Fisica Generale B

3. Problema Generale dell'Elettrostatica

http://campus.cib.unibo.it/2473/

Domenico Galli

March 15, 2011

L'Elettronvolt

- Abbiamo visto che l'**energia potenziale** di una carica q situata nel punto P dello spazio in cui è presente un campo elettrico è data da:

$$\mathscr{E}_q(P) = qV(P)$$

- Possiamo perciò definire un'importante e piccolissima **unità di energia**, detta **elettronvolt** (simbolo eV), molto utilizzata nella fisica atomica, nucleare e sub-nucleare
  - Definita come il **lavoro** compiuto dalla forza esercitata dal campo elettrico quando essa **sposta un elettrone** nel vuoto da una posizione a un'altra, caratterizzata, rispetto alla prima, dalla **differenza di potenziale di** $1\ \mathrm{V}$.

L'Elettronvolt (II)

- Poiché la **carica di un elettrone** è pari a:

$$q_e = 1.60217733 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

- Un **elettronvolt** sarà pari a:

$$1\,\mathrm{eV} = q_e \times 1\,\mathrm{V} \simeq 1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \times 1\,\mathrm{V} = 1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

$$1\,\mathrm{eV} \simeq 1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

- Poiché l'elettronvolt è un'unità molto piccola, se ne utilizzano spesso i **multipli**:

$$1\,\mathrm{keV} = 10^3\,\mathrm{eV} \simeq 1.60 \times 10^{-16}\ \mathrm{J}$$

$$1\,\mathrm{MeV} = 10^6\,\mathrm{eV} \simeq 1.60 \times 10^{-13}\ \mathrm{J}$$

$$1\,\mathrm{GeV} = 10^9\,\mathrm{eV} \simeq 1.60 \times 10^{-10}\ \mathrm{J}$$

$$1\,\mathrm{TeV} = 10^{12}\,\mathrm{eV} \simeq 1.60 \times 10^{-7}\ \mathrm{J}$$

Energia Elettrostatica di un Sistema di Cariche Elettriche

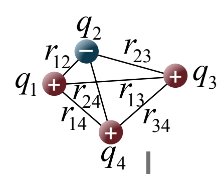
- Dato un **sistema di n cariche** q_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, situate rispettivamente nei punti P_k, detta r_{ij} la distanza tra i punti P_i e P_j, l'**energia elettrostatica** che **q_i possiede a causa della sua interazione con q_j** è data da:

$$q_i V_j(P_i) = q_i \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right)$$

- L'**energia elettrostatica totale** sarà perciò:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \right)$$

dove il fattore $\frac{1}{2}$ tiene conto del fatto che nella doppia sommatoria ogni termine compare 2 volte:

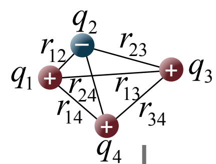


- Es.: $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_2 q_3}{r_{23}}$ e $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_3 q_2}{r_{32}}$.

Energia Elettrostatica di un Sistema di Cariche Elettriche (II)

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}\right)$$

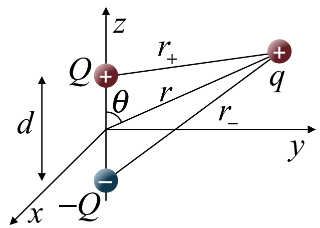
- In altre parole nella doppia sommatoria compare sia l'energia $q_i V_j(P_i)$ della carica q_i dovuta al potenziale di q_j, sia l'energia $q_j V_i(P_j)$ della carica q_j dovuta al potenziale di q_i.
- Questi 2 termini sono uguali e rappresentano la **stessa energia**, ovvero il **lavoro** necessario per **avvicinare** le cariche q_j **e** q_j, che **inizialmente** si trovano a **distanza infinita** tra loro, **fino** alla distanza r_{ij}.

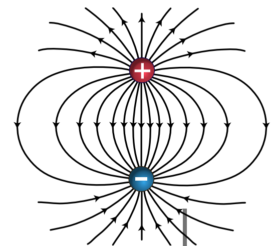


Dipolo Elettrico

- Si chiama **dipolo elettrico** il sistema formato da 2 cariche elettriche in quiete, di **uguale valore assoluto** ma **segno opposto** (Q e $-Q$), poste a una distanza fissata d.
- Calcoliamo ora il potenziale e il campo a distanza $r >> d$.
- Per il **principio di sovrapposizione**:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{r_-} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+Q}{r_+} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$





Dipolo Elettrico (II)

- Utilizzando il teorema di Carnot si ottiene:

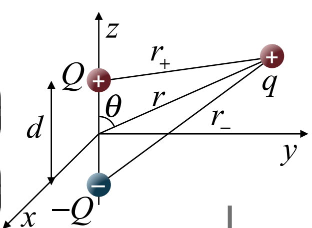
$$\begin{cases} r_- = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2r\frac{d}{2}\cos\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} + rd\cos\theta} \\ r_+ = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2r\frac{d}{2}\cos\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd\cos\theta} \end{cases}$$

e ricordando che (formula di Taylor):

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{\simeq} 1 + \frac{1}{2}x$$

Si ha:

$$\begin{cases} r_- = r\sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r}\cos\theta} \underset{d\ll r}{\simeq} r\sqrt{1 + \frac{d}{r}\cos\theta} \underset{d\ll r}{\simeq} r\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \\ r_+ = r\sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r}\cos\theta} \underset{d\ll r}{\simeq} r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta} \underset{d\ll r}{\simeq} r\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \end{cases}$$



Dipolo Elettrico (III)

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \underset{d\ll r}{\simeq} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right)} - \frac{1}{r\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right)}\right]$$

- Ricordando che (formula di Taylor):

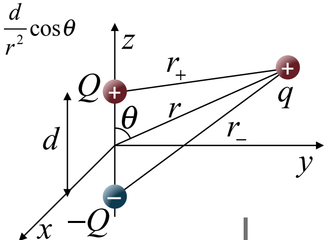
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{\simeq} 1 - x$$

Si ha:

$$V(\vec{r}) \underset{d\ll r}{\simeq} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\left(\cancel{1} + \frac{d}{2r}\cos\theta\right) - \frac{1}{r}\left(\cancel{1} - \frac{d}{2r}\cos\theta\right)\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{r^2}\cos\theta$$

- Se ora introduciamo il **momento di dipolo elettrico**, definito come:

$$\vec{p} = Q\,d\,\mathrm{vers}\left(P_+ - P_-\right)$$



Dipolo Elettrico (IV)

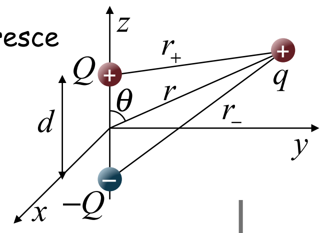
- Si ha:

$$\vec{p}\bullet\vec{r} = Q\,d\,\text{vers}\left(P_+ - P_-\right)\bullet\vec{r} = Q\,d\,r\cos\theta$$

$$V\left(\vec{r}\right) \underset{d \ll r}{\simeq} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\vec{p}\bullet\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{V\left(\vec{r}\right) \underset{d \ll r}{\simeq} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\bullet\vec{r}}{r^3}}$$

- Dunque il potenziale di un dipolo elettrico decresce con la distanza come $1/r^2$.



Dipolo Elettrico (V)

- Per calcolare il campo elettrico del dipolo scriviamo il potenziale in coordinate cartesiane e calcoliamo il gradiente:

$$V\left(x,y,z\right) \underset{d \ll r}{\simeq} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xp_x + yp_y + zp_z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$E_x\left(x,y,z\right) = -\frac{\partial V}{\partial x} \underset{d \ll r}{\simeq} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{xp_x + yp_y + zp_z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} - \left(xp_x + yp_y + zp_z\right)\frac{3}{\cancel{2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}\cancel{2}x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3x\left(xp_x + yp_y + zp_z\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} - \frac{p_x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\left(\vec{p}\bullet\vec{r}\right)x}{r^5} - \frac{p_x}{r^3}\right]$$

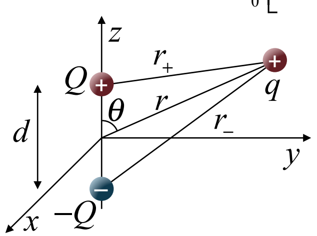
Dipolo Elettrico (VI)

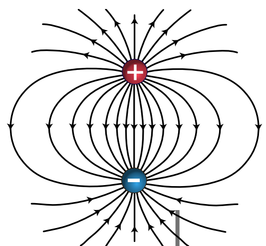
- Ripetendo il calcolo per le componenti y e z si ottiene:

$$\boxed{\vec{E}\left(x,y,z\right) \underset{d \ll r}{\simeq} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\left(\vec{p}\bullet\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right]}$$

- Il campo elettrico di un dipolo elettrico decresce con la distanza come $1/r^3$:

$$\vec{E}\left(x,y,z\right) \underset{d \ll r}{\simeq} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\left(\vec{p}\bullet\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[3\left(\vec{p}\bullet\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{p}\right]$$



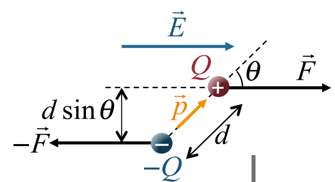


Dipolo Elettrico (VII)

- Calcoliamo ora il **momento della forza** esercitato da un **campo elettrico esterno** su di un **dipolo elettrico**.
- Trattandosi di due forze di uguale modulo QE, medesima direzione e verso opposto, le cui rette di azione distano $d\sin\theta$, si ha:

$$\mathscr{M} = Fb = \left(QE\right)\left(d\sin\theta\right) = \left(Qd\right)\left(E\sin\theta\right) = pE\sin\theta$$

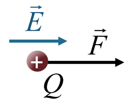
$$\boxed{\vec{\mathscr{M}} = \vec{p}\wedge\vec{E}}$$



Dipolo Elettrico (VIII)

- Calcoliamo infine l'**energia** di un **dipolo elettrico** immerso in un **campo elettrico esterno uniforme**.
- Per un campo $\vec{E}$ uniforme orientato lungo l'asse x,

$$\vec{E}(x,y,z) \equiv E\hat{\imath} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad E \equiv \text{cost}$$



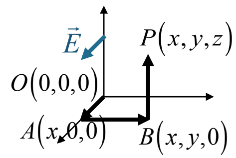
preso nell'origine lo zero del potenziale si ha:

$$V(x,y,z) = -\int_{\gamma(O,A)} E_x\,\mathrm{d}x - \int_{\gamma(A,B)} E_y\,\mathrm{d}y - \int_{\gamma(B,P)} E_z\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma(O,A)} E_x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_0^x E_x\,\mathrm{d}x = -\int_0^x E\,\mathrm{d}x = -E\int_0^x \mathrm{d}x = -Ex$$

per cui l'energia potenziale di **una carica Q** situata nel punto (x, y, z) è:

$$\mathscr{E} = QV = -QEx$$



Dipolo Elettrico (IX)

- Nel caso del **dipolo elettrico**, preso **zero** il **potenziale al centro del dipolo**, il potenziale nei punti occupati dalle 2 cariche è:

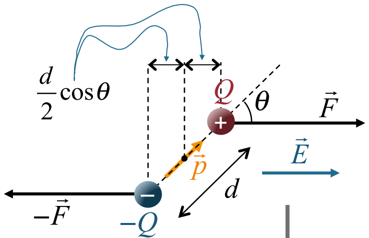
$$\begin{cases} V_+ = -E\dfrac{d}{2}\cos\theta \\ V_- = E\dfrac{d}{2}\cos\theta \end{cases}$$

- Per cui l'**energia potenziale** è:

$$\mathscr{E} = QV_+ + (-Q)V_- =$$

$$= -QE\frac{d}{2}\cos\theta - QE\frac{d}{2}\cos\theta = -QEd\cos\theta$$

$$\mathscr{E} = -\vec{p} \bullet \vec{E}$$



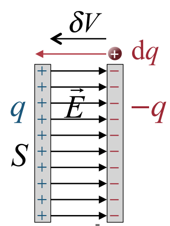
Energia Accumulata in un Condensatore Carico

- Consideriamo un **condensatore piano** con le **cariche q** e **$-q$** sulle due armature.
- Se spostiamo una **ulteriore carica $\mathrm{d}q$** dall'armatura 2 alla 1, la carica sulle due armature diviene rispettivamente **$q + \mathrm{d}q$** e **$-q - \mathrm{d}q$**.
- Per effettuare tale spostamento occorre compiere dall'esterno il lavoro:

$$đL = \mathrm{d}q\;\delta V = \mathrm{d}q\,\frac{q}{C}$$

- Per passare dalla **carica iniziale 0** alla **carica finale Q** occorre compiere il **lavoro**:

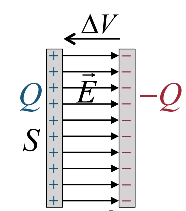
$$L = \int_0^Q đL = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,\mathrm{d}q = \frac{1}{C}\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$



Energia Accumulata in un Condensatore Carico (II)

- Tale lavoro **accumula energia** nel condensatore.
- Dunque l'**energia accumulata nel condensatore** con le cariche Q e $-Q$ sulle armature (e dunque con una differenza di potenziale $\Delta V = Q/C$ tra le armature) vale:

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C\Delta V^2$$



Condensatori come Accumulatori di Energia

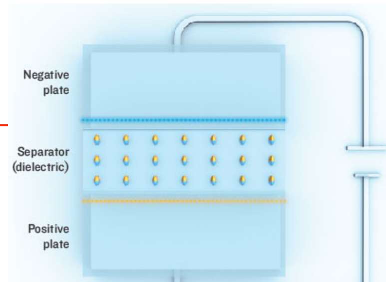
- Si può pensare di utilizzare un condensatore **al posto di una batteria** (chimica) ricaricabile?
- **Svantaggi**:
  - **Ingombro**. La densità di energia (energia per unità di volume) di un condensatore è enormemente minore di quella di una batteria.
  - **Potenziale non costante**. Mano mano che si scarica, la differenza di potenziale ai capi di un condensatore diminuisce (proporzionalmente alla carica).
- **Vantaggi**:
  - **Velocità**. Un condensatore si può caricare molto velocemente e può produrre intensità di corrente molto elevate scaricandosi.
  - **Durata**. Una batteria si esaurisce dopo alcune migliaia di cicli di carica-scarica, mentre un condensatore ha una durata teoricamente illimitata.
  - **Basse temperature**. Funzionano anche a –40° C, temperatura alla quale le normali batterie non sono in grado di operare.

Condensatori come Accumulatori di Energia (II)

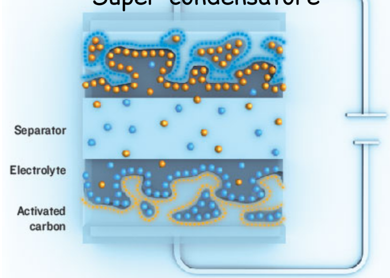
- Oggi, nuovi tipi di condensatore, di capacità molto elevata (**ultra-condensatori**, ***ultra-capacitors***) sono utilizzati come accumulatori di energia:
  - Per produrre l'energia necessaria per **mantenere integra la memoria in assenza di batteria** in computer, telefoni cellulari, ecc.
  - Come **accumulatore secondario** nelle macchine fotografiche per erogare rapidamente l'energia necessaria per il flash o per azionare il motore dello zoom, prolungando in questo modo la vita delle batterie.
- Si può pensare, in futuro, di utilizzare condensatori per alimentare **automobili elettriche**?
  - Il motore elettrico è stato ideato e costruito nella **stessa epoca** in cui è stato ideato e costruito il motore a scoppio e il motore Diesel.
  - Il motore elettrico **non ha avuto diffusione** nelle automobili per la **difficoltà dell'accumulazione** dell'energia elettrica.

Super-Condensatori

- Brevettati dalla Standard Oil nel 1966 e commercializzati dalla NEC di Tokyo (che ne acquistò il brevetto) nel 1978 (**super-capacitors**).
- Elettrodi di alluminio con rivestimento di carbonio con spessore di 100 μm.
- Il carbonio è **attaccato chimicamente** (attivazione) fino a ottenere una **struttura spugnosa** che ne aumenta enormemente la superficie (**la superficie aumenta di 100000 volte**).
- L'energia immagazzinata è il **5%** di quella di una batteria a **ioni di litio**.
- Un ultra-condensatore da **5000 F** misura **5 × 5 × 15 cm**.



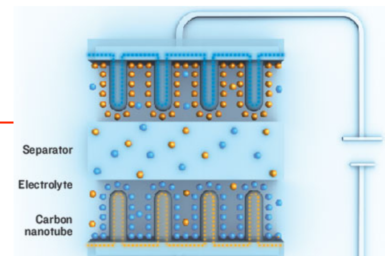
Condensatore convenzionale

Super-condensatore


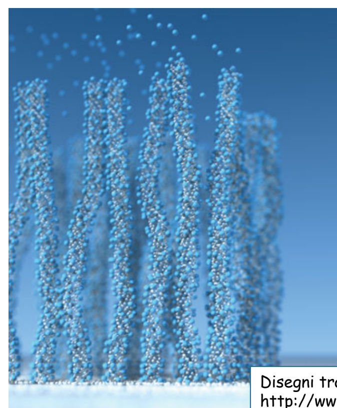
Disegni tratti dalla rivista Spectrum (novembre 2007)
http://www.spectrum.ieee.org

Ultra-Condensatori a Nano-Tubi

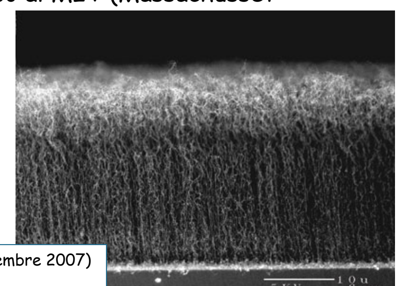
- Promettono, a parità di peso, di immagazzinare dal **25%** al **50%** di una **batteria convenzionale**.
- **Struttura a pennello**, invece che a spugna.



Ultra-condensatore



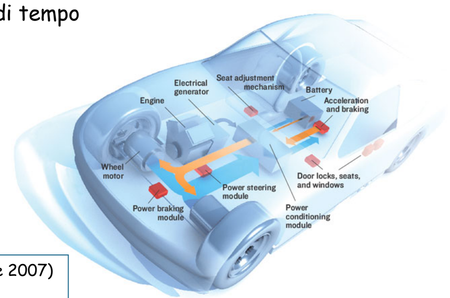
- **Nanotubi** di **diametro 5 nm** (1/10000 di capello), **lunghi 100 μm** e spaziati di 5 nm.
- In fase di sviluppo al MIT (Massachusset Institute of Technology) a Boston.



Disegni tratti dalla rivista Spectrum (novembre 2007)
http://www.spectrum.ieee.org

Prospettive degli Ultra-Condensatori nelle Automobili

- Automobili elettriche o ibride come **accumulatore primario** (in futuro).
- Automobili elettriche o ibride come **accumulatore secondario** (insieme a una batteria a ioni di litio) in tempi molto brevi:
  - Per produrre elevate intensità di corrente per brevi intervalli di tempo (**accelerazione**).
  - Per ricaricarsi rapidamente (**freni rigenerativi** in frenata o in discesa).
  - Per produrre alte correnti per intervalli di tempo limitato ad alcuni dispositivi, riducendo il diametro dei costosi cavi di rame (**aria condizionata**, **finestrini**, **blocco porte**, **freni**, ecc.).
  - Per sicurezza (**accumulo locale di energia per freni o sistemi ABS**).

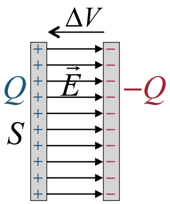


Disegno tratto dalla rivista Spectrum (novembre 2007)
http://www.spectrum.ieee.org

Densità di Energia Associata al Campo Elettrico

- Abbiamo visto che la capacità di un condensatore piano è:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{\delta}$$



- L'energia accumulata nel condensatore si può scrivere:

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \frac{S}{\delta}\right)(E\delta)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S \delta E^2$$

- Se definiamo **densità di energia** l'energia per unità di volume, nel volume del condensatore si ha:

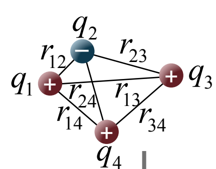
$$u_e = \frac{\mathscr{E}}{S\delta} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S \delta E^2}{S\delta} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

- **L'energia accumulata in un condensatore dipende soltanto dal suo volume e dal campo elettrico**.

Densità di Energia Associata al Campo Elettrico (II)

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

- Questa relazione **vale** non soltanto per il campo elettrico all'interno di un condensatore, ma **per tutti i campi elettrici** e suggerisce che l'**energia potenziale elettrostatica** sia **localizzata** nello **spazio in cui è presente un campo elettrico**.
- Se consideriamo per esempio un certo numero di **cariche puntiformi** soggette a forza elettrica, anche la loro **energia elettrostatica di interazione** dovrebbe essere **localizzata** nello spazio in cui è presente il **campo elettrico** da esse generato.



Localizzazione dell'Energia

- Il problema della **localizzazione dell'energia** (dove risiede l'energia?) ha una notevole rilevanza fisica.
- Fino ad ora abbiamo visto che l'**energia totale** di un sistema (estendendo il concetto di energia fino a comprendere tutte le forme di energia implicate) **si conserva sempre**, ma non abbiamo mai fatto ipotesi sulla localizzazione dell'energia.
- L'energia **potrebbe non essere localizzabile**;
  - Potrebbe **non avere senso** o **non avere interesse** domandarsi dove essa si trovi.
  - L'energia potrebbe essere soltanto una **funzione** di **altre grandezze fisiche**, priva di localizzazione fisica.
- Se **due cariche elettriche si respingono**, e a tale repulsione è associata un'energia, **ha senso** domandarsi **dove** si trovi tale energia:
  1. Nella **prima carica**;
  2. Nella **seconda carica**;
  3. Nello **spazio attorno a esse**?

Localizzazione dell'Energia (II)

- Potremmo tuttavia pensare che l'**energia si trovi da qualche parte nello spazio**:
  - Così avviene per l'**energia interna** in termodinamica: essa si trova dentro al sistema;
  - Se l'**energia interna** di un sistema aumenta o diminuisce pensiamo che una **quantità addizionale** di energia, sotto forma di lavoro o calore, **entri o esca nel sistema**.
- Se l'energia è localizzata, occorre chiedersi se la **conservazione** dell'energia sia di tipo **globale** o **locale**:
  - Se si ammette che sia **possibile** che una certa quantità di energia **scompaia in un luogo e istantaneamente riappaia in un luogo** anche molto lontano, **senza che nulla avvenga nello spazio interposto** significa che il principio di conservazione è soltanto **globale**.

Localizzazione dell'Energia (III)

- Se invece si suppone che, **quando l'energia in un dato volume cambia, debba esserci un flusso di energia entrante o uscente** da tale volume (come avviene per l'energia interna), allora il principio di conservazione è anche **locale**.
- Un principio di conservazione locale rappresenta una condizione più stringente di un principio di conservazione globale.
- I risultati della **ricerca scientifica sperimentale** mostrano che in natura **l'energia si conserva anche localmente**:
  - Si possono trovare formule che ci dicono dove è localizzata l'energia e come essa si sposta da un posto a un altro.

Localizzazione dell'Energia (IV)

- Esiste anche una **motivazione di principio** che ci impone di essere in grado di dire dove si trova l'energia:
  - Secondo la teoria della gravitazione, ogni **massa** è sorgente di **forza gravitazionale**;
  - Sappiamo anche, dalla relazione $E = mc^2$, che **massa** ed **energia** sono **equivalenti**;
  - Perciò **ogni energia è una sorgente di forza gravitazionale**.
- **Se non si potesse localizzare l'energia**:
  - Non si potrebbe **localizzare tutta** la **massa**;
  - Dunque non si sarebbe in grado di dire dove si trovano tutte le **sorgenti** del **campo gravitazionale**;
  - **La teoria della gravitazione sarebbe incompleta**.

Localizzazione dell'Energia (V)

- L'elettrostatica, di per sé, non è in grado di dire dove si trova l'energia.
- Le **equazioni di Maxwell**, nel loro insieme, come vedremo, ci danno molta più informazione.
- Il risultato, per quanto riguarda l'elettrostatica, è che **l'energia elettrostatica si trova proprio nello spazio in cui è presente il campo elettrico**.
- In conclusione, quando è presente un campo elettrico nello spazio, c'è un'energia localizzata nello spazio, la cui **densità** vale:

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Equazioni di Poisson e di Laplace

- Abbiamo visto la **legge di Gauss**:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

e la definizione del **potenziale** elettrostatico:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

- Da queste 2 relazioni troviamo che:

$$\nabla^2 V = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} V = -\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ (**equazione di Poisson**)

Equazioni di Poisson e di Laplace (II)

- In coordinate cartesiane l'equazione di Poisson si scrive:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet \left(\hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \\ &= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet \left(-\hat{\imath}E_x - \hat{\jmath}E_y - \hat{k}E_z\right) = \\ &= -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

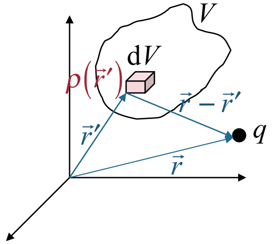
- Nelle regioni dello **spazio** in cui **non sono presenti cariche elettriche**, tipicamente nel **vuoto**, le equazioni di Poisson diventano:

$$\nabla^2 V = 0$$ (**equazione di Laplace**)

Equazioni di Poisson e di Laplace (III)

- Una **soluzione dell'equazione di Poisson**, **nota la distribuzione della densità di carica ρ**, è data da:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\left\|\vec{r} - \vec{r}\,'\right\|} \mathrm{d}V$$



o, in coordinate cartesiane:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(x',y',z')}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}} \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'$$

Equazioni di Poisson e di Laplace (IV)

- Esistono però situazioni in cui sono presenti **conduttori**:
  - Dunque **non è nota a priori la distribuzione della carica**;
  - Una parte di essa è **libera** e si dispone in modo da annullare il campo all'interno del conduttore;
  - Tuttavia sono **note** le **posizioni nello spazio dei conduttori** e i **loro potenziali**.
- In tal caso occorre risolvere l'**equazione di Laplace** con le **condizioni al contorno** note (**problema di Dirichlet**).

Equazioni di Poisson e di Laplace (V)

- Esistono infine situazioni in cui sono **note**:
  - Le **posizioni** nello spazio dei **conduttori**;
  - Il **campo elettrico** in **prossimità** delle **superfici** di tali **conduttori**.
- Anche in questo caso occorre risolvere l'**equazione di Laplace** con le **condizioni al contorno** note (**problema di Neumann**).

Il Problema Generale dell'Elettrostatica

- Nel caso più generale, si deve determinare il potenziale elettrico in tutto lo spazio, noti (**problema generale dell'elettrostatica**):
  - I **potenziali** di m **conduttori**;
  - I **campi elettrici** in **prossimità** delle **superfici** dei rimanenti n **conduttori**.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
SEDE DI FORLÌ

http://campus.cib.unibo.it/2473/

Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli

https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica