Fisica Generale A

10. Terzo Principio della Dinamica

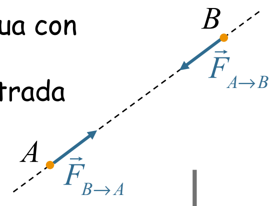
http://campus.cib.unibo.it/2430/

Domenico Galli

October 21, 2010

Principio di Azione e Reazione

- **Ogni volta che il corpo A esercita una forza sul corpo B, il corpo B esercita una forza sul corpo A**:
  - **Vettorialmente opposta**:
    - Stessa intensità (norma);
    - Stessa direzione;
    - Verso opposto.
  - Con la **stessa retta di azione**.
- **Principio di azione e reazione** o **terzo principio**.
- Esempi:
  - Rinculo di una pistola.
  - Barca a remi (si muove spingendo indietro l'acqua con i remi).
  - Autoveicoli (si muovono spingendo indietro la strada mediante la forza di attrito).
  - Aerei (si muovono spingendo indietro l'aria).



Principio di Azione e Reazione (II)

- Le forze tra i corpi sono **interazioni** che si presentano sempre **a coppie**:
  - Non esistono forze "unidirezionali".
- Due forze accoppiate per il III principio ("azione" e "reazione"):
  - Sono sempre forze dello **stesso tipo**;
    - Sono entrambe forze gravitazionali, oppure entrambe forze di attrito, ecc.
  - Si esercitano sempre su **corpi diversi**;
  - Per questo motivo **non si equilibrano** l'una con l'altra:
    - Si possono equilibrare tra loro soltanto due forze applicate allo stesso corpo.
- Se l'"**azione**" è la forza di gravità che la Terra esercita sul pallone, la "**reazione**" è la forza di gravità che il pallone esercita sulla Terra:
  - Non la forza che la mano esercita sul pallone!

Principio di Azione e Reazione (III)

- Sebbene azione e reazione abbiano la stessa intensità **non è detto che le 2 accelerazioni siano uguali** in norma:
  - Il corpo di massa maggiore ha un'accelerazione minore, per il II principio.
  - L'accelerazione di un pallone in caduta libera verso la Terra è assai minore dell'accelerazione della Terra verso il pallone
- Il III principio **non vale per le forze inerziali**:
  - Verso quale corpo dovrebbe essere esercitata la reazione?

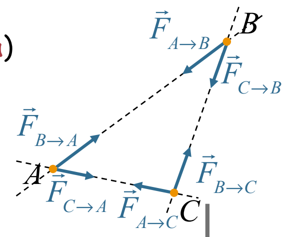
Forze Interne

- **Forze interne**: forze di interazione esercitate da una parte del sistema meccanico in studio su di un'altra parte dello stesso sistema.
- Per il **principio di azione e reazione** esse sono a due a due opposte, con la medesima retta d'azione.
- Costituiscono, a due a due, **coppie di braccio nullo**. Segue che:

$$\begin{cases} \vec{\mathscr{R}}_{(i)} = \vec{0} \\ \vec{\mathscr{M}}_{(i)}^{(O)} = \vec{0} \quad \forall O \end{cases}$$

(**III Principio della Dinamica**)

- Questa è una diversa formulazione del III principio della dinamica (oltre al principio di azione e reazione).



Forze Interne (II)

- Quanto detto **non vale per le forze esterne**.
  - Alcune forze esterne possono essere di origine inerziale.
  - Si considerano le forze che corpi esterni esercitano sul nostro sistema ma **non** le forze che il nostro sistema esercita sui corpi esterni.
- Se la risultante e il momento risultante delle forze esterne sono entrambi nulli, si dice che il **sistema isolato**:

$$\begin{cases} \vec{\mathscr{R}}_{(e)} = \vec{0} \\ \vec{\mathscr{M}}_{(e)}^{(O)} = \vec{0} \quad \forall O \end{cases} \Leftrightarrow \quad \textbf{sistema isolato}$$

- Non sempre, tuttavia, i sistemi sono isolati.

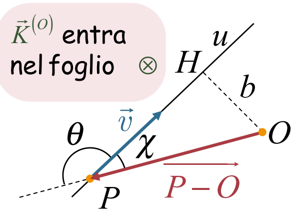
Equazioni Cardinali della Dinamica

- Partendo dalla definizione di **Quantità di Moto** e di **Momento Angolare** (o **Momento della Quantità di Moto**):

$$\begin{cases} \vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i & \textbf{Quantità di Moto} \\ \vec{K}^{(O)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) \wedge m_i \vec{v}_i & \textbf{Momento Angolare o Momento della Quantità di Moto} \end{cases}$$

derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \\ \dot{\vec{K}}^{(O)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{v}_i - \vec{v}_O\right) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) \wedge m_i \vec{a}_i \end{cases}$$



dove v_O è la velocità del centro di riduzione.

Equazioni Cardinali della Dinamica (II)

- Sfruttando il II principio della dinamica si ha:

$$\begin{cases} \dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{\mathscr{R}} \\ \dot{\vec{K}}^{(O)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{v}_i - \vec{v}_O\right) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) \wedge m_i \vec{a}_i = \\ = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i}_{\vec{0}} - \vec{v}_O \wedge \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) \wedge m_i \vec{a}_i = \\ = -\vec{v}_O \wedge \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) \wedge \vec{F}_i = \\ = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + \vec{\mathscr{M}}^{(O)} \end{cases}$$

Equazioni Cardinali della Dinamica (III)

- Separando le forze esterne dalle forze interne:

$$\begin{cases} \dot{\vec{Q}} = \cancel{\vec{\mathscr{R}}_{(i)}} + \vec{\mathscr{R}}_{(e)} = \vec{\mathscr{R}}_{(e)} \\ \dot{\vec{K}}^{(O)} = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + \cancel{\vec{\mathscr{M}}_{(i)}^{(O)}} + \vec{\mathscr{M}}_{(e)}^{(O)} = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + \vec{\mathscr{M}}_{(e)}^{(O)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{Q}} = \vec{\mathscr{R}}_{(e)} \\ \dot{\vec{K}}^{(O)} = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + \vec{\mathscr{M}}_{(e)}^{(O)} \end{cases}$$

(**Equazioni Cardinali della Dinamica**)

- Scelto un centro di riduzione **fisso** o in **moto** con **velocità parallela a $\vec{Q}$**, la seconda diviene:

$$\dot{\vec{K}}^{(O)} = \vec{\mathscr{M}}_{(e)}^{(O)}$$

(**centro di riduzione fisso o in moto con velocità parallela a $\vec{Q}$**)

Principi di Conservazione della Quantità di Moto e del Momento Angolare

- Se la **risultante** delle forze **esterne** è **nulla**, si **conserva** (cioè rimane costante nel tempo) la **quantità di moto**:

$$\vec{\mathscr{R}}_{(e)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{Q} \equiv \text{cost}$$

(**principio di conservazione della quantità di moto**)

- Se il **momento risultante** delle forze **esterne** rispetto a un **centro di riduzione O** (**fisso**) è **nullo**, si **conserva** il **momento angolare rispetto a O**:

$$\vec{\mathscr{M}}_{(e)}^{(O)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{K}^{(O)} \equiv \text{cost}$$

(**principio di conservazione del momento angolare**)

- Se il **sistema è isolato** si **conservano** sia la **quantità di moto**, sia il **momento angolare**:

$$\begin{cases} \vec{\mathscr{R}}_{(e)} = \vec{0} \\ \vec{\mathscr{M}}_{(e)} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{Q} \equiv \text{cost} \\ \vec{K} \equiv \text{cost} \end{cases}$$

Centro di Massa

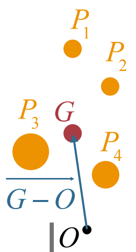
- Dato un sistema meccanico costituito da n punti materiali di posizione P_i e massa m_i, si chiama **Centro di Massa** del sistema il punto G definito da:

$$\overrightarrow{G-O} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) \qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i = \text{massa totale}$$

- Se il sistema è un **continuo** di massa totale M, volume V e densità $\rho(P)$ funzione della posizione, la posizione del centro di massa si scrive, essendo $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$:

$$\overrightarrow{G-O} = \frac{1}{M}\iiint_V \left(\overrightarrow{P-O}\right)\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\iiint_V \rho(P)\left(\overrightarrow{P-O}\right)\mathrm{d}V$$

$$M = \iiint_V \mathrm{d}m = \iiint_V \rho(P)\,\mathrm{d}V = \text{massa totale}$$



Centro di Massa (II)

- In coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \\ y_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \\ z_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \end{cases} \qquad \begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint_V \rho(x,y,z)\, x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ y_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint_V \rho(x,y,z)\, y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ z_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint_V \rho(x,y,z)\, z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{cases}$$

- Il centro di massa è la **media pesata** delle coordinate, dove la massa (la densità) svolge il ruolo di peso statistico

Centro di Massa e Centro di Gravità

- Se il sistema **non è spazialmente troppo esteso** ($\vec{g}$ è **uniforme** su tutto il sistema), allora il **centro di massa coincide** con il **centro di gravità** (o baricentro).
- Infatti il centro di gravità B è il punto di applicazione della risultante delle forze di gravità agenti sulle parti del sistema e, se esse sono parallele, si ha, come abbiamo visto:

$$\overrightarrow{B-O} = \frac{1}{\mathscr{R}}\sum_{i=1}^{n} F_i\left(\overrightarrow{P_i-O}\right) = \frac{1}{Mg}\sum_{i=1}^{n} m_i\, g\left(\overrightarrow{P_i-O}\right) =$$
$$= \frac{1}{Mg}\, g \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{P_i-O}\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{P_i-O}\right) = \overrightarrow{G-O}$$

Proprietà del Centro di Massa

- Dalla definizione di centro di massa:

$$\overrightarrow{G-O} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{P_i-O}\right)$$

derivando rispetto al tempo, con O fisso, si ha:

$$\vec{v}_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{Q}}{M}$$

$$\vec{Q} = M\,\vec{v}_G$$

- La **quantità di moto** di un sistema meccanico qualsiasi è sempre uguale al prodotto della **massa totale** per la **velocità del centro di massa**.

Proprietà del Centro di Massa (II)

- Scegliendo il **centro di massa come centro di riduzione**, poiché:

$$\vec{Q} = M\,\vec{v}_G \quad\Rightarrow\quad \vec{v}_G \parallel \vec{Q} \quad\Rightarrow\quad \vec{v}_G \wedge \vec{Q} = \vec{0}$$

la **seconda equazione cardinale della dinamica** si scrive:

$$\dot{\vec{K}}^{(G)} = -\vec{v}_G \wedge \vec{Q} + \vec{\mathscr{M}}_{(e)}^{(G)} = \vec{\mathscr{M}}_{(e)}^{(G)}$$

- Nei problemi, se non c'è un asse di rotazione fisso (vincolo) **spesso conviene valutare i momenti rispetto a G**.

Proprietà del Centro di Massa (III)

- Dal precedente risultato:

$$\vec{Q} = M\,\vec{v}_G$$

derivando rispetto al tempo, si ha:

$$\dot{\vec{Q}} = M\,\vec{a}_G$$

- Per la I equazione cardinale della dinamica si ha anche:

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{\mathscr{R}}^{(e)}$$

dunque, in conclusione:

$$\vec{\mathscr{R}}^{(e)} = M\,\vec{a}_G$$ (**Teorema del Moto del Centro di Massa**)

- Il centro di massa di un sistema meccanico si muove **come se fosse un punto materiale** con la massa dell'intero sistema, sottoposto a tutte le forze **esterne** che agiscono sul sistema.

Proprietà del Centro di Massa (IV)

- Il concetto di **punto materiale** è applicabile a **qualunque corpo**, purché ci si limiti a studiare il **moto del centro di massa**.
- Nella studio della dinamica dei sistemi, le considerazioni nuove riguardano la II equazione cardinale, perché per la I si possono ripetere le considerazioni fatte per il punto materiale, per esempio: $\vec{\mathscr{R}}_{(e)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_G \equiv \text{cost}$.
- Le sole **forze interne** possono **modificare lo stato di moto** di **tutto il sistema meccanico** ma <u>non</u> del suo **centro di massa**.

Conseguenze delle Equazioni Cardinali della Dinamica

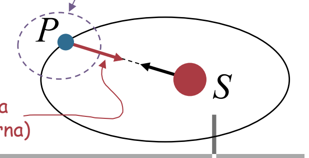
- In un SdR inerziale e trascurando l'effetto della presenza degli altri pianeti, la **quantità di moto di un pianeta** <u>**non**</u> **si conserva** nel moto del pianeta attorno al Sole :

$$\vec{Q}_P \neq \text{cost}$$

- Infatti $\vec{Q}_P$ è la quantità totale di moto di un sistema meccanico composto dal solo pianeta. Per tale sistema la forza di **gravità** esercitata dal Sole è la sola forza **esterna**. Per la I equazione cardinale

$$\dot{\vec{Q}}_P = \vec{\mathscr{R}}_{(e)} = \vec{F}_g \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{Q}_P \neq \text{cost}$$

#



Conseguenze delle Equazioni Cardinali della Dinamica (II)

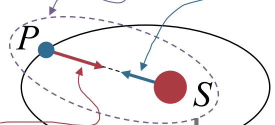
- In un SdR inerziale e trascurando l'effetto della presenza degli altri pianeti, **la somma delle quantità di moto di un pianeta e del Sole si conserva** nel moto del pianeta attorno al sole :

$$\vec{Q}_P + \vec{Q}_S \equiv \text{cost}$$

- Infatti $\vec{Q}_P + \vec{Q}_S$ è la quantità totale di moto di un sistema meccanico composto da Pianeta + Sole. Per tale sistema la forza di **gravità** esercitata dal Sole è una forza **interna**, mentre sono assenti forze esterne (perché il SdR è inerziale e l'effetto della presenza degli altri pianeti è trascurata). Per la I equazione cardinale della dinamica:

$$\dot{\vec{Q}}_P + \dot{\vec{Q}}_S = \vec{\mathscr{R}}_{(e)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{Q}_P + \vec{Q}_S \equiv \text{cost}$$

#

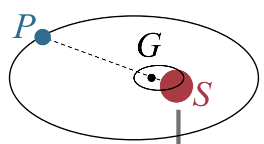


Conseguenze delle Equazioni Cardinali della Dinamica (III)

- Dai 2 risultati precedenti si ha:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{Q}_P + \vec{Q}_S \equiv \text{cost} \\ \vec{Q}_P \neq \text{cost}\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{Q}_S \neq \text{cost}$$

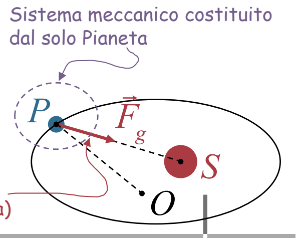
- La quantità di moto del Sole non è costante, dunque **il Sole si muove** con accelerazione non nulla in un SdR inerziale. **Come si muove** dunque il Sole?
- Per il **teorema del moto del centro di massa**, $\vec{\mathscr{R}}_{(e)} = M\,\vec{a}_G$.
- Se il SdR è inerziale e l'effetto della presenza degli altri pianeti è trascurato, allora sono assenti forze esterne ($\vec{\mathscr{R}}_{(e)} = \vec{0}$), dunque $\vec{a}_G = \vec{0}$ e il **centro di massa** G del sistema Pianeta + Sole o è in **quiete** oppure si muove di moto rettilineo uniforme.
- Se scegliamo il SdR inerziale in cui G è in quiete, **il Sole compierà una piccola traiettoria ellittica con un fuoco in** G.



Conseguenze delle Equazioni Cardinali della Dinamica (IV)

- In un SdR inerziale e trascurando l'effetto della presenza degli altri pianeti, il **momento angolare di un pianeta rispetto a un centro di riduzione arbitrario non si conserva** nel moto del pianeta attorno al Sole;
- In un SdR inerziale e trascurando l'effetto della presenza degli altri pianeti, il **momento angolare di un pianeta rispetto al centro del Sole si conserva** nel moto del pianeta attorno al Sole:

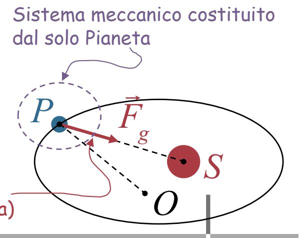
$$\begin{cases}\dot{\vec K}_P^{(O)}\neq 0\\ \dot{\vec K}_P^{(S)}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec K_P^{(O)}\neq \text{cost}\\ \vec K_P^{(S)}\equiv\text{cost}\end{cases}$$



Conseguenze delle Equazioni Cardinali della Dinamica (V)

- Infatti $\vec K_P^{(O)}$ e $\vec K_P^{(S)}$ sono i momenti angolari totali di un **sistema meccanico composto dal solo pianeta**.
- In un SdR inerziale e trascurando l'effetto della presenza degli altri pianeti la **sola** forza **esterna** è l'attrazione **gravitazionale** del Sole.
- La II equazione cardinale della dinamica si scrive:

$$\dot{\vec K}_P^{(O)}=-\vec v_O\wedge\vec Q_P+\vec{\mathcal M}_{(e)}^{(O)}$$
$$\dot{\vec K}_P^{(S)}=-\vec v_S\wedge\vec Q_P+\vec{\mathcal M}_{(e)}^{(S)}$$



Conseguenze delle Equazioni Cardinali della Dinamica (VI)

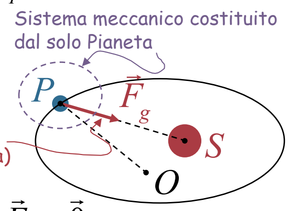
- Nel SdR inerziale con origine nel centro di massa G del sistema Sole-pianeta si ha (v. trasparenza 20):

$$\vec Q_P+\vec Q_S=\vec Q_{tot}=M_{tot}\vec v_G=\left(m_P+m_S\right)\overbrace{\vec v_G}^{\vec 0}=\vec 0\quad\Rightarrow\quad\vec Q_P=-\vec Q_S$$
$$\vec Q_P=-\vec Q_S=-m_S\vec v_S\quad\Rightarrow\quad\vec v_S\parallel\vec Q_P\quad\Rightarrow\quad-\vec v_S\wedge\vec Q_P=\vec 0$$

- Inoltre, essendo $\overrightarrow{P-S}\parallel\vec F_g$, si ha:

$$\left(\overrightarrow{P-S}\right)\wedge\vec F_g=\vec 0$$

dunque:



$$\dot{\vec K}_P^{(O)}=-\vec v_O\wedge\vec Q_P+\vec{\mathcal M}_{(e)}^{(O)}=-\vec v_O\wedge\vec Q_P+\left(\overrightarrow{P-O}\right)\wedge\vec F_g\neq\vec 0$$
$$\dot{\vec K}_P^{(S)}=-\vec v_S\wedge\vec Q_P+\vec{\mathcal M}_{(e)}^{(S)}=\underbrace{-\vec v_S\wedge\vec Q_P}_{\vec 0}+\underbrace{\left(\overrightarrow{P-S}\right)\wedge\vec F_g}_{\vec 0}=\vec 0$$

#

Conseguenze delle Equazioni Cardinali della Dinamica (VII)

- **II legge di Keplero**:

$$\left.\begin{aligned}\vec A_P^{(S)}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{P-S}\right)\wedge\vec v\\ \vec K_P^{(S)}&=\left(\overrightarrow{P-S}\right)\wedge m\vec v\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\vec A_P^{(S)}=\frac{1}{2m}\vec K_{P(S)}$$

$$\vec K_P^{(S)}\equiv\text{cost}\quad\Rightarrow\quad\vec A_P^{(S)}\equiv\text{cost}$$

la II legge di Keplero è una conseguenza della conservazione del momento angolare.

- **Le orbite dei pianeti giacciono su di un piano**. Infatti:

$$\vec K_P^{(S)}=\left(\overrightarrow{P-S}\right)\wedge m\vec v\equiv\text{cost}$$

segue che vettore posizionale e velocità si trovano sempre su un piano perpendicolare al vettore momento angolare che è costante.

Momento Angolare dei Corpi Rigidi: Corpo che Ruota attorno a un Asse Fisso

- Scegliendo il centro di riduzione O sull'asse u, la **formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi** si scrive:

$$\vec{v}_i = \overbrace{\vec{v}_O}^{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) = \vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - O}\right)$$

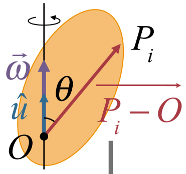
per cui il momento angolare si scrive:

$$\vec{K}^{(O)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) \wedge m_i \overbrace{\left[\vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - O}\right)\right]}^{\vec{v}_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) \wedge \left[\vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - O}\right)\right]$$

- Se φ è l'angolo che misura la rotazione del corpo rigido:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{u}$$



Momento Angolare dei Corpi Rigidi: Corpo che Ruota attorno a un Asse Fisso (II)

- Si ha:

$$\vec{K}^{(O)} = \dot{\varphi} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) \wedge \left[\hat{u} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - O}\right)\right]$$

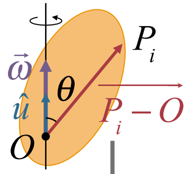
- Il **momento angolare assiale** rispetto a u si scrive:

$$K^{(u)} = \vec{K}^{(O)} \bullet \hat{u} = \dot{\varphi}\,\hat{u} \bullet \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) \wedge \left[\hat{u} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - O}\right)\right] =$$

$$= \dot{\varphi} \sum_{i=1}^{n} m_i\, \hat{u} \bullet \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) \wedge \left[\hat{u} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - O}\right)\right] =$$

$$= \dot{\varphi} \sum_{i=1}^{n} m_i\, \hat{u} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - O}\right) \bullet \left[\hat{u} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - O}\right)\right] =$$

$$= \dot{\varphi} \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\hat{u} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - O}\right)\right]^2$$



Momento Angolare dei Corpi Rigidi: Corpo che Ruota attorno a un Asse Fisso (III)

- Posto:

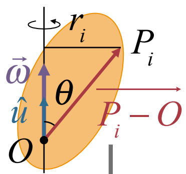
$$I_u = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\hat{u} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - O}\right)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

(**Momento di Inerzia rispetto all'asse u**)

dove r_i è la distanza di P_i dalla retta u, si ha:

$$K^{(u)} = I_u \dot{\varphi}$$

- Il **momento angolare assiale** è il prodotto del **momento di inerzia** per il **modulo della velocità angolare**.
- Si tratta di un'equazione scalare avente forma analoga a: $\vec{Q} = m\vec{v}$. Il **ruolo** del **momento di inerzia** per le **rotazioni** è analogo a quello della **massa** per le **traslazioni**.



Momento Angolare dei Corpi Rigidi: Corpo che Rototrasla con Asse Parallelo a Se Stesso

- Scegliendo il **centro di massa G come centro di riduzione**, la **formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi** si scrive:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - G}\right)$$

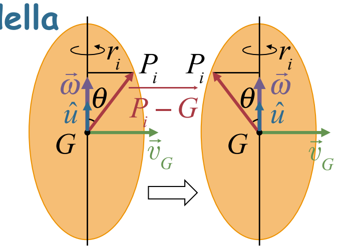
e il momento angolare si scrive:

$$\vec{K}^{(G)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{P_i - G}\right) \wedge m_i \vec{v}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{P_i - G}\right) \wedge m_i \left[\vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - G}\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{P_i - G}\right) \wedge \left[\vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - G}\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{P_i - G}\right) \wedge \vec{v}_G + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{P_i - G}\right) \wedge \left[\vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{P_i - G}\right)\right]$$



Momento Angolare dei Corpi Rigidi: Corpo che Rototrasla con Asse Parallelo a Se Stesso (II)

- Poiché:

$$\overrightarrow{G-O}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{P_i-O}\right)}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)=\left(\overrightarrow{G-G}\right)\sum_{i=1}^{n} m_i=\vec{0}$$

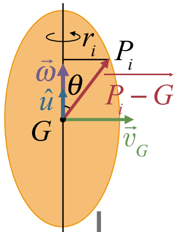
il momento angolare si scrive:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{K}^{(G)}&=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\wedge\vec{v}_G+\\&+\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\wedge\left[\vec{\omega}\wedge\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\right]\end{aligned}}$$

$$\vec{K}^{(G)}=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\wedge\left[\vec{\omega}\wedge\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\right]$$

- Il momento angolare di un corpo rigido rispetto al centro di massa G non dipende da v_G ma soltanto da ω (**la parte traslatoria del moto non ha influenza sul momento angolare**).
- Se φ è l'angolo che misura la rotazione del corpo rigido:

$$\vec{\omega}=\dot{\varphi}\,\hat{u}$$



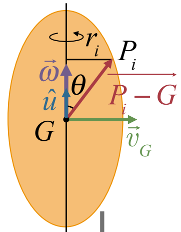
Momento Angolare dei Corpi Rigidi: Corpo che Rototrasla con Asse Parallelo a Se Stesso (III)

- Si ha:

$$\vec{K}^{(G)}=\dot{\varphi}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\wedge\left[\hat{u}\wedge\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\right]$$

- Il **momento assiale** rispetto a un **asse u passante per il centro di massa** si scrive:

$$\begin{aligned}K^{(u)}&=\vec{K}^{(G)}\bullet\hat{u}=\dot{\varphi}\,\hat{u}\bullet\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\wedge\left[\hat{u}\wedge\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\right]=\\&=\dot{\varphi}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\hat{u}\bullet\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\wedge\left[\hat{u}\wedge\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\right]=\\&=\dot{\varphi}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\hat{u}\wedge\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\bullet\left[\hat{u}\wedge\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\right]=\\&=\dot{\varphi}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\hat{u}\wedge\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\right]^2\end{aligned}$$



Momento Angolare dei Corpi Rigidi: Corpo che Rototrasla con Asse Parallelo a Se Stesso (IV)

- Posto:

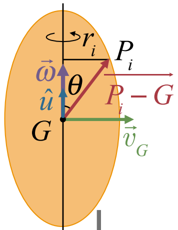
$$I_u=\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\hat{u}\wedge\left(\overrightarrow{P_i-G}\right)\right]^2=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

(**Momento di Inerzia rispetto all'asse u**)

dove r_i è la distanza di P_i dalla retta u, si ha:

$$K^{(u)}=I_u\,\dot{\varphi}$$

- Il momento angolare assiale è il prodotto del momento di inerzia per il modulo della velocità angolare.
- Si tratta di un'equazione scalare avente forma analoga a: $\vec{Q}=m\vec{v}$. Il **ruolo** del **momento di inerzia** per le **rotazioni** è analogo a quello della **massa** per le **traslazioni**.

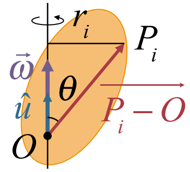


Momento di Inerzia

- Nel caso di un sistema discreto di punti materiali, abbiamo visto che il **momento d'inerzia** si scrive:

$$I_u=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2, \quad r_i=d\left(P_i,u\right)$$

dove r_i è la distanza di P_i dalla retta u.

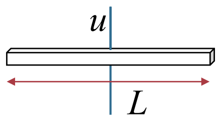


- Nel caso di un **sistema continuo** si sostituisce un integrale alla sommatoria:

$$I_u=\iiint_V r^2\rho(P)\,\mathrm{d}V=\iiint_V r^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad r=d\left(P,u\right)$$

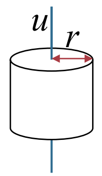
dove r è la distanza di P dalla retta u.

Momento di Inerzia di Corpi Omogenei



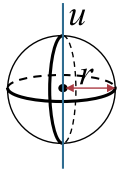
- **Sbarra** (rispetto a un asse baricentrico perpendicolare ad essa):

$$I_u = \frac{1}{12} ML^2$$



- **Cilindro** (rispetto all'asse di simmetria):

$$I_u = \frac{1}{2} Mr^2$$



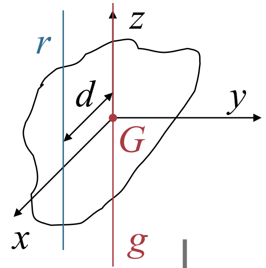
- **Sfera** (rispetto a un asse passante per il centro):

$$I_u = \frac{2}{5} Mr^2$$

Teorema di Huygens-Steiner

- Per un corpo qualsiasi, il momento di inerzia rispetto a una qualsiasi retta r è uguale al momento di inerzia rispetto alla retta g, parallela a r e passante per il centro di massa G, aumentato del prodotto tra la massa totale del corpo e il quadrato della distanza d tra le due rette (**Teorema di Huygens-Steiner**).

$$I_r = I_g + Md^2$$



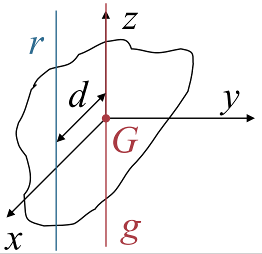
Teorema di Huygens-Steiner (II)

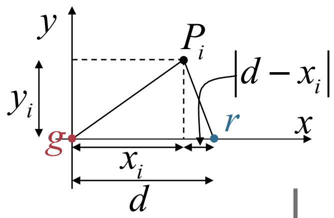
- Il teorema si prova facilmente, poiché:

$$I_g = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right)$$

$$I_r = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(x_i - d \right)^2 + y_i^2 \right] = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[x_i^2 - 2x_i d + d^2 + y_i^2 \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) + d^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i}_{M} - 2d \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}_{Mx_G = 0} = I_g + Md^2$$





Dinamica dei Sistemi

- Può essere affrontata mediante le **equazioni cardinali della dinamica**.
- La **I equazione cardinale** della dinamica (o il teorema del moto del centro di massa) definisce il moto del centro di massa.
- Consideriamo ora la **II equazione cardinale** della dinamica in 2 casi:
  - Moto **rotatorio** attorno a un **asse fisso** (vincolo)
  - Moto **rototraslatorio** con l'**asse** di rotazione che rimane **parallelo a se stesso**.

Dinamica dei Sistemi (II)

- Il questi due casi si ha, come abbiamo visto:

$$K^{(u)} = \vec{K}^{(O)} \bullet \hat{u} = I_u \dot{\varphi}, \quad O \in u$$

- Derivando:

$$\dot{\vec{K}}^{(O)} \bullet \hat{u} = I_u \ddot{\varphi}, \quad O \in u$$

e ricordando la II equazione cardinale della dinamica:

$$\dot{\vec{K}}^{(O)} = \vec{\mathscr{M}}_{(e)}^{(O)}$$

si ha:

$$\vec{\mathscr{M}}_{(e)}^{(O)} \bullet \hat{u} = I_u \ddot{\varphi}, \quad O \in u$$

Dinamica dei Sistemi (III)

$$\mathscr{M}_{(e)}^{(u)} = I_u \ddot{\varphi} \qquad (**)$$

- **Il momento assiale risultante delle forze esterne è uguale al momento di inerzia moltiplicato per la derivata seconda dell'angolo che misura le rotazioni**.
- Questa espressione ha la stessa forma del teorema del moto del centro di massa:

$$\vec{\mathscr{R}}_{(e)} = M \vec{a}_G \qquad (*)$$

- Tuttavia la (**) è scalare mentre la (*) è vettoriale. Inoltre la (*) ha validità generale, mentre la (**) vale soltanto nei moti in cui l'asse di rotazione rimane parallelo a se stesso.
- **Il momento di inerzia, per le rotazioni, ha lo stesso significato della massa per le traslazioni**.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
SEDE DI FORLÌ

http://campus.cib.unibo.it/2430/

Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli

https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica