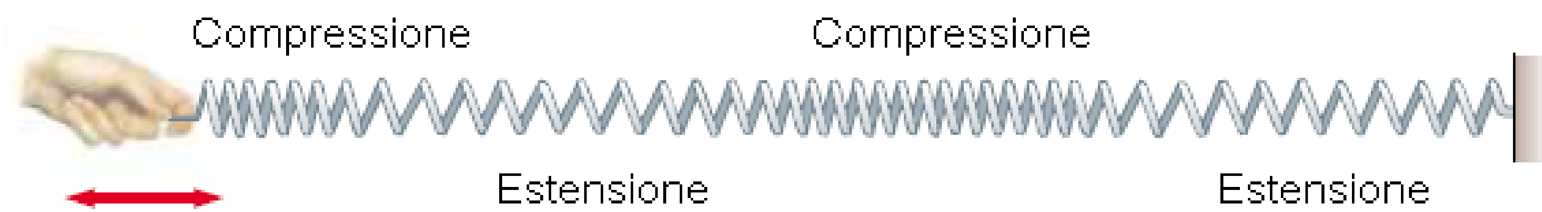
**Problem 16.3** The G string of a mandolin is 0.34 m long and has a linear mass density of 0.004 kg/m. The thumbscrew attached to the string is adjusted to provide a tension of 71.1 N. What then is the fundamental frequency of the string?

**Solution**

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{(2)(0.34\,\mathrm{m})}\sqrt{\frac{71.1\,\mathrm{N}}{0.004\,\mathrm{kg/m}}} = 196\,\mathrm{Hz}$$

# Onde sonore

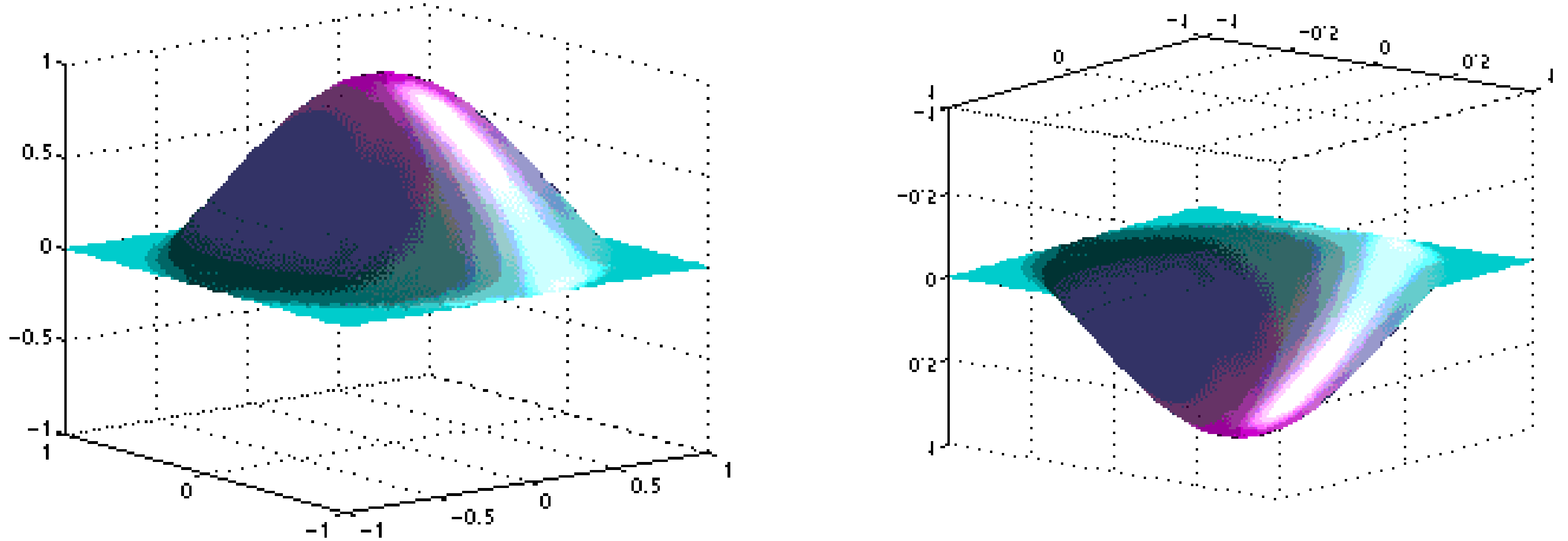
**A differenza delle onde finora esaminate (come ad esempio le onde meccaniche in una corda), le onde sonore sono onde longitudinali, in cui la vibrazione delle particelle del mezzo è nella stessa direzione di prop**




