

**ANALISI MATEMATICA T-2 (C.d.L. Ing. per l'ambiente e il territorio) -
COMPL. DI ANALISI MATEMATICA (A-K) (C.d.L. Ing. Civile)**

A.A.2008-2009 - Prof. G.Cupini

Esercizi sull'integrazione III

(Grazie agli studenti del corso che comunicheranno eventuali errori)

Esercizio 1.

Calcolare

$$\iiint_S y \, dx \, dy \, dz$$

dove

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, z \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 3)\},$$

integrando per strati e per fili.

[Sol.: Per motivi di simmetria il risultato è 0, tuttavia provare comunque a svolgere l'esercizio. L'intersezione tra $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 3)$ è una circonferenza del piano $z = 2$ di centro $(0, 0, 2)$ e raggio 1.

Per fili:

$$\iint_D \left(\int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2+3)}^{\sqrt{5-x^2-y^2}} y \, dz \right) dx \, dy = \iint_D \left(y\sqrt{5-x^2-y^2} - y\frac{1}{2}(x^2+y^2+3) \right) dx \, dy$$

dove $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e poi usare le coordinate polari.

Per strati:

$$\int_{\frac{3}{2}}^2 \left(\iint_{D_z} y \, dx \, dy \right) dz + \int_2^{\sqrt{5}} \left(\iint_{E_z} y \, dx \, dy \right) dz$$

dove $D_z = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2z - 3\}$ e $E_z = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 5 - z^2\}$ poi usare le coordinate polari. Ad esempio:

$$\int_{\frac{3}{2}}^2 \left(\iint_{D_z} y \, dx \, dy \right) dz = \int_{\frac{3}{2}}^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2z-3}} \rho^2 \sin \theta \, d\rho \right) d\theta \right) dz.$$

Esercizio 2. Usando le coordinate polari, calcolare

$$\iint_D xy^2 \, dx \, dy$$

dove $D = \{(x, y) : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, xy \geq 0\}$

[Sol.: Per motivi di simmetria il risultato è 0, tuttavia provare comunque a svolgere l'esercizio. $D = D_1 \cup D_2$, dove

$$D_1 = \{(x, y) : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\} \quad D_2 = \{(x, y) : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \leq 0\}.$$

Usando le coordinate polari: $\Phi_1 : T_1 \rightarrow D_1$, $\Phi_2 : T_2 \rightarrow D_2$, $\Phi_i(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, $i = 1, 2$,

$$T_1 = \{(\rho, \theta) : \sqrt{2} \leq \rho \leq \sqrt{4}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}, \quad T_2 = \{(\rho, \theta) : \sqrt{2} \leq \rho \leq \sqrt{4}, \pi \leq \theta \leq 3\frac{\pi}{2}\}.$$

Dunque:

$$\iint_D xy^2 dx dy = \iint_{T_1} \rho \cos \theta (\rho \sin \theta)^2 \rho d\rho d\theta + \iint_{T_2} \rho \cos \theta (\rho \sin \theta)^2 \rho d\rho d\theta = \dots$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\iiint_{\Omega} (3x^2 - x + y^3 + z) dx dy dz$$

dove

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Esercizio 4. Calcolare (per fili, per strati e usando le coordinate cilindriche)

$$\iiint_{\Omega} yz dx dy dz$$

dove

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, 2 \leq z \leq 3\}.$$

[Sugg.: Per motivi di simmetria il risultato è 0, tuttavia provare comunque a svolgere l'esercizio. $x^2 + y^2 = z^2$ è un cono ottenuto per rotazione attorno all'asse z della retta $z = x$.

Usando il cambio di variabili cilindriche, $\Phi : T \rightarrow E$, dove

$$\Phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$

e

$$T = \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 2 \leq z \leq 3, 0 \leq \rho \leq z\}$$

si ha:

$$\iiint_E yz dx dy dz = \iiint_T (\rho \sin(\theta)z) \rho d\rho d\theta dz = \dots]$$

Esercizio 5. Calcolare $\int_{\Omega} (x + yz) dx dy dz$ dove $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$ per fili e per strati.

Esercizio 6. Calcolare in tre modi (fili, strati, coordinate sferiche)

$$\iiint_E y dx dy dz$$

dove

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 12, z^2 \geq \frac{1}{3}(x^2 + y^2), z \geq 0\}.$$

[Sugg.: Per motivi di simmetria il risultato è 0, tuttavia provare comunque a svolgere l'esercizio. $z^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ è un cono ottenuto per rotazione attorno all'asse z della retta $z = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. L'intersezione tra $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ e $z^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$, con $z \geq 0$, è una circonferenza del piano $z = \sqrt{3}$ di centro $(0, 0, \sqrt{3})$ e raggio 3.

Usando il cambio di variabili sferiche, $\Phi : T \rightarrow E$, dove

$$\Phi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$$

e

$$T = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{12}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}\}$$

si ha:

$$\iiint_E y \, dx \, dy \, dz = \iiint_T \rho \sin \phi \sin \theta \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi = \dots]$$