ANALISI MATEMATICA A

18 FEBBRAIO 09

Esercizio 1. Risolvere l'equazione $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$ in campo complesso.

Ponendo $z^3 = w$ e risolvendo $w^2 - 7w - 8 = 0$ le sei soluzioni della equazione data sono fornite dalle tre radici di $z^3 = 8$ unite alle tre radici di $z^3 = -1$. Esse sono quindi

$$2,\ -1 + i\sqrt{3},\ -1 - i\sqrt{3},\ 1/2 + i\sqrt{3}/2,\ -1,\ 1/2 - i\sqrt{3}/2.$$

Esercizio 2. Determinare per quale α la funzione $f(x) = x^\alpha \log(2e^{1/x} - 1)$ ha asintoto obliquo $y = mx + q$ per $x \to +\infty$, specificando anche i corrispondenti valori di m, q.
Si ricordano gli sviluppi per $t \to 0$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots, \quad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots$$

per eventuale loro utilizzo.

Sviluppando allo STESSO ordine 2, per $x \to +\infty$ si ha

$$2e^{1/x} - 1 = 1 + 2/x + 1/x^2 + o(1/x^2),$$

$$\log(2e^{1/x} - 1) = (2/x + 1/x^2) - (2/x + 1/x^2)^2/2 + o(1/x^2) = 2/x - 1/x^2 + o(1/x^2),$$

da cui

$$f(x) = 2x^{\alpha-1} - x^{\alpha-2} + o(x^\alpha - 2).$$

L'asintoto obliquo si ha quindi per $\alpha = 2$ quando lo sviluppo diventa

$$f(x) = 2x - 1 + o(1)$$

e si ha $m = 2$, $q = -1$.

Esercizio 3.
Sia data la funzione $f(x) = xe^{1/x}$.
A) Far vedere che ha un prolungamento continuo e derivabile per $x \to 0^-$ calcolando anche la derivata sinistra $f'_-(0)$.

Il limite per $x \to 0^-$ non è indeterminato ma assume la forma $0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$. Si ha il prolungamento richiesto ponendo $f(0) = 0$. Dopodichè, esaminando il limite del rapporto incrementale a sinistra, si ha

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0.$$

B) Far vedere che $f(x)$ ha asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Ragionando come nell'esercizio 2, si ha $f(x) = x(1 + 1/x + o(1/x)) = x + 1 + o(1)$ per $x \to \pm\infty$. L'asintoto ha equazione $y = x + 1$.

C) Completare lo studio della funzione, incluso l'andamento di convessità, fino a tracciare il grafico.

Gli altri limiti agli estremi del dominio $x \neq 0$ sono

$$\lim_{x \to 0^+} xe^{1/x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty,$$

($x = 0$ asintoto verticale per $x \to 0^+$) ponendo $y = 1/x$ ed usando il confronto tra infiniti notevoli, e

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x + 1 = \pm\infty$$

usando lo sviluppo asintotico. La derivata prima vale

$$f'(x) = e^{1/x}(1 - 1/x)$$

quindi f è crescente in $(-\infty, 0)$ ed in $(1, +\infty)$ mentre è decrescente in $(0, 1)$. Per $x = 1$ si ha un minimo relativo che vale $f(1) = e$. La derivata seconda vale

$$f''(x) = e^{1/x}/x^3$$

quindi f è concava in $(-\infty, 0)$, convessa in $(0, +\infty)$.

Esercizio 4. Calcolare $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x(\log^2 x - 1)} dx$.

Con la sostituzione

$$y = \log x, \; dy = dx/x$$

si giunge a

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{y^2 - 1} dy.$$

Scomponedo ed applicando i fratti semplici si ha

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{1/2}{y-1} - \frac{1/2}{y+1}$$

quindi l'integrale vale

$$\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\log\frac{|y-1|}{|y+1|}\right]_2^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\log\frac{b-1}{b+1} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\log 3.$$

Esercizio 5. Provare che la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ converge per $x=2$ e non converge per $x=3$.

Calcoliamo il raggio di convergenza R. Da

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e}$$

si ha $R=e$. La serie converge per $|x|<e$, quindi anche per $x=2$, e non converge per $|x|>e$, quindi neppure per $x=3$.

Esercizio 6. Sia data l'equazione differenziale $y''-y=e^{ax}$.

A) Dire per quali valori del parametro a l'equazione ammette una soluzione particolare della forma cxe^{ax} con c costante opportuna.

Equazione caratteristica $\lambda^2-1=0$ con soluzioni $\lambda=\pm1$. L'integrale gnerale dell'omogenea è dato da $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$. Per $a\neq\pm1$ una soluzione particolare è data da $y_p=ce^{ax}$ mentre per $a=1$ oppure $a=-1$ è data proprio da $y_p=cxe^{ax}$. I valori di a richiesti sono $a=1$ oppure $a=-1$.

B) Preso il minore tra questi valori di a, trovare l'integrale generale dell'equazione.

Dobbiamo prendere $a=-1$ e risolvere $y''-y=e^{-x}$. C'è quindi una soluzione particolare della forma $y_p=cxe^{-x}$. Derivando e sostituendo nell'equazione si trova $c=-1/2$, da cui l'integrale generale vale

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}-xe^{-x}/2.$$