Fisica Generale A

8. Soluzione numerica delle equazioni del moto di un punto materiale

http://campus.cib.unibo.it/2428/

Domenico Galli

June 17, 2009

Software (gratuito per uso non commerciale) e documentazione (gratuita)

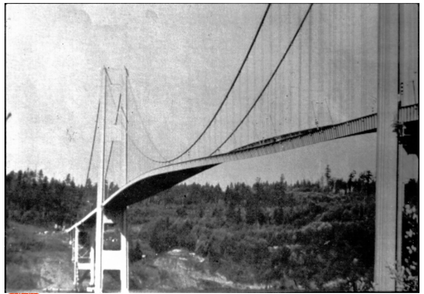
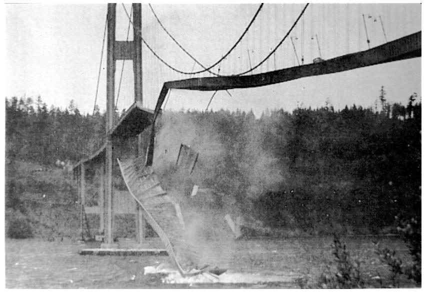
- http://java.sun.com/javase/downloads/index.jsp
  - **JDK 6.0 Update 12** (Software Developement Kit) (Compilatore Java, Java Virtual Machine, API (application program interface), ecc.).
  - **Java SE 6 Documentation** manuale di riferimento API.
- http://wwws.sun.com/software/download/app_dev.html
  - Java Studio Standard creator 2 (ambiente grafico di sviluppo, non indispensabile).
- http://java.sun.com/docs/books/tutorial/index.html
  - "The Java Tutorial 4th edition" manuale consultabile online.
- http://java.sun.com/docs/books/tutorial/information/download.html
  - "The Java Tutorial 4th edition", manuale copiabile.
  - Esempi.
- http://www.mindview.net/Books/TIJ/
  - "Thinking in Java 3rd edition", manuale online o copiabile.

Soluzioni analitiche e numeriche

- La **soluzione del problema fondamentale della dinamica**, ovvero la soluzione delle equazioni differenziali del moto, è **esprimibile in forma analitica**, in termini di un numero finito di funzioni elementari (polinomi, radici, logaritmi, esponenziali, funzioni trigonometriche e iperboliche, ecc.) **soltanto in casi particolari**.
  - Le **grandi oscillazioni di un pendolo semplice**, per esempio, sono esprimibili soltanto mediante particolari funzioni, dette funzioni ellittiche di Jacobi (p. es. senamplitudine: $\mathrm{sn}(u|m)$). Le funzioni ellittiche di Jacobi a loro volta sono definite come funzioni primitive di altre funzioni note o come somma di serie infinite di funzioni note, ma non sono esprimibili per mezzo di un numero finito di funzioni elementari.

Soluzioni analitiche e numeriche (II)

- Spesso le equazioni incontrate nei **sistemi complessi** in fisica sono **non-lineari** e non hanno soluzioni esprimibili in forma analitica.
  - Il ponte sullo stretto di Tacoma, stato di Washington, crollato il 7 novembre 1940 per una **risonanza non-lineare** indotta dal vento.

Soluzioni analitiche e numeriche (III)

- Quando non è possibile trovare una soluzione analitica bisogna ricorrere a **soluzioni numeriche**.
- Le **soluzioni numeriche** non sono funzioni in forma analitica (p. es.: $x(t) = 2t^2$), ma sono espresse come **successioni di punti**, vicini quanto si desidera.

t[s]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x[m]	0	2	8	18	32	50	72	98	128	162

- Le soluzioni numeriche sono sempre **approssimate** ma l'approssimazione, in generale, può essere migliorata quanto si vuole, a patto di disporre di strumenti di calcolo sufficientemente veloci.

Soluzioni analitiche e numeriche (IV)

- In seguito alla diffusione di massa dei **Personal Computer**, alla possibilità di eseguire un enorme numero di calcoli in poco tempo e di rappresentarne **graficamente** i risultati, i metodi di calcolo numerico sono diventati una **componente importante nella comprensione del comportamento dei sistemi meccanici**.
- Le soluzioni numeriche, tuttavia **non contengono tutta l'informazione contenuta nelle soluzioni analitiche**. Dall'elenco dei valori della soluzione non possiamo, p.es., sapere dove la soluzione ha gli zeri, dove ha i massimi, come dipende la stabilità dagli eventuali parametri, ecc.

Equazioni di un moto unidimensionale: forza indipendente dalla posizione

- Per un **moto unidimensionale**, l'equazione del moto di un punto materiale (II ordine) si scrive:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} F\left(x(t), \dot{x}(t), t\right)$$

- Nel caso particolare in cui la **forza è indipendente dalla posizione**, l'equazione si può ridurre a 2 equazioni del I ordine risolvibili in sequenza. Infatti, da:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} F\left(\dot{x}(t), t\right)$$

- si ottengono le **2 equazioni del I ordine**:

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \dfrac{1}{m} F\left(v(t), t\right) \\ \dot{x}(t) = v(t) \end{cases}$$

Si può risolvere la prima, trovando $v(t)$ e successivamente la seconda, per trovare $x(t)$.

Equazioni di un moto unidimensionale: forza indipendente dalla posizione (II)

- La II si può integrare direttamente, mentre la I è un'equazione del tipo:

$$\dot{v}(t) = f\left(v(t), t\right)$$

- Un **esempio** di equazione del moto che può essere così ridotta è quella di un punto materiale sottoposto a **resistenza viscosa**:

$$F\left(v(t), t\right) = F\left(v(t)\right) = -\lambda v(t)$$

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = -\dfrac{1}{m} \lambda v(t) \\ \dot{x}(t) = v(t) \end{cases}$$

- Vediamo ora come **risolvere numericamente** questo tipo di equazione.

Metodo di Eulero-Cauchy

- Consideriamo l'equazione differenziale:

$$\dot{v}(t) = f\left(v(t), t\right)$$

- Possiamo scivere, utilizzando la formula di Taylor:

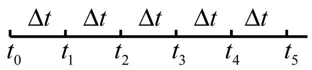
$$v(t+\Delta t) = v(t) + \dot{v}(t)\Delta t + \mathscr{O}\left(\Delta t^2\right) =$$
$$= v(t) + f\left(v(t), t\right)\Delta t + \mathscr{O}\left(\Delta t^2\right)$$

ovvero, conoscendo la velocità al tempo t possiamo calcolare la velocità al tempo $t + \Delta t$.

- Suddividiamo ora il tempo in tanti intervallini di ampiezza piccola ma finita Δt:

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], [t_2, t_3], \ldots$$

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \ldots = \Delta t$$



Metodo di Eulero-Cauchy (II)

- Conoscendo

$$v(t_0) = v_0$$

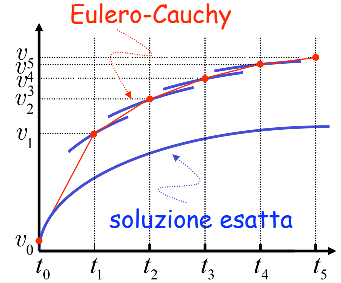
- possiamo trovare $v_1 = v(t_1)$:

$$v_1 = v(t_1) = v(t_0 + \Delta t) = v(t_0) + \overbrace{f\left(v(t_0), t_0\right)}^{\dot{v}(t)}\Delta t + \mathscr{O}\left(\Delta t^2\right) =$$
$$= v(t_0) + f(v_0, t_0)\Delta t + \mathscr{O}\left(\Delta t^2\right)$$

- da cui possiamo trovare $v_2 = v(t_2)$:

$$v_2 = v(t_2) = v(t_1 + \Delta t) =$$
$$= v(t_1) + f(v_1, t_1)\Delta t + \mathscr{O}\left(\Delta t^2\right)$$

- e così via.



