

12. Polarizzazione delle Onde Elettromagnetiche

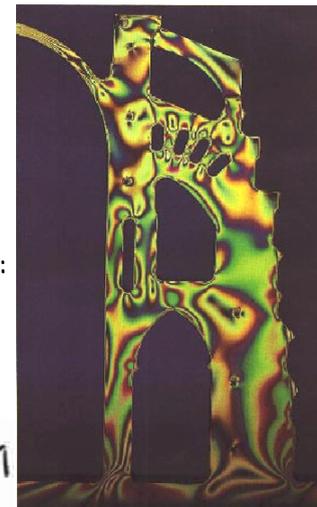
<http://campus.cib.unibo.it/2485/>

April 20, 2011



monitor e televisori LCD

fotoelasticità: studio degli sforzi di una struttura



occhiali antiriflesso

Trasversalità del Campo Elettromagnetico

- Abbiamo visto che le **componenti** dei campi elettrico e magnetico di un'onda elettromagnetica soddisfano l'**equazione di d'Alambert**:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \Phi = E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$$

ma non ci siamo fino a ora preoccupati della **relazione tra tali componenti**.

- Abbiamo trovato che una soluzione di tale equazione è l'**onda piana progressiva**:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_1(\vec{r} \cdot \hat{s} - vt)$$

- Per cui:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(\vec{r} \cdot \hat{s} - vt) \\ \vec{B} = \vec{B}(\vec{r} \cdot \hat{s} - vt) \end{cases}$$

Trasversalità del Campo Elettromagnetico (II)

- Posto $u = \vec{r} \cdot \hat{s} - vt$, si ha:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r} \cdot \hat{s} - vt) = \vec{E}(u)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{d\vec{E}}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{d\vec{E}}{du}$$

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{dE_z}{du} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{dE_y}{du} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dE_z}{du} s_y - \frac{dE_y}{du} s_z = \left(\hat{s} \wedge \frac{d\vec{E}}{du} \right)_x$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \hat{s} \wedge \frac{d\vec{E}}{du}$$

e analogamente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -v \frac{d\vec{B}}{du} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \hat{s} \wedge \frac{d\vec{B}}{du} \end{cases}$$

Trasversalità del Campo Elettromagnetico (III)

- Le **leggi di Ampère-Maxwell** e di **Faraday-Lenz** diventano:

$$\begin{cases} \hat{s} \wedge \frac{d\vec{B}}{du} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\epsilon\mu v \frac{d\vec{E}}{du} = -\frac{1}{v} \frac{d\vec{E}}{du} \\ \hat{s} \wedge \frac{d\vec{E}}{du} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = v \frac{d\vec{B}}{du} \end{cases}$$

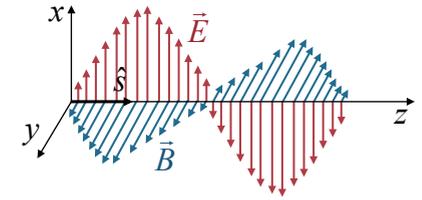
- Poiché E e B sono funzione della sola variabile u , possiamo **integrare rispetto a u** e otteniamo:

$$\left. \begin{cases} \hat{s} \wedge \vec{B} = -\frac{1}{v} \vec{E} \\ \hat{s} \wedge \vec{E} = v \vec{B} \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = -v \hat{s} \wedge \vec{B} \\ \vec{B} = \frac{1}{v} \hat{s} \wedge \vec{E} \end{cases}$$

Trasversalità del Campo Elettromagnetico (IV)

- Da queste si ottiene:

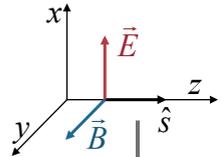
$$\left. \begin{cases} \vec{E} = -v \hat{s} \wedge \vec{B} \\ \vec{B} = \frac{1}{v} \hat{s} \wedge \vec{E} \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} \perp \hat{s} \\ \vec{B} \perp \hat{s} \\ \vec{E} \perp \vec{B} \end{cases}$$



- I campi sono **trasversali**, ovvero i vettori **campo elettrico** e **campo magnetico** giacciono su di un **piano perpendicolare alla direzione di propagazione**.

- Inoltre i vettori **campo elettrico** e **campo magnetico** sono sempre **perpendicolari tra di loro**. Si ha infine:

$$\|\vec{E}\| = v \|\vec{B}\|$$



Densità e Flusso di Energia del Campo Elettromagnetico

- La **densità di energia** del campo elettromagnetico è data da:

$$w = u_e + u_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \epsilon v^2 B^2 = \epsilon E^2 \\ \frac{1}{2} \frac{E^2}{\mu v^2} + \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{B^2}{\mu} \end{cases} \quad \begin{cases} v^2 = \frac{1}{\epsilon\mu} \\ E = vB \end{cases}$$

$$w = u_e + u_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 = \epsilon E^2 = \frac{B^2}{\mu}$$

- Il **vettore di Poynting** è:

$$S = \frac{1}{\mu} \|\vec{E} \wedge \vec{B}\| = \frac{EB}{\mu} = \begin{cases} \epsilon v^2 EB = \epsilon v E^2 \\ \frac{v B B}{\mu} = v \frac{B^2}{\mu} \end{cases} \quad \vec{S} = \epsilon v E^2 \hat{s} = v \frac{B^2}{\mu} \hat{s} = v w \hat{s}$$

Onde Piane Monocromatiche

- Abbiamo visto che possiamo scrivere la funzione d'onda di un'**onda monocromatica piana progressiva** nella forma:

$$\Phi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta) \quad \begin{cases} \Phi = E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z \\ A = E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}, B_{0x}, B_{0y}, B_{0z} \end{cases}$$

- Se prendiamo un'**onda che si propaga nella direzione positiva dell'asse z** , si ha, più semplicemente:

$$\Phi(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \delta) \quad \begin{cases} \Phi = E_x, E_y, B_x, B_y \\ A = E_{0x}, E_{0y}, B_{0x}, B_{0y} \end{cases}$$

- Ovvero, posto $\delta = \delta_2 - \delta_1$:

$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_1) \\ E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_2) = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_1 + \delta) \\ E_z(z, t) = 0 \end{cases}$$



Polarizzazione Ellittica

• Si ha perciò:

$$\begin{cases} E_x(z,t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_1) \\ E_y(z,t) = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_1 + \delta) \end{cases}$$

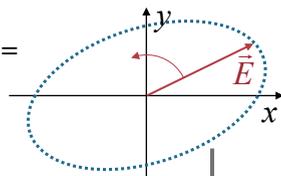
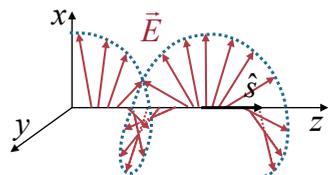
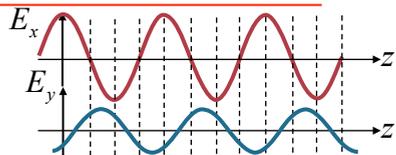
• Cerchiamo quindi l'equazione della curva descritta dal vertice del vettore E :

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\omega t - kz + \delta_1)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t - kz + \delta_1 + \delta) =$$

$$= \cos(\omega t - kz + \delta_1) \cos \delta - \sin(\omega t - kz + \delta_1) \sin \delta =$$

$$= \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \delta - \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2} \sin \delta$$

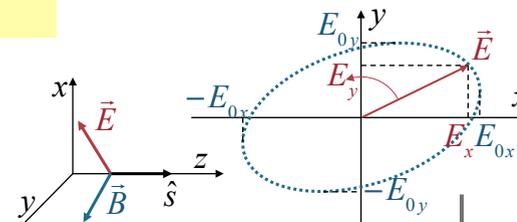
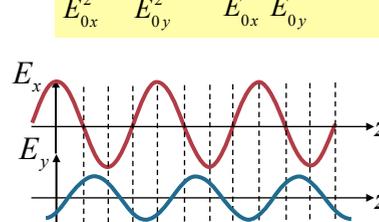
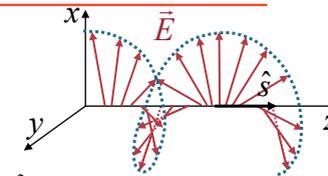


Polarizzazione Ellittica (II)

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \cos \delta - \frac{E_y}{E_{0y}} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2} \sin \delta$$

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} \cos^2 \delta + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta = \left(1 - \frac{E_x^2}{E_{0x}^2}\right) \sin^2 \delta$$

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta$$



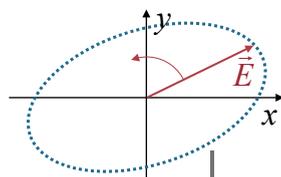
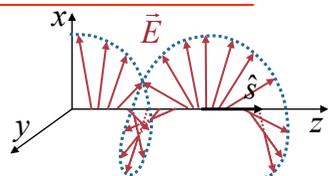
Polarizzazione Ellittica (III)

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

• Si tratta dell'equazione di un'ellisse, in quanto risulta positivo il determinante:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{1}{E_{0x}^2} & -\frac{\cos \delta}{E_{0x} E_{0y}} \\ \frac{\cos \delta}{E_{0x} E_{0y}} & \frac{1}{E_{0y}^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{E_{0x}^2 E_{0y}^2} (1 - \cos^2 \delta) = \frac{\sin^2 \delta}{E_{0x}^2 E_{0y}^2} \geq 0$$

• Si dice quindi che l'onda è **polarizzata ellitticamente**.

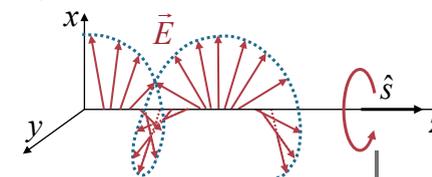


Polarizzazione Ellittica (IV)

• La polarizzazione ellittica può essere **destrorsa** o **sinistrorsa**:

- Si dice per convenzione **destrorsa** se un osservatore che guarda nella direzione da cui proviene la luce vede il vertice del vettore campo elettrico descrivere l'ellisse in **senso orario**.

polarizzazione ellittica **sinistrorsa**





Polarizzazione Lineare

• Se:

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

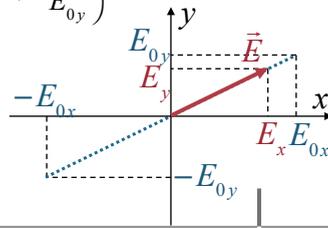
allora l'ellisse **degenera** in una **retta**:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \overbrace{\cos \delta}^{(-1)^m} = \overbrace{\sin^2 \delta}^0$$

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2(-1)^m \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{E_x}{E_{0x}} - (-1)^m \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = 0$$

$$\frac{E_x}{E_{0x}} - (-1)^m \frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \Rightarrow E_y = (-1)^m \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x$$

e l'onda e.m. si dice **polarizzata linearmente**.

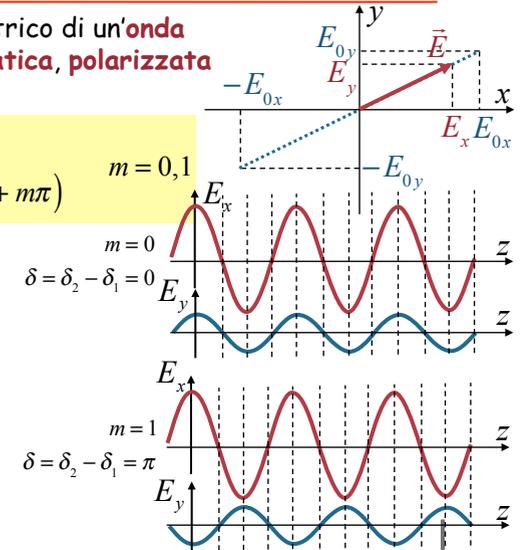
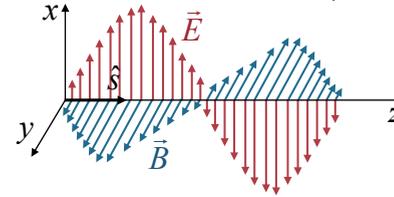


Polarizzazione Lineare (II)

• Le componenti del campo elettrico di un'onda **piana progressiva, monocromatica, polarizzata linearmente** sono:

$$\begin{cases} E_x(z,t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_1) \\ E_y(z,t) = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_1 + m\pi) \end{cases} \quad m = 0, 1$$

polarizzazione lineare. $E_{0y} = 0$



Polarizzazione Circolare

• Se invece risulta:

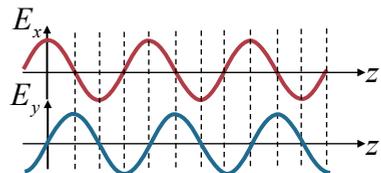
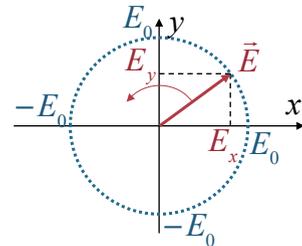
$$\begin{cases} \delta = \delta_2 - \delta_1 = \frac{\pi}{2} \pm m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \\ E_{0x} = E_{0y} = E_0 \end{cases}$$

l'ellisse si riduce a una **circonferenza**:

$$\frac{E_x^2}{E_0^2} + \frac{E_y^2}{E_0^2} - 2 \frac{E_x}{E_0} \frac{E_y}{E_0} \overbrace{\cos \delta}^0 = \overbrace{\sin^2 \delta}^1$$

$$\frac{E_x^2}{E_0^2} + \frac{E_y^2}{E_0^2} = 1 \Rightarrow E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

e l'onda e.m. si dice **polarizzata circolarmente**.

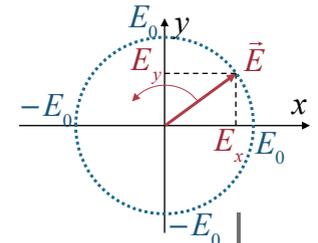
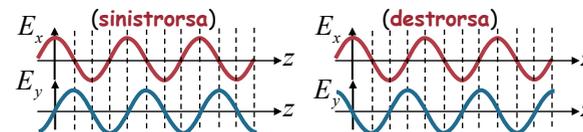


Polarizzazione Circolare (II)

• Le componenti del campo elettrico di un'onda **piana progressiva, monocromatica, polarizzata circolarmente** sono:

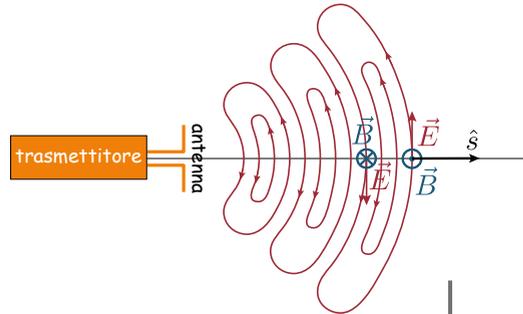
$$\begin{cases} E_x(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz + \delta_1) \\ E_y(z,t) = E_0 \cos\left(\omega t - kz + \delta_1 + m\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad m = \pm 1$$

• Se $m = 1$ la polarizzazione circolare è **destrorsa**. Se invece $m = -1$ la polarizzazione circolare è **sinistrorsa**.



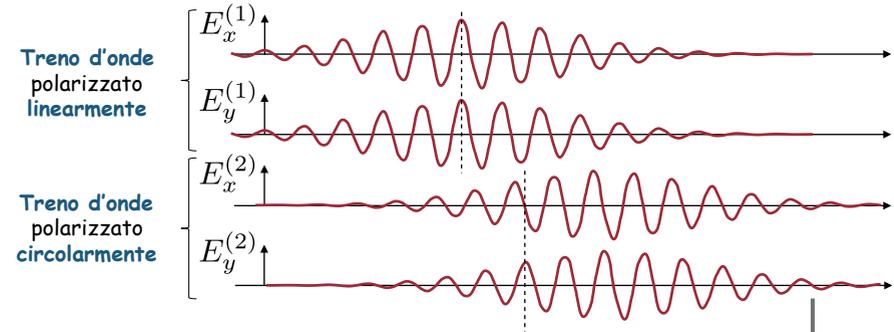
Luce Non Polarizzata e Parzialmente Polarizzata

- Le onde elettromagnetiche emesse da un'antenna sono sempre **polarizzate linearmente**:
 - Il campo elettrico è parallelo al dipolo di antenna.
- La luce visibile emessa da una lampada, e più in generale le onde elettromagnetiche emesse in **diseccitazioni atomiche o molecolari**, invece **non sono polarizzate**.



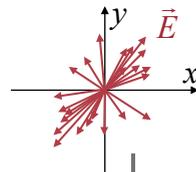
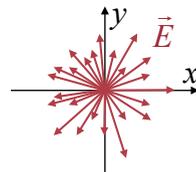
Luce Non Polarizzata e Parzialmente Polarizzata (II)

- Il motivo del fatto che la luce di una lampada non è polarizzata sta nel fatto che **in ogni diseccitazione** viene emesso un **treno d'onde di lunghezza limitata**:
 - Può anche avere la medesima frequenza degli altri treni d'onde;
 - Ma ha la **fase** delle due componenti perpendicolari alla direzione di propagazione (e dunque lo **stato di polarizzazione**) che è **casuale**.



Luce Non Polarizzata e Parzialmente Polarizzata (III)

- Nell'onda che risulta dalla sovrapposizione di tanti treni d'onda con **fase e ampiezza casuale** (**luce casuale**) il vertice del vettore campo elettrico descrive, in generale, una **curva irregolare e fortemente caotica** nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione ondata.
- Se la direzione del campo elettrico **non ha una direzione preferenziale** si dice che l'onda **non è polarizzata**.
- Se invece la direzione del campo elettrico **ha una direzione preferenziale** allora si dice che l'onda è **parzialmente polarizzata**.

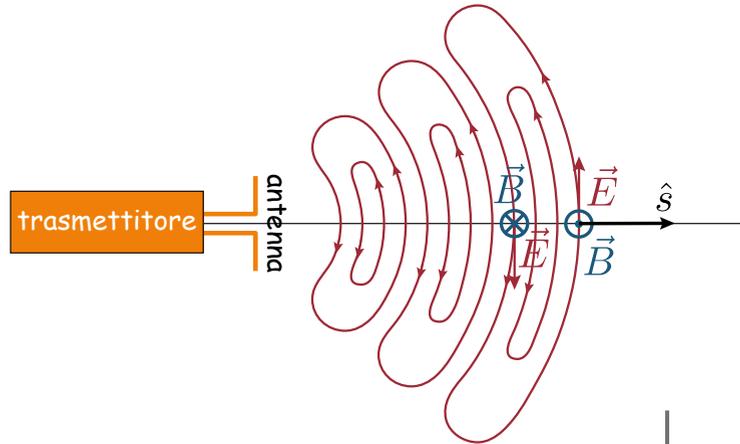


Produzione di Onde Polarizzate

- Esistono diversi metodi per produrre onde elettromagnetiche polarizzate. Tra essi:
 - Polarizzazione per **emissione selettiva**;
 - Polarizzazione per **assorbimento selettivo**;
 - Polarizzazione per **diffusione singola**;
 - Polarizzazione per **riflessione**.

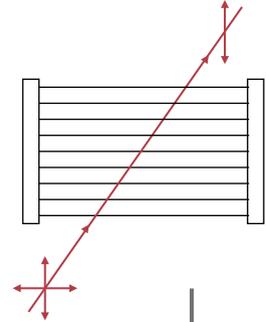
Polarizzazione per Emissione Selettiva

- Quando al **dipolo** di un'**antenna** viene applicata una **f.e.m. alternata**, il dipolo **emette onde elettromagnetiche polarizzate** aventi il **campo elettrico parallelo al dipolo**.



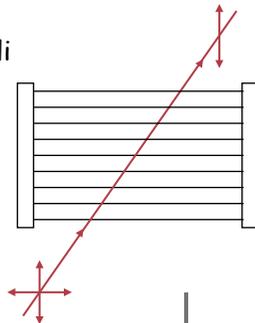
Polarizzazione per Assorbimento Selettivo

- Se si fa passare un'**onda radio** attraverso un **fascio di fili conduttori** paralleli, la **componente del campo elettrico nella direzione dei fili** provoca il **moto degli elettroni** su di essi.
- L'**energia** trasferita dal campo incidente agli elettroni viene in **parte dissipata** in calore per effetto Joule e in **parte irradiata** nuovamente in onde elettromagnetiche.
- L'**irraggiamento in avanti** è in **controfase** con l'onda incidente e quindi **annulla verso avanti la radiazione incidente**;
- L'**irraggiamento indietro** produce un'**onda riflessa**.



Polarizzazione per Assorbimento Selettivo (II)

- Dunque la **componente** dell'onda nella **direzione dei fili** risulta fortemente **attenuata**. La componente perpendicolare ai fili non viene invece attenuata.
- Affinché il dispositivo sia efficace, la **distanza tra i fili** deve essere dello **stesso ordine di grandezza** della **lunghezza d'onda** dell'onda incidente.
- Non è possibile perciò costruire un dispositivo a fili che polarizzi la luce visibile.
- Nel 1938 Edwin H. Land inventò il **polarizzatore**, un materiale plastico che **si comporta come un fascio di fili** nello **spetto visibile**.



Polarizzazione per Assorbimento Selettivo (III)

- Un foglio di **plastica**, formato da **lunghe catene di idrocarburi**, subisce uno **stiramento** in una certa direzione che **allinea le molecole**.
- Poi il foglio viene immerso in una soluzione contenente **iodio**, che si attacca alle catene di idrocarburi e fornisce gli **elettroni di conduzione**, che **possono muoversi lungo le catene** ma non perpendicolarmente a esse.
- Il **polarizzatore** possiede perciò un asse, detto **asse di trasmissione facile**.
 - La componente del campo elettrico **lungo tale asse** viene trasmessa con buona efficienza ($\sim 60\%$);
 - La componente **perpendicolare a tale asse** si riduce fortemente ($\sim 10^{-4}$).

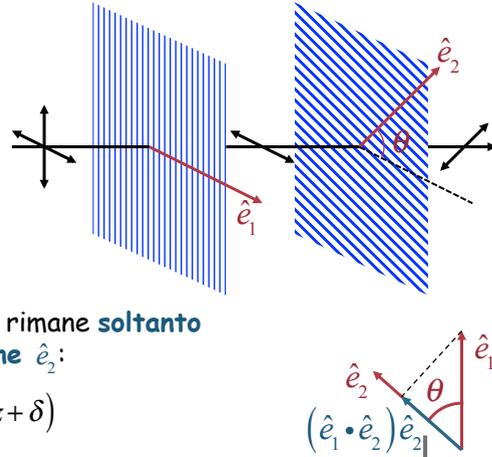
- Consideriamo un fascio di luce non polarizzata che attraversa, uno di seguito all'altro, **due polarizzatori**, i cui **assi di trasmissione facile** formano un **angolo θ** .

- Dopo il primo polarizzatore la luce è **polarizzata linearmente** lungo l'asse di trasmissione facile del primo polarizzatore:

$$\vec{E}_1(z, t) = E_{01} \hat{e}_1 \cos(\omega t - kz + \delta)$$

- Dopo il secondo polarizzatore rimane **soltanto il componente di E_1 in direzione \hat{e}_2** :

$$\vec{E}_2(z, t) = E_{01} (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_2 \cos(\omega t - kz + \delta)$$



- L'**ampiezza** dell'onda passa dal valore E_{01} dopo il primo polarizzatore al valore:

$$E_{02} = E_{01} (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2) = E_{01} \cos \theta$$

dopo il secondo polarizzatore.

- Se si definisce **intensità luminosa** la quantità:

$$I = \langle E^2 \rangle = \frac{w}{\varepsilon} = \frac{S}{\varepsilon v}$$

si ha:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta \quad (\text{legge di Malus})$$

- Se i polarizzatori sono **incrociati** ($\theta = 90^\circ$) si ha $I_2 = 0$.

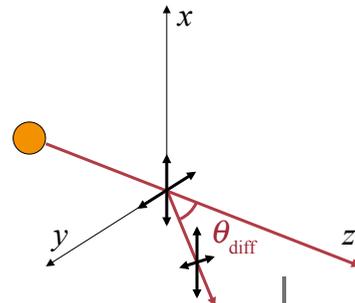
- Se, in una giornata limpida, si osserva attraverso un polarizzatore il **cielo azzurro a circa 90° dal Sole**, ci si accorge che la luce è **polarizzata** (ruotando il polarizzatore varia l'intensità).

- Gli **elettroni** delle molecole di aria si comportano come **oscillatori, forzati** dalla luce incidente:

- Essi **oscillano** nel **piano perpendicolare a z** .
- Oscillando essi ri-emettono luce in tutte le direzioni (**diffusione**).

- L'**oscillazione sul piano yz** viene vista dall'osservatore **tanto più attenuata quanto maggiore è l'angolo θ_{diff}** .

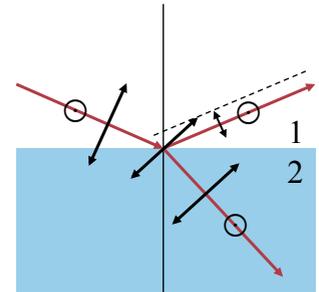
- Se l'angolo θ_{diff} **vale 90°** allora la **polarizzazione è totale**.



- Quando la luce si **riflette** sulla **superficie** che **separa due mezzi** con **diverso indice di rifrazione**, essa **si polarizza** (questo non accade nella riflessione su di una superficie metallica).

- Gli **elettroni**, nel **secondo mezzo**, **oscillano** in un **piano perpendicolare al raggio rifratto** e così producono anche l'**onda riflessa**.

- La **componente** di tale oscillazione che **giace** nel **piano di incidenza** (il piano che contiene raggio incidente, raggio riflesso e raggio rifratto) ha una **componente molto piccola sul piano normale al raggio riflesso**.



Polarizzazione per Riflessione (II)

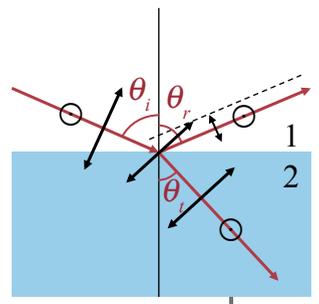
- Tale componente è **nulla** se il **raggio riflesso** e il **raggio rifratto** formano **tra loro un angolo di 90°**.
- In tale condizione il raggio riflesso è **totalmente polarizzato**.
- Poiché, per la **legge di Snell**, la relazione tra l'angolo di rifrazione e l'angolo di riflessione si scrive:

$$\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}$$

la condizione $\theta_r + \theta_t = 90^\circ$ implica che:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin(90^\circ - \theta_i)} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\cos \theta_i} = \frac{n_2}{n_1}$$

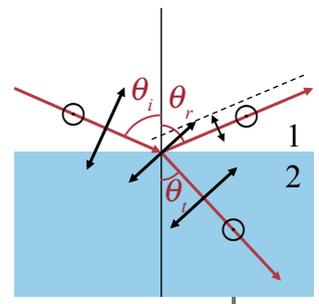
$$\tan \theta_i = \frac{n_2}{n_1}$$



Polarizzazione per Riflessione (III)

- La **polarizzazione** per riflessione è **totale** se l'angolo di incidenza

$$\theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{angolo di Brewster})$$



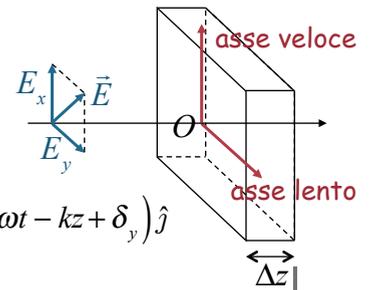
Lamine di Ritardo

- Esistono **materiali anisotropi** (come la calcite), detti **birifrangenti**, che hanno **diversi indici di rifrazione per diverse direzioni di polarizzazione**.

- Per una **lamina** di tale materiale, se il campo elettrico è diretto lungo il cosiddetto **asse lento**, l'indice di rifrazione vale n_l , mentre se il campo elettrico è diretto lungo il cosiddetto **asse veloce**, l'indice di rifrazione vale $n_v < n_l$.

- Consideriamo un'onda progressiva, piana, monocromatica che si propaga in direzione z :

$$\vec{E}(z,t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_x) \hat{i} + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_y) \hat{j}$$



Lamine di Ritardo (II)

- Poiché:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c}$$

si ha, sulle due facce della lamina:

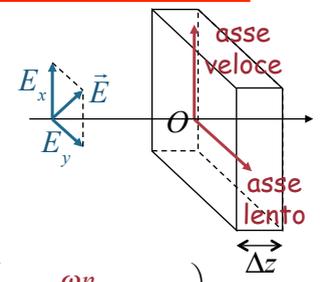
$$\vec{E}(0,t) = E_{0x} \cos(\omega t + \delta_x) \hat{i} + E_{0y} \cos(\omega t + \delta_y) \hat{j}$$

$$\vec{E}(\Delta z,t) = E_{0x} \cos\left(\omega t - \frac{\omega n_v}{c} \Delta z + \delta_x\right) \hat{i} + E_{0y} \cos\left(\omega t - \frac{\omega n_l}{c} \Delta z + \delta_y\right) \hat{j}$$

- Lo **sfasamento** tra le 2 componenti, prima e dopo la lamina vale:

$$\delta = \delta_x - \delta_y$$

$$\delta' = \delta_x - \delta_y + (n_l - n_v) \frac{\omega \Delta z}{c}$$



Lamine di Ritardo (III)

- La lamina ha perciò introdotto tra le due componenti uno **sfasamento aggiuntivo**:

$$\Delta\varphi = (n_l - n_v) \frac{\omega\Delta z}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_l - n_v) \Delta z$$

- In particolare si chiama **lamina a quarto d'onda** una lamina in cui:

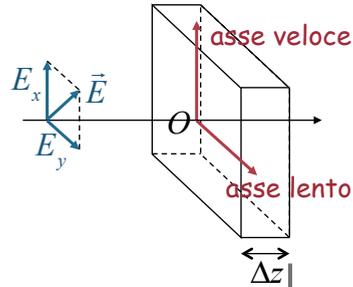
$$\Delta\varphi = \pi/2$$

$$\Delta z = \frac{\lambda_0}{4} \frac{1}{n_l - n_v}$$

- e **lamina a mezza onda** una lamina in cui:

$$\Delta\varphi = \pi$$

$$\Delta z = \frac{\lambda_0}{2} \frac{1}{n_l - n_v}$$

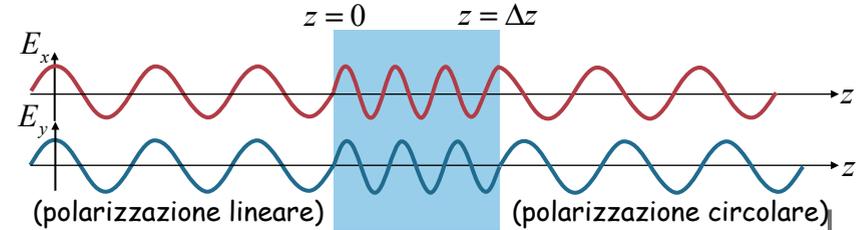


Lamine di Ritardo (IV)

- Se su di una lamina a **quarto d'onda** incide un'onda e.m. polarizzata **linearmente a 45°** rispetto agli assi della lamina, all'uscita della lamina la polarizzazione è **circolare**:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{i} + E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{j}, \quad z < 0$$

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz + \delta + \pi/2) \hat{i} + E_0 \cos(\omega t - kz + \delta) \hat{j}, \quad z > \Delta z$$



Intensità Luminosa

- Abbiamo definito **intensità luminosa** la quantità:

$$I = \langle E^2 \rangle = \frac{w}{\varepsilon} = \frac{S}{\varepsilon v}$$

- Se si scrive la funzione d'onda utilizzando gli **esponenziali immaginari** occorre prestare attenzione al fatto che, per **vettori complessi**:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x^* b_x + a_y^* b_y + a_z^* b_z$$

$$\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^* a_x + a_y^* a_y + a_z^* a_z = |a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{b})^*$$

$$\Re(\vec{a}) = \frac{\vec{a} + \vec{a}^*}{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b})^* = 2\Re(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Intensità Luminosa (II)

- Se scriviamo la funzione d'onda nella forma:

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} = E_{0x} e^{i(\omega t - kz + \delta_x)} \hat{i} + E_{0y} e^{i(\omega t - kz + \delta_y)} \hat{j}, \quad E_{0x}, E_{0y} \in \mathbb{R}$$

si ha:

$$I = \langle (\Re(\vec{E}))^2 \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} + \vec{E}^*}{2} \cdot \frac{\vec{E} + \vec{E}^*}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{E^2 + E^{*2} + 2\Re(\vec{E} \cdot \vec{E}^*)}{4} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\left\langle E_{0x}^2 e^{2i(\omega t - kz + \delta_x)} + E_{0y}^2 e^{2i(\omega t - kz + \delta_y)} \right\rangle + \left\langle E_{0x}^2 e^{-2i(\omega t - kz + \delta_x)} + E_{0y}^2 e^{-2i(\omega t - kz + \delta_y)} \right\rangle + 2\langle \Re(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{4} (0 + 0 + 2\langle \Re(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \rangle) = \frac{1}{2} \langle \Re(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \rangle$$

$$I = \langle \Re(\vec{E}) \cdot \Re(\vec{E}) \rangle = \frac{1}{2} \langle \Re(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \rangle$$

Matrice di Coerenza e Grado di Polarizzazione

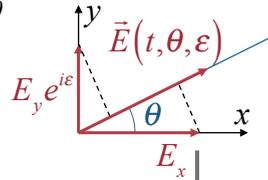
- Consideriamo un'onda elettromagnetica **parzialmente polarizzata**. In una **posizione fissata** ($z \equiv \text{cost}$) si ha:

$$\begin{cases} E_x(t) = E_{0x}(t) e^{-i[\omega t - \delta_x(t)]} \\ E_y(t) = E_{0y}(t) e^{-i[\omega t - \delta_y(t)]} \end{cases}$$

(in generale sia le ampiezze E_{0x} e E_{0y} , sia le fasi δ_x e δ_y variano casualmente nel tempo).

- Supponiamo che tale onda attraversi prima una **lamina di ritardo**, che ritardi la componente y di un angolo ε , poi un **polarizzatore** avente l'asse di trasmissione facile che forma un angolo θ con l'asse x . La proiezione del campo elettrico in questa direzione vale:

$$E(t; \theta, \varepsilon) = E_x \cos \theta + E_y e^{i\varepsilon} \sin \theta$$



Matrice di Coerenza e Grado di Polarizzazione (III)

- Si definisce inoltre **grado di polarizzazione** la quantità:

$$P = \sqrt{1 - \frac{4 \det J}{(\text{Tr} J)^2}}$$

- Nel caso di un'onda **non polarizzata** $I(\theta, \varepsilon)$ non deve dipendere né da θ , né da ε , per cui si deve avere:

$$I(\theta, \varepsilon) = J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta + 2 \Re(J_{xy} e^{-i\varepsilon}) \sin \theta \cos \theta \equiv \text{cost}$$

$$\begin{cases} J_{xy} = J_{yx} = 0 \\ J_{xx} = J_{yy} = \frac{I}{2} \end{cases} \Rightarrow J = \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = 0 \quad \text{(onda non polarizzata)}$$

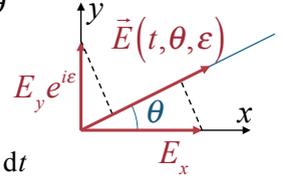
Matrice di Coerenza e Grado di Polarizzazione (II)

- L'**intensità luminosa**, dopo la lamina e il polarizzatore vale:

$$\begin{aligned} I(\theta, \varepsilon) &= \frac{1}{2} \Re \langle EE^* \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \Re \langle (E_x \cos \theta + E_y e^{i\varepsilon} \sin \theta) (E_x^* \cos \theta + E_y^* e^{-i\varepsilon} \sin \theta) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 \theta \langle E_x E_x^* \rangle + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \langle E_y E_y^* \rangle + \sin \theta \cos \theta \Re \langle E_x E_y^* e^{-i\varepsilon} \rangle = \\ &= J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta + 2 \Re(J_{xy} e^{-i\varepsilon}) \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

dove si è definita la **matrice di coerenza**:

$$J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{pmatrix} \quad \langle E_a E_b^* \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E_a(t) E_b^*(t) dt$$



Matrice di Coerenza e Grado di Polarizzazione (IV)

- Nel caso di un'onda **totalmente polarizzata**, si ha invece:

$$\begin{cases} E_x(t) = E_{0x} e^{-i[\omega t - \delta_x]} & E_y(t) = E_{0y} e^{-i[\omega t - \delta_y]} & \delta = \delta_y - \delta_x \\ E_x E_x^* = E_{0x} e^{-i[\omega t - \delta_x]} E_{0x} e^{+i[\omega t - \delta_x]} = E_{0x}^2 \\ E_y E_y^* = E_{0y} e^{-i[\omega t - \delta_y]} E_{0y} e^{+i[\omega t - \delta_y]} = E_{0y}^2 \\ E_x E_y^* = E_{0x} e^{-i[\omega t - \delta_x]} E_{0y} e^{+i[\omega t - \delta_y]} = E_{0x} E_{0y} e^{i\delta} \\ E_y E_x^* = (E_x E_y^*)^* = E_{0x} E_{0y} e^{-i\delta} \end{cases}$$

per cui $\det J = 0$, e dunque:

$$J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_{0x}^2 & E_{0x} E_{0y} e^{i\delta} \\ E_{0x} E_{0y} e^{-i\delta} & E_{0y}^2 \end{pmatrix}, \quad P = 1 \quad \text{(onda totalmente polarizzata)}$$

Matrice di Coerenza e Grado di Polarizzazione (V)

- In particolare, per **polarizzazione lineare** in direzione che forma un angolo $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ con l'asse x , si ha ($\delta = 0$):

$$J(0^\circ) = I \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad J(45^\circ) = \frac{I}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$J(90^\circ) = I \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad J(135^\circ) = \frac{I}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

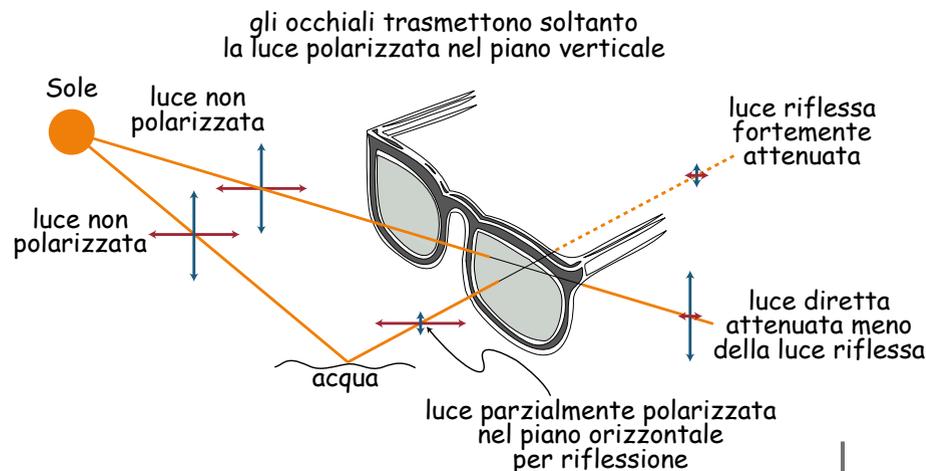
- Mentre per **polarizzazione circolare** ($\delta = \pi/2$):

$$J = \frac{I}{2} \begin{vmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{vmatrix}$$

- Un'onda **parzialmente polarizzata** ha un grado di polarizzazione P intermedio tra 0 e 1.

Occhiali Antiriflesso

- Utilizzando polarizzatori si costruiscono occhiali da sole in grado di **attenuare molto più i riflessi della luce diretta**.



Cristalli Liquidi

- La **fase liquido-cristallina** si presenta in alcune sostanze a **temperatura intermedia** tra quella dello stato **solido** e quella dello stato **liquido**.
- In questo stato di aggregazione, le sostanze possiedono in parte le caratteristiche dei solidi e in parte le caratteristiche dei liquidi.
- Come i liquidi essi sono **fluidi**, ma, come i solidi, sono **anisotropi** nelle loro caratteristiche ottiche ed elettromagnetiche.



Cristalli Liquidi (II)

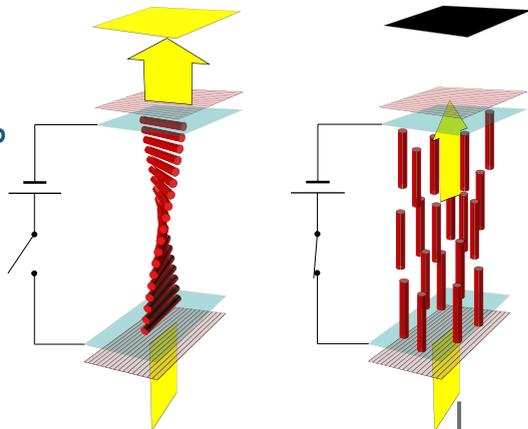
- Alcuni cristalli liquidi possiedono una **struttura chirale** (non invariante per riflessione speculare, come le chiocciole o le viti).
- Raffreddando questi cristalli liquidi, essi passano da una fase isotropa a una **fase nematica chirale**, in cui le molecole si dispongono l'una accanto all'altra con un'**orientazione lievemente sghemba**.
- Le molecole così orientate formano un'**elica** in grado di **ruotare il piano di polarizzazione** della luce incidente. Questa struttura è alla base dei display TN (**twisted nematic**).



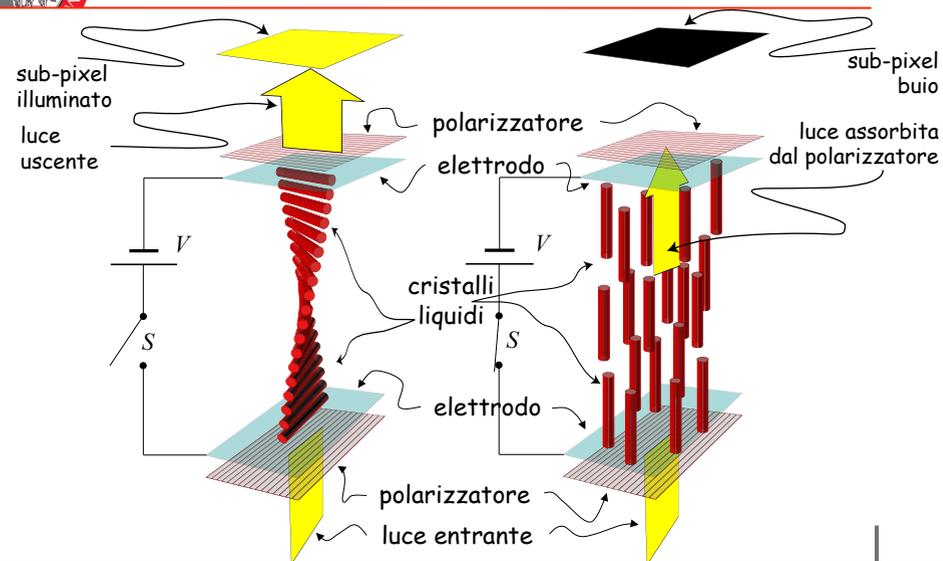
Cristalli Liquidi (III)

- Nei display TN una sostanza in fase nematica chirale è posta tra **due polarizzatori incrociati**. Tale sostanza **ruota di 90° la polarizzazione** della luce consentendole di passare attraverso i due polarizzatori.

- Applicando una **differenza di potenziale** attraverso la cella, le **molecole si allineano con il campo elettrico**, si **distrugge la struttura a elica** e la luce non può più essere trasmessa.



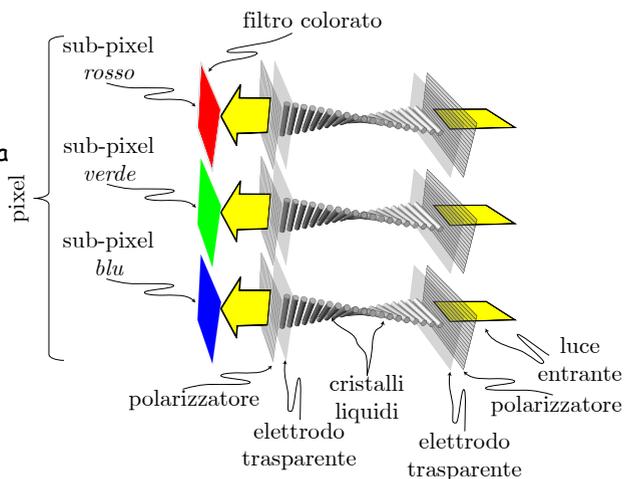
Cristalli Liquidi (IV)



Cristalli Liquidi (V)

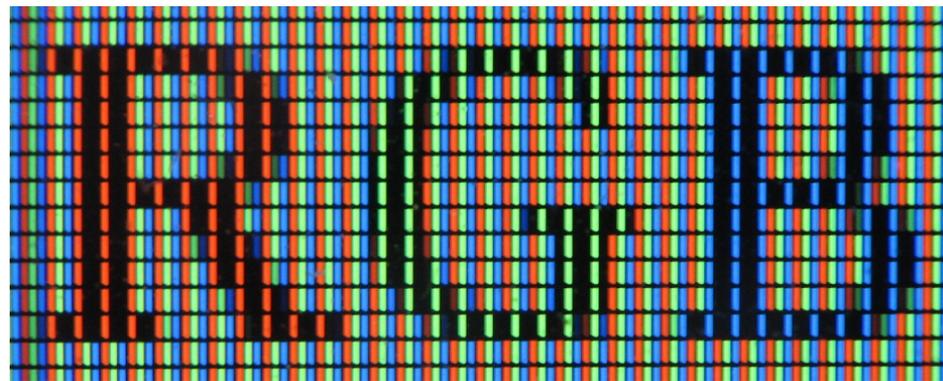
- I **pixel** degli schermi LCD sono composti da 3 **sub-pixel**:

- Ciascuno **filtrato** con i 3 colori fondamentali della sintesi additiva.



Cristalli Liquidi (VI)

- Tramite la **sintesi additiva**, con tre sub-pixel di colore **rosso, verde e blu** si riescono a riprodurre molti colori.





ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
SEDE DI FORLÌ

<http://campus.cib.unibo.it/2485/>

Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

<http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli>

<https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica>

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA - POLO SCIENTIFICO-DIDATTICO DI FORLÌ