Fisica Generale B

1. Esercizi di Elettrostatica

http://campus.cib.unibo.it/2488/

March 23, 2011

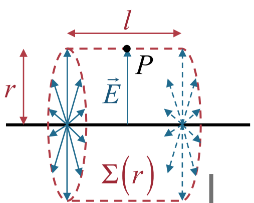
Esercizio 1

- Un **filo rettilineo indefinito**, costituito di materiale isolante, è elettrizzato uniformemente con densità lineare di carica $\lambda = 8.85\times10^{-10}$ C/m.
- Quanto vale il **campo elettrico** in un punto P distante $r = 0.5$ m dal filo?

Esercizio 1 (II)

- Consideriamo la superficie Σ di un cilindro avente sul filo il proprio asse, di raggio r e altezza l, e applichiamo a essa la **legge di Gauss**.
- Data la **simmetria** del problema, il **campo elettrico** deve avere **direzione radiale** rispetto al filo e **norma dipendente** soltanto dalla **distanza dal filo**.
- Sulle due **basi** del cilindro il **flusso** del campo elettrico deve perciò essere **nullo**.
- Sulla **superficie laterale** del cilindro il campo elettrico deve avere **norma costante**, e dunque il flusso vale:

$$\phi_\Sigma\left(\vec{E}\right) = \oiint_\Sigma \vec{E}\bullet\hat{n}\,\mathrm{d}S = \oiint_\Sigma E\,\hat{n}\bullet\hat{n}\,\mathrm{d}S = \oiint_\Sigma E\,\mathrm{d}S =$$
$$= E\oiint_\Sigma \mathrm{d}S = E\,\Sigma = E\,2\pi r l$$



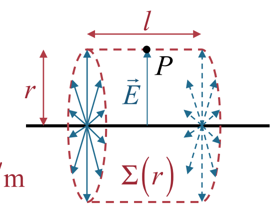
Esercizio 1 (III)

- La **carica elettrica totale** contenuta nella superficie Σ è la carica elettrica del tratto di filo che si trova dentro il cilindro:

$$Q = l\lambda$$

- Per la legge di Gauss si ha:

$$\phi_\Sigma\left(\vec{E}\right) = \oiint_\Sigma \vec{E}\bullet\hat{n}\,\mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$
$$E\,2\pi r l = \frac{l\lambda}{\varepsilon_0}$$
$$E\left(r\right) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$
$$E\left(0.5\,\mathrm{m}\right) = \frac{1}{2\times3.14\times8.85\times10^{-12}}\,\frac{8.85\times10^{-10}}{0.5} = 31.8\,\mathrm{V/m}$$



Esercizio 2

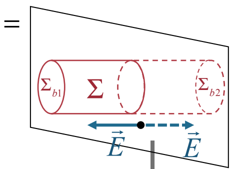
- Un **piano indefinito**, costituito di materiale isolante, è uniformemente elettrizzato, con densità superficiale di carica $\sigma = 4.43 \times 10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$.
- Quanto vale il **campo elettrico** sui due lati del piano?

Esercizio 2 (II)

- Per ragioni di **simmetria**, il **campo elettrico** deve sempre essere **perpendicolare al piano**.
- Consideriamo la superficie Σ di un cilindro, con l'asse perpendicolare al piano, che interseca il piano stesso e applichiamo a esso la **legge di Gauss**.
- Il **flusso** del campo elettrico attraverso la superficie **laterale** del cilindro è **nullo** in quanto il vettore campo elettrico è sempre parallelo alla superficie laterale.
- Su ciascuna delle due **basi** il **flusso** del campo elettrico è dato da:

$$\phi_{\Sigma_{b1}}\left(\vec{E}\right) = \phi_{\Sigma_{b2}}\left(\vec{E}\right) = \oiint_{\Sigma_b} \vec{E} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma_b} E\, \hat{n} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma_b} E\, \mathrm{d}S =$$

$$= E \oiint_{\Sigma_b} \mathrm{d}S = E\, \Sigma_b = E\, \pi r^2$$



Esercizio 2 (II)

- Il flusso totale (attraverso la superficie totale del cilindro) vale perciò:

$$\phi_\Sigma\left(\vec{E}\right) = 2E\pi r^2$$

- La **carica contenuta nel cilindro** è quella della porzione di piano (cerchio) intercettato dal cilindro:

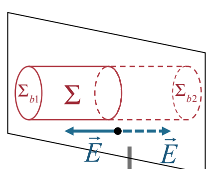
$$Q = \sigma \pi r^2$$

- Si ha perciò, per la legge di Gauss:

$$\phi_\Sigma\left(\vec{E}\right) = \oiint_\Sigma \vec{E} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 2E\pi r^2 = \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon_0}$$

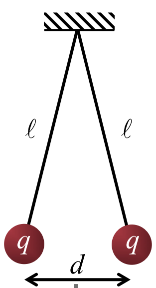
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{4.43 \times 10^{-6}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 0.25 \times 10^{6}\ \mathrm{V/m}$$



Esercizio 3

- **Due sferette uguali**, di massa $m = 10\ \mathrm{g}$ e carica q incognita, sono **appese con due fili isolanti** di lunghezza $\ell = 100\ \mathrm{cm}$ allo stesso punto del soffitto.
- Le sferette **si dispongono a una distanza di $5\ \mathrm{cm}$** l'una dall'altra.
- Determinare la **carica q**.



Esercizio 3 (II)

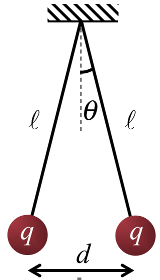
- Detta T la tensione del filo, F_e la forza elettrostatica agente su una sferetta e mg la forza peso di una sferetta, per la **prima equazione cardinale della statica** si ha:

$$\vec{T} + \vec{F}_e + m\vec{g} = \vec{0}$$

- Questa **equazione vettoriale** corrisponde alle **2 equazioni scalari** (componenti orizzontale e verticale)

$$\begin{array}{c} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \end{array} \begin{cases} -T\sin\theta + F_e = 0 \\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_e = T\sin\theta \\ mg = T\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{F_e}{mg} = \tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{F_e}{mg} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}}{mg} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{mgd^2}$$



Esercizio 3 (III)

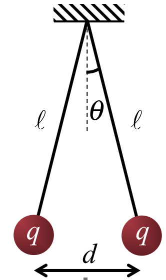
- D'altro canto abbiamo, **geometricamente**:

$$\tan\theta = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\ell^2 - \frac{d^2}{4}}} = \frac{d}{\sqrt{4\ell^2 - d^2}}$$

- **Combinando** i due risultati si ottiene:

$$\left.\begin{array}{l} \tan\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{mgd^2} \\ \tan\theta = \dfrac{d}{\sqrt{4\ell^2 - d^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d}{\sqrt{4\ell^2 - d^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{mgd^2}$$

$$q^2 = 4\pi\varepsilon_0 mgd^2 \frac{d}{\sqrt{4\ell^2 - d^2}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{mgd^3}{\sqrt{4\ell^2 - d^2}}$$



Esercizio 3 (IV)

- Da cui:

$$q^2 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{mgd^3}{\sqrt{4\ell^2 - d^2}}$$

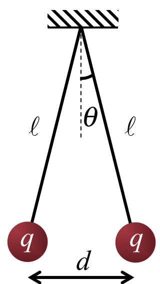
$$q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 \frac{mgd^3}{\sqrt{4\ell^2 - d^2}}}$$

- Sostituendo i valori numerici:

$$q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 \frac{mgd^3}{\sqrt{4\ell^2 - d^2}}} = \sqrt{\frac{1}{8.99\times10^9}\frac{0.01\times9.81\times0.05^3}{\sqrt{4\times1^2 - 0.05^2}}} =$$

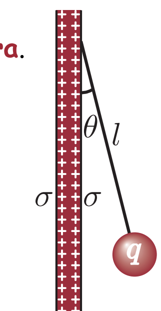
$$= \sqrt{\frac{1}{8.99\times10^9}\frac{1.226\times10^{-5}}{\sqrt{3.998}}} = \sqrt{\frac{1}{8.99\times10^9}\frac{1.226\times10^{-5}}{1.999}} =$$

$$= \sqrt{6.823\times10^{-16}} = 2.61\times10^{-8}\,\mathrm{C} = 26.1\,\mathrm{nC}$$

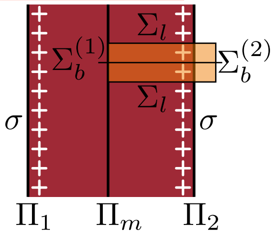


Esercizio 4

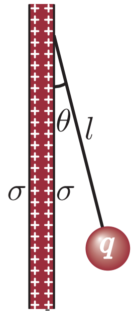
- Una **sferetta** di massa $m = 1\ \mathrm{mg}$ possiede una **carica elettrica** $q = 10\ \mathrm{nC}$.
- Essa è **appesa a un filo isolante attaccato, all'altra estremità, a una lastra piana verticale isolante**, **uniformemente elettrizzata in superficie** su **entrambe le facce**, con densità superficiale di carica σ.
- Il filo forma un **angolo** $\theta = 30°$ con il piano.
- Determinare la **densità superficiale di carica σ della lastra**.



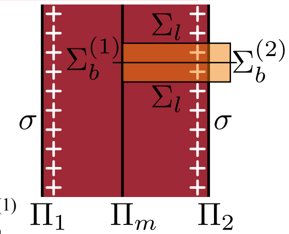
Esercizio 4 (II)



- Determiniamo innanzitutto il **campo elettrico** prodotto da una **lastra piana isolante uniformemente elettrizzata** in superficie su **entrambe le facce**, con densità superficiale di carica σ.
- Poiché la lastra è elettrizzata soltanto sulle due superfici Π_1 e Π_2 (non all'interno), sarà presente su tali superfici uno **strato sottile di carica elettrica**, con **densità superficiale** σ.
- Sul **piano mediano** Π_m della lastra il campo elettrico E è **nullo** per simmetria.
- Consideriamo ora una **superficie cilindrica**, di raggio r, con asse perpendicolare alla lastra, avente la base $\Sigma_b^{(1)}$ giacente sul piano Π_m e la base $\Sigma_b^{(2)}$ esterna alla lastra.

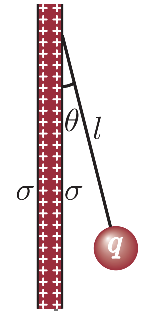


Esercizio 4 (III)

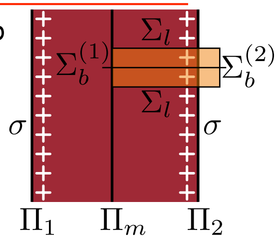


- Il **flusso** del **campo elettrico** $\vec{E}$ attraverso la **superficie laterale** Σ_l del cilindro è **nulla**, in quanto le linee del campo sono parallele alla superficie Σ_l e pertanto non la intersecano.
- Il **flusso** del campo elettrico E attraverso la **base** $\Sigma_b^{(1)}$ del cilindro è **nullo** in quanto la base $\Sigma_b^{(1)}$ si trova sul piano mediano Π_m della lastra, sul quale il campo elettrico E è nullo.
- Sulla **base** $\Sigma_b^{(2)}$ il campo elettrico E è invece perpendicolare alla superficie, per cui il suo **flusso** vale:

$$\phi_{\Sigma_b^{(2)}}\left(\vec{E}\right)=\oiint_{\Sigma_b^{(2)}}\vec{E}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S=E\,\Sigma_b^{(2)}=E\,\pi r^2$$



Esercizio 4 (IV)



- Il **flusso totale** del **campo elettrico** $\vec{E}$ attraverso la **superficie totale** Σ del cilindro è quindi:

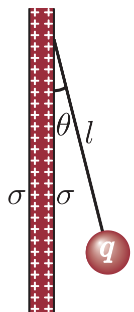
$$\phi_\Sigma\left(\vec{E}\right)=\phi_{\Sigma_l}\left(\vec{E}\right)+\phi_{\Sigma_b^{(1)}}\left(\vec{E}\right)+\phi_{\Sigma_b^{(2)}}\left(\vec{E}\right)=E\,\pi r^2$$

- La **carica elettrica** contenuta nel volume $V(\Sigma)$, delimitato dalla superficie chiusa cilindrica Σ è quella della **porzione del piano** Π_2 **intercettato dal cilindro**:

$$Q=\pi r^2\sigma$$

- Si ha perciò, per la **legge di Gauss**:

$$\overbrace{\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S}^{\phi_\Sigma(\vec{E})}=\frac{1}{\varepsilon_0}\overbrace{\iiint_{V(\Sigma)}\rho\,\mathrm{d}V}^{Q}\quad\Rightarrow\quad E\,\pi r^2=\frac{\pi r^2\sigma}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Esercizio 4 (V)

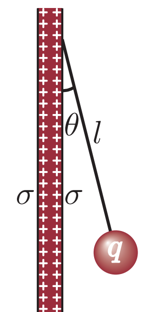
- Detta T la tensione del filo, F_e la forza elettrostatica agente sulla sferetta e mg la forza peso della sferetta, per la **prima equazione cardinale della statica** si ha:

$$\vec{T}+\vec{F}_e+m\vec{g}=\vec{0}$$

- Questa **equazione vettoriale** corrisponde alle **2 equazioni scalari** (componenti orizzontale e verticale)

$$\begin{array}{l}\hat{\imath}\\ \hat{\jmath}\end{array}\begin{cases}-T\sin\theta+F_e=0\\ T\cos\theta-mg=0\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}F_e=T\sin\theta\\ mg=T\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\quad\frac{F_e}{mg}=\tan\theta$$

$$\tan\theta=\frac{F_e}{mg}=\frac{qE}{mg}=\frac{q\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}}{mg}=\frac{q}{mg}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Esercizio 4 (VI)

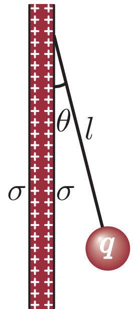
$$\tan\theta = \frac{q}{mg}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- Avremo dunque:

$$\sigma = \frac{mg\varepsilon_0}{q}\tan\theta$$

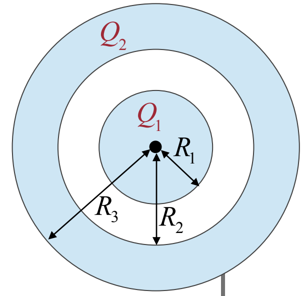
- Sostituendo i valori numerici:

$$\sigma = \frac{mg\varepsilon_0}{q}\tan\theta = \frac{10^{-6}\times 9.81\times 8.85\times 10^{-12}}{10\times 10^{-9}}\tan 30° =$$
$$= \frac{10^{-6}\times 9.81\times 8.85\times 10^{-12}}{10\times 10^{-9}}0.577 = 5\times 10^{-9}\,\mathrm{C/m^2} =$$
$$= 5\,\mathrm{nC/m^2}$$



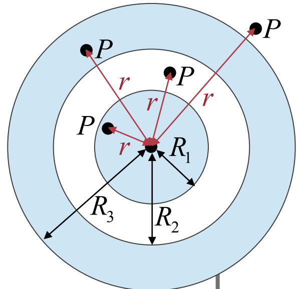
Esercizio 5

- Una **sfera isolante**, **uniformemente carica**, di raggio $R_1 = 1$ cm e carica $Q_1 = 1$ nC, viene posta entro un **guscio sferico concentrico**, anch'esso **uniformemente carico**, di raggio interno $R_2 = 2$ cm, raggio esterno $R_3 = 3$ cm e carica $Q_2 = -2$ nC.
- Calcolare la **componente radiale E_r del campo elettrico** (presa positiva se centrifuga e negativa se centripeta) alla distanza $r = 4\xi R_1/1000$ dal centro delle 2 sfere.