Metodo di Eulero-Cauchy (III)

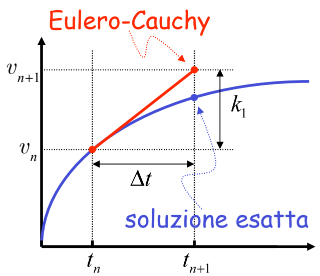
- In questo modo troviamo un'approssimazione della soluzione $v = v(t)$ espressa per punti discreti:

$$(t_0, v_0), (t_1, v_1), (t_2, v_2), \ldots$$

- La formula che, a partire dal punto n-esimo, consente di trovare il punto (n+1)-esimo si può scrivere nel modo seguente:

$$v_{n+1} = v_n + k_1 + \mathscr{O}\left(\Delta t^2\right)$$
$$k_1 = f(v_n, t_n)\Delta t$$

(Eulero-Cauchy)



Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: resistenza viscosa

- Nel caso di punto materiale sottoposto a **resistenza viscosa**:

$$F\left(v(t), t\right) = F\left(v(t)\right) = -\lambda v(t)$$
$$\dot{v}(t) = f\left(v(t), t\right) = -\frac{1}{m}\lambda v(t) \quad \Rightarrow \quad f(v_n, t_n) = -\frac{1}{m}\lambda v_n$$

- le formule iterative di Eulero-Cauchy si scrivono:

$$v_{n+1} \simeq v_n + k_1$$
$$k_1 = f(v_n, t_n)\Delta t = -\frac{1}{m}\lambda v_n \Delta t$$

- e dunque:

$$v_{n+1} \simeq v_n\left(1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right)$$

Si noti, per inciso, che è una caratteristica peculiare della funzione **esponenziale** il fatto che il valore della funzione corrispondente a $t + \Delta t$ sia una **frazione fissa** del valore corrispondente a t.

Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: resistenza viscosa (II)

- Se consideriamo un punto di massa 1 g che ha inizialmente una velocità di 10 m/s e si muove in un fluido con λ pari a 0.02 kg/s, scegliendo $\Delta t = 0.01$ s, si ha:

Eulero - Cauchy

$$1-\frac{\lambda}{m}\Delta t = 0.8$$

$$\begin{aligned}
v(0.00\,\mathrm{s}) &= v_0 = 10\ \mathrm{m/s}\\
v(0.01\,\mathrm{s}) &= v_1 = 0.8v_0 = 8.00\ \mathrm{m/s}\\
v(0.02\,\mathrm{s}) &= v_2 = 0.8v_1 = 6.40\ \mathrm{m/s}\\
v(0.03\,\mathrm{s}) &= v_3 = 0.8v_2 = 5.12\ \mathrm{m/s}\\
v(0.04\,\mathrm{s}) &= v_4 = 0.8v_3 = 4.10\ \mathrm{m/s}\\
v(0.05\,\mathrm{s}) &= v_5 = 0.8v_4 = 3.28\ \mathrm{m/s}\\
v(0.06\,\mathrm{s}) &= v_6 = 0.8v_5 = 2.62\ \mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

soluzione esatta

$$v = v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t} = v_0 e^{-20t}$$

$$\begin{aligned}
v(0.00\,\mathrm{s}) &= v_0 = 10\ \mathrm{m/s}\\
v(0.01\,\mathrm{s}) &= v_0 e^{-0.2} = 8.19\ \mathrm{m/s}\\
v(0.02\,\mathrm{s}) &= v_0 e^{-0.4} = 6.70\ \mathrm{m/s}\\
v(0.03\,\mathrm{s}) &= v_0 e^{-0.6} = 5.49\ \mathrm{m/s}\\
v(0.04\,\mathrm{s}) &= v_0 e^{-0.8} = 4.49\ \mathrm{m/s}\\
v(0.05\,\mathrm{s}) &= v_0 e^{-1.0} = 3.68\ \mathrm{m/s}\\
v(0.06\,\mathrm{s}) &= v_0 e^{-1.2} = 3.01\ \mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: resistenza viscosa (III)

- La **precisione** dei metodi numerici **aumenta diminuendo il passo Δt**. Prendendo $\Delta t = 0.001$ si ha:

Eulero - Cauchy

$$1-\frac{\lambda}{m}\Delta t = 0.98$$

$$\begin{aligned}
v(0.000\,\mathrm{s}) &= v_0 = 10\ \mathrm{m/s}\\
v(0.001\,\mathrm{s}) &= v_1 = 0.98v_0 = 9.80\ \mathrm{m/s}\\
v(0.002\,\mathrm{s}) &= v_2 = 0.98v_1 = 9.60\ \mathrm{m/s}\\
&\ldots\ldots\ldots\\
v(0.01\,\mathrm{s}) &= v_{10} = 0.98^{10}v_0 = 8.17\ \mathrm{m/s}\\
v(0.02\,\mathrm{s}) &= v_{20} = 0.98^{10}v_{10} = 6.68\ \mathrm{m/s}\\
v(0.03\,\mathrm{s}) &= v_{30} = 0.98^{10}v_{20} = 5.45\ \mathrm{m/s}\\
v(0.04\,\mathrm{s}) &= v_{40} = 0.98^{10}v_{30} = 4.46\ \mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

soluzione esatta

$$v = v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t} = v_0 e^{-20t}$$

$$\begin{aligned}
v(0.000\,\mathrm{s}) &= v_0 = 10\ \mathrm{m/s}\\
v(0.001\,\mathrm{s}) &= v_0 e^{-0.02} = 9.80\ \mathrm{m/s}\\
v(0.002\,\mathrm{s}) &= v_0 e^{-0.04} = 9.61\ \mathrm{m/s}\\
&\ldots\ldots\ldots\\
v(0.01\,\mathrm{s}) &= v_0 e^{-0.2} = 8.19\ \mathrm{m/s}\\
v(0.02\,\mathrm{s}) &= v_0 e^{-0.4} = 6.70\ \mathrm{m/s}\\
v(0.03\,\mathrm{s}) &= v_0 e^{-0.6} = 5.49\ \mathrm{m/s}\\
v(0.04\,\mathrm{s}) &= v_0 e^{-0.8} = 4.49\ \mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: resistenza viscosa (IV)

- **Confrontando** i risultati con $\Delta t = 0.01$ e $\Delta t = 0.001$:

t[s]	v[m/s] Eulero-Cauchy $\Delta t = 0.01$	Eulero-Cauchy $\Delta t = 0.001$	esatto
0.00	10.00	10.00	10.00
0.01	8.00	8.17	8.19
0.02	6.40	6.68	6.70
0.03	5.12	5.45	5.49
0.04	4.10	4.46	4.49
0.05	3.28	3.64	3.68
0.06	2.62	2.98	3.01
0.07	2.10	2.43	2.47
0.08	1.68	1.99	2.02
0.09	1.34	1.62	1.65

Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: resistenza viscosa (V)

- Per ottenere soluzioni più precise si può allora pensare di **ridurre molto il passo** Δt. Questo ha tuttavia due controindicazioni:
  - La diminuzione del passo aumenta il numero di operazioni algebriche necessarie per trovare la soluzione (definita sullo stesso intervallo di tempo) e dunque **aumenta il tempo di calcolo**.
  - Se **Δt è troppo piccolo** la **precisione numerica** del computer può risultare **insufficiente** per rappresentare i numeri, e la **soluzione** trovata può diventare **priva di senso**. Utilizzando gli stessi dati degli esempi precedenti, prendendo $\Delta t = 10^{-18}$, si ha:

$$1-\frac{\lambda}{m}\Delta t = 0.99999999999999998$$

  - Se il computer utilizza 53 bit (circa 16 cifre decimali) su 64 per rappresentare la mantissa, tale numero viene arrotondato a 1 e la velocità del moto risulta erroneamente costante.

Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: resistenza viscosa (VI)

- Un frammento di **codice in C** per risolvere l'equazione del moto utilizzando il metodo di Eulero-Cauchy è il seguente:

```
. . . .
v=v0;
a=-lambda*v/m;
for(t=0.0;;)
{
  /* algoritmo di Eulero-Cauchy */
  v=v+a*deltaT;
  a=-lambda*v/m;
  t=t+deltaT;
  if(t>tMax)break;
  /*fprintf(dataOut,"t=%f\tv=%f\ta=%f\n",t,v,a);*/ /*linux*/
  fprintf(dataOut,"t=%f\tv=%f\ta=%f\n\r",t,v,a);   /*dos*/
}
. . . .
```

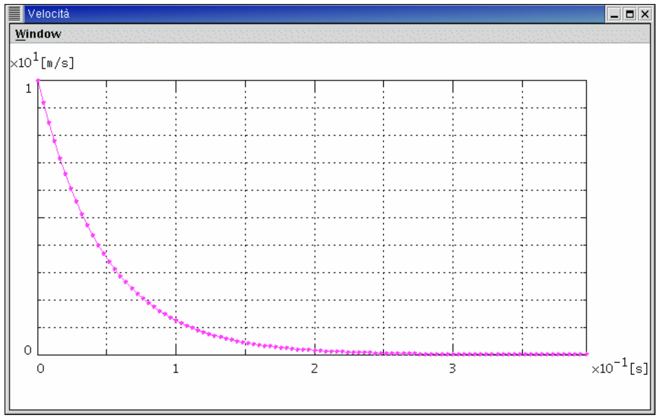

Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: resistenza viscosa (VII)

- Un frammento di **codice in Java** per risolvere l'equazione del moto utilizzando il metodo di Eulero-Cauchy è il seguente:

```
. . . .
v=v0;
a=-lambda*v/m;
for(t=0.0;;)
{
  // algoritmo di Eulero-Cauchy
  v=v+a*deltaT;
  a=-lambda*v/m;
  t=t+deltaT;
  if(t>tMax)break;
  dataOut.println("t="+t+"\tv="+v+"\ta="+a);
}
. . . .
```

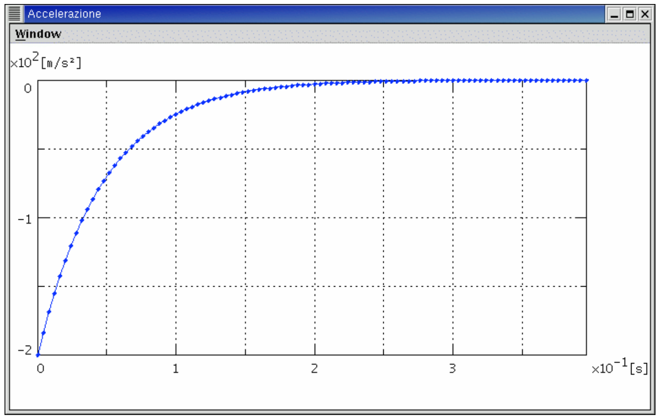

Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: resistenza viscosa (VIII)

- Grafico della **velocità** eseguito dal codice Java: $m = 1\text{g}$, $\lambda = 0.02\ \text{kg/s}$, $v_0 = 10\ \text{m/s}$, $t_{max} = 0.4\ \text{s}$, $\Delta t = 0.004\ \text{s}$.



Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: resistenza viscosa (IX)

- Grafico dell'**accelerazione** eseguito dal codice Java: $m = 1\text{g}$, $\lambda = 0.02\ \text{kg/s}$, $v_0 = 10\ \text{m/s}$, $t_{max} = 0.4\ \text{s}$, $\Delta t = 0.004\ \text{s}$.



Metodo di Runge-Kutta del II ordine

- Consideriamo di nuovo l'equazione differenziale:

$$\dot v(t) = f\big(v(t),t\big)$$

- Da cui, derivando, si trova:

$$\ddot v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(v(t),t\big) = \frac{\partial f}{\partial v}\big(v(t),t\big)\dot v(t) + \frac{\partial f}{\partial t}\big(v(t),t\big) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial v}\big(v(t),t\big) f\big(v(t),t\big) + \frac{\partial f}{\partial t}\big(v(t),t\big)$$

- Possiamo **migliorare la precisione rispetto al metodo di Eulero-Cauchy** aggiungendo alla formula di Taylor i termini quadratici in Δt:

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \dot v(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot v(t)\Delta t^2 + \mathcal{O}\big(\Delta t^3\big)$$

Metodo di Runge-Kutta del II ordine (II)

- Sostituendo le espressioni di $\dot v(t)$ e $\ddot v(t)$ della pagina precedente, posto $k_1 = f\big(v(t),t\big)\Delta t$, si ha:

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \overbrace{f\big(v(t),t\big)}^{\dot v(t)}\Delta t + \frac{1}{2}\overbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial v}\big(v(t),t\big)\overbrace{f\big(v(t),t\big)}^{\dot v(t)} + \frac{\partial f}{\partial t}\big(v(t),t\big)\right]}^{\ddot v(t)}\Delta t^2 + \mathcal{O}\big(\Delta t^3\big)$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{1}{2}\underbrace{f\big(v(t),t\big)\Delta t}_{k_1} + \frac{1}{2}\left[f\big(v(t),t\big) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(v(t),t\big)\underbrace{f\big(v(t),t\big)\Delta t}_{k_1} + \frac{\partial f}{\partial t}\big(v(t),t\big)\Delta t\right]\Delta t + \mathcal{O}\big(\Delta t^3\big)$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}\left[f\big(v(t),t\big) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(v(t),t\big)k_1 + \frac{\partial f}{\partial t}\big(v(t),t\big)\Delta t\right]\Delta t + \mathcal{O}\big(\Delta t^3\big)$$

Metodo di Runge-Kutta del II ordine (III)

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}\left[f\big(v(t),t\big) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(v(t),t\big)k_1 + \frac{\partial f}{\partial t}\big(v(t),t\big)\Delta t\right]\Delta t + \mathcal{O}\big(\Delta t^3\big)$$

- Ricordando la formula di Taylor per una funzione scalare di 2 variabili:

$$f(x+a,y+b) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)b + \mathcal{O}\big(a^2+b^2\big)$$

si può anche scrivere:

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}\Big[f\big(v(t)+k_1,t+\Delta t\big) + \mathcal{O}\big(\Delta t^2\big)\Big]\Delta t + \mathcal{O}\big(\Delta t^3\big)$$

Metodo di Runge-Kutta del II ordine (IV)

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}f\big(v(t)+k_1,t+\Delta t\big)\Delta t + \mathcal{O}\big(\Delta t^3\big)$$

- Ovvero:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}\big(k_1+k_2\big) + \mathcal{O}\big(\Delta t^3\big)$$
$$\begin{cases} k_1 = f\big(v_n,t_n\big)\Delta t \\ k_2 = f\big(v_n+k_1,t_n+\Delta t\big)\Delta t \end{cases}$$

(Runge-Kutta II ordine)

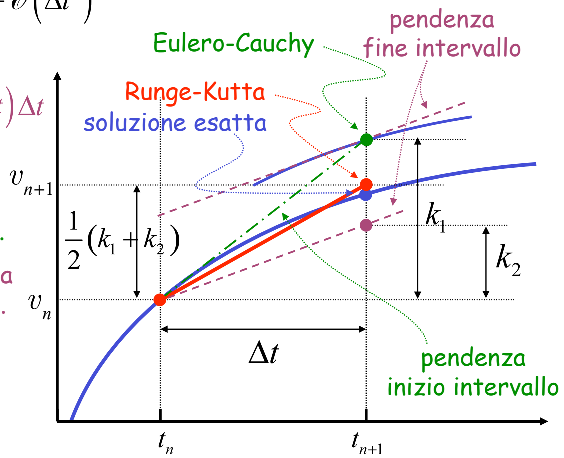
- Si osservi che $k_1/\Delta t$ è la **pendenza** della curva in t_n (all'**inizio dell'intervallino**), mentre $k_2/\Delta t$ è la **pendenza** della curva in t_{n+1} (alla **fine dell'intervallino**, stimata con il metodo di Eulero-Cauchy).

Metodo di Runge-Kutta del II ordine (interpretazione grafica)

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) + \mathscr{O}\left(\Delta t^3\right)$$

$$\begin{cases} k_1 = f\left(v_n, t_n\right)\Delta t \\ k_2 = f\left(v_n + k_1, t_n + \Delta t\right)\Delta t \end{cases}$$

- Si usa prima il metodo di Eulero-Cauchy, che utilizza la pendenza all'inizio dell'intervallo.
- Poi si trova la pendenza alla fine dell'intervallo.
- Infine si ripete il calcolo usando il valor medio delle due pendenze.