**Si consideri ad esempio una molla a spirale in cui una estremità viene alternativamente spinta e tirata: lungo la molla si propagano una serie di compressioni (zone in cui le spirali sono più vicine fra loro) e di espansioni o rarefazioni (zone in cui le spirali sono più lontane fra loro).**

Consideriamo il caso della membrana di un tamburo che viene percossa: la membrana (Fig 018) oscilla comprimendo e rarefacendo l’aria circostante e queste rarefazioni e compressioni si propagano poi agli strati d’aria successivi.

Fig 018 Quando la membrana di un tamburo si alza (a) crea una zona una zona di compressione, quando si abbassa (b) una di rarefazione.



Le onde sonore dunque, per propagarsi, richiedono l'esistenza di un mezzo le cui particelle vengano messe in vibrazione. Di regola questo mezzo è l'aria ma il suono può propagarsi anche in altri mezzi, seppure con velocità diversa (Tab1)

Tab 1 velocità delle onde sonore in alcuni materiali

| Materiale | velocità (m/s) |
|---|---|
| Aria | 343 |
| Elio | 1005 |
| Idrogeno | 1300 |
| Acqua | 1440 |
| Ferro | 5000 |
| Legno | 4000 |

$$\lambda \nu = v$$

la lunghezza d'onda di un 'onda sonora cresce proporzionalmente alla velocità. Nel passaggio da aria ad acqua, ad esempio, la velocità, e quindi la lunghezza d'onda cresce di circa 4 volte.

**Problem 16.4** For copper the bulk modulus is $14 \times 10^{10}$ N/m$^2$ and the density is 8920 kg/m$^3$. What is the speed of sound in copper?

**Solution**

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{14 \times 10^{10}\ \mathrm{N/m^2}}{8920\ \mathrm{kg/m^3}}} = 3960\ \mathrm{m/s}$$

# Caratteristiche del suono

**Tono (o altezza):** si distingue fra suoni acuti e gravi (es: violino e contrabbasso).

Galileo associò per primo queste sensazioni alla frequenza dell’onda sonora: più bassa è la frequenza, più grave è il suono, mentre più alta è la frequenza, più acuto è il suono. L’orecchio umano è in grado di percepire suoni la cui frequenza sia compresa nell’intervallo 20 Hz-20000 Hz (banda dell’udibile).

I suoni a frequenza maggiore di 20000 Hz vengono detti ultrasuoni e possono essere percepiti da molti animali.

I cani ad esempio sentono suoni fino a 50000 Hz e i pipistrelli fino a 100000 Hz.

I suoni a frequenza minore di 20 Hz sono detti infrasuoni.

Sono sorgenti di infrasuoni i terremoti, i tuoni e le vibrazioni di alcuni macchinari pesanti.

Questi suoni, sebbene non udibili, possono recare notevoli danni al corpo umano attraverso fenomeni di risonanza.

# Volume (o intensità):

La distinzione fra suoni più forti e suoni più deboli dipende dall'intensità dell'onda che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda e rappresenta l'energia trasportata nell'unità di tempo attraverso un'area unitaria perpendicolare alla direzione di propagazione: come tale si misura in $W/m^2$.

2. L'orecchio umano può percepire suoni di intensità compresa fra $10^{-12}$ $W/m^2$ e 1 $W/m^2$ ( al di sopra di questo valore si avverte una sensazione dolorosa). La percezione soggettiva del volume di un suono non è tuttavia proporzionale all'intensità dell'onda sonora: si preferisce misurare l'intensità del suono (cioè la grandezza fisicamente determinabile) usando una scala logaritmica.
L'unità di misura di questa scala è il bel, anche se comunemente viene usato il decibel (dB) pari a 1/10 di bel.

Il livello di intensità B di un'onda è definito dall'equazione:

$$B(dB) = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

dove I è l'intensità dell'onda e $I_0$ è un'intensità di riferimento, (soglia di udibilità) ($1.0\times 10^{-12}$ W/m$^2$).

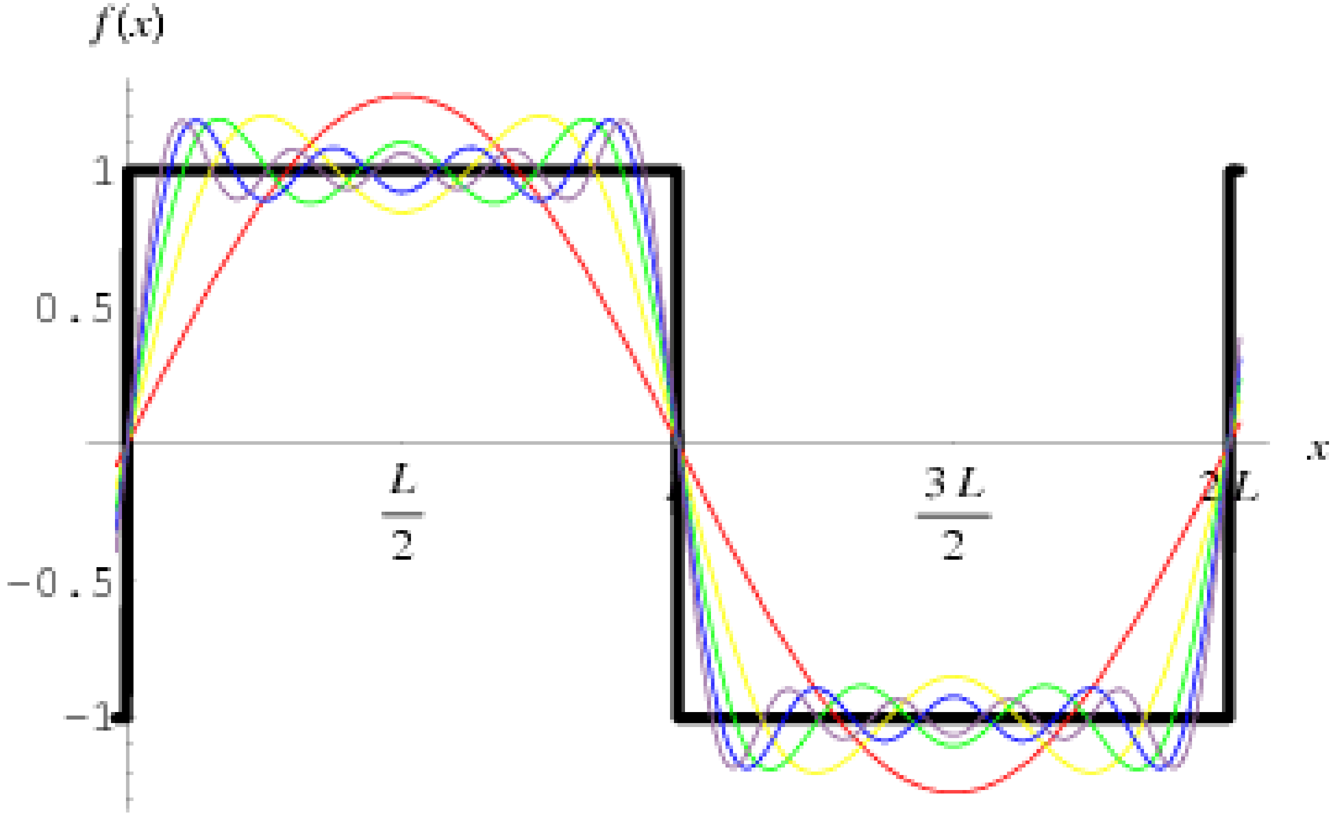
esempio, il livello di intensità di un suono I= $1.0\times 10^{-10}$ W/m$^2$

$$B = 10\log_{10}\left(\frac{10^{-10}}{10^{-12}}\right) = 10\log_{10}\left(10^2\right) = 20$$

$$B = 10\log_{10}\left(\frac{10^{-12}}{10^{-12}}\right) = 10\log_{10}(1) = 0$$

livello di intensità corrispondente alla soglia di udibilità $10^{-12}$ W/m$^2$

**Timbro ( o qualità):** se un violino e un pianoforte emettono la stessa nota con la stessa intensità, si percepisce comunque una chiara differenza fra i due suoni: questa differenza viene espressa come differenza di timbro o qualità del suono.Se un diapason che vibra emette una sola frequenza, uno strumento musicale emette di regola note che sono la sovrapposizione di varie frequenza.



# Intensità media di alcuni suoni

| Sorgente | Livello di intensità (dB) | Intensità $W/m^2$ |
|---|---|---|
| Fruscio di foglie | 10 | 1.0Z $10^{-11}$ |
| Sussurro | 20 | 1.0 ▪ $10^{-10}$ |
| Conversazione | 65 | 3.2 ▪ $10^{-6}$ |
| Traffico intenso | 70 | 1.0 ▪ $10^{-5}$ |
| Sirena a 30 m | 100 | 1.0 ▪ $10^{-2}$ |
| Concerto rock | 120 | 1.0 |
| Jet a 30 m | 140 | 100 |

# Effetto Doppler

Sorgente sonora che emette onde sonore in aria di frequenza $\nu$ e ***v*** è la velocità del suono in aria

$$\lambda = \frac{v}{\nu}$$

Il periodo T dell'onda (tempo intercorrente fra due successive compressioni o rarefazioni)

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{v}$$

**Se l'osservatore e la sorgente sono in quiete**

$$\nu_O = \frac{v}{\lambda} = \nu_S$$

# Osservatore in quiete, sorgente in moto

Supponiamo ora che la sorgente si muova con velocità $\boldsymbol{v_s}$ rispetto all'aria (si pensi alla sirena di un'ambulanza o al fischio di un treno): mentre la zona di compressione ha compiuto nel tempo T una distanza $d$ = $\boldsymbol{v}$T= $\lambda$ (essendo $\boldsymbol{v}$ la velocità del suono) la sorgente si è spostata di $d_s = \boldsymbol{v_s}$T, cosicché quando si crea la seconda zona di compressione, questa dista dalla prima

$$d - d_s = \lambda - v_s T = \lambda - v_s \frac{\lambda}{v} = \lambda\left(1 - \frac{v_s}{v}\right)$$

d-ds è la distanza fra due zone di compressione :la lunghezza d'onda del suono percepito è data da

$$\lambda' = \lambda\left(1 - \frac{v_s}{v}\right)$$

Un osservatore che vede la sorgente sonora avvicinarsi, percepisce dunque la frequenza

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v/\lambda}{1 - \frac{v_s}{v}} = \frac{\nu}{1 - \frac{v_s}{v}}$$

e, poiché il denominatore è minore di 1, $\nu' > \nu$ .

Es $\boldsymbol{v_s}$ =30m/s, essendo $\boldsymbol{v}$ =343 m/s, una frequenza di emissione $\nu$ = 400Hz verrà percepita come

$$\nu' = \frac{400\ Hz}{1 - \dfrac{30\ m/s}{343\ m/s}} \approx 440\,Hz$$

Se la sorgente si allontana dall'osservatore, la nuova lunghezza d'onda sarà: $\lambda$ ' = *d* + $d_s$

$$\nu' == \frac{\nu}{1 + \dfrac{v_s}{v}} \qquad \nu' < \nu$$

Si ha effeto Doppler anche quando l'osservatore è in moto rispetto alla sorgente: se $\boldsymbol{v_o}$ è la velocità dell'osservatore si può mostrare che:

Se l'osservatore si avvicina alla sorgente

$$\nu' = \left(1 + \frac{v_o}{v}\right)\nu$$

$$\nu' = \left(1 - \frac{v_o}{v}\right)\nu$$

Se l'osservatore si allontana dalla sorgente.

Si possono riassumere tutte le relazioni fin qui trovate in un’unica formula:

$$\nu' = \frac{v \pm v_O}{v \mp v_S}\,\nu$$

dove i segni superiori si utilizzano nel caso dell’avvicinamento fra sorgente e osservatore e quelli inferiori in caso di allontanamento.

Quando un’onda sonora è riflessa da un’ ostacolo in movimento, la frequenza dell’onda riflessa, a causa dell’effetto Doppler, sarà diversa da quella dell’onda incidente.

Consideriamo ad esempio il caso di un’onda sonora di frequenza $\nu$ =6000 Hz che incide su un oggetto che si sta avvicinando alla sorgente alla velocità di 4 m/s. In questo caso si ha a che fare con due spostamenti Doppler: il primo in quanto l’oggetto si comporta come un osservatore in movimento che si sta avvicinando alla sorgente; come tale esso percepisce una frequenza

$$\nu' = \left(1 + \frac{v_o}{v}\right)\nu = \left(1 + \frac{4}{343}\right)6000 \approx 6070\ Hz$$

In secondo luogo l’oggetto si comporta nel riflettere il suono come una sorgente in movimento, cosicché la frequenza riflessa è:

$$\nu'' = \frac{1}{1 - \frac{v_s}{v_o}}\,\nu' = \frac{1}{1 - \frac{4}{343}}\,6070 \approx 6140\ Hz$$