Esercizio 5 (II)

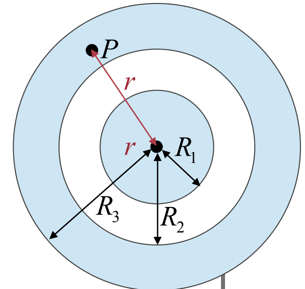
- La **forma algebrica della soluzione** dell'esercizio **dipende dal valore di r** (dunque anche di ξ).
- A seconda del valore di r (dunque di ξ) il punto P può trovarsi:
  1. Entro la sfera centrale;
  2. Nell'intercapedine tra sfera e guscio sferico;
  3. Entro il guscio sferico;
  4. All'esterno del guscio sferico.
- Nei 4 casi l'espressione algebrica del campo elettrico è diversa.



Esercizio 5 (III)

- La distribuzione di **carica** ha **simmetria sferica**:
  - La densità di carica, in coordinate sferiche, dipende **soltanto** dalla **coordinata** r:
    - **Non** dagli angoli θ (colatitudine) e φ (longitudine).
- Anche il **campo elettrico** deve avere **simmetria sferica**;
  - In coordinate sferiche, $\vec{E}$ **deve dipendere soltanto dalla coordinata** r:
    - Non dagli angoli θ (colatitudine) e φ (longitudine).

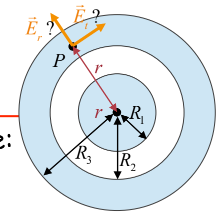
$$\vec{E} = \vec{E}(r)$$
$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial\theta} = \vec{0}$$
$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial\varphi} = \vec{0}$$

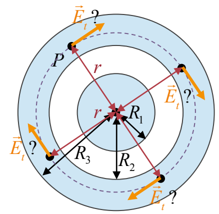


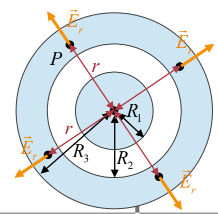
Esercizio 5 (IV)

- Il campo elettrico, in linea di principio, potrebbe avere:
  - Un componente **radiale** $E_r(r)$;
  - Un componente **tangente** $E_t(r)$.
- Tuttavia, **se avesse** un componente **tangente**, data la simmetria sferica, esso dovrebbe avere lo **stesso orientamento** su di un'intera **circonferenza** di centro O:
  - Se così fosse la **circuitazione** di E sarebbe **non-nulla**;
  - Ipotesi **impossibile**, essendo E **conservativo**.
- Il **campo elettrico** può avere **soltanto componente radiale**:

$$\vec{E}(r) = \vec{E}_r(r) = E_r(r)\,\hat{n}$$







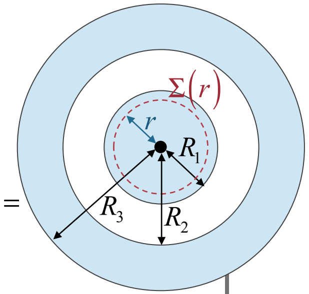
Esercizio 5 (V)

- Consideriamo innanzitutto il caso in cui $r \le R_1$.
- Per calcolare il campo utilizziamo la **superficie sferica** $\Sigma(r)$, concentrica con le altre superfici e di raggio r, e applichiamo a essa la **legge di Gauss**:

$$\overbrace{\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\bullet\hat{n}\,dS}^{\phi_\Sigma(\vec{E})} = \frac{1}{\varepsilon_0}\overbrace{\iiint_{V(\Sigma)} \rho\,dV}^{q(r)}$$

- Il **flusso del campo elettrico** attraverso la superficie **chiusa** $\Sigma(r)$ si può scrivere come:

$$\phi_{\Sigma(r)}(\vec{E}) = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma(r)} \vec{E}(r)\bullet\hat{n}\,dS = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma(r)} E_r(r)\hat{n}\bullet\hat{n}\,dS =$$
$$= \oint\!\!\!\oint_{\Sigma(r)} E_r(r)\,dS = E_r(r)\oint\!\!\!\oint_{\Sigma(r)} dS = E_r(r)\Sigma(r) =$$
$$= E_r(r)\,4\pi r^2$$



Esercizio 5 (VI)

- La **carica** contenuta nel **volume racchiuso** dalla superficie chiusa $\Sigma(r)$, essendo la sfera interna **uniformemente carica**, è:

$$q(r) = \iiint_{V(\Sigma(r))} \rho\,dV = \rho_1 \iiint_{V(\Sigma(r))} dV = \rho_1 \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q_1}{\frac{4}{3}\pi R_1^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{r^3}{R_1^3}Q_1$$

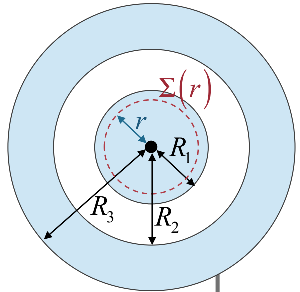
- Per la **legge di Gauss** si ha:

$$\overbrace{\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\bullet\hat{n}\,dS}^{\phi_\Sigma(\vec{E})} = \frac{1}{\varepsilon_0}\overbrace{\iiint_{V(\Sigma)} \rho\,dV}^{q(r)}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\oint\!\!\!\oint_{\Sigma(r)} \vec{E}_r(r)\bullet\hat{n}\,dS = E_r(r)\,4\pi r^2 \\ &\iiint_{V(\Sigma(r))} \rho\,dV = \frac{r^3}{R_1^3}Q_1 \end{aligned}\right.$$

$$E_r(r)\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{R_1^3}Q_1\right)$$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1^3}r \qquad (r \le R_1)$$



Esercizio 5 (VII)

- Consideriamo ora il caso in cui $R_1 \le r \le R_2$.
- La carica contenuta nella superficie $\Sigma(r)$ è, in questo caso:

$$q(r) = \iiint_{V(\Sigma(r))} \rho\,dV = Q_1$$

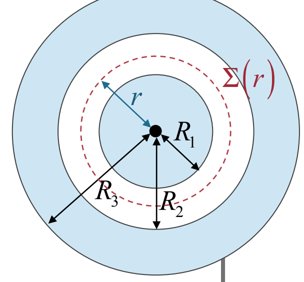
- Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie $\Sigma(r)$, si può perciò scrivere, come nel caso precedente:

$$\phi_{\Sigma(r)}(\vec{E}) = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma(r)} \vec{E}(r)\bullet\hat{n}\,dS = E_r(r)\,4\pi r^2$$

- Per la **legge di Gauss** si ha:

$$\overbrace{\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\bullet\hat{n}\,dS}^{\phi_\Sigma(\vec{E})} = \frac{1}{\varepsilon_0}\overbrace{\iiint_{V(\Sigma)} \rho\,dV}^{q(r)} \quad\Rightarrow\quad E_r(r)\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_1$$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2} \qquad (R_1 \le r \le R_2)$$



Esercizio 5 (VIII)

- Consideriamo poi il caso in cui $R_2 \le r \le R_3$.
- La carica contenuta nella superficie $\Sigma(r)$ è, in questo caso:

$$q(r) = \iiint_{V(\Sigma(r))} \rho \, \mathrm{d}V = Q_1 + \frac{r^3 - R_2^3}{R_3^3 - R_2^3} Q_2$$

- Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie $\Sigma(r)$, è sempre:

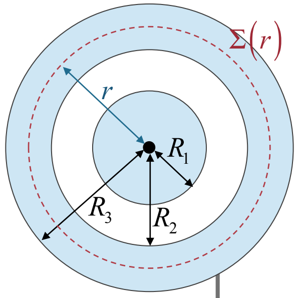
$$\phi_{\Sigma(r)}(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma(r)} \vec{E}(r) \bullet \hat{n} \, \mathrm{d}S = E_r(r) \, 4\pi r^2$$

- Per la **legge di Gauss** si ha:

$$\overbrace{\oiint_{\Sigma} \vec{E} \bullet \hat{n} \, \mathrm{d}S}^{\phi_\Sigma(\vec{E})} = \frac{1}{\varepsilon_0} \overbrace{\iiint_{V(\Sigma)} \rho \, \mathrm{d}V}^{q(r)}$$

$$E_r(r) \, 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} + \frac{r^3 - R_2^3}{R_3^3 - R_2^3} \frac{Q_2}{\varepsilon_0}$$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(Q_1 + \frac{r^3 - R_2^3}{R_3^3 - R_2^3} Q_2 \right) \frac{1}{r^2} \quad (R_2 \le r \le R_3)$$



Esercizio 5 (IX)

- Infine consideriamo il caso in cui $r \le R_3$.
- La carica contenuta nella superficie $\Sigma(r)$ è:

$$q(r) = \iiint_{V(\Sigma(r))} \rho \, \mathrm{d}V = Q_1 + Q_2$$

- Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie $\Sigma(r)$, è sempre:

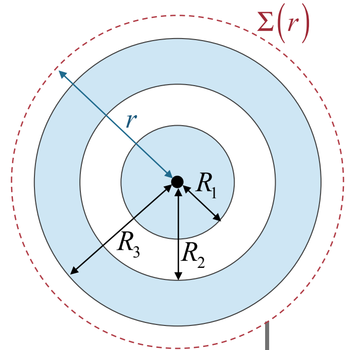
$$\phi_{\Sigma(r)}(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma(r)} \vec{E}(r) \bullet \hat{n} \, \mathrm{d}S = E_r(r) \, 4\pi r^2$$

- Per la **legge di Gauss** si ha:

$$\overbrace{\oiint_{\Sigma} \vec{E} \bullet \hat{n} \, \mathrm{d}S}^{\phi_\Sigma(\vec{E})} = \frac{1}{\varepsilon_0} \overbrace{\iiint_{V(\Sigma)} \rho \, \mathrm{d}V}^{q(r)}$$

$$E_r(r) \, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} (Q_1 + Q_2)$$

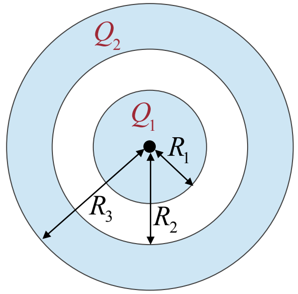
$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r^2} \quad (r \ge R_3)$$



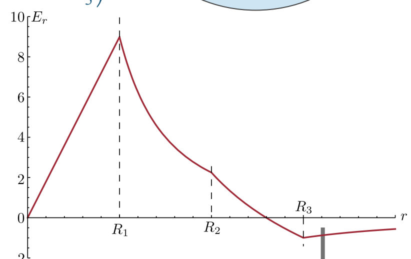
Esercizio 5 (X)

- In sintesi:

$$E_r(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q_1}{R_1^3} r & (r \le R_1) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q_1}{r^2} & (R_1 \le r \le R_2) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(Q_1 + \dfrac{r^3 - R_2^3}{R_3^3 - R_2^3} Q_2 \right) \dfrac{1}{r^2} & (R_2 \le r \le R_3) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q_1 + Q_2}{r^2} & (r \ge R_3) \end{cases}$$

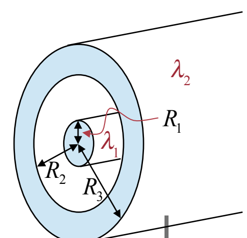


- La **forma algebrica della soluzione** dell'esercizio **dipende dal valore di r**.



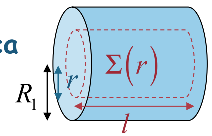
Esercizio 6

- Un **filo isolante**, di lunghezza molto maggiore delle distanze radiali considerate, **uniformemente carico**, di raggio $R_1 = 1\ \mathrm{cm}$ e densità lineare di carica $\lambda_1 = 0.1\ \mathrm{nC/m}$, viene posto entro una **guaina cilindrica isolante coassiale**, **uniformemente carica**, di raggio interno $R_2 = 2\ \mathrm{cm}$, raggio esterno $R_3 = 3\ \mathrm{cm}$ e densità lineare di carica $\lambda_2 = 0.2\ \mathrm{nC/m}$.
- Calcolare la **norma del campo elettrico** alla distanza $r = 4\xi R_1/1000$ dall'asse del sistema.



Esercizio 6 (II)

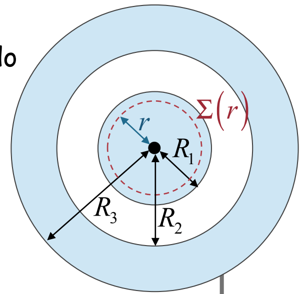
- La **forma algebrica della soluzione** dell'esercizio **dipende dal valore di ξ**.
- Consideriamo innanzitutto il caso in cui $r < R_1$.
- Per calcolare il campo utilizziamo la **superficie cilindrica $\Sigma(r)$**, coassiale con il filo e con le altre superfici, di raggio r e altezza l, e applichiamo a essa **la legge di Gauss**.



- La carica contenuta nella superficie $\Sigma(r)$, essendo il **filo uniformemente carico**, è:

$$q(r,l) = \pi r^2 l \rho_1 = \pi r^2 l \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}V} = \pi r^2 l \frac{\mathrm{d}q_1}{\pi R_1^2 \mathrm{d}l} = \frac{r^2}{R_1^2} l \lambda_1$$

- Osserviamo che il campo elettrico ha sempre la stessa **direzione della normale $\hat{n}$ alla superficie laterale di $\Sigma(r)$**.



