Dipartimento di Matematica per le scienze economiche e sociali Università di Bologna

Ricerca operativa

Lezione # 3 8 maggio 2009

professor Daniele Ritelli

www.unibo.it/docenti/daniele.ritelli

Massimi e minimi in due variabili Sia $z = f(x, y)$ una funzione reale delle due variabili indipendenti x, y le quali giacciono in un rettangolo, eventualmente infinito.

Massimi e minimi in due variabili Sia $z = f(x, y)$ una funzione reale delle due variabili indipendenti x, y le quali giacciono in un rettangolo, eventualmente infinito. Se esistono i limiti dei due rapporti incrementali

Massimi e minimi in due variabili Sia $z = f(x, y)$ una funzione reale delle due variabili indipendenti x, y le quali giacciono in un rettangolo, eventualmente infinito. Se esistono i limiti dei due rapporti incrementali

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Massimi e minimi in due variabili Sia $z = f(x, y)$ una funzione reale delle due variabili indipendenti x, y le quali giacciono in un rettangolo, eventualmente infinito. Se esistono i limiti dei due rapporti incrementali

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Massimi e minimi in due variabili Sia $z = f(x, y)$ una funzione reale delle due variabili indipendenti x, y le quali giacciono in un rettangolo, eventualmente infinito. Se esistono i limiti dei due rapporti incrementali

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\boldsymbol{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}}{\boldsymbol{h}} = \frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x}}\boldsymbol{(x_0, y_0)} := \boldsymbol{f_x(x_0, y_0)}$$

Massimi e minimi in due variabili Sia $z = f(x, y)$ una funzione reale delle due variabili indipendenti x, y le quali giacciono in un rettangolo, eventualmente infinito. Se esistono i limiti dei due rapporti incrementali

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := f_x(x_0, y_0)$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Massimi e minimi in due variabili Sia $z = f(x, y)$ una funzione reale delle due variabili indipendenti x, y le quali giacciono in un rettangolo, eventualmente infinito. Se esistono i limiti dei due rapporti incrementali

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := f_x(x_0, y_0)$$

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Massimi e minimi in due variabili Sia $z = f(x, y)$ una funzione reale delle due variabili indipendenti x, y le quali giacciono in un rettangolo, eventualmente infinito. Se esistono i limiti dei due rapporti incrementali

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := f_x(x_0, y_0)$$

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := f_y(x_0, y_0)\ .$$

Massimi e minimi in due variabili Sia $z = f(x, y)$ una funzione reale delle due variabili indipendenti x, y le quali giacciono in un rettangolo, eventualmente infinito. Se esistono i limiti dei due rapporti incrementali

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := f_x(x_0, y_0)$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := f_y(x_0, y_0)\ .$$

diremo che la funzione $z = f(x, y)$ è derivabile parzialmente rispetto ad x rispettivamente y.

Il *gradiente* della funzione di due variabili $z = f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) è il vettore:

Il *gradiente* della funzione di due variabili $z = f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) è il vettore:

$$\boldsymbol{\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))\,.}$$

Il *gradiente* della funzione di due variabili $z = f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) è il vettore:

$$\boldsymbol{\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))\,.}$$

Il punto (x_1, y_1) è un massimo [minimo] relativo per f se $f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$ $[f(x, y) \geq f(x_1, y_1)]$.

Il *gradiente* della funzione di due variabili $z = f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) è il vettore:

$$\boldsymbol{\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))\,.}$$

Il punto (x_1, y_1) è un massimo [minimo] relativo per f se $f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$ $[f(x, y) \geq f(x_1, y_1)]$.

Se f è parzialmente derivabile in un punto di massimo o minimo relativo le sue derivate parziali si annullano.

Il *gradiente* della funzione di due variabili $z = f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) è il vettore:

$$\boldsymbol{\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))\,.}$$

Il punto (x_1, y_1) è un massimo [minimo] relativo per f se $f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$ $[f(x, y) \geq f(x_1, y_1)]$.

Se f è parzialmente derivabile in un punto di massimo o minimo relativo le sue derivate parziali si annullano.

In generale l'annullamento delle derivate parziali non permette di decidere se ci si trovi in presenza di un punto di massimo o minimo relativo o altro.

Per classificare questi punti stazionari, occorre considerare le derivate parziali seconde:

Per classificare questi punti stazionari, occorre considerare le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := f_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := f_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := f_{xy}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := f_{yx}.$$

Per classificare questi punti stazionari, occorre considerare le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := f_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := f_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := f_{xy}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := f_{yx}.$$

Le prime due derivate vengono chiamate derivate *pure* mentre le ultime due *miste*.

Per classificare questi punti stazionari, occorre considerare le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := f_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := f_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := f_{xy}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := f_{yx}.$$

Le prime due derivate vengono chiamate derivate *pure* mentre le ultime due *miste*. Nella maggioranza pressoché totale delle situazioni rilevanti per le applicazioni le due derivate miste coincidono.

La natura di un punto critico (x_1, y_1) è esplicata dal comportamento della matrice *hessiana*, che è una matrice 2×2 così definita:

La natura di un punto critico (x_1, y_1) è esplicata dal comportamento della matrice *hessiana*, che è una matrice 2×2 così definita:

$$\mathcal{H}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_{xx}(x_1, y_1)} & \boldsymbol{f_{xy}(x_1, y_1)} \\ \boldsymbol{f_{yx}(x_1, y_1)} & \boldsymbol{f_{yy}(x_1, y_1)} \end{pmatrix}$$

La natura di un punto critico (x_1, y_1) è esplicata dal comportamento della matrice *hessiana*, che è una matrice 2×2 così definita:

$$\mathcal{H}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_{xx}(x_1, y_1)} & \boldsymbol{f_{xy}(x_1, y_1)} \\ \boldsymbol{f_{yx}(x_1, y_1)} & \boldsymbol{f_{yy}(x_1, y_1)} \end{pmatrix}$$

- se $\det \mathcal{H}(x_1, y_1) = 0$ la situazione è indecidibile

La natura di un punto critico (x_1, y_1) è esplicata dal comportamento della matrice *hessiana*, che è una matrice 2×2 così definita:

$$\mathcal{H}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_{xx}(x_1, y_1)} & \boldsymbol{f_{xy}(x_1, y_1)} \\ \boldsymbol{f_{yx}(x_1, y_1)} & \boldsymbol{f_{yy}(x_1, y_1)} \end{pmatrix}$$

- se $\det \mathcal{H}(x_1, y_1) = 0$ la situazione è indecidibile
- se $\det \mathcal{H}(x_1, y_1) < 0$ il punto stazionario non è ne massimo ne minimo

La natura di un punto critico (x_1, y_1) è esplicata dal comportamento della matrice *hessiana*, che è una matrice 2×2 così definita:

$$\mathcal{H}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_{xx}(x_1, y_1)} & \boldsymbol{f_{xy}(x_1, y_1)} \\ \boldsymbol{f_{yx}(x_1, y_1)} & \boldsymbol{f_{yy}(x_1, y_1)} \end{pmatrix}$$

- se $\det \mathcal{H}(x_1, y_1) = 0$ la situazione è indecidibile
- se $\det \mathcal{H}(x_1, y_1) < 0$ il punto stazionario non è ne massimo ne minimo
- se $\det \mathcal{H}(x_1, y_1) > 0$ allora:

La natura di un punto critico (x_1, y_1) è esplicata dal comportamento della matrice *hessiana*, che è una matrice 2×2 così definita:

$$\mathcal{H}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_{xx}(x_1, y_1)} & \boldsymbol{f_{xy}(x_1, y_1)} \\ \boldsymbol{f_{yx}(x_1, y_1)} & \boldsymbol{f_{yy}(x_1, y_1)} \end{pmatrix}$$

- se $\det \mathcal{H}(x_1, y_1) = 0$ la situazione è indecidibile

- se $\det \mathcal{H}(x_1, y_1) < 0$ il punto stazionario non è ne massimo ne minimo

- se $\det \mathcal{H}(x_1, y_1) > 0$ allora:

⊙ se $f_{xx}(x_1, y_1) > 0$ si ha un minimo relativo

La natura di un punto critico (x_1, y_1) è esplicata dal comportamento della matrice *hessiana*, che è una matrice 2×2 così definita:

$$\mathcal{H}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_{xx}(x_1, y_1)} & \boldsymbol{f_{xy}(x_1, y_1)} \\ \boldsymbol{f_{yx}(x_1, y_1)} & \boldsymbol{f_{yy}(x_1, y_1)} \end{pmatrix}$$

- se $\det \mathcal{H}(x_1, y_1) = 0$ la situazione è indecidibile
- se $\det \mathcal{H}(x_1, y_1) < 0$ il punto stazionario non è ne massimo ne minimo
- se $\det \mathcal{H}(x_1, y_1) > 0$ allora:

⊙ se $f_{xx}(x_1, y_1) > 0$ si ha un minimo relativo

⊙ se $f_{xx}(x_1, y_1) < 0$ si ha un massimo relativo

Data allora la funzione di costo in due variabili:

Data allora la funzione di costo in due variabili:

$$\boldsymbol{C(Q,R) = A\,\frac{\delta}{Q} + h\,\frac{R^2}{2Q} + b\,\frac{(Q-R)^2}{2Q}}$$

Data allora la funzione di costo in due variabili:

$$\boldsymbol{C(Q,R) = A\,\frac{\delta}{Q} + h\,\frac{R^2}{2Q} + b\,\frac{(Q-R)^2}{2Q}}$$

le equazioni di punto critico sono

Data allora la funzione di costo in due variabili:

$$\boldsymbol{C(Q,R) = A\,\frac{\delta}{Q} + h\,\frac{R^2}{2Q} + b\,\frac{(Q-R)^2}{2Q}}$$

le equazioni di punto critico sono

$$\boldsymbol{\begin{cases} bQ^2 - (b+h)R^2 - 2A\delta = 0 \\ \dfrac{(b+h)R}{Q} - b = 0 \end{cases}}$$

Data allora la funzione di costo in due variabili:

$$\boldsymbol{C(Q,R) = A\,\frac{\delta}{Q} + h\,\frac{R^2}{2Q} + b\,\frac{(Q-R)^2}{2Q}}$$

le equazioni di punto critico sono

$$\begin{cases} \boldsymbol{bQ^2 - (b+h)R^2 - 2A\delta = 0} \\ \boldsymbol{\dfrac{(b+h)R}{Q} - b = 0} \end{cases}$$

risolvendo:

$$\boldsymbol{Q^* = \sqrt{\frac{2A\delta(b+h)}{bh}}, \quad R^* = \sqrt{\frac{2Ab\delta}{h(b+h)}}}$$

Il fatto che si tratti di un minimo dipende dalla struttura della matrice hessiana:

Il fatto che si tratti di un minimo dipende dalla struttura della matrice hessiana:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} C''_{QQ}(Q,R) & C''_{QR}(Q,R) \\ C''_{RQ}(Q,R) & C''_{RR}(Q,R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(b+h)R^2+2A\delta}{Q^3} & -\frac{(b+h)R}{Q^2} \\ -\frac{(b+h)R}{Q^2} & \frac{b+h}{Q} \end{pmatrix}$$

Il fatto che si tratti di un minimo dipende dalla struttura della matrice hessiana:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} C''_{QQ}(Q,R) & C''_{QR}(Q,R) \\ C''_{RQ}(Q,R) & C''_{RR}(Q,R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(b+h)R^2+2A\delta}{Q^3} & -\frac{(b+h)R}{Q^2} \\ -\frac{(b+h)R}{Q^2} & \frac{b+h}{Q} \end{pmatrix}$$

in quanto:

Il fatto che si tratti di un minimo dipende dalla struttura della matrice hessiana:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} C''_{QQ}(Q,R) & C''_{QR}(Q,R) \\ C''_{RQ}(Q,R) & C''_{RR}(Q,R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(b+h)R^2+2A\delta}{Q^3} & -\frac{(b+h)R}{Q^2} \\ -\frac{(b+h)R}{Q^2} & \frac{b+h}{Q} \end{pmatrix}$$

in quanto:

$$\det \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{2A\delta(b+h)}{Q^4} > 0,$$

Il fatto che si tratti di un minimo dipende dalla struttura della matrice hessiana:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} C''_{QQ}(Q,R) & C''_{QR}(Q,R) \\ C''_{RQ}(Q,R) & C''_{RR}(Q,R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(b+h)R^2+2A\delta}{Q^3} & -\frac{(b+h)R}{Q^2} \\ -\frac{(b+h)R}{Q^2} & \frac{b+h}{Q} \end{pmatrix}$$

in quanto:

$$\det \mathcal{H} = \frac{2A\delta(b+h)}{Q^4} > 0, \quad h_{11} = \frac{(b+h)R^2 + 2A\delta}{Q^3} > 0.$$

Il fatto che si tratti di un minimo dipende dalla struttura della matrice hessiana:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} C''_{QQ}(Q,R) & C''_{QR}(Q,R) \\ C''_{RQ}(Q,R) & C''_{RR}(Q,R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(b+h)R^2+2A\delta}{Q^3} & -\frac{(b+h)R}{Q^2} \\ -\frac{(b+h)R}{Q^2} & \frac{b+h}{Q} \end{pmatrix}$$

in quanto:

$$\det \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{2A\delta(b+h)}{Q^4} > 0, \quad h_{11} = \frac{(b+h)R^2+2A\delta}{Q^3} > 0.$$

Il valore corrispondente del costo minimato è:

$$C^* = b\left(\sqrt{\frac{b+h}{b}} - \sqrt{\frac{b}{b+h}}\right)\sqrt{\frac{2A\delta}{h}}$$

Consegne ritardate con produzione interna

Se ammettiamo che nel modello precedente il magazzino, oltre che per le consegne dei fornitori, sia alimentato anche da una produzione interna, che avviene al tasso $p > \delta$, la funzione di costo viene modificata in:

Consegne ritardate con produzione interna

Se ammettiamo che nel modello precedente il magazzino, oltre che per le consegne dei fornitori, sia alimentato anche da una produzione interna, che avviene al tasso $p > \delta$, la funzione di costo viene modificata in:

$$\boldsymbol{C(Q,R) = A\frac{\delta}{Q} + \frac{h}{2Q}\frac{p-\delta}{p}R^2 + \frac{b}{2Q}(Q-R)^2.}$$

Consegne ritardate con produzione interna

Se ammettiamo che nel modello precedente il magazzino, oltre che per le consegne dei fornitori, sia alimentato anche da una produzione interna, che avviene al tasso $p > \delta$, la funzione di costo viene modificata in:

$$\boldsymbol{C(Q,R) = A\frac{\delta}{Q} + \frac{h}{2Q}\frac{p-\delta}{p}R^2 + \frac{b}{2Q}(Q-R)^2.}$$

Dobbiamo rifarci sia ai ragionamenti fatti per la modifica del modello base in presenza di produzione, sia agli argomenti che ci hanno portato a formalizzare la struttura dei costi reali figurativi conseguenti al *backordering*.

Per prima cosa troviamo l'intersezione fra l'aumento del magazzino a seguito della produzione interna, depurata della domanda e la dinamica di svuotamento generata dalla domanda stessa.

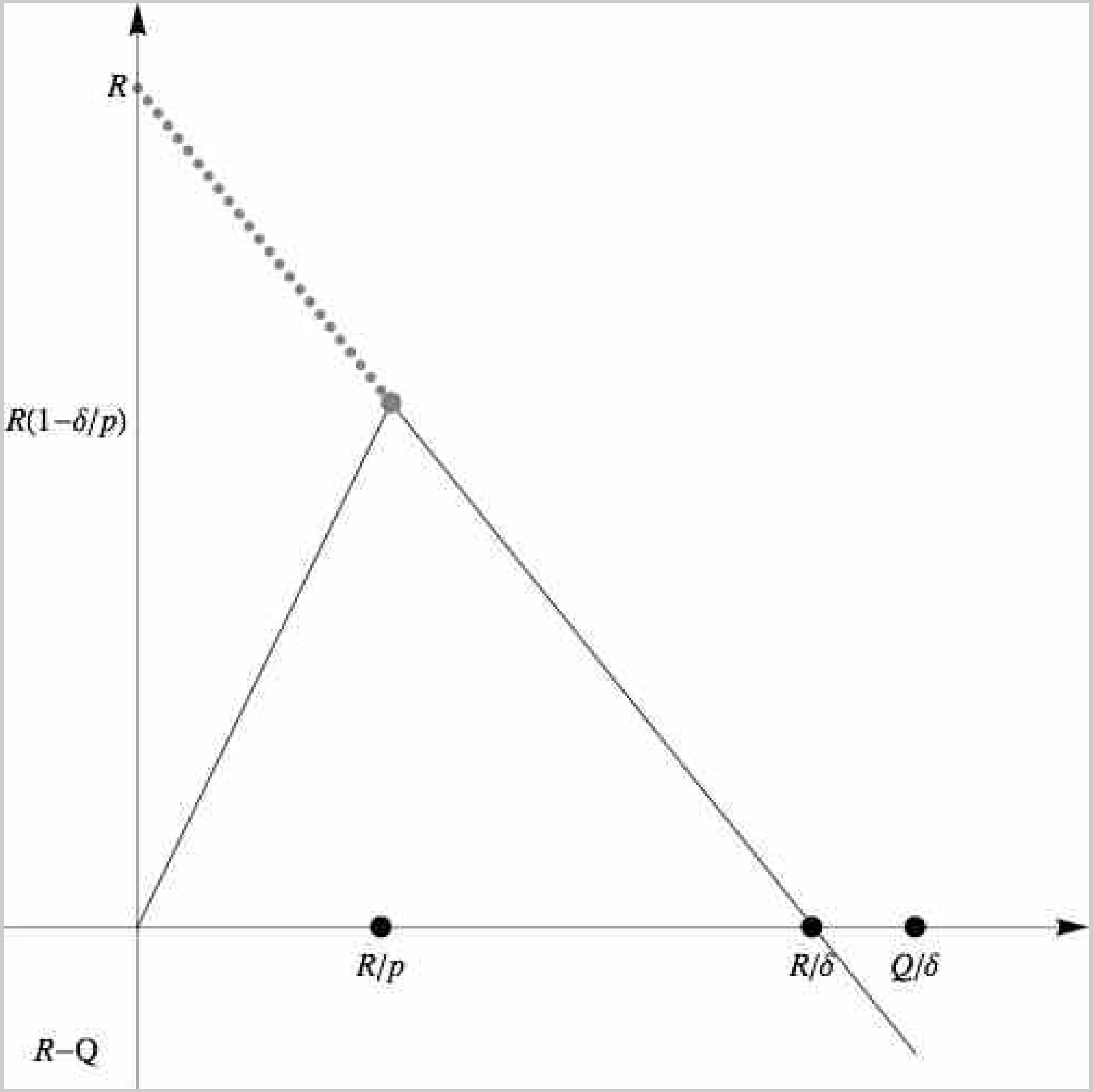

Figura 1: Sottoscorta con produzione interna

Dunque si considera il sistema lineare:

Dunque si considera il sistema lineare:

$$\begin{cases} \boldsymbol{I(t) = (p - \delta)t} \\ \boldsymbol{I(t) = R - \delta t} \end{cases}$$

Dunque si considera il sistema lineare:

$$\begin{cases} \boldsymbol{I(t) = (p - \delta)t} \\ \boldsymbol{I(t) = R - \delta t} \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

Dunque si considera il sistema lineare:

$$\begin{cases} \boldsymbol{I(t) = (p - \delta)t} \\ \boldsymbol{I(t) = R - \delta t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t = R/p} \\ \boldsymbol{I(t) = R\,(1 - \delta/p)} \end{cases}$$

Dunque si considera il sistema lineare:

$$\begin{cases} \boldsymbol{I(t) = (p - \delta)t} \\ \boldsymbol{I(t) = R - \delta t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t = R/p} \\ \boldsymbol{I(t) = R\,(1 - \delta/p)} \end{cases}$$

L'holding cost medio si ottiene calcolando l'area del triangolo positivo in figura, mentre per la penuria media ci serve l'area (presa in valore assoluto) del triangolo negativo:

Dunque si considera il sistema lineare:

$$\begin{cases} \boldsymbol{I(t) = (p - \delta)t} \\ \boldsymbol{I(t) = R - \delta t} \end{cases} \implies \begin{cases} \boldsymbol{t = R/p} \\ \boldsymbol{I(t) = R\,(1 - \delta/p)} \end{cases}$$

L'holding cost medio si ottiene calcolando l'area del triangolo positivo in figura, mentre per la penuria media ci serve l'area (presa in valore assoluto) del triangolo negativo:

$$\mathrm{area}(\boldsymbol{T_+}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{\delta}}\frac{\boldsymbol{R(p-\delta)}}{\boldsymbol{p}},$$

Dunque si considera il sistema lineare:

$$\begin{cases} \boldsymbol{I(t) = (p - \delta)t} \\ \boldsymbol{I(t) = R - \delta t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t = R/p} \\ \boldsymbol{I(t) = R\,(1 - \delta/p)} \end{cases}$$

L'holding cost medio si ottiene calcolando l'area del triangolo positivo in figura, mentre per la penuria media ci serve l'area (presa in valore assoluto) del triangolo negativo:

$$\mathrm{area}(\boldsymbol{T_+}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\frac{R}{\delta}\frac{R(p-\delta)}{p}}, \quad \mathrm{area}(\boldsymbol{T_-}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\frac{(Q-R)^2}{\delta}}$$

Entrambe le aree rappresentano integrali definiti di cui occorre far la media sull'intervallo complessivo $[0, Q/\delta]$ per le medesime ragioni già spiegate nel primo modello con sottoscorta, e ciò rende conto della formula.

Entrambe le aree rappresentano integrali definiti di cui occorre far la media sull'intervallo complessivo $[0, Q/\delta]$ per le medesime ragioni già spiegate nel primo modello con sottoscorta, e ciò rende conto della formula.

A questo punto si ripetono considerazioni del tutto analoghe a quelle già viste nel primo modello di backordering che ci consente di determinare la combinazione minimizzante:

Entrambe le aree rappresentano integrali definiti di cui occorre far la media sull'intervallo complessivo $[0, Q/\delta]$ per le medesime ragioni già spiegate nel primo modello con sottoscorta, e ciò rende conto della formula.

A questo punto si ripetono considerazioni del tutto analoghe a quelle già viste nel primo modello di backordering che ci consente di determinare la combinazione minimizzante:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2A\delta(p + hp - h\delta)}{h(p - \delta)}},$$

Entrambe le aree rappresentano integrali definiti di cui occorre far la media sull'intervallo complessivo $[0, Q/\delta]$ per le medesime ragioni già spiegate nel primo modello con sottoscorta, e ciò rende conto della formula.

A questo punto si ripetono considerazioni del tutto analoghe a quelle già viste nel primo modello di backordering che ci consente di determinare la combinazione minimizzante:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2A\delta(p + hp - h\delta)}{h(p-\delta)}}, \quad R^* = p\sqrt{\frac{2A\delta}{h(p-\delta)(p+h-h\delta)}}$$

che porta al costo minimato:

che porta al costo minimato:

$$C^* = \sqrt{\frac{2A\delta h(p-\delta)}{p+hp-h\delta}}.$$

EOQ con domanda cumulata esogena Il modelli fin qui esaminati prendono in considerazione una situazione in cui la domanda è costante. Sempre restando in un contesto deterministico, cerchiamo di studiare situazioni nelle quali la variazione istantanea della domanda non è stazionaria.

EOQ con domanda cumulata esogena Il modelli fin qui esaminati prendono in considerazione una situazione in cui la domanda è costante. Sempre restando in un contesto deterministico, cerchiamo di studiare situazioni nelle quali la variazione istantanea della domanda non è stazionaria.

Svuotamenti parabolici Supponiamo che il percorso di "svuotamento" del magazzino non sia rettilineo, cioé *non* segua la legge $I(t) = Q - \delta t$ ma *parabolico* secondo la legge $I_1(t) = Q - \frac{\delta^2}{Q} t^2$.

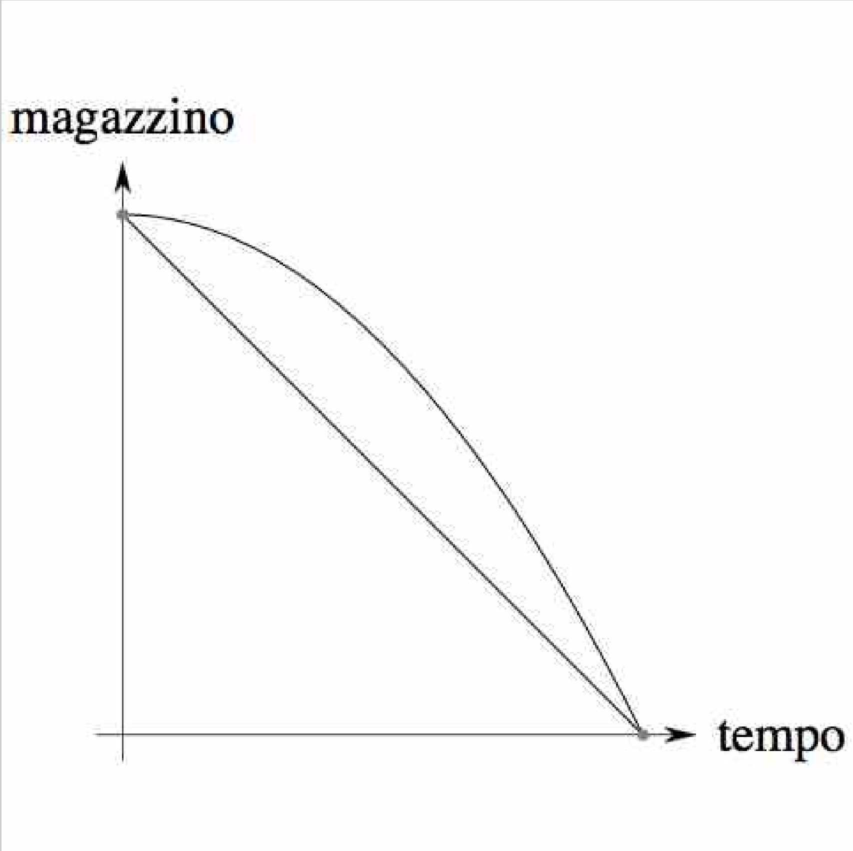

Figura 2: $Q = 2$, $\delta = 1$

Il tempo di riordino, in questo caso non cambia, esso si trova risolvendo l'equazione $I_1(t) = 0$ prendendo la radice positiva (se le radici fossero due si prende la minore). Viceversa i costi medi di immagazzinamento aumentano, per convincersene basta osservare la figura qui sopra dove è tracciata anche la retta di svotamento lineare. Tali costi sono calcolati come segue:

Il tempo di riordino, in questo caso non cambia, esso si trova risolvendo l'equazione $I_1(t) = 0$ prendendo la radice positiva (se le radici fossero due si prende la minore). Viceversa i costi medi di immagazzinamento aumentano, per convincersene basta osservare la figura qui sopra dove è tracciata anche la retta di svotamento lineare. Tali costi sono calcolati come segue:

$$\mu = \frac{\delta}{Q} \int_0^{Q/\delta} I_1(t)\, dt = \frac{\delta}{Q} \frac{2Q^2}{3\delta} = \frac{2}{3}\, Q.$$

Il tempo di riordino, in questo caso non cambia, esso si trova risolvendo l'equazione $I_1(t) = 0$ prendendo la radice positiva (se le radici fossero due si prende la minore). Viceversa i costi medi di immagazzinamento aumentano, per convincersene basta osservare la figura qui sopra dove è tracciata anche la retta di svotamento lineare. Tali costi sono calcolati come segue:

$$\mu = \frac{\delta}{Q} \int_0^{Q/\delta} I_1(t)\, dt = \frac{\delta}{Q} \frac{2Q^2}{3\delta} = \frac{2}{3} Q.$$

Ne viene che il costo complessivo è dato da:

$$C = C(Q) := \frac{2}{3} Q\, h + \frac{\delta}{Q} A.$$

Si trova che il lotto economico e il costo ottimale sono:

Si trova che il lotto economico e il costo ottimale sono:

$$Q^* = \sqrt{\frac{3A\delta}{2h}},$$

Si trova che il lotto economico e il costo ottimale sono:

$$Q^* = \sqrt{\frac{3A\delta}{2h}}, \quad C(Q^*) = 2\sqrt{\frac{2\,A\,h\,\delta}{3}}.$$

Se lo svuotamento parabolico è del tipo:

$$I_2(t) = Q - 2\delta t + \frac{\delta^2}{Q}\, t^2,$$

si ha la situazione espressa dalla figura

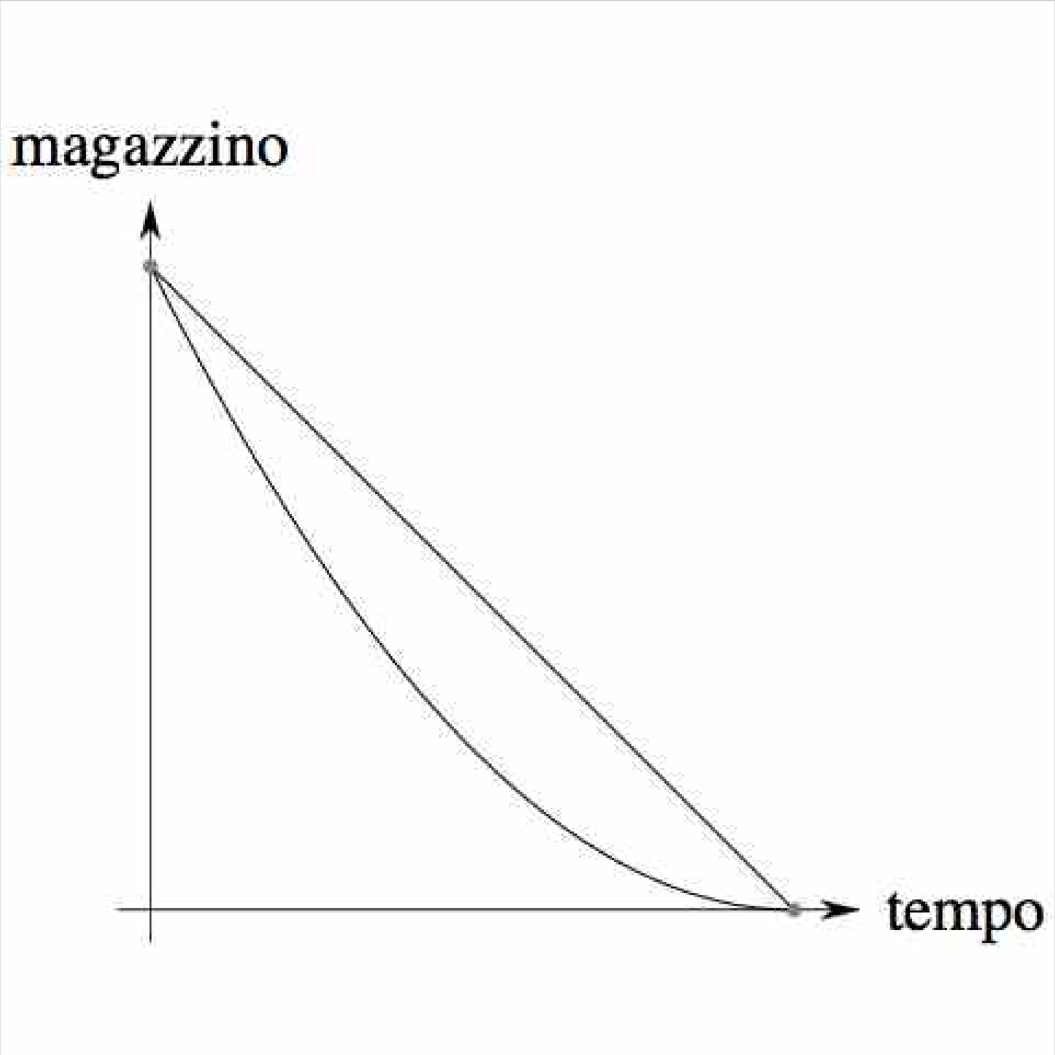

Figura 3: $Q = 2$, $\delta = 1$

Il costo totale questa volta è:

Il costo totale questa volta è:

$$C = C(Q) := \frac{1}{3}\,Q\,h + \frac{\delta}{Q}\,A.$$

Il costo totale questa volta è:

$$C = C(Q) := \frac{1}{3}\,Q\,h + \frac{\delta}{Q}\,A.$$

Dunque lotto economico e il costo minimato sono:

Il costo totale questa volta è:

$$C = C(Q) := \frac{1}{3}\, Q\, h + \frac{\delta}{Q}\, A.$$

Dunque lotto economico e il costo minimato sono:

$$Q^* = \sqrt{\frac{3A\delta}{h}},$$

Il costo totale questa volta è:

$$C = C(Q) := \frac{1}{3}\,Q\,h + \frac{\delta}{Q}\,A.$$

Dunque lotto economico e il costo minimato sono:

$$Q^* = \sqrt{\frac{3A\delta}{h}}, \quad C(Q^*) = 2\sqrt{\frac{Ah\delta}{3}}.$$

Consideriamo la variante del modello base di Wilson in cui

$$I(t) = -\frac{t^2}{6Q} + \frac{t}{6} + Q$$

Trovare tempo di riciclo, lotto economico e costo ottimale nel caso $h = 1,\ A = 1$

Consideriamo la variante del modello base di Wilson in cui

$$I(t) = -\frac{t^2}{6Q} + \frac{t}{6} + Q$$

Trovare tempo di riciclo, lotto economico e costo ottimale nel caso $h = 1$, $A = 1$ Risolviamo l'equazione $I(t) = 0$:

Consideriamo la variante del modello base di Wilson in cui

$$I(t) = -\frac{t^2}{6Q} + \frac{t}{6} + Q$$

Trovare tempo di riciclo, lotto economico e costo ottimale nel caso $h = 1,\ A = 1$ Risolviamo l'equazione $I(t) = 0$:

$$t = \frac{-\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36}}}{-\frac{1}{3Q}}$$

Consideriamo la variante del modello base di Wilson in cui

$$I(t) = -\frac{t^2}{6Q} + \frac{t}{6} + Q$$

Trovare tempo di riciclo, lotto economico e costo ottimale nel caso $h = 1$, $A = 1$ Risolviamo l'equazione $I(t) = 0$:

$$t = \frac{-\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36}}}{-\frac{1}{3Q}} \implies \begin{cases} t = 3Q, \\ t = -2Q \end{cases}$$

Consideriamo la variante del modello base di Wilson in cui

$$I(t) = -\frac{t^2}{6Q} + \frac{t}{6} + Q$$

Trovare tempo di riciclo, lotto economico e costo ottimale nel caso $h = 1,\ A = 1$ Risolviamo l'equazione $I(t) = 0$:

$$t = \frac{-\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36}}}{-\frac{1}{3Q}} \Longrightarrow \begin{cases} t = 3Q, \\ t = -2Q \end{cases}$$

Il tempo di riciclo è $T = 3Q$

il carico medio in magazzino è dato da

il carico medio in magazzino è dato da

$$\mu = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) \, \mathrm{d}t$$

il carico medio in magazzino è dato da

$$\mu = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{3Q}\int_0^{3Q}\left(-\frac{t^2}{6Q}+\frac{t}{6}+Q\right)\mathrm{d}t$$

il carico medio in magazzino è dato da

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3Q}\int_0^{3Q}\left(-\frac{t^2}{6Q}+\frac{t}{6}+Q\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{-\frac{t^3}{18Q}+\frac{t^2}{12}+Qt}{3Q}\right]_{t=0}^{t=3Q}
\end{aligned}
$$

il carico medio in magazzino è dato da

$$\mu = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3Q}\int_0^{3Q} \left(-\frac{t^2}{6Q} + \frac{t}{6} + Q\right) \mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{-\frac{t^3}{18Q} + \frac{t^2}{12} + Qt}{3Q}\right]_{t=0}^{t=3Q} = \frac{3}{4}\,Q$$

La funzione di costo è allora:

La funzione di costo è allora:

$$C(Q) = \frac{3Q}{4} + \frac{1}{3Q}$$

La funzione di costo è allora:

$$C(Q) = \frac{3Q}{4} + \frac{1}{3Q} \implies \begin{cases} Q^* = \dfrac{2}{3} \\ C(Q^*) = 1 \end{cases}$$