Applicazione del metodo di Runge-Kutta del II ordine: resistenza viscosa

- Nel caso di punto materiale sottoposto a **resistenza viscosa**:

$$F\left(v(t),t\right) = F\left(v(t)\right) = -\lambda v(t)$$

$$\dot{v}(t) = f\left(v(t),t\right) = -\frac{1}{m}\lambda v(t) \quad \Rightarrow \quad f\left(v_n,t_n\right) = -\frac{1}{m}\lambda v_n$$

- le formule iterative di Runge-Kutta si scrivono:

$$\begin{cases} k_1 = f\left(v_n,t_n\right)\Delta t = -\frac{1}{m}\lambda v_n \Delta t \\ k_2 = f\left(v_n + k_1, t_n + \Delta t\right)\Delta t = -\frac{1}{m}\lambda\left(v_n \overbrace{-\frac{1}{m}\lambda v_n \Delta t}^{k_1}\right)\Delta t \end{cases}$$

$$v_{n+1} \simeq v_n + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) = v_n - \frac{1}{m}\lambda v_n \Delta t + \frac{1}{2m^2}\lambda^2 v_n \Delta t^2$$

- e dunque:

$$v_{n+1} \simeq v_n\left(1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t + \frac{\lambda^2}{2m^2}\Delta t^2\right)$$

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del II ordine: resistenza viscosa (II)

- Se consideriamo un punto di massa 1 g che ha inizialmente una velocità di 10 m/s e si muove in un fluido con λ pari a 0.02 kg/s, scegliendo $\Delta t = 0.01$ s, si ha:

Runge-Kutta

$$1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t + \frac{\lambda^2}{2m^2}\Delta t^2 = 0.82$$

$$v(0.00\,\mathrm{s}) = v_0 = 10\ \mathrm{m/s}$$
$$v(0.01\,\mathrm{s}) = v_1 = 0.82\,v_0 = 8.20\ \mathrm{m/s}$$
$$v(0.02\,\mathrm{s}) = v_2 = 0.82\,v_1 = 6.72\ \mathrm{m/s}$$
$$v(0.03\,\mathrm{s}) = v_3 = 0.82\,v_2 = 5.51\ \mathrm{m/s}$$
$$v(0.04\,\mathrm{s}) = v_4 = 0.82\,v_3 = 4.52\ \mathrm{m/s}$$
$$v(0.05\,\mathrm{s}) = v_5 = 0.82\,v_4 = 3.71\ \mathrm{m/s}$$
$$v(0.06\,\mathrm{s}) = v_6 = 0.82\,v_5 = 3.04\ \mathrm{m/s}$$

soluzione esatta

$$v = v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t} = v_0 e^{-20t}$$

$$v(0.00\,\mathrm{s}) = v_0 = 10\ \mathrm{m/s}$$
$$v(0.01\,\mathrm{s}) = v_0 e^{-0.2} = 8.19\ \mathrm{m/s}$$
$$v(0.02\,\mathrm{s}) = v_0 e^{-0.4} = 6.70\ \mathrm{m/s}$$
$$v(0.03\,\mathrm{s}) = v_0 e^{-0.6} = 5.49\ \mathrm{m/s}$$
$$v(0.04\,\mathrm{s}) = v_0 e^{-0.8} = 4.49\ \mathrm{m/s}$$
$$v(0.05\,\mathrm{s}) = v_0 e^{-1.0} = 3.68\ \mathrm{m/s}$$
$$v(0.06\,\mathrm{s}) = v_0 e^{-1.2} = 3.01\ \mathrm{m/s}$$

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del II ordine: resistenza viscosa (III)

- **Confrontando** i risultati Eulero-Cauchy e Runge-Kutta:

t[s]	v[m/s]			
	Eulero-Cauchy $\Delta t = 0.01$	Eulero-Cauchy $\Delta t = 0.001$	Runge-Kutta $\Delta t = 0.01$	esatto
0.00	10.00	10.00	10.00	10.00
0.01	8.00	8.17	8.20	8.19
0.02	6.40	6.68	6.72	6.70
0.03	5.12	5.45	5.51	5.49
0.04	4.10	4.46	4.52	4.49
0.05	3.28	3.64	3.71	3.68
0.06	2.62	2.98	3.04	3.01
0.07	2.10	2.43	2.49	2.47
0.08	1.68	1.99	2.04	2.02
0.09	1.34	1.62	1.67	1.65

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del II ordine: resistenza viscosa (IV)

- Si può osservare che utilizzando $\Delta t = 0.01$ s con il metodo di **Runge-Kutta del II ordine** si ottiene una precisione **comparabile** e persino migliore che utilizzando $\Delta t = 0.001$ s con il metodo di **Eulero-Cauchy**.
- Per affrontare il problema della resistenza viscosa il metodo di Runge-Kutta del II ordine è dunque più conveniente del metodo di Eulero-Cauchy, in quanto, sebbene richieda qualche calcolo in più per ogni passo, produce la stessa precisione con un numero di passi 10 volte più piccolo.
- Precisioni **ancora migliori** si ottengono con il metodo di **Runge-Kutta del IV ordine**, che di fatto è il metodo **usato più frequentemente**.

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del II ordine: resistenza viscosa (V)

- Un frammento di **codice in Java** per risolvere l'equazione del moto utilizzando il metodo di Runge-Kutta del II ordine è il seguente:

```
. . . .
v=v0;
a=-lambda*v/m;
for(t=0.0;;)
{
  // algoritmo di Runge-Kutta del II ordine
  k1=a*deltaT;
  af=-lambda*(v+k1)/m;
  k2=af*deltaT;
  v=v+(k1+k2)/2;
  a=-lambda*v/m;
  t=t+deltaT;
  if(t>tMax)break;
  dataOut.println("t="+t+"\tv="+v+"\ta="+a);
}
. . . .
```


Metodo di Runge-Kutta del IV ordine

$$\dot{v}(t) = f\left(v(t), t\right)$$

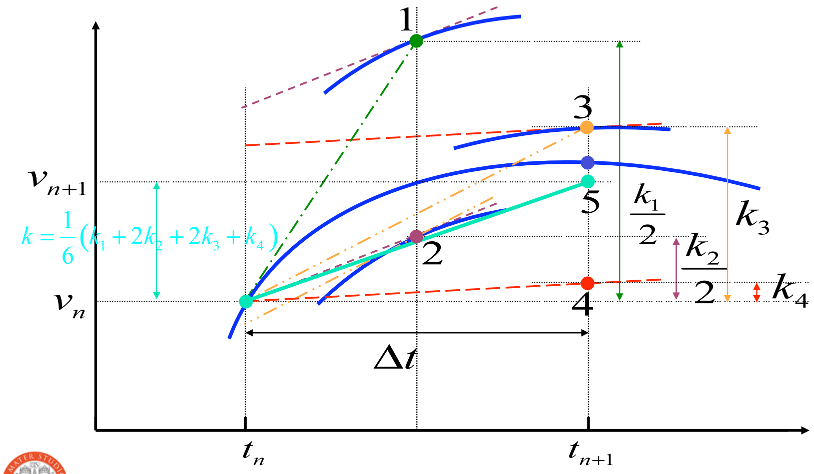
- Si utilizza la **media pesata di 4 pendenze**: una all'inizio, due nel punto di mezzo e una alla fine dell'intervallo.

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) + O\left(\Delta t^5\right)$$

$$\begin{cases} k_1 = f\left(v_n, t_n\right)\Delta t \\ k_2 = f\left(v_n + \dfrac{k_1}{2}, t_n + \dfrac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ k_3 = f\left(v_n + \dfrac{k_2}{2}, t_n + \dfrac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ k_4 = f\left(v_n + k_3, t_n + \Delta t\right)\Delta t \end{cases}$$

(Runge-Kutta IV ordine)

Metodo di Runge-Kutta del IV ordine (interpretazione grafica)



Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: resistenza viscosa

- Nel caso di punto materiale sottoposto a **resistenza viscosa**:

$$F\left(v(t),t\right)=F\left(v(t)\right)=-\lambda v(t)$$

$$\dot{v}(t)=f\left(v(t),t\right)=-\frac{1}{m}\lambda v(t) \quad \Rightarrow \quad f\left(v_n,t_n\right)=-\frac{1}{m}\lambda v_n$$

- i coefficienti k di Runge-Kutta del IV ordine si scrivono:

$$\begin{cases} k_1=f\left(v_n,t_n\right)\Delta t=-\frac{1}{m}\lambda v_n\Delta t \\ k_2=f\left(v_n+\frac{k_1}{2},t_n+\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t=-\frac{1}{m}\lambda\left(v_n+\frac{k_1}{2}\right)\Delta t \\ k_3=f\left(v_n+\frac{k_2}{2},t_n+\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t=-\frac{1}{m}\lambda\left(v_n+\frac{k_2}{2}\right)\Delta t \\ k_4=f\left(v_n+k_3,t_n+\Delta t\right)\Delta t=-\frac{1}{m}\lambda\left(v_n+k_3\right)\Delta t \end{cases}$$

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: resistenza viscosa (II)

$$\begin{cases} k_1=-\frac{1}{m}\lambda v_n\Delta t \\ k_2=-\frac{1}{m}\lambda\left(v_n+\frac{k_1}{2}\right)\Delta t=-\frac{1}{m}\lambda v_n\Delta t+\frac{1}{2m^2}\lambda^2 v_n\Delta t^2 \\ k_3=-\frac{1}{m}\lambda\left(v_n+\frac{k_2}{2}\right)\Delta t=-\frac{1}{m}\lambda v_n\Delta t+\frac{1}{2m^2}\lambda^2 v_n\Delta t^2-\frac{1}{4m^3}\lambda^3 v_n\Delta t^3 \\ k_4=-\frac{1}{m}\lambda\left(v_n+k_3\right)\Delta t=-\frac{1}{m}\lambda v_n\Delta t+\frac{1}{m^2}\lambda^2 v_n\Delta t^2-\frac{1}{2m^3}\lambda^3 v_n\Delta t^3+\frac{1}{4m^4}\lambda^4 v_n\Delta t^4 \end{cases}$$

$$v_{n+1}\simeq v_n+\frac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right)=$$

$$=v_n-\frac{1}{m}\lambda v_n\Delta t+\frac{1}{2m^2}\lambda^2 v_n\Delta t^2-\frac{1}{6m^3}\lambda^3 v_n\Delta t^3+\frac{1}{24m^4}\lambda^4 v_n\Delta t^4=$$

$$=v_n\left(1-\frac{\lambda}{m}\Delta t+\frac{\lambda^2}{2m^2}\Delta t^2-\frac{\lambda^3}{6m^3}\Delta t^3+\frac{\lambda^4}{24m^4}\Delta t^4\right)$$

- Si osservi, tra parentesi, lo **sviluppo di Taylor dell'esponenziale** che compare nella soluzione esatta.

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: resistenza viscosa (III)

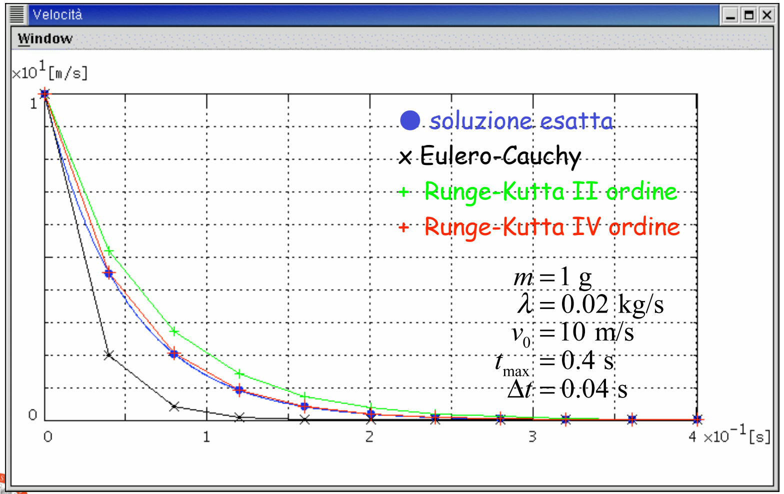
```
. . . .
v=v0;
a=-lambda*v/m;
for(t=0.0;;)
{
  // algoritmo di Runge-Kutta del IV ordine
  k1=a*deltaT;
  am1=-lambda*(v+k1/2)/m;
  k2=am1*deltaT;
  am2=-lambda*(v+k2/2)/m;
  k3=am2*deltaT;
  af=-lambda*(v+k3)/m;
  k4=af*deltaT;
  v=v+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
  a=-lambda*v/m;
  t=t+deltaT;
  if(t>tMax)break;
  dataOut.println("t="+t+"\tv="+v+"\ta="+a);
}
. . . .
```


Confronto tra i metodi: resistenza viscosa

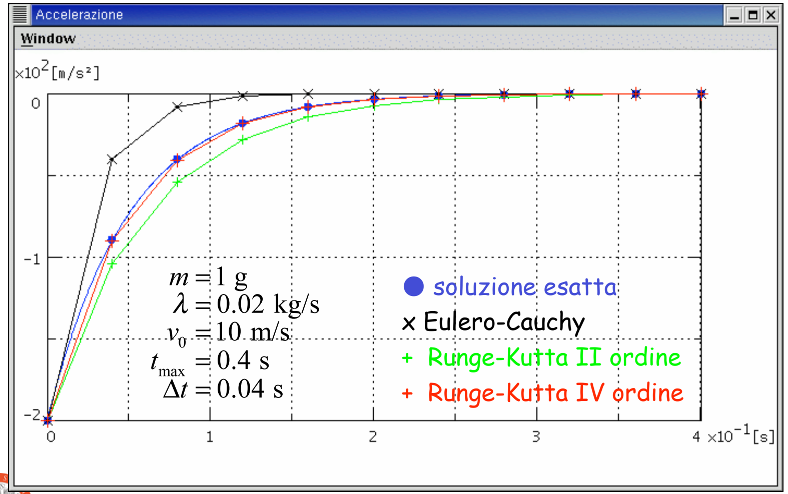
- **Confrontando** i risultati:

t[s]	v[m/s]			
	Eulero-Cauchy $\Delta t = 0.01$	Runge-Kutta II $\Delta t = 0.01$	Runge-Kutta IV $\Delta t = 0.01$	esatto
0.00	10.00000	10.00000	10.00000	10.00000
0.01	8.00000	8.20000	8.18733	8.18731
0.02	6.40000	6.72400	6.70324	6.70320
0.03	5.12000	5.51368	5.48816	5.48812
0.04	4.09600	4.52122	4.49335	4.49329
0.05	3.27680	3.70740	3.67885	3.67879
0.06	2.62144	3.04007	3.01200	3.01194
0.07	2.09715	2.49285	2.46602	2.46597
0.08	1.67772	2.04414	2.01902	2.01897
0.09	1.34218	1.67620	1.65304	1.65299

Confronto tra i metodi: resistenza viscosa. Grafico velocità



Confronto tra i metodi: resistenza viscosa. Grafico accelerazione



Equazioni di un moto unidimensionale

- Consideriamo ora il caso più generale per un **moto unidimensionale** (**forza dipendente anche dalla posizione**). L'equazione del moto del II ordine:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} F\left(x(t), \dot{x}(t), t\right)$$

è equivalente a un **sistema di 2 equazioni simultanee del I ordine**, a cui possiamo applicare i metodi visti finora.

$$\begin{cases} \dot{x} = v(t) \\ \dot{v} = \dfrac{1}{m} F\left(x(t), v(t), t\right) \end{cases}$$

- Consideriamo perciò, come **caso più generale** il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(x(t), v(t), t\right) \\ \dot{v} = g\left(x(t), v(t), t\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} f\left(x(t), v(t), t\right) = v(t) \\ g\left(x(t), v(t), t\right) = \dfrac{1}{m} F\left(x(t), v(t), t\right) \end{cases}$$

Metodo di Eulero-Cauchy – 2 equazioni

- Generalizzando quanto abbiamo visto per una sola equazione del primo ordine:

$$\dot{v}(t) = g\left(v(t), t\right) \qquad \begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + j_1 + O\left(\Delta t^2\right) \\ j_1 &= g\left(v_n, t_n\right)\Delta t \end{aligned}$$

si ha, per il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(x(t), v(t), t\right) \\ \dot{v}(t) = g\left(x(t), v(t), t\right) \end{cases}$$

l'algoritmo iterativo (**Eulero-Cauchy**):

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + k_1 + O\left(\Delta t^2\right) \\ v_{n+1} = v_n + j_1 + O\left(\Delta t^2\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = f\left(x_n, v_n, t_n\right)\Delta t \\ j_1 = g\left(x_n, v_n, t_n\right)\Delta t \end{cases}$$

Metodo di Eulero-Cauchy – 2 equazioni (II)

- Se consideriamo in particolare le **equazioni del moto**:

$$\begin{cases} \dot{x} = v(t) \\ \dot{v} = \dfrac{1}{m} F\big(x(t), v(t), t\big) \end{cases} \qquad \begin{cases} f\big(x(t), v(t), t\big) = v(t) \\ g\big(x(t), v(t), t\big) = \dfrac{1}{m} F\big(x(t), v(t), t\big) \end{cases}$$

l'algoritmo iterativo si scrive:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} x_{n+1} = x_n + k_1 + O(\Delta t^2) \\ v_{n+1} = v_n + j_1 + O(\Delta t^2) \end{cases} \\ \begin{cases} k_1 = v_n \Delta t \\ j_1 = \dfrac{1}{m} F(x_n, v_n, t_n) \Delta t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} \simeq x_n + v_n \Delta t \\ v_{n+1} \simeq v_n + \dfrac{1}{m} F(x_n, v_n, t_n) \Delta t \end{cases}$$

Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: oscillatore armonico

- Nel caso di un **oscillatore armonico**:

$$F\big(x(t), v(t), t\big) = -kx(t)$$

l'algoritmo iterativo si scrive:

$$\begin{cases} x_{n+1} \simeq x_n + v_n \Delta t \\ v_{n+1} \simeq v_n - \dfrac{k}{m} x_n \Delta t \end{cases}$$

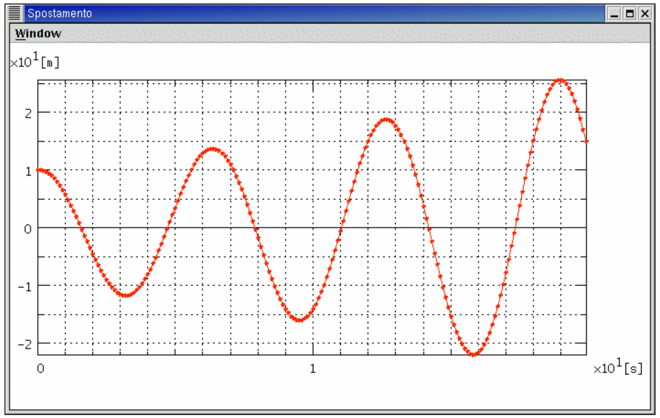
Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: oscillatore armonico (II)

- Un frammento di **codice in Java** per risolvere l'equazione del moto utilizzando il metodo di Eulero-Cauchy è il seguente:

```
. . . .
x=x0;
v=v0;
a=-k*x/m;
for(t=0.0;;)
{
  // algoritmo di Eulero-Cauchy
  v=v+a*deltaT;
  x=x+v*deltaT;
  a=-k*x/m;
  t=t+deltaT;
  if(t>tMax)break;
  dataOut.println("t="+t+"\tx="+x+"\tv="+v+"\ta="+a);
}
. . . .
```


Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: oscillatore armonico (III)

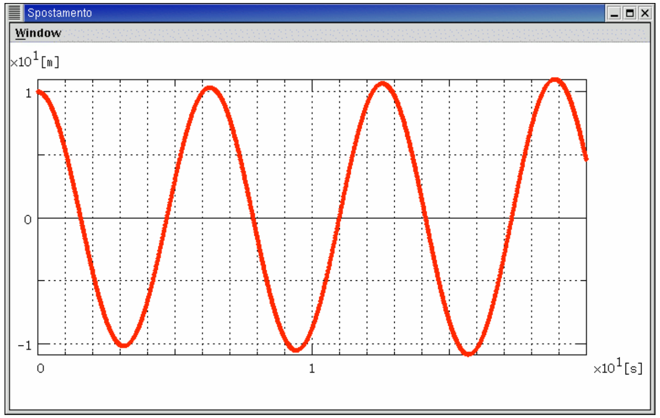
m=1 kg
k=1 N/m
x_0=10 m
v_0=0 m/s
t_{max}=20 s
Δt=0.1 s



L'ampiezza aumenta a causa dell'**errore** di approssimazione

Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: oscillatore armonico (IV)

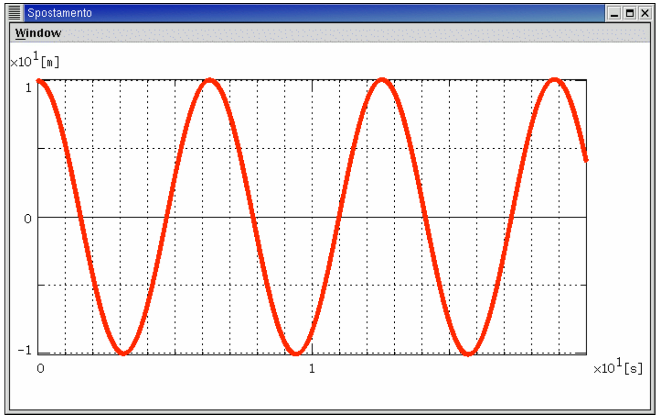
m=1 kg
k=1 N/m
x_0=10 m
v_0=0 m/s
t_{max}=20 s
Δt=0.01 s



L'errore di approssimazione è inferiore ma ancora visibilmente presente

Applicazione del metodo di Eulero-Cauchy: oscillatore armonico (V)

m=1 kg
k=1 N/m
x_0=10 m
v_0=0 m/s
t_{max}=20 s
Δt=0.001 s



L'errore di approssimazione non è più percepibile a vista

Metodo di Runge-Kutta del II ordine – 2 equazioni

- Generalizzando quanto abbiamo visto per una sola equazione del primo ordine:

$$\dot v(t)=g\left(v(t),t\right) \qquad v_{n+1}=v_n+\frac{1}{2}(j_1+j_2)+O\left(\Delta t^3\right) \qquad \begin{cases} j_1=g\left(v_n,t_n\right)\Delta t \\ j_2=g\left(v_n+j_1,t_n+\Delta t\right)\Delta t \end{cases}$$

si ha, per il sistema:

$$\begin{cases} \dot x(t)=f\left(x(t),v(t),t\right) \\ \dot v(t)=g\left(x(t),v(t),t\right) \end{cases}$$

l'algortitmo iterativo:

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+\frac{1}{2}(k_1+k_2)+O\left(\Delta t^3\right) \\ v_{n+1}=v_n+\frac{1}{2}(j_1+j_2)+O\left(\Delta t^3\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1=f\left(x_n,v_n,t_n\right)\Delta t \\ j_1=g\left(x_n,v_n,t_n\right)\Delta t \\ k_2=f\left(x_n+k_1,v_n+j_1,t_n+\Delta t\right)\Delta t \\ j_2=g\left(x_n+k_1,v_n+j_1,t_n+\Delta t\right)\Delta t \end{cases}$$

Metodo di Runge-Kutta del II ordine – 2 equazioni (II)

- Se consideriamo in particolare le **equazioni del moto**:

$$\begin{cases} f\left(x(t),v(t),t\right)=v(t) \\ g\left(x(t),v(t),t\right)=\frac{1}{m}F\left(x(t),v(t),t\right) \end{cases}$$

l'algoritmo iterativo si scrive:

$$\begin{cases} x_{n+1}\simeq x_n+\frac{1}{2}(k_1+k_2) \\ v_{n+1}\simeq v_n+\frac{1}{2}(j_1+j_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1=v_n\Delta t \\ j_1=\frac{1}{m}F\left(x_n,v_n,t_n\right)\Delta t \\ k_2=\left(v_n+j_1\right)\Delta t \\ j_2=\frac{1}{m}F\left(x_n+k_1,v_n+j_1,t_n+\Delta t\right)\Delta t \end{cases}$$

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del II ordine: oscillatore armonico

- Nel caso di un **oscillatore armonico**:

$$F\left(x(t),v(t),t\right)=-kx(t)$$

l'algoritmo iterativo si scrive:

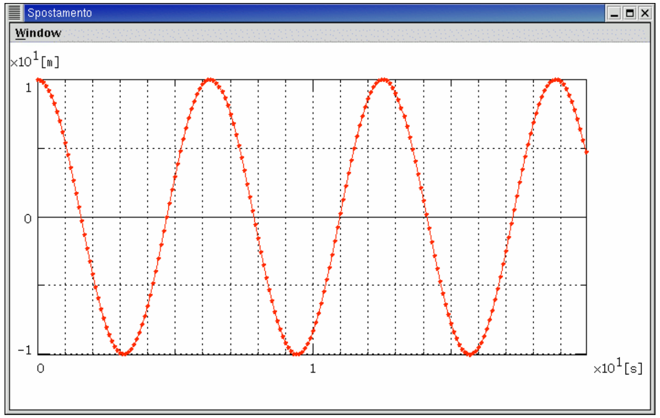
$$\begin{cases} x_{n+1}\simeq x_n+\frac{1}{2}(k_1+k_2) \\ v_{n+1}\simeq v_n+\frac{1}{2}(j_1+j_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1=v_n\Delta t \\ j_1=-\frac{k}{m}x_n\,\Delta t \\ k_2=(v_n+j_1)\Delta t \\ j_2=-\frac{k}{m}(x_n+k_1)\Delta t \end{cases}$$

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del II ordine: oscillatore armonico (II)

```
. . . .
x=x0;
v=v0;
a=-k*x/m;
for(t=0.0;;)
{
  // algoritmo di Runge-Kutta del II ordine
  k1=v*deltaT;            j1=a*deltaT;
  vf=v+j1;                af=-k*(x+k1)/m;
  k2=vf*deltaT;           j2=af*deltaT;
  x=x+(k1+k2)/2;          v=v+(j1+j2)/2;
  a=-k*x/m;
  t=t+deltaT;
  if(t>tMax)break;
  dataOut.println("t="+t+"\tx="+x+"\tv="+v+"\ta="+a);
}
. . . .
```


Applicazione del metodo di Runge-Kutta del II ordine: oscillatore armonico (III)

m=1 kg
k=1 N/m
x_0=10 m
v_0=0 m/s
t_{max}=20 s
Δt=0.1 s



Anche con Δt=0.1 s l'errore di approssimazione non è percepibile a vista

Metodo di Runge-Kutta del IV ordine – 2 equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=f\left(x(t),v(t),t\right) \\ \dot{v}(t)=g\left(x(t),v(t),t\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)+O\left(\Delta t^5\right) \\ v_{n+1}=v_n+\frac{1}{6}(j_1+2j_2+2j_3+j_4)+O\left(\Delta t^5\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1=f\left(x_n,v_n,t_n\right)\Delta t \\ k_2=f\left(x_n+\frac{k_1}{2},v_n+\frac{j_1}{2},t_n+\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ k_3=f\left(x_n+\frac{k_2}{2},v_n+\frac{j_2}{2},t_n+\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ k_4=f\left(x_n+k_3,v_n+j_3,t_n+\Delta t\right)\Delta t \end{cases} \qquad \begin{cases} j_1=g\left(x_n,v_n,t_n\right)\Delta t \\ j_2=g\left(x_n+\frac{k_1}{2},v_n+\frac{j_1}{2},t_n+\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ j_3=g\left(x_n+\frac{k_2}{2},v_n+\frac{j_2}{2},t_n+\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ j_4=g\left(x_n+k_3,v_n+j_3,t_n+\Delta t\right)\Delta t \end{cases}$$

Metodo di Runge-Kutta del IV ordine – 2 equazioni (II)

- Se consideriamo in particolare le **equazioni del moto**:

$$\begin{cases} f\left(x(t),v(t),t\right)=v(t) \\ g\left(x(t),v(t),t\right)=\dfrac{1}{m}F\left(x(t),v(t),t\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1}\simeq x_n+\dfrac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right) \\ v_{n+1}\simeq v_n+\dfrac{1}{6}\left(j_1+2j_2+2j_3+j_4\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1=v_n\Delta t \\ k_2=\left(v_n+\dfrac{j_1}{2}\right)\Delta t \\ k_3=\left(v_n+\dfrac{j_2}{2}\right)\Delta t \\ k_4=\left(v_n+j_3\right)\Delta t \end{cases} \qquad \begin{cases} j_1=\dfrac{1}{m}F\left(x_n,v_n,t_n\right)\Delta t \\ j_2=\dfrac{1}{m}F\left(x_n+\dfrac{k_1}{2},v_n+\dfrac{j_1}{2},t_n+\dfrac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ j_3=\dfrac{1}{m}F\left(x_n+\dfrac{k_2}{2},v_n+\dfrac{j_2}{2},t_n+\dfrac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \\ j_4=\dfrac{1}{m}F\left(x_n+k_3,v_n+j_3,t_n+\Delta t\right)\Delta t \end{cases}$$

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: oscillatore armonico

- Nel caso di un **oscillatore armonico**:

$$F\left(x(t),v(t),t\right)=-kx(t)$$

l'algoritmo iterativo si scrive:

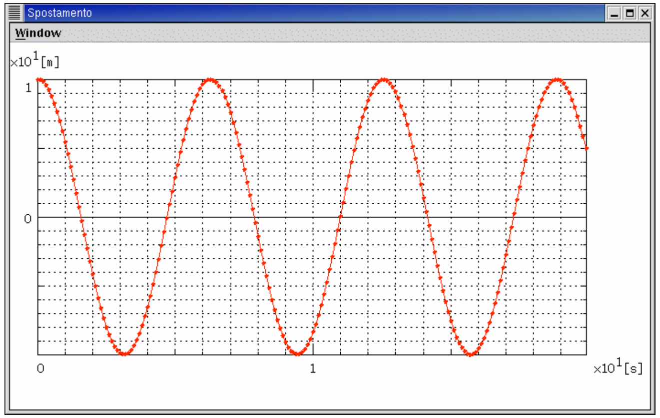
$$\begin{cases} x_{n+1}\simeq x_n+\dfrac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right) \\ v_{n+1}\simeq v_n+\dfrac{1}{6}\left(j_1+2j_2+2j_3+j_4\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1=v_n\Delta t \\ k_2=\left(v_n+\dfrac{j_1}{2}\right)\Delta t \\ k_3=\left(v_n+\dfrac{j_2}{2}\right)\Delta t \\ k_4=\left(v_n+j_3\right)\Delta t \end{cases} \qquad \begin{cases} j_1=-\dfrac{k}{m}x_n\,\Delta t \\ j_2=-\dfrac{k}{m}\left(x_n+\dfrac{k_1}{2}\right)\Delta t \\ j_3=-\dfrac{k}{m}\left(x_n+\dfrac{k_2}{2}\right)\Delta t \\ j_4=-\dfrac{k}{m}\left(x_n+k_3\right)\Delta t \end{cases}$$

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: oscillatore armonico (II)

```
. . . .
x=x0;
v=v0;
a=-k*x/m;                  // accelerazione iniziale
for(t=0.0;;)
{
  // algoritmo di Runge-Kutta IV ordine
  k1=v*deltaT;                  j1=a*deltaT;
  vm1=v+j1/2;                   am1=-k*(x+k1/2)/m;
  k2=vm1*deltaT;                j2=am1*deltaT;
  vm2=v+j2/2;                   am2=-k*(x+k2/2)/m;
  k3=vm2*deltaT;                j3=am2*deltaT;
  vf=v+j3;                      af=-k*(x+k3)/m;
  k4=vf*deltaT;                 j4=af*deltaT;
  x=x+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;  v=v+(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;
  a=-k*x/m;
  // fine algoritmo di Runge-Kutta IV ordine
  t=t+deltaT;
  if(t>tMax)break;
  dataOut.println("t="+t+"\tx="+x+"\tv="+v+"\ta="+a
}
. . . .
```


Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: oscillatore armonico (III)

m=1 kg
k=1 N/m
x_0=10 m
v_0=0 m/s
t_{max}=20 s
Δt=0.1 s



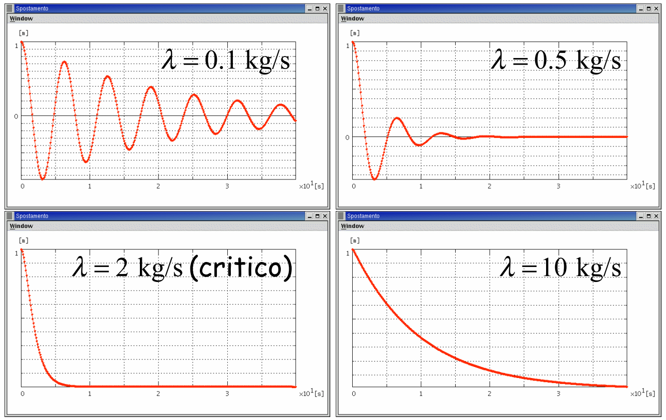
Non si percepiscono, a vista, differenze rispetto al metodo del II ordine

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: oscillatore armonico smorzato

```
. . . .
// algoritmo di Runge-Kutta IV ordine
k1=v*deltaT;      j1=a*deltaT;
vm1=v+j1/2;       am1=-k*(x+k1/2)/m-lambda*(v+j1/2)/m;
k2=vm1*deltaT;    j2=am1*deltaT;
vm2=v+j2/2;       m2=-k*(x+k2/2)/m-lambda*(v+j2/2)/m;
k3=vm2*deltaT;    j3=am2*deltaT;
vf=v+j3;          af=-k*(x+k3)/m-lambda*(v+j3)/m;
k4=vf*deltaT;     j4=af*deltaT;
x=x+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
v=v+(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;
a=-k*x/m-lambda*v/m;
// fine algoritmo di Runge-Kutta IV ordine
. . . .
```


Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: oscillatore armonico smorzato (II)

m=1 kg
k=1 N/m
x_0=1 m
v_0=0 m/s
t_{max}=40 s
Δt=0.1 s



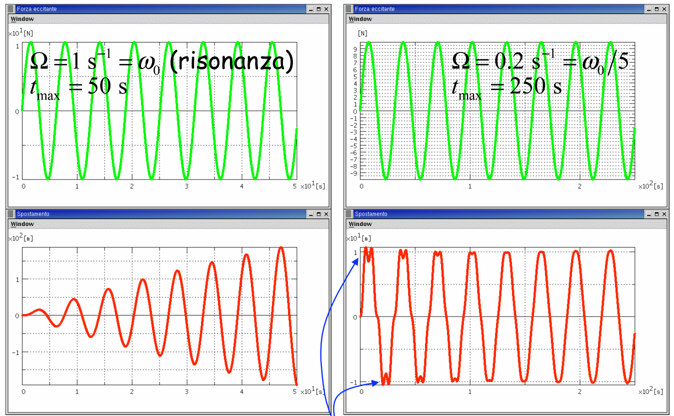
L'equilibrio si raggiunge più rapidamente con lo smorzamento critico

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: oscillatore armonico forzato

```
// algoritmo di Runge-Kutta IV ordine
k1=v*deltaT;              j1=a*deltaT;
vm1=v+j1/2;
am1=-k*(x+k1/2)/m-lambda*(v+j1/2)/m
    +f0*Math.sin(omega*(t+deltaT/2)+phi);
k2=vm1*deltaT;            j2=am1*deltaT;
vm2=v+j2/2;
am2=-k*(x+k2/2)/m-lambda*(v+j2/2)/m
    +f0*Math.sin(omega*(t+deltaT/2)+phi);
k3=vm2*deltaT;            j3=am2*deltaT;
vf=v+j3;
af=-k*(x+k3)/m-lambda*(v+j3)/m
   +f0*Math.sin(omega*(t+deltaT)+phi);
k4=vf*deltaT;             j4=af*deltaT;
x=x+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
v=v+(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;
a=-k*x/m-lambda*v/m
  +f0*Math.sin(omega*(t+deltaT)+phi);
// fine algoritmo di Runge-Kutta IV ordine
```


Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: oscillatore armonico forzato (II)

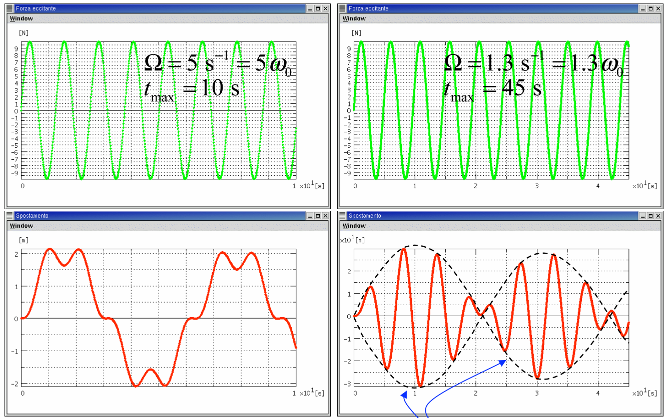
m=1 kg
k=1 N/m
λ=0.02 kg/s
f_0=10 N
φ=0
x_0=0 m
v_0=0 m/s
Δt=0.01 s



Fuori dalla risonanza si osserva l'interferenza tra stato transitorio e stato stazionario (che scompare nel tempo).

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: oscillatore armonico forzato (III)

m=1 kg
k=1 N/m
λ=0.02 kg/s
f_0=10 N
φ=0
x_0=0 m
v_0=0 m/s
Δt=0.01 s



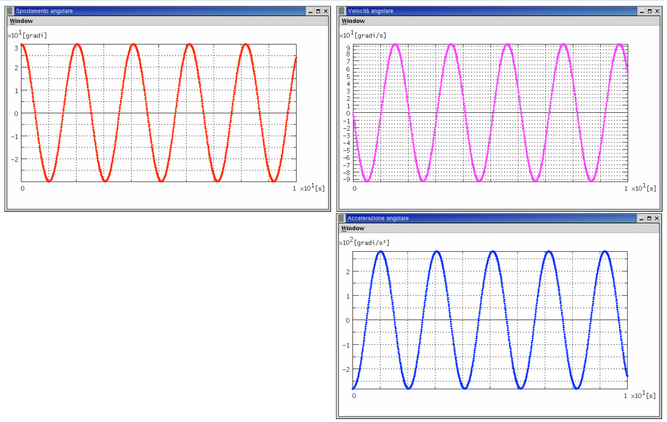
Quando la frequenza eccitante è vicina alla frequenza propria si osservano i **battimenti transitori**.

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: pendolo semplice

```
// algoritmo di Runge-Kutta IV ordine
k1=v*deltaT;       j1=a*deltaT;
vm1=v+j1/2;        am1=-g*Math.sin(x+k1/2)/l;
k2=vm1*deltaT;     j2=am1*deltaT;
vm2=v+j2/2;        am2=-g*Math.sin(x+k2/2)/l;
k3=vm2*deltaT;     j3=am2*deltaT;
vf=v+j3;           af=-g*Math.sin(x+k3)/l;
k4=vf*deltaT;      j4=af*deltaT;
x=x+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
v=v+(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;
a=-g*Math.sin(x)/l;
// fine algoritmo di Runge-Kutta IV ordine
```


Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: pendolo semplice (II)

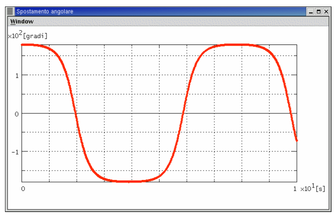
l=1 m
φ_0=30°
ω_0=0°/s
t_{max}=10 s
Δt=0.01 s



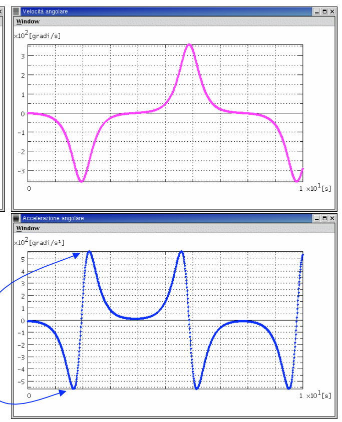
Piccole oscillazioni (**Moto di librazione armonico**)

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: pendolo semplice (III)

l=1 m
φ_0=179°
ω_0=0°/s
t_{max}=10 s
Δt=0.01 s



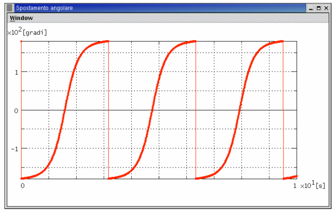
Massima accelerazione a φ = 90°

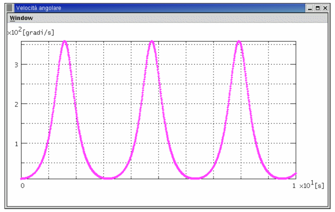


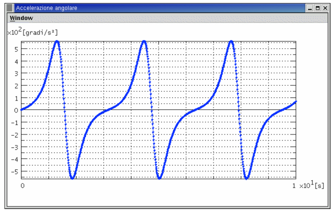
Grandi oscillazioni (**Moto di librazione non armonico**)

Applicazione del metodo di Runge-Kutta del IV ordine: pendolo semplice (IV)

l=1 m
φ_0=180°
ω_0=10°/s
t_{max}=10 s
Δt=0.01 s







Moto di rotazione non uniforme