Esercizio 6 (III)

- Osserviamo inoltre che la carica elettrica ha **simmetria cilindrica**, per cui anche la **norma del campo elettrico** deve avere simmetria cilindrica (cioè deve **dipendere soltanto da r**) per cui **sulla superficie laterale di $\Sigma(r)$** la norma del campo elettrico deve essere **costante**.
- Il **flusso del campo elettrico** attraverso la superficie $\Sigma(r)$, si può perciò scrivere come (il flusso è nullo attraverso le due basi):

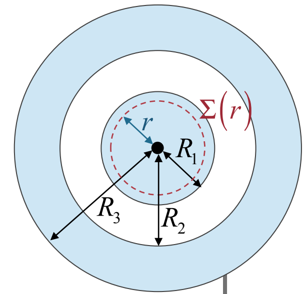
$$\phi_\Sigma\left(\vec{E}\right) = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = E\,\Sigma = E\,2\pi r l$$

- Per la legge di Gauss si ha:

$$\phi_\Sigma\left(\vec{E}\right) = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \frac{q(r,l)}{\varepsilon_0}$$

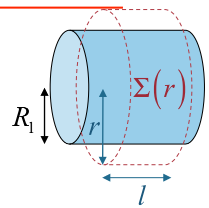
$$E 2\pi \cancel{r} \cancel{l} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{r^{\cancel{2}}}{R_1^2} \cancel{l} \lambda_1$$

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \lambda_1 \frac{r}{R_1^2} \qquad (r < R_1)$$



Esercizio 6 (IV)

- Consideriamo ora il caso in cui $R_1 < r < R_2$.



- La carica contenuta nella superficie $\Sigma(r)$ è:

$$q(r,l) = \pi R_1^2 l \rho_1 = \pi R_1^2 l \frac{\lambda_1}{\pi R_1^2} = l\lambda_1$$

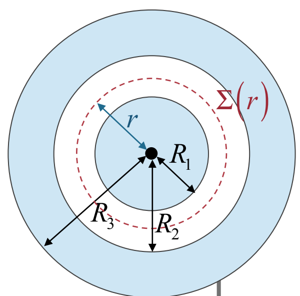
- Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie $\Sigma(r)$, si può perciò scrivere come:

$$\phi_\Sigma\left(\vec{E}\right) = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = E\,\Sigma = E\,2\pi r l$$

- Per la legge di Gauss si ha:

$$\phi_\Sigma\left(\vec{E}\right) = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \frac{q(r,l)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E\,2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0} l \lambda_1$$

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda_1}{r} \qquad (R_1 < r < R_2)$$



Esercizio 6 (V)

- Consideriamo poi il caso in cui $R_2 < r < R_3$.
- La carica contenuta nella superficie $\Sigma(r)$ è:

$$q(r,l) = l\lambda_1 + \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} l \lambda_2$$

- Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie $\Sigma(r)$, è:

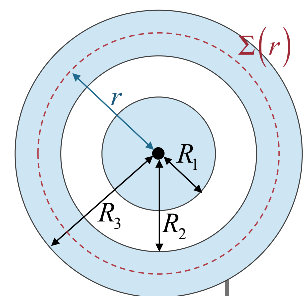
$$\phi_\Sigma\left(\vec{E}\right) = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = E\,\Sigma = E\,2\pi r l$$

- Per la legge di Gauss si ha:

$$\phi_\Sigma\left(\vec{E}\right) = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$$

$$E\,2\pi r l = \frac{l\lambda_1}{\varepsilon_0} + \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \frac{l\lambda_2}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\lambda_1 + \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\lambda_2\right)\frac{1}{r} \qquad (R_2 < r < R_3)$$



Esercizio 6 (VI)

- Infine consideriamo il caso in cui $r > R_3$.
- La carica contenuta nella superficie $\Sigma(r)$ è:

$$q(r,l) = l\lambda_1 + l\lambda_2$$

- Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie $\Sigma(r)$, è:

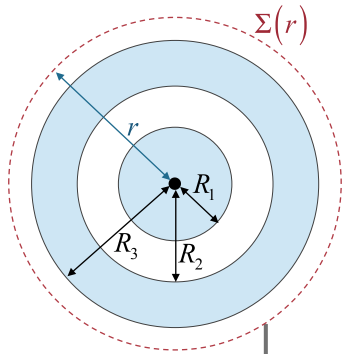
$$\phi_\Sigma\left(\vec{E}\right) = \oiint_\Sigma \vec{E} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = E\,\Sigma = E\,2\pi r l$$

- Per la legge di Gauss si ha:

$$\phi_\Sigma\left(\vec{E}\right) = \oiint_\Sigma \vec{E} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$$

$$E 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(l\lambda_1 + l\lambda_2\right)$$

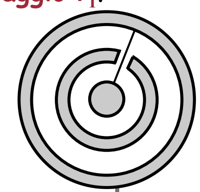
$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{r} \qquad (r > R_3)$$



Esercizio 7

- Una **sfera conduttrice** di raggio $r_1 = (\xi/1000)$ cm è circondata da **due gusci sferici conduttori concentrici** di raggio $r_2 = 2$ cm e $r_3 = 4$ cm e spessore trascurabile (vedi figura).
- Il guscio sferico di raggio r_2 **è caricato** con una carica $q_2 = \xi \times 10^{-8}$ C.
- La sfera di raggio r_1 e il guscio sferico di raggio r_3 sono poi **posti a contatto con un filo conduttore** passante per un piccolo forellino praticato sul guscio sferico di raggio r_2, che non tocca quest'ultimo guscio sferico.
- Calcolare la **carica elettrica q_1 indotta sulla sfera di raggio r_1**.

$$\xi = 347 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} r_1 = \dfrac{347}{1000}\,\mathrm{cm} = 0.347\,\mathrm{cm} \\ q_2 = 347 \times 10^{-8}\,\mathrm{C} = 3.47 \times 10^{-6}\,\mathrm{C} \end{cases}$$



Esercizio 7 (II)

- Le **cariche**: poiché i gusci 1 e 3 sono inizialmente neutri, mentre il guscio 2 ha carica q_2, si ha:

$$\begin{cases} q_1 + q_3 = q_1 + q_3' + q_3'' = 0 \\ q_2' + q_2'' = q_2 \neq 0 \end{cases}$$

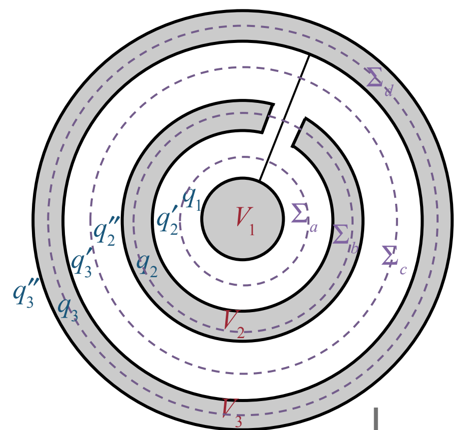
- Per la **legge di Gauss** applicata alla superficie Σ_b si ha:

$$q_1 + q_2' = 0$$

- Per la **legge di Gauss** applicata alla superficie Σ_d si ha:

$$q_1 + q_2 + q_3' = q_1 + q_2' + q_2'' + q_3' = 0$$

$$\Rightarrow \quad q_2'' + q_3' = 0$$



Esercizio 7 (III)

- **I campi nelle intercapedini.**
- Nell'intercapedine 1-2, applicando la **legge di Gauss** alla superficie Σ_a, si ha:

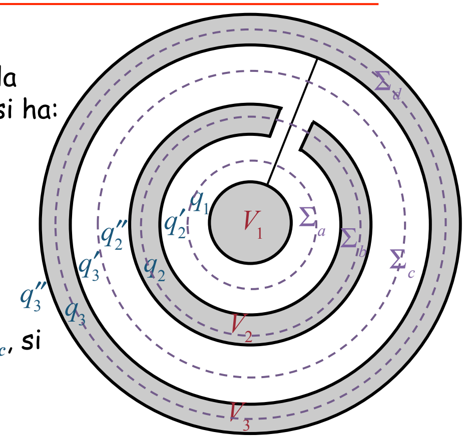
$$\oiint_{\Sigma_a} \vec{E} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}$$

- Nell'intercapedine 2-3, applicando la **legge di Gauss** alla superficie Σ_c, si ha:

$$\oiint_{\Sigma_c} \vec{E} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2''}{r^2}$$



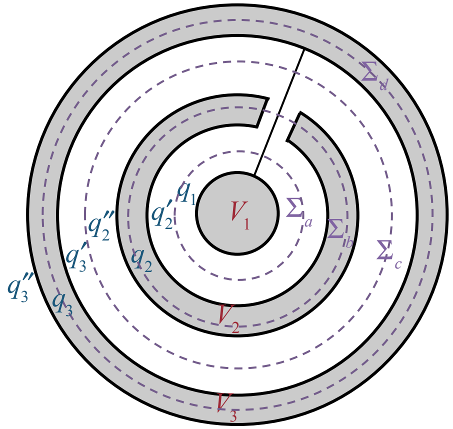
Esercizio 7 (IV)

- I **potenziali**: poiché i gusci sferici 1 e 3 sono collegati con un filo conduttore $V_1 = V_3$.
- **Integrando** lungo una **linea radiale** si ha inoltre:

$$V_2 - V_1 = -\int_{\gamma(r_1,r_2)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{n}\bullet\overrightarrow{\mathrm{d}P} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

e analogamente:

$$V_3 - V_2 = -\int_{\gamma(r_2,r_3)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2''}{r^2}\hat{n}\bullet\overrightarrow{\mathrm{d}P} = \frac{q_2''}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_2}\right)$$



Esercizio 7 (V)

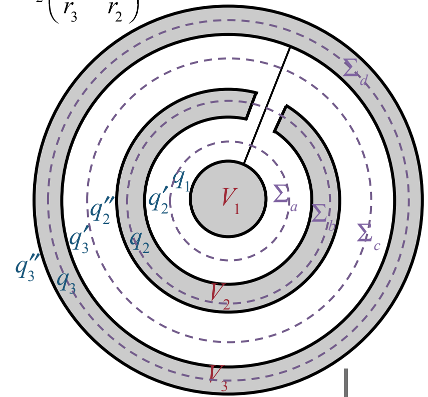
- Dai risultati sui **potenziali** otteniamo:

$$\left.\begin{array}{l} V_2 - V_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}\right) \\ V_3 = V_1 \\ V_3 - V_2 = \dfrac{q_2''}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_3}-\dfrac{1}{r_2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow q_1\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) = -q_2''\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_2}\right)$$

- Il sistema algebrico:

$$\begin{cases} q_2'\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}\right) = q_2''\left(\dfrac{1}{r_3}-\dfrac{1}{r_2}\right) \\ q_2' + q_2'' = q_2 \end{cases}$$

consente di determinare $q_1 = -q_2'$ e q_2''.



Esercizio 7 (VI)

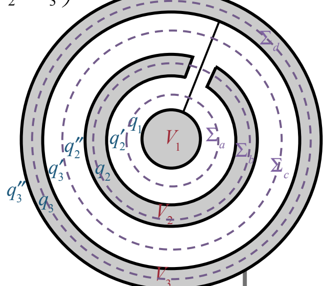
- Risolvendo:

$$q_2'\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) = q_2''\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_2}\right) \quad\Rightarrow\quad q_2'' = q_2'\frac{\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}}{\dfrac{1}{r_3}-\dfrac{1}{r_2}} = q_2'\frac{\dfrac{r_1-r_2}{r_1r_2}}{\dfrac{r_2-r_3}{r_3r_2}} = q_2'\frac{r_3}{r_1}\frac{r_1-r_2}{r_2-r_3}$$

$$q_2' + q_2'' = q_2 \quad\Rightarrow\quad q_2' + q_2'\frac{r_3}{r_1}\frac{r_1-r_2}{r_2-r_3} = q_2 \quad\Rightarrow\quad q_2'\left(1+\frac{r_3}{r_1}\frac{r_1-r_2}{r_2-r_3}\right) = q_2$$

$$q_2' = \frac{q_2}{1+\dfrac{r_3}{r_1}\dfrac{r_1-r_2}{r_2-r_3}}$$

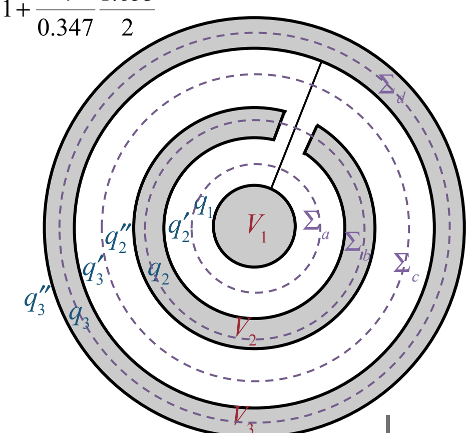
$$q_1 = -q_2' = \frac{-q_2}{1+\dfrac{r_3}{r_1}\dfrac{r_1-r_2}{r_2-r_3}}$$



Esercizio 7 (VII)

- Infine:

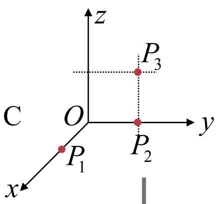
$$q_1 = \frac{-q_2}{1+\dfrac{r_3}{r_1}\dfrac{r_1-r_2}{r_2-r_3}} = \frac{-3.47\times10^{-6}\,\mathrm{C}}{1+\dfrac{4}{0.347}\dfrac{0.347-2}{2-4}} = \frac{-3.47\times10^{-6}}{1+\dfrac{4}{0.347}\dfrac{1.653}{2}}\mathrm{C} = -3.30\times10^{-7}\,\mathrm{C}$$



Esercizio 8

- **Tre cariche puntiformi**, $q_1 = 1\,\text{nC}$, $q_2 = 2\,\text{nC}$, $q_3 = -\frac{3\xi}{1000}\,\text{nC}$, sono rispettivamente disposte, in quiete, nei punti di coordinate cartesiane $P_1(1\text{ cm}, 0, 0)$, $P_2(0, 1\text{ cm}, 0)$, $P_3(0, 1\text{ cm}, 1\text{ cm})$, in una prefissata terna cartesiana ortogonale.
- Calcolare l'**energia potenziale del sistema** costituito da queste tre cariche (presa zero l'energia potenziale corrispondente alla configurazione in cui le cariche sono infinitamente distanti l'una dall'altra).
- Calcolare inoltre la **componente y del campo elettrico** generato dal sistema nell'origine $O(0, 0, 0)$ della terna cartesiana: $E_y(0, 0, 0)$.

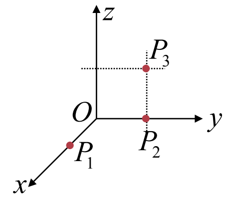
$$\xi = 123 \;\Rightarrow\; q_3 = -\frac{3\times 123}{1000}\,\text{nC} = -0.369\,\text{nC} = -0.369\times 10^{-9}\,\text{C}$$



Esercizio 8 (II)

- Ricordando che l'energia potenziale elettrostatica di un sistema di cariche puntiformi è data da:

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}\right)$$



si ha, nel nostro caso:

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}}\right) =$$

$$= 8.99\times 10^{9}\times\left(\frac{10^{-9}\times 2\times 10^{-9}}{\sqrt{2}\times 10^{-2}} - \frac{2\times 10^{-9}\times 0.369\times 10^{-9}}{10^{-2}} - \frac{0.369\times 10^{-9}\times 10^{-9}}{\sqrt{3}\times 10^{-2}}\right)\text{J} =$$

$$= 8.99\times 10^{9}\times\left(1.4142\times 10^{-16} - 7.3800\times 10^{-17} - 2.1304\times 10^{-17}\right)\text{J} =$$

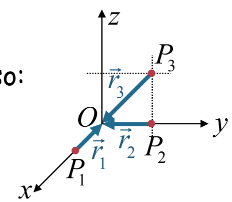
$$= 8.99\times 10^{9}\times 4.63\times 10^{-17}\,\text{J} = 4.16\times 10^{-7}\,\text{J}$$

Esercizio 8 (III)

- Ricordando il **campo elettrico** generato da una **carica puntiforme**:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

e il **principio di sovrapposizione**, si ha, nel nostro caso:



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2 + \frac{q_3}{r_3^2}\hat{r}_3\right)$$

dove:

$$\begin{cases}\vec{r}_1 = \overrightarrow{O-P_1} = -10^{-2}\,\hat{\imath}\\ \vec{r}_2 = \overrightarrow{O-P_2} = -10^{-2}\,\hat{\jmath}\\ \vec{r}_3 = \overrightarrow{O-P_3} = -10^{-2}\left(\hat{\jmath}+\hat{k}\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}r_1 = 10^{-2}\\ r_2 = 10^{-2}\\ r_3 = \sqrt{2}\times 10^{-2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\hat{r}_1 = -\hat{\imath}\\ \hat{r}_2 = -\hat{\jmath}\\ \hat{r}_3 = -\dfrac{\hat{\jmath}+\hat{k}}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

per cui:

$$\vec{E} = 8.99\times 10^{9}\times\left(\frac{10^{-9}}{10^{-4}}\left(-\hat{\imath}\right) + \frac{2\times 10^{-9}}{10^{-4}}\left(-\hat{\jmath}\right) + \frac{-0.369\times 10^{-9}}{2\times 10^{-4}}\left(-\frac{\hat{\jmath}+\hat{k}}{\sqrt{2}}\right)\right)\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Esercizio 8 (IV)

- da cui:

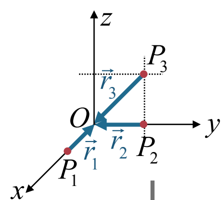
$$\vec{E} = 8.99\times 10^{9}\times\left(\frac{10^{-9}}{10^{-4}}\left(-\hat{\imath}\right) + \frac{2\times 10^{-9}}{10^{-4}}\left(-\hat{\jmath}\right) + \frac{-0.369\times 10^{-9}}{2\times 10^{-4}}\left(-\frac{\hat{\jmath}+\hat{k}}{\sqrt{2}}\right)\right)\frac{\text{V}}{\text{m}} =$$

$$= 8.99\times 10^{9}\times\left(-10^{-5}\hat{\imath} - 2\times 10^{-5}\hat{\jmath} + 0.13\times 10^{-5}\hat{\jmath} + 0.13\times 10^{-5}\hat{k}\right)\text{V/m} =$$

$$= 8.99\times 10^{9}\times\left(-10^{-5}\hat{\imath} - 1.87\times 10^{-5}\hat{\jmath} + 0.13\times 10^{-5}\hat{k}\right)\text{V/m} =$$

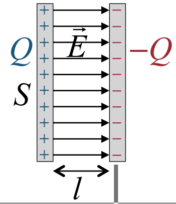
$$= \left(-8.99\times 10^{4}\hat{\imath} - 1.68\times 10^{5}\hat{\jmath} + 1.17\times 10^{4}\hat{k}\right)\text{V/m}$$

$$E_y = -1.68\times 10^{5}\ \text{V/m}$$



Esercizio 9

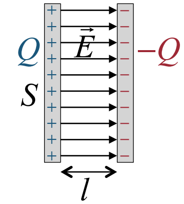
- Un **condensatore**, a cui è applicata una **differenza di potenziale** $\Delta V = 100\ \mathrm{V}$, possiede una **carica** $Q = 7 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$.
- Qual è la sua **capacità**?
- Se il condensatore è **piano**, con le armature **distanti** $l = 10^{-3}\ \mathrm{m}$, qual è la loro **area**?
- Che **lavoro** è stato necessario compiere per **caricare** il condensatore?
- Qual è la **forza** con cui si **attraggono** le **armature** del condensatore?



Esercizio 9 (II)

- La **capacità** è la costante di proporzionalità tra Q e ΔV.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{7 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}{100\ \mathrm{V}} = 7.00 \times 10^{-8}\ \mathrm{F} = 70.0\ \mathrm{nF}$$



- Per un condensatore **piano**:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{l} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{Cl}{\varepsilon_0} = \frac{7 \times 10^{-8}\ \mathrm{F} \times 10^{-3}\ \mathrm{m}}{8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}} = 7.91\ \mathrm{m}^2$$

- Il **lavoro** necessario a **caricare** il condensatore è pari all'**energia potenziale elettrostatica accumulata** nel condensatore:

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{\left(7 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}\right)^2}{7 \times 10^{-8}\ \mathrm{F}} = 3.50 \times 10^{-4}\ \mathrm{J}$$

Esercizio 9 (III)

- Per calcolare la **forza** con cui si attraggono le armature, consideriamo il **lavoro necessario per portare le armature dalla distanza l alla distanza $l + \mathrm{d}l$**.
- Tale lavoro si può scrivere **sia** in funzione della **forza** e dello **spostamento**, **sia** in funzione della **variazione** dell'**energia potenziale elettrostatica**:

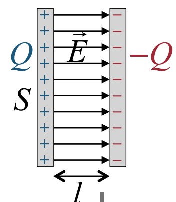
$$\left.\begin{aligned} \text{đ}L &= F\,\mathrm{d}l \\ \text{đ}L &= \mathrm{d}\mathscr{E} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}l}$$

- Poiché:

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0}\frac{l}{S}$$

si ha:

$$F = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}l} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2}\frac{\left(7 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}\right)^2}{8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m} \times 7.91\ \mathrm{m}^2} = 0.350\ \mathrm{N}$$



Esercizio 10

- Un **conduttore** di **capacità** $C = 4 \times 10^{-11}\ \mathrm{F}$ possiede una **carica** $Q = 8 \times 10^{-10}\ \mathrm{C}$.
- Qual è il suo **potenziale**?
- Se il conduttore è di forma **sferica**, qual è il suo **raggio**?
- Ponendo in **contatto** con il conduttore dato un **altro conduttore** (**scarico**), si osserva che il **potenziale diminuisce** di $\Delta V = 1\ \mathrm{V}$.
- Qual è la **capacità** del **nuovo conduttore**?

Esercizio 10 (II)

- Si ha, per la definizione di capacità di un conduttore:

$$Q = CV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Q}{C} = \frac{8\times10^{-10}\,\mathrm{C}}{4\times10^{-11}\,F} = 20\,\mathrm{V}$$

- Se il conduttore è sferico, la sua capacità è data da:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

per cui il suo raggio è:

$$R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} C = 8.99\times10^{9}\,\mathrm{F/m} \times 4\times10^{-11}\,\mathrm{F} = 0.360\,\mathrm{m}$$

- Il sistema formato dai **2 conduttori posti a contatto** ha una **capacità** pari alla **somma delle 2 capacità**:

$$C_{tot} = C + C'$$

Poiché la **carica totale non cambia**, si ha:

$$Q = C_{tot}\left(V - \Delta V\right) = \left(C + C'\right)\left(V - \Delta V\right) = C\left(V - \Delta V\right) + C'\left(V - \Delta V\right)$$

$$C' = \frac{Q - C\left(V - \Delta V\right)}{V - \Delta V} = \frac{Q}{V - \Delta V} - C = \frac{8\times10^{-10}\,\mathrm{C}}{20\,\mathrm{V} - 1\,\mathrm{V}} - 4\times10^{-11}\,\mathrm{F} = 2.11\,\mathrm{pF}$$

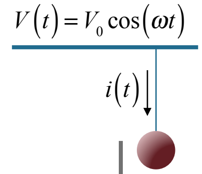
Esercizio 11

- Un **sfera** costituita di **materiale conduttore**, di raggio $R = 5$ cm viene collegata, tramite un **filo conduttore** di resistenza trascurabile, a un **cavo dell'alta tensione**, il cui potenziale varia nel tempo come:

$$V\left(t\right) = V_0 \cos\left(\omega t\right)$$

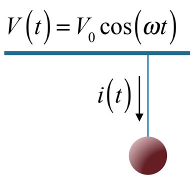
con $V_0 = 100\ \mathrm{kV}$ e $\omega = 2\pi\times50\ \mathrm{Hz}$.

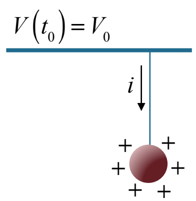
- Calcolare la **massima intensità di corrente** che scorre **nel filo**.

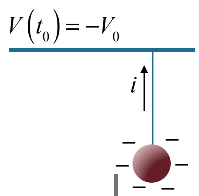


Esercizio 11 (II)

- La **corrente** che scorre nel filo è **dovuta** alla **capacità** non nulla della **sfera conduttrice**.
- Tale sfera, per **mantenere** il proprio **potenziale uguale** a quello del cavo dell'alta tensione (che varia nel tempo) deve **continuamente cedere o acquistare carica elettrica**.
- La **carica elettrica ceduta** o **acquistata** dalla sfera, **passa attraverso il filo**, determinando in esso una corrente elettrica $i(t)$ variabile nel tempo.







Esercizio 11 (III)

- La carica Q presente sulla sfera è data da:

$$Q\left(t\right) = CV\left(t\right) = CV_0 \cos\left(\omega t\right)$$

e dunque l'intensità della corrente che scorre nel filo è data da:

$$i\left(t\right) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\left(t\right) = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\left(t\right) = CV_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\left(\omega t\right) = -CV_0\omega \sin\left(\omega t\right)$$

- La massima intensità della corrente che scorre nel filo è perciò:

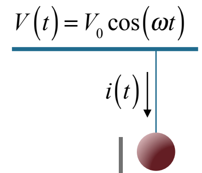
$$i_{\max} = CV_0\omega$$

dove:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi \times 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m} \times 5\times10^{-2}\,\mathrm{m} = $$
$$= 5.56\times10^{-12}\,\mathrm{F}$$

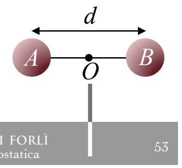
- Si ha perciò:

$$i_{\max} = CV_0\omega = 5.56\times10^{-12}\,\mathrm{F} \times 10^{5}\,\mathrm{V} \times 2\pi\times50\,\mathrm{s}^{-1} =$$
$$= 17.5\times10^{-5}\,\mathrm{A} = 175\,\mu\mathrm{A}$$



Esercizio 12

- **Due sfere conduttrici cariche**, entrambe di raggio $R = 0.1\ \text{cm}$, sono disposte con i centri a una distanza $d = 6\ \text{cm}$ e si **respingono** con una **forza** di **intensità** $F = 4\times 10^{-5}\ \text{N}$.
- Se le due sfere sono **poste a contatto** e in seguito ridisposte nelle precedenti posizioni, la **forza di repulsione** risulta k^2F, con $k = 1.5$.
- Calcolare le **cariche iniziali e finali** di entrambe le sfere.
- Calcolare i **potenziali iniziali e finali** di entrambe le sfere (preso zero il potenziale all'infinito).
- Calcolare il valore del **campo elettrico** nel **punto intermedio** O del segmento congiungente i centri A e B delle 2 sfere dopo il contatto.



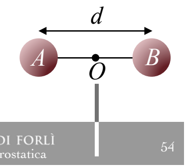
Esercizio 12 (II)

- Se le due sfere di uguale dimensione, dopo essere state poste a contatto, si respingono con **forza diversa** da prima:
  - Significa che esse **prima** possedevano **carica e potenziale diverso**, mentre **dopo** esse possiedono **potenziale uguale** e anche **carica uguale** (avendo la stessa dimensione e dunque la stessa capacità).
- Se chiamiamo q_1 e q_2 le cariche delle 2 sfere prima del contatto e q_f la carica di entrambe le sfere dopo il contatto, si ha:

$$q_f = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

- La **forza repulsiva**, **prima** e **dopo** il contatto, vale:

$$\begin{cases} F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{d^2} \\[2ex] k^2 F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_f^2}{d^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\left(\dfrac{q_1+q_2}{2}\right)^2}{d^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\left(q_1+q_2\right)^2}{4d^2} \end{cases}$$



Esercizio 12 (III)

- Si ha perciò:

$$\begin{cases} q_1 q_2 = 4\pi\varepsilon_0 d^2 F \\ q_1 + q_2 = 4dk\sqrt{\pi\varepsilon_0 F} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = 4dk\sqrt{\pi\varepsilon_0 F} - q_1 \\ q_1\left(4dk\sqrt{\pi\varepsilon_0 F} - q_1\right) = 4\pi\varepsilon_0 d^2 F \end{cases}$$

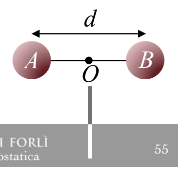
$$q_1^2 - 4dk\sqrt{\pi\varepsilon_0 F}\, q_1 + 4\pi\varepsilon_0 d^2 F = 0$$

$$q_1 = 2dk\sqrt{\pi\varepsilon_0 F} \pm \sqrt{4d^2k^2\pi\varepsilon_0 F - 4\pi\varepsilon_0 d^2 F}$$

$$q_1 = 2dk\sqrt{\pi\varepsilon_0 F} \pm 2d\sqrt{\pi\varepsilon_0 F\left(k^2-1\right)} = 2d\sqrt{\pi\varepsilon_0 F}\left(k \pm \sqrt{k^2-1}\right)$$

$$\begin{cases} q_1 = 2d\sqrt{\pi\varepsilon_0 F}\left(k \pm \sqrt{k^2-1}\right) \\ q_2 = 2d\sqrt{\pi\varepsilon_0 F}\left(k \mp \sqrt{k^2-1}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 10.47\,\text{nC} \\ q_2 = 1.53\,\text{nC} \end{cases}$$

$$q_f = \frac{q_1 + q_2}{2} = 6.00\,\text{nC}$$



Esercizio 12 (IV)

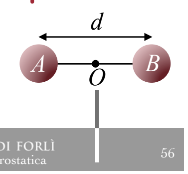
- Note le cariche, possiamo calcolare i potenziali. Inizialmente si ha:

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} = 9.4\times 10^4\ \text{V} \\[2ex] V_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} = 1.4\times 10^4\ \text{V} \end{cases}$$

mentre nello stato finale si ha:

$$V_{1f} = V_{2f} = \frac{q_f}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\dfrac{q_1+q_2}{2}}{4\pi\varepsilon_0 R} = 5.4\times 10^4\ \text{V}$$

- Dopo il contatto, essendo uguale la carica delle 2 sfere, **nel punto intermedio O il campo elettrico è nullo**.



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
SEDE DI FORLÌ

http://campus.cib.unibo.it/2488/

Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli

https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica