

2. Elettrostatica dei Conduttori Metallici

<http://campus.cib.unibo.it/2470/>

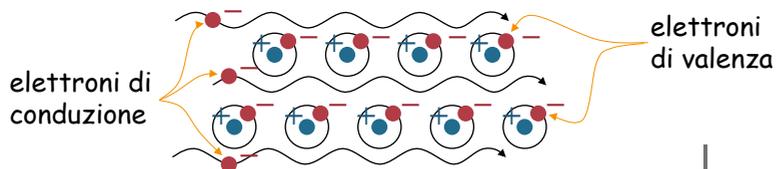
March 4, 2011

Conduttori

- In un **conduttore**, una parte delle particelle cariche (gli **elettroni di conduzione**, carichi negativamente, nel caso dei metalli) sono **liberi di muoversi** per tutto il corpo **come un gas**.
- In **condizioni statiche** (assenza di movimento) la **forza elettrica**, e con essa il **campo elettrico** debbono essere **nulli in tutto il conduttore**:

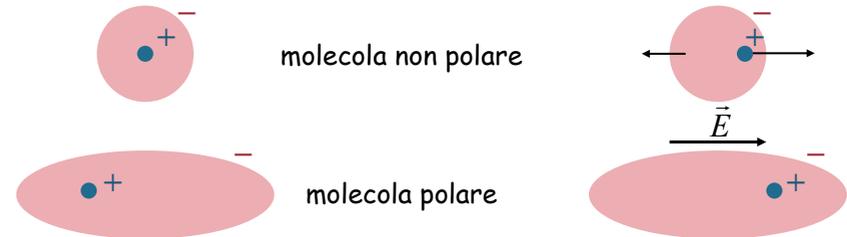
- Altrimenti gli elettroni di conduzione, non vincolati e soggetti a una forza, **si metterebbero in movimento**.

$$\vec{E} = \vec{0} \quad (\text{all'interno del conduttore})$$



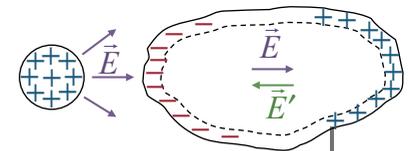
Isolanti o Dielettrici

- In un **isolante** (detto anche **dielettrico**), le cariche elettriche in dotazione a una molecola sono vincolate a muoversi soltanto all'interno della molecola.
- Un **campo elettrico** esterno **non produce un movimento di cariche**, se non su piccola scala (**polarizzazione**) dovuto a una deformazione delle molecole o a un orientamento delle molecole.



Induzione Elettrostatica

- Se un **corpo carico** viene **avvicinato a un conduttore** neutro, su quest'ultimo si formano delle cariche, dette **cariche indotte**.
- Il meccanismo è il seguente:
 - Il campo elettrico E generato dal corpo carico è presente **anche all'interno** del conduttore.
 - Tale campo **muove le cariche libere** del conduttore **addensandole** sulla superficie alle 2 estremità.
 - L'**addensamento** di tali cariche crea un **campo elettrico E'** , con verso **opposto a E** .
 - Il **movimento cessa** quando $\vec{E}_{tot} = \vec{E} + \vec{E}' = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}' = -\vec{E}$.
 - Il **campo elettrico**, **all'interno** del conduttore, rimane **nullo**.



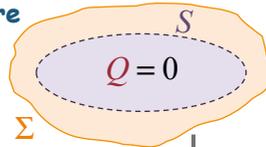
Carica Interna a un Conduttore

- Presa una **superficie chiusa arbitraria S interna al conduttore**, il campo elettrico deve essere perciò **nullo** su tutta la superficie S .
- Segue che il **flusso** del campo elettrico attraverso la superficie S è **nullo**, e, per la **legge di Gauss**, che la **carica** elettrica totale Q all'interno della superficie S arbitraria, **interna** al corpo, è **nulla**:

$$\vec{E}(P) = \vec{0} \quad \forall P \in S \Rightarrow \phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = 0 \Rightarrow$$

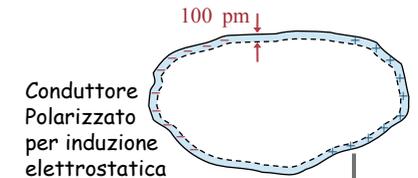
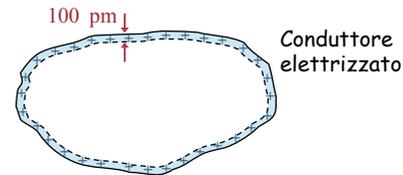
$$\Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V(S)} \rho \, dV = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow Q = 0$$

- **All'interno di un conduttore non vi possono essere cariche in eccesso** (la densità di cariche positive è uguale alla densità di cariche negative).



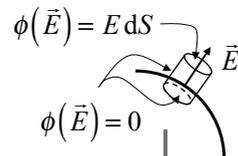
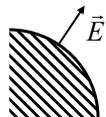
Carica Superficiale di un Conduttore

- **Sulla superficie del conduttore** (per uno spessore di circa 10^{-10} m, dell'ordine delle dimensioni atomiche) **possono invece esserci cariche in eccesso**.
- Questo accade:
 - Se il conduttore è **elettrizzato** (complessivamente carico);
 - Se il conduttore è **polarizzato** per induzione elettrostatica (complessivamente neutro).
- **Nei conduttori le cariche si dispongono in superficie**, in modo che **all'interno del conduttore il campo elettrico sia nullo** (e il **potenziale elettrico sia uniforme**).



Campo Elettrico in Prossimità della Superficie dei Conduttori

- Nei conduttori, all'equilibrio, le cariche si distribuiscono sulla superficie.
- Il campo elettrico generato da tali cariche **non può avere componenti tangenti alla superficie**, altrimenti le cariche, essendo libere, si muoverebbero (e dunque non si tratterebbe di uno stato di equilibrio).
- Dunque **il campo elettrico è normale alla superficie dei conduttori**.
- Considerando il cilindretto in figura, i flussi del campo elettrico attraverso la base interna e la superficie laterale sono nulli.



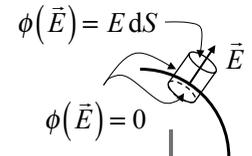
Campo Elettrico in Prossimità della Superficie dei Conduttori (II)

- Il flusso attraverso la base esterna è invece:

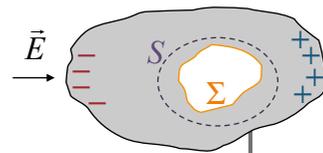
$$d\phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = E \, dS$$
- La carica totale contenuta nel cilindretto, detta σ la densità di carica, è:

$$dQ = \sigma \, dS$$
- Per la legge di Gauss:

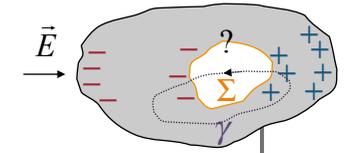
$$E \, dS = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \, dS \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$



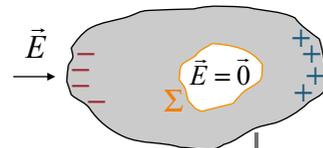
- Consideriamo un **conduttore cavo**, immerso in un campo elettrico. Ci domandiamo se, in conseguenza a un campo elettrico **esterno** E , possano accumularsi cariche elettriche sulla superficie Σ della **cavità**.
- Consideriamo una **superficie chiusa** S tutta interna al conduttore, che includa la cavità.
- Poiché il campo elettrico è **nullo** su **tutta la superficie** S , si ha che su S è nullo il flusso del campo elettrico, e dunque, per la **legge di Gauss**, la carica totale contenuta in S è nulla.
- Poiché la superficie S è arbitraria, segue che è **nulla** pure la **carica totale sulla superficie** Σ .



- Quanto detto **non escluderebbe** l'addensamento di cariche di segno opposto sulla superficie Σ (stabilisce soltanto che la **carica totale** sulla superficie Σ è nulla).
- Tuttavia, se ciò fosse vero, sarebbe presente un campo elettrico nella cavità, con linee di forza che vanno dalle cariche positive a quelle negative.
- La **circuitalità** di E sulla linea γ sarebbe la **somma** del contributo della parte della linea che si trova **nella cavità (maggiore di zero)** e del contributo della parte della linea che si trova **nel conduttore (nullo)**. Nel **complesso** la circuitalità sarebbe **positiva contraddicendo** il fatto che il campo E è **conservativo**.

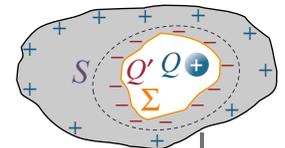


- Dunque sulla superficie Σ non vi sono cariche e il campo elettrico all'interno della cavità è nullo.
- Se un **conduttore** dotato di **cavità** viene esposto a un **campo elettrico esterno**, il **campo elettrico all'interno della cavità** è comunque **nullo** e **non** vi sono **cariche elettriche indotte** sulla **superficie della cavità stessa**.
- In altre parole il conduttore **scherma** l'interno della cavità dai campi elettrici all'esterno (**gabbia di Faraday**).



- Consideriamo una **carica elettrica** Q all'interno della **cavità di un conduttore**. Per **induzione elettrostatica** sulla superficie Σ della cavità si addensano cariche elettriche di segno opposto a Q .
- Consideriamo una superficie chiusa S tutta interna al conduttore, che includa la cavità.
- Poiché il campo elettrico è nullo su tutta la superficie S , si ha che su S è nullo il flusso del campo elettrico, e dunque, per la legge di Gauss, la **carica totale contenuta in** S **è nulla**.
- Dunque **sulla superficie** Σ **della cavità deve essere presente una carica indotta pari a** $-Q$.

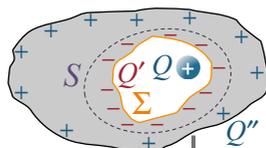
$$Q + Q' = 0 \Rightarrow Q' = -Q$$



Induzione Completa (II)

- In questo caso tutte le linee di forza del campo prodotto dalla carica Q incontrano la superficie del corpo indotto (**induzione completa**).
- Sulla superficie esterna del conduttore dotato di cavità, **essendo il conduttore neutro**, sarà presente una carica $Q'' = -Q' = Q$.

$$Q' + Q'' = 0 \Rightarrow Q'' = -Q' = Q$$
- Un **conduttore cavo** trasferisce sulla propria **superficie esterna** una **carica uguale** al valore complessivo delle **cariche** contenute all'interno della **cavità**.

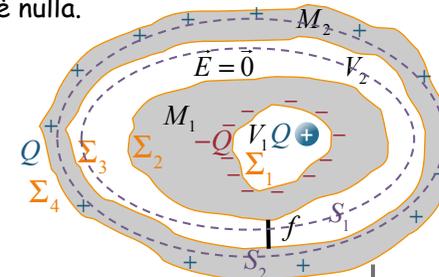


Significato della Messa a Terra

- Consideriamo ora **2 conduttori cavi** M_1 e M_2 posti **uno entro l'altro** e connessi tra loro mediante un **cavo conduttore** f (**cavo di terra**). Supponiamo che **nella cavità** V_1 venga posta una **carica elettrica** Q .
- Sulla superficie Σ_1 sarà presente, come abbiamo visto, la carica indotta $Q_1 = -Q$.
- Sulla superficie S_2 , interamente contenuta in M_2 , il flusso di E è nullo. Segue che la carica totale entro S_2 è nulla.

$$Q + \underbrace{Q_1}_{-Q} + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$\Rightarrow Q_2 + Q_3 = 0$$



Significato della Messa a Terra (II)

- Se Q_2 e Q_3 non fossero entrambe nulle, essendo Σ_2 e Σ_3 collegate con il cavo f , ci sarebbe una corrente elettrica lungo f . In condizioni stazionarie si avrà perciò:

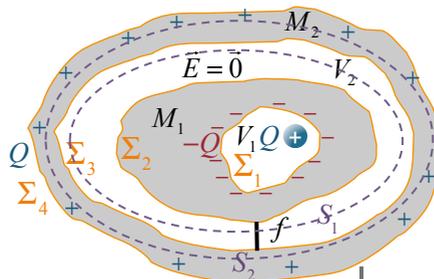
$$Q_2 = Q_3 = 0$$

- La carica totale contenuta entro la superficie S_1 (arbitraria, contenuta in V_2) è:

$$Q + \underbrace{Q_1}_{-Q} + \underbrace{Q_2}_0 = 0$$

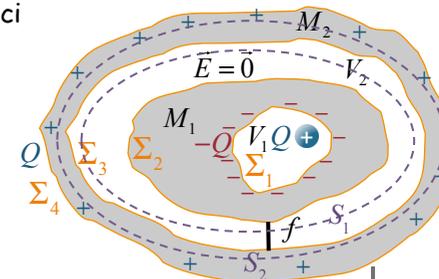
- Segue che **nel volume** V_2 :

$$\vec{E} = \vec{0}$$



Significato della Messa a Terra (III)

- Si dice che l'involucro metallico M_1 è **posto a terra**.
- Se M_1 è un elettrodomestico e M_2 sono i muri di casa, mettendo a terra l'elettrodomestico si ha che il campo elettrico entro casa e fuori dall'elettrodomestico è sempre nullo, indipendentemente da quello che accade dentro l'elettrodomestico.
- Un **involucro metallico** M_1 , **posto a terra**, **scherma l'esterno dell'involucro** dai campi elettrostatici esistenti nel suo interno.



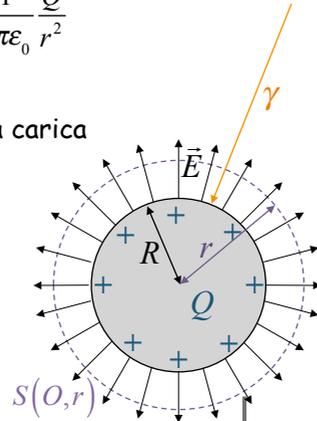
Potenziale di una Sfera Conduttrice Carica

- Considerando una superficie sferica concentrica con la sfera conduttrice, ma di raggio $r > R$, dalla legge di Gauss si ha:

$$\int_{S(O,r)} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

- Calcoliamo il lavoro necessario per portare una carica unitaria $q = 1$ dall'infinito alla superficie della sfera di raggio R , utilizzando un percorso radiale γ e scegliendo $V(\infty) = 0$.

$$V = - \int_{\gamma(\infty,R)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{n} \cdot d\vec{P} = - \int_{\infty}^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr$$

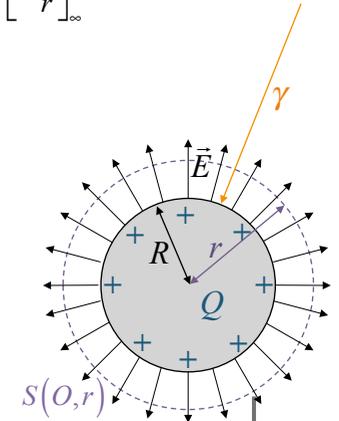


Potenziale di una Sfera Conduttrice Carica (II)

- Pertanto il potenziale sarà:

$$V = - \int_{\infty}^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(\frac{1}{R} - 0 \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$



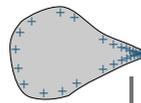
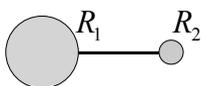
Il Potere delle Punte

- La **carica in eccesso** sulla **superficie** di un **conduttore** tende ad **addensarsi** nei **punti di massima curvatura** della superficie, e in particolare sulle **punte**.
- Consideriamo infatti 2 sfere, di raggio diverso R_1 e R_2 , collegate fra loro da un conduttore filiforme. Il potenziale delle 2 sfere è il medesimo. Avremo perciò:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R_1^2 \sigma_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R_2^2 \sigma_2}{R_2}$$

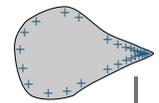
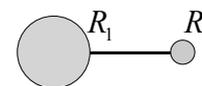
- La **densità di carica** in **eccesso** sulla superficie di un conduttore è **inversamente proporzionale** al **raggio di curvatura**.

$$R_1 \sigma_1 = R_2 \sigma_2$$



Il Potere delle Punte (II)

- Consideriamo ora un corpo di **forma irregolare**, con **raggio di curvatura** che **varia da punto a punto** della superficie.
- Poiché la densità di carica è inversamente proporzionale al raggio di curvatura, si ha che le **cariche si addensano** laddove il **raggio di curvatura è minore**, ovvero nelle **punte**.



Capacità di un Conduttore

- Dato un **conduttore** isolato nello spazio, il suo **potenziale elettrostatico** risulta **proporzionale** alla **carica** presente sul conduttore stesso.
- L'inverso della costante di proporzionalità viene chiamata **capacità** del conduttore nel vuoto ed è una costante caratteristica della sua forma geometrica e delle sue dimensioni.

$$Q = CV$$

- Nel **Sistema Internazionale** la capacità si misura in **Farad (F)**, ovvero in **C/V** (Coulomb/Volt) e le sue dimensioni sono:

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{[IT]}{[ML^2T^{-3}I^{-1}]} = [M^{-1}L^2T^4I^2]$$

Capacità di un Conduttore (III)

- Se consideriamo una **sfera conduttrice di raggio $R = 1$ m**, la sua capacità sarà:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = 4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1 \text{ F} = 1.11 \times 10^{-10} \text{ F} = 111 \text{ pF}$$

- Il **Globo Terrestre** (raggio $R = 6.4 \times 10^6$ m) ha una capacità pari a:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = 4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6.4 \times 10^6 \text{ F} = 712 \text{ }\mu\text{F}$$

e dunque minore di un mF (milliFarad).

Capacità di un Conduttore (II)

- Si osservi per inciso che, definito il Farad, la costante dielettrica del vuoto si scrive:

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

- Calcoliamo ora la **capacità di un conduttore sferico**. Come abbiamo visto, se Q è la carica del conduttore, il suo potenziale è:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

- Segue che:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

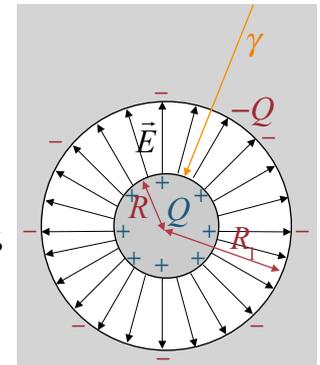
$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (\text{conduttore sferico})$$



Capacità di un Conduttore all'Interno di una Cavità

- Se a un conduttore **si avvicina un altro conduttore** neutro e isolato, **aumenta la capacità del primo conduttore**.
- Calcoliamo la **capacità di una sfera racchiusa nella cavità sferica di un conduttore** (con le due superfici sferiche concentriche):

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\gamma(\infty, R)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{n} \cdot d\vec{P} = \\ &= - \int_{\gamma(\infty, R_1)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{n} \cdot d\vec{P} - \int_{\gamma(R_1, R)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{n} \cdot d\vec{P} = \\ &= -0 - \int_{\gamma(R_1, R)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{n} \cdot d\vec{P} = - \int_{\gamma(R_1, R)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{n} \cdot d\vec{P} \end{aligned}$$



Capacità di un Conduttore all'Interno di una Cavità (II)

- La **capacità** di una **sfera racchiusa nella cavità sferica di un conduttore** (con le due superfici sferiche concentriche) vale dunque:

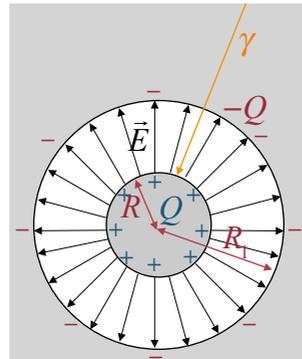
$$V = \int_{\gamma(R_1, R)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{n} \cdot d\vec{P} = - \int_{R_1}^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr =$$

$$= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right) < \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = V_{\text{sfera}}$$

- Si ha infine:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}} > 4\pi\epsilon_0 R = C_{\text{sfera}}$$



Capacità di un Conduttore all'Interno di una Cavità (III)

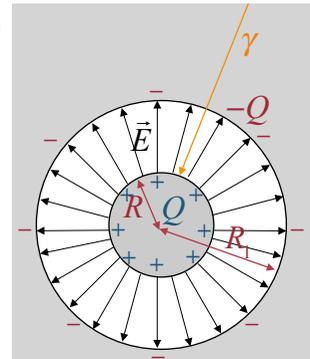
- Se, per esempio, $R = 1 \text{ m}$ e $R_1 = 2 \text{ m}$, si ha:

$$C = \frac{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}}{1 - 0.5} \text{ F} = 2.22 \times 10^{-10} \text{ F} = 222 \text{ pF}$$

il doppio della capacità di una sfera isolata di raggio R .

- Grandi capacità** elettrostatiche consentono di **accumulare** una **grande carica elettrica** (e, come vedremo, una **grande energia**) **senza** bisogno di **grandi differenze di potenziale** (che possono innescare scariche elettriche).

- Per ottenere **grandi capacità** si è pertanto pensato di utilizzare dispositivi costituiti di **2 conduttori**.



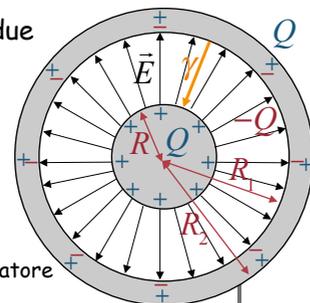
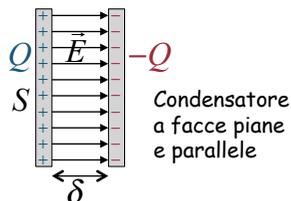
Condensatori

- Un sistema costituito di **due conduttori**, fra i quali vi sia **induzione completa** (tutte le linee di forza uscenti da un conduttore incontrano l'altro conduttore) si dice **condensatore**.

- Si definisce **capacità del condensatore** il rapporto:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

tra la carica (presente con segno opposto sui due conduttori) e la differenza dei potenziali dei due conduttori.

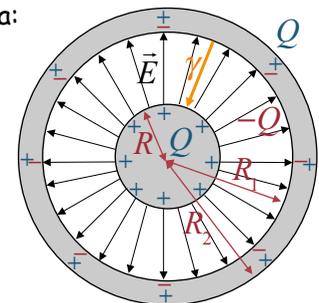


Condensatore Sferico

- Un **condensatore sferico** è costituito di una **sfera racchiusa nella cavità sferica di un conduttore sferico**. Si ha:

$$\Delta V = - \int_{\gamma(R_1, R)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{n} \cdot d\vec{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}}$$



- Se lo spessore $\delta = R_1 - R$ è molto piccolo rispetto a R , si ha:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R + \delta} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R \left(1 + \frac{\delta}{R} \right)} \stackrel{\delta \rightarrow 0}{\cong} \frac{1}{R} - \frac{\left(1 - \frac{\delta}{R} \right)}{R} = \frac{\delta}{R^2}$$

Condensatore Sferico (II)

Dunque:

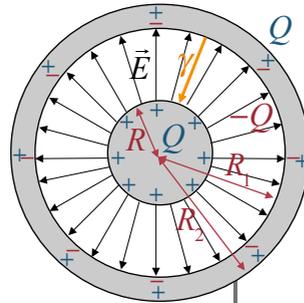
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}} \cong 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{\delta} = \epsilon_0 \frac{S}{\delta}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{\delta} \quad (\text{condensatore sferico})$$

I due conduttori vengono detti **armature**.

Se, per esempio, $R = 1$ m e $\delta = 1$ cm, si ha:

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{\delta} = 8.85 \times 10^{-12} \times \frac{4\pi \times 1^2}{10^{-2}} \text{ F} = 1.11 \times 10^{-8} \text{ F} = 11 \text{ nF}$$



Condensatore Piano

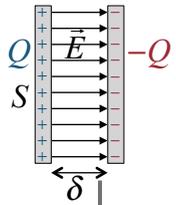
Un **condensatore piano** (più precisamente un condensatore a **facce piane e parallele**) costituito da due piani conduttori (**armature**) tra loro parallele e a piccola distanza δ .

Per quanto abbiamo visto, il campo elettrico in un condensatore piano è uniforme e vale la somma dei campi elettrici generati dalle 2 armature:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

Si ha perciò:

$$\Delta V = -\int_{\gamma} \vec{E} \cdot dP = -\int_{\delta} \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\delta\sigma}{\epsilon_0}$$

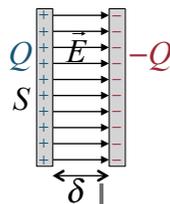


Condensatore Piano (II)

La capacità del condensatore piano sarà pertanto data da:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q\epsilon_0}{\delta\sigma} = \frac{Q\epsilon_0}{\delta \frac{Q}{S}} = \epsilon_0 \frac{S}{\delta}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{\delta} \quad (\text{condensatore piano})$$



Collegamento in Parallelo di Due o Più Condensatori

Collegando in parallelo 2 condensatori, avremo la medesima differenza di potenziale ΔV fra le armature dei due condensatori:

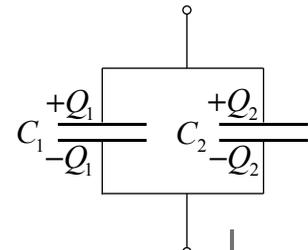
$$Q_1 = C_1 \Delta V$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V$$

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \Delta V \\ Q = C_{\text{tot}} \Delta V \end{cases}$$

$$C_{\text{tot}} = C_1 + C_2$$

La **capacità del sistema formato da due o più condensatori collegati in parallelo** è uguale alla **somma delle singole capacità**.

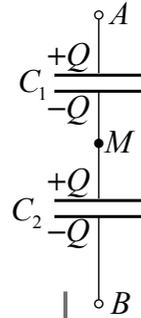




Collegamento in Serie di Due o Più Condensatori

- Poiché l'armatura inferiore di C_1 e l'armatura superiore di C_2 sono parte dello stesso conduttore isolato e neutro, essi avranno cariche opposte.
- Debbono essere opposte tra loro anche le cariche sulle due armature di C_1 e le cariche sulle due armature di C_2 .
- Dunque deve essere:

$$\begin{cases} V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_B) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \\ V_A - V_B = \frac{Q}{C_{\text{tot}}} \end{cases}$$

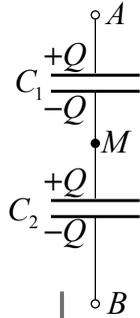


Collegamento in Serie di Due o Più Condensatori (II)

$$\frac{1}{C_{\text{tot}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_{\text{tot}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

- L'inverso della capacità del sistema formato da due o più condensatori collegati in serie è uguale alla somma degli inversi delle singole capacità.



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
SEDE DI FORLÌ

<http://campus.cib.unibo.it/2470/>

Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

<http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli>

<https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica>