

## Umschlagbeginn und Absaugung.

### Ein Beitrag der Grenzschichttheorie.

Von J. Pretsch

Übersicht: Für das Geschwindigkeitsprofil in der Reibungsschicht, das sich an einer längsangeströmten ebenen Platte asymptotisch einstellt, wenn überall mit konstanter Geschwindigkeit abgesaugt wird, werden exakt ohne Zuhilfenahme einer näherungsweise Geschwindigkeitsverteilung nach der Methode der kleinen Schwingungen sowohl die Stabilitätsgrenze wie die Anfachung der überlagerten Störungen berechnet und mit den Ergebnissen an der undurchlässigen Platte verglichen.

#### Gliederung.

- I. Aufgabenstellung
- II. Die indifferenten Störungen für das asymptotische Absaugeprofil an der ebenen Platte.
  - a) Die reibungslosen Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2$  der Störungsgleichung in Wandnähe,
  - b) Die reibungslosen Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2$  der Störungsgleichung bei grossem Wandabstand.
- III. Die angefachten Störungen für das asymptotische Absaugeprofil an der ebenen Platte.
  - a) Die reibungslosen Lösungen  $\varphi_1^*, \varphi_2^*$  der Störungsgleichung in Wandnähe,
  - b) Die reibungslosen Lösungen  $\varphi_1^*, \varphi_2^*$  der Störungsgleichung bei grossem Wandabstand.
- IV. Vergleich der Stabilität der Plattenreibungsschicht mit und ohne Absaugung.
- V. Zusammenfassung.
- VI. Schrifttum.

## I. Aufgabenstellung.

Der Widerstand eines umströmten Körpers lässt sich, wie Messungen [1] ergeben haben, durch Absaugung der wandnahen Teile des strömenden Mediums erheblich vermindern. Dies kann man dadurch erklären, dass die Geschwindigkeitsverteilungen in der Reibungsschicht unmittelbar nach der Absaugung völliger werden und damit die Gefahr der Ablösung zunächst aufgeschoben wird. Ist die Reibungsschicht laminar, so kann man auch sagen, dass die Stabilität des Geschwindigkeitsprofils gegenüber kleinen Störungen unmittelbar nach der Absaugung grösser wird und damit die Gefahr des Umschlags in die turbulente Strömungsform nach stromab verschoben wird, wobei eine Tendenz zur Ablösung der Laminarschicht gar nicht zu bestehen braucht.

In der vorliegenden Mitteilung soll nun an dem einfachen Beispiel der ebenen längsangeströmten Platte nachgewiesen werden, in welchem Masse die Stabilität der Reibungsschicht wächst, wenn längs der ganzen Wand mit konstanter Geschwindigkeit abgesaugt wird.

Für die undurchlässige Platte sind die Stabilitätseigenschaften bekannt. W. Tollmien [10] berechnete die Stabilitätsgrenze, die als niedrigste Reynoldszahl definiert wird, unterhalb deren keine Störung angefacht wird. H. Schlichting [7] und J. Pretsch [6] haben später auch die Stärke der Anfachung bestimmt, die die Störungsamplituden erfahren, wenn diese Stabilitätsgrenze überschritten wird.

Diese Rechnungen sollen nunmehr für dasjenige asymptotische Geschwindigkeitsprofil fortgesetzt werden, das sich in einiger Entfernung von der Plattenvorderkante einstellt, wenn man längs der ganzen Platte mit konstanter Geschwindigkeit absaugt. Dieses Geschwindigkeitsprofil haben A. Betz und H. Schlichting [9] vor kurzem angegeben; es folgt unmittelbar durch Integration der Grenzschichtgleichung, wenn man die Normalgeschwindigkeit  $v$  gleich der konstanten Absaugegeschwindigkeit  $v_0$  setzt, zu:

$$\frac{U}{U_a} = 1 - e^{-y/\delta^*} ; \quad \delta^* = -\frac{v}{v_0} , \quad (1)$$

wobei  $\delta^*$  die Verdrängungsdicke bezeichnet (Abb. 1).

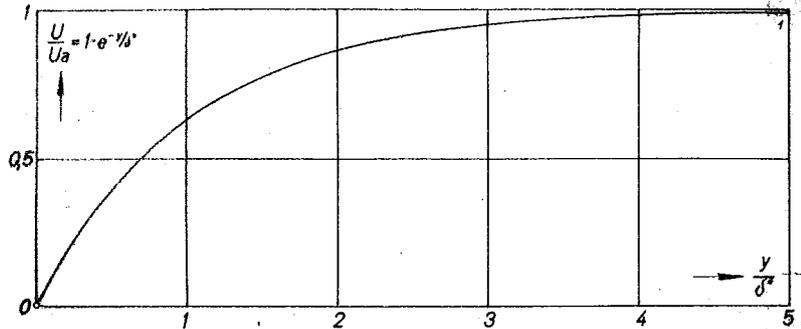


Abb. 1 Das asymptotische Geschwindigkeitsprofil bei konstanter Absaugung an der längsangeströmten Platte; zugleich die reibungslose Lösung  $\psi_{10}$ , wenn als Abszisse  $y_1$  [Gl. (8)] genommen wird.

Am umströmten Körper ist diese exakte Geschwindigkeitsverteilung die einzige bislang bekannte, die sich in einem geschlossenen analytischen Ausdruck darstellen lässt.

Aus diesem Grunde lag der Gedanke nahe, die Stabilitätsuntersuchung unmittelbar für dieses exakt gegebene Profil durchzuführen, ohne es erst durch eine andere analytische Form anzunähern, für die die Lösungen der Störungsdifferentialgleichung schon bekannt sind [4].

Bisher war man zu diesen Näherungsdarstellungen deswegen gezwungen, weil die strengen Lösungen der Grenzschichtgleichung nie durch einfache analytische Ausdrücke gegeben waren. Dabei soll von dem linearen Profil bei der Couetteströmung zwischen zwei ebenen Wänden und dem Parabelprofil der Hagen-Poiseuilleströmung im Rohr abgesehen werden, die sich als stets stabil erwiesen [2, 3, 5].

Überraschenderweise verläuft die exakte Stabilitätsuntersuchung des asymptotischen Absaugeprofils insofern wesentlich einfacher als in den bisherigen Untersuchungen mit Näherungsverteilungen, als man die Lösungen der Störungsdifferentialgleichung nur noch in Wandnähe, nicht aber mehr im Anschlussbereich an die Potentialströmung zu kennen braucht.

II. Die indifferenten Störungen für das asymptotische Absaugeprofil an der ebenen Platte.

Um die Stabilität der durch (1) gegebenen Geschwindigkeitsverteilung in der Plattenreibungsschicht zu untersuchen, überlagern wir in bekannter Weise [4] eine ebene Störungsbewegung mit der Stromfunktion:

$$\psi(x, y, t) = \psi(x, y) e^{i\alpha(x - ct)} \quad ; \quad (2)$$

hier bezeichnet  $x$  die Koordinate in Anströmrichtung,  $t$  die Zeit,  $\alpha$  die räumliche Kreisfrequenz der Störung und der Realteil von  $c = c_r + i c_i$  ihre Phasengeschwindigkeit. Der Imaginärteil  $c_i$  entscheidet über Anfachung ( $c_i > 0$ ) oder Dämpfung ( $c_i < 0$ ).

Wir betrachten in diesem Abschnitt zunächst den Fall indifferenten Schwingungen ( $c_i = 0$ ) und fragen insbesondere nach der sog. Indifferenzkurve, die in der  $\alpha$ ,  $Re^*$ -Ebene ( $Re^* = \frac{U_a \delta^*}{\nu}$ ) die stabilen und instabilen Zustände trennt.

Wie in einer früheren Arbeit [4] im einzelnen nachgewiesen wurde, erhält man aus den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für die Störungsamplitude  $\psi$  auch in dem allgemeinen Fall, dass die Normalkomponente  $V$  nicht verschwindet, die lineare Differentialgleichung 4. Ordnung:

$$(U - c)(\psi'' - \alpha^2 \psi) - U''\psi = - \frac{1}{\alpha Re^*} [\psi^{IV} - 2\alpha^2 \psi'' + \alpha^4 \psi] \quad ; \quad (3)$$

die Längen sind auf die Verdrängungsdicke  $\delta^*$  und die Geschwindigkeiten auf die Potentialgeschwindigkeit  $U_a$  bezogen und die Differentiationen nach dem Wandabstand  $y$  ausgeführt.

Die allgemeine Lösung von (3) lässt sich in der Form ansetzen:

$$\psi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + C_3 \varphi_3 + C_4 \varphi_4 \quad (4)$$

W. Tollmien und H. Schlichting haben nun gezeigt, dass das Integral  $\varphi_4$  für grosse  $y$  so stark wächst, dass es mit Rücksicht auf die Randbedingungen in der allgemeinen Lösung nicht enthalten sein kann; man hat also  $C_4 = 0$  zu setzen. Die Lösung  $\varphi_3$  ist unabhängig von der speziellen Geschwindigkeitsverteilung und ein für alle mal tabuliert [8, 4]. Die Konstanten  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  lassen sich aus dem linearen homogenen Gleichungssystem berechnen, das die drei Rand-

bedingungen  $\varphi = \varphi' = 0$  an der Wand ( $y = 0$ ) und  $\varphi' = -\alpha\varphi$  im Anschlussbereich ( $y = a$ ) an das Gebiet konstanter Geschwindigkeit darstellt. Die letzte Randbedingung folgt daraus, dass im Anschlussbereich  $U'' \approx 0$  und die Reibungswirkung vernachlässigbar ist, sodass nach (3) dort  $\varphi'' - \alpha^2\varphi = 0$ , d.h.  $\varphi = e^{-\alpha y}$  wird. Die Determinante dieses Systems muss also verschwinden:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{1w} & \varphi_{2w} & \varphi_{3w} \\ \varphi'_{1w} & \varphi'_{2w} & \varphi'_{3w} \\ \bar{\Phi}_{1a} & \bar{\Phi}_{2a} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

mit

$$\bar{\Phi}_{\nu a} = \varphi_{\nu a}' + \alpha\varphi_{\nu a} \quad (\nu = 1, 2). \quad (6)$$

Ein Glied  $\bar{\Phi}_{3a}$  tritt in der Determinante nicht auf, weil die Partikularlösung  $\varphi_3$  im Anschlussbereich bereits abgeklungen ist.

Die komplexe Gleichung (5) ist mit zwei reellen Gleichungen äquivalent, in denen die Veränderlichen  $\alpha$ ,  $Re^*$ ,  $c_r$  und  $c_i$  enthalten sind. Beschränken wir uns zunächst auf den Fall indifferenter Störungen ( $c_i = 0$ ), so erhält man aus ihnen nach Elimination von  $c_r$  eine Beziehung zwischen der Reynoldszahl  $Re^*$  und der Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\tau}{\alpha}$  der Störung. Das ist die Gleichung der gesuchten Indifferenzkurve.

Wir wenden uns zunächst der Berechnung der Integrale  $\varphi_1, \varphi_2$  zu, für die wir wegen der Konvergenzeigenschaften zwei verschiedene Entwicklungen angeben, eine in Wandnähe ( $\varphi_{1w}, \varphi'_{1w}, \varphi_{2w}, \varphi'_{2w}$ ) und eine im Anschlussbereich an die konstante Potentialgeschwindigkeit ( $\bar{\Phi}_{1a}, \bar{\Phi}_{2a}$ ).

a) Die reibungslosen Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2$  der Störungsgleichung in Wandnähe.

Nehmen wir  $\alpha Re^*$  als gross an, so vereinfacht sich (3) zu der sog. reibungslosen Störungsgleichung:

$$(U - c) (\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = 0. \quad (7)$$

Diese Differentialgleichung hat einen Pol erster Ordnung an der

Stelle  $U = c = c_r$ , der wir den "kritischen" Punkt  $y = y_0$  zuordnen.

Wir wollen nun die Konstruktion der Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2$  von (7) für die spezielle Geschwindigkeitsverteilung (1) angeben.

Wir führen dazu die neue Veränderliche:

$$y_1 = y - y_0 \quad (8)$$

ein, dann lautet die Störungsgleichung (7):

$$(e^{y_1} - 1) \left( \frac{d^2 \varphi}{dy_1^2} - \alpha^2 \varphi \right) + \varphi = 0 \quad (9)$$

Schreibt man (9) nach Multiplikation mit  $\frac{y_1^2}{e^{y_1} - 1}$  und Ausdividieren in der Form:

$$y_1^2 \frac{d^2 \varphi}{dy_1^2} + \varphi \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i y_1^i = 0, \quad (10)$$

so ist die erste Lösung  $\varphi_1$  gegeben durch:

$$\varphi_1 = y_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} e_{\nu} y_1^{\nu}, \quad (11)$$

wobei die  $e_{\nu}$  aus den  $\beta_{\nu}$  durch das Gleichungssystem:

$$e_{\nu} (\nu + 1) \nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \beta_{\nu-\mu} e_{\mu} = 0; \quad e_0 = 1 \quad (12)$$

gewonnen werden.

Die Lösung  $\varphi_2$  ist gegeben durch:

$$\varphi_2 = 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} b_{\nu} y_1^{\nu} - \varphi_1 \ln y_1 \quad \text{für } y_1 > 0, \quad (13)$$

$$\varphi_2 = 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} b_{\nu} y_1^{\nu} - \varphi_1 (\ln |y_1| - i\pi) \quad \text{für } y_1 < 0. \quad (14)$$

Das imaginäre Glied in (14) erhielt W. Tollmien durch eine Diskussion der allgemeinen Störungsgleichung (3) in der Nähe von  $U = c$ , in der sog. "kritischen" Schicht.

Die Koeffizienten der Reihenentwicklungen, die für alle Werte  $y_1$  konvergieren, sind in Zahlentafel 1 zusammengestellt.

Da die Konvergenz dieser Reihenentwicklungen nur in Wandnähe (kleine  $y_1$ ) gut ist, schlecht dagegen für den Anschlussbereich an die konstante Potentialgeschwindigkeit  $U_a$  (grosse  $y_1$ ), wurde versucht, die Lösungsaggregate  $\bar{\Phi}_{1a}, \bar{\Phi}_{2a}$  auf eine andere Weise zu gewinnen.

b) Die reibungslosen Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2$  bei grossem Wandabstand.

Man kann die reibungslosen Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2$  statt als Potenzreihen in  $y$  mit Koeffizienten, die von  $\alpha$  abhängen, auch umgekehrt nach einem Vorschlag von W. Tollmien [11] als Potenzreihen in  $\alpha$  mit Koeffizienten, die von  $y$  abhängen, darstellen, also:

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \alpha^2 \varphi_{11} + \alpha^4 \varphi_{12} + \alpha^6 \varphi_{13} + \dots \quad (15)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{20} + \alpha^2 \varphi_{21} + \alpha^4 \varphi_{22} + \alpha^6 \varphi_{23} + \dots$$

Wir schreiben zur Gewinnung der  $\varphi_{\nu n}$  ( $\nu = 1, 2$ ) die reibungslose Störungsgleichung (7) in der Form:

$$(U - \sigma)\varphi'' - U''\varphi = (U - \sigma)\alpha^2\varphi, \quad (16)$$

Die nullte Näherung  $\varphi_{10}, \varphi_{20}$  erhalten wir als Lösungen der homogenen Differentialgleichung:

$$(U - \sigma)\varphi'' - U''\varphi = 0 \quad (17)$$

zu:

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= U - \sigma, \\ \varphi_{20} &= -(U - \sigma) \int \frac{dy}{(U - \sigma)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Für die nächsten Näherungen erhalten wir die Differentialgleichungen:

$$(U - \sigma)\varphi''_{\nu n} - U''\varphi_{\nu n} = (U - \sigma)\varphi_{\nu, n-1} \quad (\nu = 1, 2), \quad (19)$$

deren Lösungen sich nach der Methode der Variation der Konstanten in der Form darstellen lassen:

$$\varphi_{\nu n} = \varphi_{10} \int \varphi_{\nu, n-1} \varphi_{20} dy - \varphi_{20} \int \varphi_{\nu, n-1} \varphi_{10} dy. \quad (20)$$

Nun erhält man für das asymptotische Absaugprofil (1) an der ebenen Platte nach einiger Integrationsarbeit:

$$\varphi_{10} = 1 - e^{-y_1} \quad (21)$$

$$\varphi_{20} = 1 + (e^{-y_1} - 1) \left[ y_1 + \ln(1 - e^{-y_1}) \right]. \quad (22)$$

$$\varphi_{11} = -\frac{5}{4} + \frac{y_1^2}{2} - e^{-y_1} \left( \frac{1}{4} + y_1 + \frac{1}{2} y_1^2 \right) + \frac{3}{2} (1 - e^{-y_1}) \ln(1 - e^{-y_1})$$

$$+ \sum_1^{\infty} \frac{(1 - e^{-y_1})^{n+1}}{n^2} + \frac{3}{4} \varphi_{10} + \frac{3}{2} \varphi_{20} \quad (21a)$$

$$\varphi_{21} = -3 - \frac{5}{4} y_1 + \frac{y_1^2}{2} - \frac{y_1^3}{6} + e^{-y_1} \left( \frac{7}{4} + \frac{19}{4} y_1 + \frac{1}{6} y_1^3 \right)$$

$$- e^{-2y_1} \left( 7 + \frac{7}{2} y_1 \right) + \frac{1}{2} e^{-3y_1} (1 + y_1) + \ln(1 - e^{-y_1}) \left[ \frac{7}{4} + \frac{3}{2} y_1 - \frac{3}{2} y_1^2 \right]$$

$$- e^{-y_1} \left( \frac{23}{4} + \frac{9}{2} y_1 - \frac{3}{2} y_1^2 \right) + e^{-2y_1} \left( \frac{9}{2} + 5y_1 \right) - e^{-3y_1} \left( \frac{1}{2} + y_1 \right) \Big]$$

$$- \ln(1 - e^{-y_1}) \sum \frac{(1 - e^{-y_1})^{n+1}}{n^2} + \sum \frac{(n+2)(1 - e^{-y_1})^n}{n^3}$$

$$+ y_1 \sum \frac{(1 - e^{-y_1})^{n+1}}{n^2} - 2e^{-y_1} \sum \frac{(n+1)(1 - e^{-y_1})^n}{n^3}$$

$$+ 2y_1 \sum \frac{e^{-ny_1}}{n} \left[ \frac{1}{n} - \frac{3n+1}{n(n+1)} e^{-y_1} + \frac{3n+5}{(n+1)(n+2)} e^{-2y_1} - \frac{e^{-3y_1}}{n+2} \right]$$

$$+ 2 \sum \frac{e^{-ny_1}}{n} \left[ \frac{1}{n^2} - \frac{(3n^2 + 2n+1)}{n^2(n+1)^2} e^{-y_1} + \frac{3n^2 + 10n+9}{(n+1)^2(n+2)^2} e^{-2y_1} \right.$$

$$\left. - \frac{e^{-3y_1}}{(n+2)^2} \right] - 3,089 \varphi_{10} - 0,75 \varphi_{20} \quad (22a)$$

Die Gleichungen (21), (22) (Abb. 1,2) sind identisch mit den Reihenentwicklungen (11), (13), wenn man in den Reihenkoeffizienten  $\alpha = 0$  setzt.

Für große Werte  $y_1$ , für die wir ja eine Darstellung der Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2$  suchen, ist:

$$\varphi_{10} \sim 1 \quad (23)$$

$$\varphi_{20} \sim 1 - y_1 \quad (24)$$

$$\varphi_{11} \sim \frac{y_1^2}{2!} - \frac{3}{2} y_1 + 2,645 \quad (23a)$$

$$\varphi_{21} \sim \frac{y_1^3}{3!} + \frac{y_1^2}{2} + 1,145 y_1 - 2,79 \quad (24a)$$

Setzen wir (23), (24), (23a) und (24a) in (20) ein, so erhalten wir nach (15):

$$\varphi_1 = \cos(\alpha y_1) [1 + 2,645 \alpha^2 + \dots] + \alpha \sin(\alpha y_1) \left[-\frac{3}{2} + \dots\right] \quad (25)$$

$$\varphi_2 = \cos(\alpha y_1) [1 - 2,79 \alpha^2 + \dots] - \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha y_1) [1 - 1,145 \alpha^2 + \dots] \quad (26)$$

und damit die einfache Beziehung:

$$\bar{\Phi}_{1a} = P(\alpha) \cdot \bar{\Phi}_{2a}; \quad P(\alpha) = -\alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 - 3,29 \alpha^3 + \dots \quad (27)$$

Damit reduziert sich die aus (5) folgende Beziehung des Randwertproblems:

$$\frac{\varphi_{3w}}{\varphi_{1w}} = \frac{\varphi_{2w} \bar{\Phi}_{1a} - \varphi_{1w} \bar{\Phi}_{2a}}{\varphi_{2w} \bar{\Phi}_{1a} - \varphi_{1w} \bar{\Phi}_{2a}} \quad (28)$$

für kleine  $\alpha$  auf die einfachere Gleichung:

$$\frac{\varphi_{3w}}{\varphi_{1w}} = \frac{P(\alpha) \varphi_{2w} - \varphi_{1w}}{P(\alpha) \varphi_{2w} - \varphi_{1w}}, \quad (29)$$

die die Lösungsaggregate  $\bar{\Phi}_{1a}, \bar{\Phi}_{2a}$  überhaupt nicht mehr enthält.

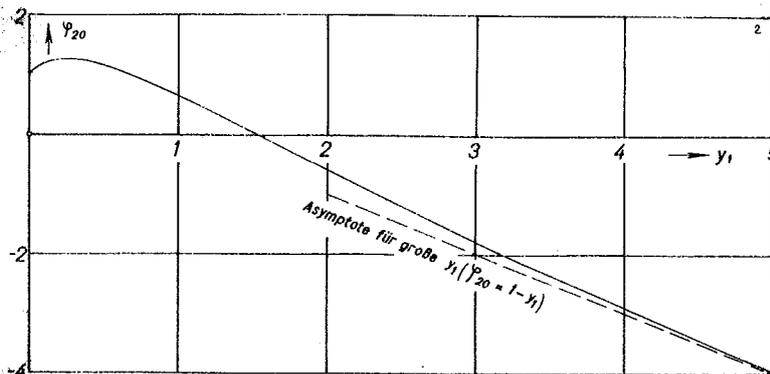


Abb. 2. Die reibungslose Lösung  $\varphi_{20}$ .

Die Lösung der Gleichung (29) geschieht in bekannter Weise, indem man den Imaginärteil der tabuliert vorliegenden Funktion

$$F(\eta_0) = - \frac{D(\eta_0)}{\eta_0} = \frac{1}{\varepsilon \eta_0} \frac{\varphi_{3w}}{\varphi'_{3w}}; \eta_0 = - \frac{y_0}{\varepsilon}; \varepsilon = (\alpha \operatorname{Re}^* U_0')^{-1/3} \quad (30)$$

über dem Realteil von  $F(\eta_0)$  aufträgt und in dieses Polardiagramm zu vorgebenem  $\alpha_r$  die Funktion

$$E(\alpha, \alpha_r) = - \frac{1}{y_0} \frac{P(\alpha) \varphi_{2w} - \varphi_{1w}}{P(\alpha) \varphi'_{2w} - \varphi'_{1w}} \quad (31)$$

einzeichnet (Abb. 3). Die Schnittpunkte  $F(\eta_0) = E(\alpha, \alpha_r)$  geben

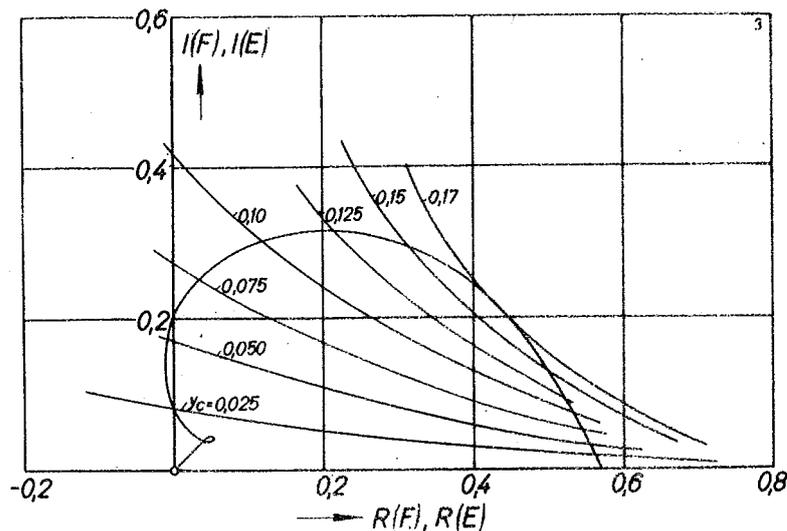


Abb. 3. Polardiagramm zur Ermittlung der Indifferenzkurve.

zunächst das zu einem bestimmten  $\alpha$  gehörende  $\eta_0$  und dann mit (30) die gesuchte Indifferenzkurve  $\alpha(\operatorname{Re}^*)$  (Abb. 4). Die Stabilitätsgrenze liegt bei der Reynoldszahl  $\operatorname{Re}^* = 5,52 \cdot 10^4$  und ist damit etwa achtzigmal grösser als bei der Plattenströmung ohne Absaugung. Die Absaugung hat also eine ausserordentlich stark stabilisierende Wirkung.

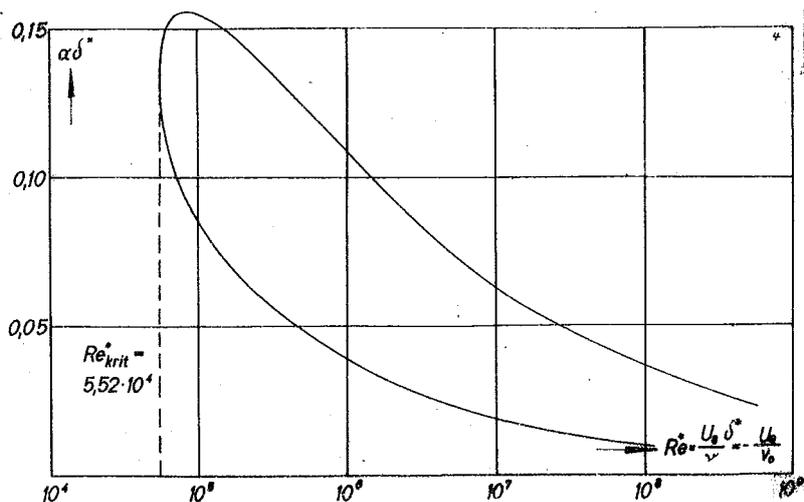


Abb. 4. Indifferenzkurve des asymptotischen Absaugeprofils.

Im folgenden Abschnitt wollen wir nun noch für den von der Indifferenzkurve umschlossenen Bereich der instabilen Störungszustände das Mass der Anfachung berechnen, das die Störungen nach Überschreiten der Indifferenzkurve erfahren.

III. Die angefachten Störungen für das asymptotische Absaugeprofil an der ebenen Platte.

Wir beschränken uns auf kleine Werte der Anfachungsgrösse  $\sigma_1$ , sodass die allgemeine Lösung der Störungsdifferentialgleichung (3) in der Form darstellbar ist:

$$\varphi^* = \sum_{\nu=1}^4 C_\nu^* \varphi_\nu^* = \sum_{\nu=1}^4 C_\nu^* \left( \varphi_\nu - \frac{10_1}{U_0} \omega_\nu \right), \quad (32)$$

wo mit  $\varphi_\nu$  die in Abschnitt II besprochenen Partikularlösungen für  $\sigma_1 = 0$  und mit  $\omega_\nu$  Zusatzfunktionen für  $\sigma_1 > 0$  bezeichnet werden.

Wir berechnen zunächst die Integrale  $\varphi_1^*$ ,  $\varphi_2^*$  bzw. die Zusatzfunktionen  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ .

a) Die reibungslosen Lösungen  $\varphi_1^*$ ,  $\varphi_2^*$  der Störungsgleichung in Wandnähe.

Die reibungslose Störungsgleichung (7) hat jetzt einen Pol erster Ordnung an der Stelle  $U = c = c_r + i c_i$ , der wir nunmehr den Punkt  $y_0^*$  der komplexen  $y$ -Ebene zuordnen. In der Umgebung dieser Singularität kann man leicht ein Fundamentalsystem durch Reihenentwicklung angeben. Um den Zusammenhang mit dem oben behandelten Fall des rein reellen  $c$  herzustellen, geben wir zunächst die Beziehung zwischen dem komplexen  $y_0^*$  und dem Wandabstand  $y_0$  der kritischen Schicht  $U = c_r$  an.

Aus 
$$U(y_0) = c_r \quad (33)$$

und 
$$U(y_0^*) = c_r + i c_i \quad (34)$$

folgt 
$$U(y_0^*) - U(y_0) = i c_i = (y_0^* - y_0) U_0' + \dots \quad (35)$$

und unter Beschränkung auf die in  $c_i$  linearen Glieder somit:

$$y_0^* = y_0 + \frac{i c_i}{U_0'} \quad (36)$$

Führen wir noch die neue Veränderliche

$$y_1^* = y - y_0^* = y - y_0 + y_0 - y_0^* = y_1 - \frac{i c_i}{U_0'} \quad (37)$$

ein, so erhalten wir nach (1) unter Benutzung von (36):

$$U - c = e^{-y_0^*/\delta^*} - e^{-y/\delta^*} = \left[ e^{-y_0/\delta^*} - i c_i \right] \left[ 1 - e^{-y_1^*} \right] \quad (38)$$

Für nicht verschwindende Anfachung lautet die reibungslose Störungsgleichung für das asymptotische Absaugeprofil an der ebenen Platte somit:

$$(e^{y_1^*} - 1) \left( \frac{d^2 \varphi_1^*}{dy_1^{*2}} - \alpha^2 \varphi_1^* \right) + \varphi_1^* = 0; \quad (39)$$

sie ist bemerkenswerterweise genau so aufgebaut wie die Gleichung (9) für  $c_i = 0$ , nur werden die Veränderlichen  $\varphi_1$ ,  $y_1$  durch  $\varphi_1^*$ ,  $y_1^*$  ersetzt. Es tritt jedoch  $c_i$  selbst in diesem besonderen Fall explizit nicht in (39) auf. Infolgedessen sind die Koeffizienten der Reihenentwicklungen:

$$\begin{aligned}\varphi_1^* &= y_1^* \sum_{\nu=0}^{\infty} e_{\nu}^* y_1^{*\nu}, \\ \varphi_2^* &= 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} b_{\nu}^* y_1^{*\nu} - \varphi_1^* (\ln |y_1^*| + i \arg y_1^*) \text{ für } \Re(y_1^*) < 0\end{aligned}\quad (40)$$

dieselben wie in den Reihenentwicklungen (11), (14), d.h. es ist:

$$e_{\nu}^* = e_{\nu}; \quad b_{\nu}^* = b_{\nu}. \quad (41)$$

Wir geben die Lösung  $\varphi_2^*$  im folgenden nur für  $\Re(y_1^*) < 0$  an, da wir sie, wie unten gezeigt wird, nur an der Wand, nicht aber im Anschlussgebiet an die Potentialströmung zu berechnen brauchen. Da allgemein für jede analytische Funktion  $f$

$$f(y_1^*) = f\left(y_1 - \frac{i\sigma_1}{U_0}\right) = f(y_1) - \frac{i\sigma_1}{U_0} \frac{df}{dy_1} \quad (42)$$

ist, erhalten wir nach (32)

$$\omega_{\nu} = \frac{d\varphi_{\nu}}{dy_1} = \varphi_{\nu}' \quad (43)$$

also nach (11) und (14)

$$\omega_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1) e_{\nu} y_1^{\nu} \quad (44)$$

$$\omega_2 = \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu b_{\nu} y_1^{\nu-1} - \ln |y_1| \varphi_1' - \frac{\varphi_1}{y_1} + i\pi \varphi_1' \text{ für } \Re(y_1^*) < 0. \quad (45)$$

Da wir an der Wand ( $y = 0$ ;  $y_1 = y_{1w} = \Re(y_{1w}^*) < 0$ ) auch die ersten Ableitungen  $\varphi_1^{*'}, \varphi_2^{*}'$  benötigen, seien auch für sie die Formeln angegeben:

$$\varphi_{\nu}^* = \varphi_{\nu}' - \frac{i\sigma_1}{U_0} \omega_{\nu}' \quad (46)$$

mit

$$\omega_{\nu}' = \varphi_{\nu}'' \quad (47)$$

also

$$\omega_1' = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu + 1)\nu e_{\nu} y_1^{\nu-1} \quad (48)$$

$$\begin{aligned}\omega_2' &= \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu - 1) b_{\nu} y_1^{\nu-2} + \frac{\varphi_1}{y_1^2} - \frac{2\varphi_1'}{y_1} - \ln |y_1| \varphi_1'' + i\pi \varphi_1''' \\ &\text{für } \Re(y_1^*) < 0.\end{aligned}\quad (49)$$

Für spätere Umformung zerlegen wir  $\varphi_{2w}$ ,  $\varphi_{2w}'$ ,  $\omega_{2w}$ ,  $\omega_{2w}'$  noch in ihren Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned}\varphi_{2w} &= A_1 + i B_1, \\ \omega_{2w} = \varphi_{2w}' &= A_2 + i B_2, \\ \omega_{2w}' &= A_3 + i B_3.\end{aligned}\tag{50}$$

b) Die reibungslosen Lösungen  $\varphi_1^*$ ,  $\varphi_2^*$  der Störungsgleichung bei grossem Wandabstand.

In Analogie zu dem in Ib geschilderten Verfahren konstruieren wir auch für  $c_1 > 0$  die Lösungen  $\varphi_1^*$ ,  $\varphi_2^*$  für grossen Wandabstand, indem wir von der Reihenentwicklung nach Potenzen von  $\alpha^2$  ausgehen. Wegen der Analogie der Differentialgleichungen (9) und (39) erhalten wir nunmehr:

$$\begin{aligned}\varphi_1^* &= \text{Cos}(\alpha y_1^*) \left[ 1 + 2,645 \alpha^2 + \dots \right] + \alpha \text{Sin}(\alpha y_1^*) \left[ -\frac{3}{2} + \dots \right] \\ \varphi_2^* &= \text{Cos}(\alpha y_1^*) \left[ 1 - 2,79 \alpha^2 + \dots \right] - \frac{1}{\alpha} \text{Sin}(\alpha y_1^*) \left[ 1 - 1,145 \alpha^2 + \dots \right]\end{aligned}\tag{51}$$

und

$$\bar{\Phi}_{1a}^* = P(\alpha) \bar{\Phi}_{2a}^*,\tag{52}$$

wo  $P(\alpha)$  wie in Gleichung (27) definiert ist.

Somit reduziert sich die Gleichung des Eigenwertproblems entsprechend Gl. (29) auf die Beziehung:

$$\frac{\varphi_{3w}^*}{\varphi_{3w}^{*'}} = \frac{P(\alpha)\varphi_{2w}^* - \varphi_{1w}^*}{P(\alpha)\varphi_{2w}^{*'} - \varphi_{1w}^{*'}}\tag{53}$$

Wir betrachten zunächst die Funktion:

$$E^* = -\frac{1}{y_0} \frac{P(\alpha)\varphi_{2w}^* - \varphi_{1w}^*}{P(\alpha)\varphi_{2w}^{*'} - \varphi_{1w}^{*'}}\tag{54}$$

die sich mit den Beziehungen (36), (50) unter Beschränkung auf die in  $c_1$  linearen Glieder nach kurzer Zwischenrechnung auf die Form bringen lässt:

$$E^*(\alpha, c_1, c_r) = E(\alpha, c_r) \left[ 1 + c_1(z_1 + i z_2) \right],\tag{55}$$

wo E durch (31) bestimmt ist und für  $z_1, z_2$  die Formeln gelten:

$$z_1 = \frac{1}{U_0'} \left[ \frac{B_2 C_1 - B_1 C_2}{B_1^2 + C_1^2} - \frac{B_3 C_2 - B_2 C_3}{B_2^2 + C_2^2} \right], \quad (56)$$

$$z_2 = \frac{-1}{U_0' y_0} - \frac{1}{U_0'} \left[ \frac{B_1 B_2 + C_1 C_2}{B_1^2 + C_1^2} - \frac{B_2 B_3 + C_2 C_3}{B_2^2 + C_2^2} \right] \quad (57)$$

mit

$$\begin{aligned} C_1 &= P(\alpha) A_1 - \varphi_{1w} , \\ C_2 &= P(\alpha) A_2 - \varphi_{1w}' , \\ C_3 &= P(\alpha) A_3 - \varphi_{1w}'' . \end{aligned} \quad (58)$$

Anschliessend betrachten wir die auf der linken Seite von (53) stehende Funktion:

$$F(\eta_0^*) = \frac{1}{\varepsilon^* \eta_0^*} \frac{\varphi_{3w}^*}{\varphi_{3w}^{\prime*}} = \frac{-D(\eta_0^*)}{\eta_0^*} \quad (59)$$

mit

$$\varepsilon^* = \left[ \alpha \operatorname{Re}^* \left( U_0' + i c_1 \frac{U_0''}{U_0'} \right) \right]^{-1/3} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \eta_0^* &= -y_0 \left( 1 + \frac{i c_1}{U_0' y_0} \right) \left[ \alpha \operatorname{Re}^* U_0' \left( 1 + i c_1 \frac{U_0''}{U_0'} \right) \right]^{+1/3} \\ &\sim \eta_0 \left[ 1 + \frac{i c_1}{U_0' y_0} \left( 1 - \frac{y_0}{3} \right) \right] . \end{aligned}$$

Da wir uns auf kleine Werte der Anfachung beschränken wollen, entwickeln wir  $F(\eta_0^*)$  in der Form:

$$F(\eta_0^*) = F(\eta_0) + (\eta_0^* - \eta_0) \left( \frac{dF}{d\eta_0^*} \right)_{\eta_0^* = \eta_0} + \dots , \quad (61)$$

wo  $F(\eta_0)$  und  $\eta_0$  durch (30) bestimmt sind. Mit (60) wird somit:

$$F(\eta_0^*) = F(\eta_0) + \frac{i c_1}{U_0' y_0} \left( 1 - \frac{y_0}{3} \right) \eta_0 \left( \frac{\partial F_R}{\partial \eta_0} + i \frac{\partial F_I}{\partial \eta_0} \right) . \quad (62)$$

Die Differentialquotienten des Real- und Imaginärteiles  $F_R$  und  $F_I$  der Funktion  $F(\eta_0)$  nach  $\eta_0$  bestimmten wir graphisch. Die Zahlenwerte sind in Zahlentafel 2 angegeben.

Um nun in dem von der Indifferenzkurve umschlossenen Instabilitätsbereich Aussagen über die Anfachung zu erhalten, bestimmen wir die Kurven konstanter Anfachung, indem wir zu konstantem  $c_1$  für mehrere Werte  $c_r$  den Imaginärteil  $F_I^*$  der Funktion  $F(\eta_0^*)$  über

ihrem Realteil  $F_r^*$  aufzeichnen und in dieses Polardiagramm zu denselben Werten  $c_i$  und  $c_r$  den Imaginärteil der Funktion  $E^*(\alpha, c_r, c_i)$  über deren Realteil auftragen (Abb. 5 - 10).

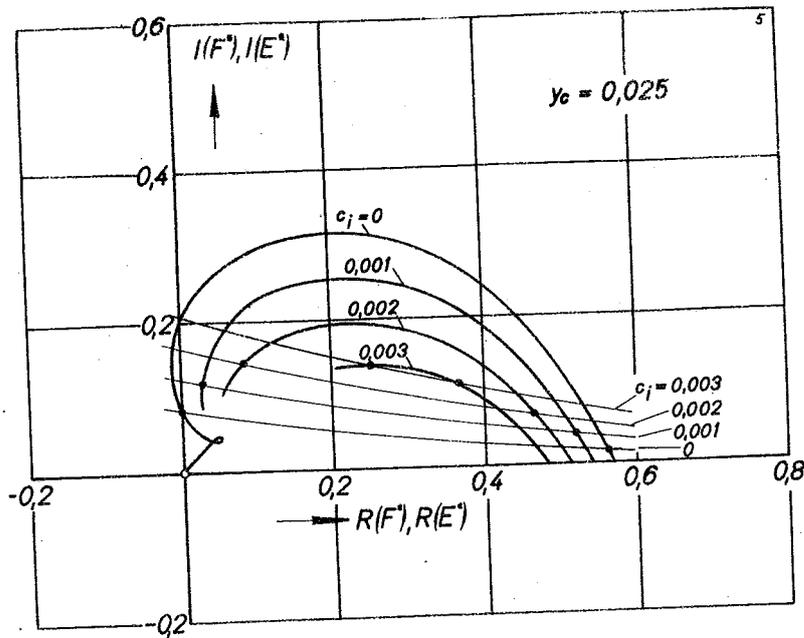


Abb. 5.

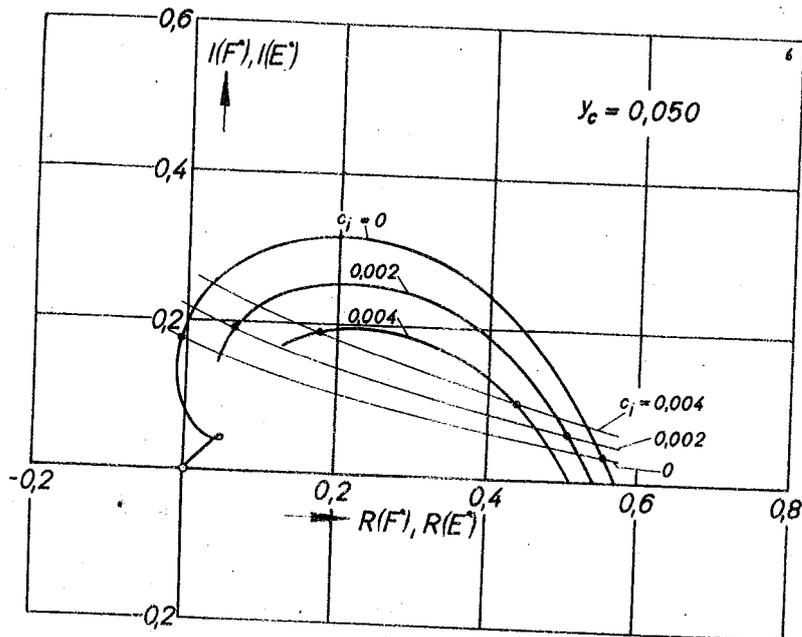


Abb. 6.

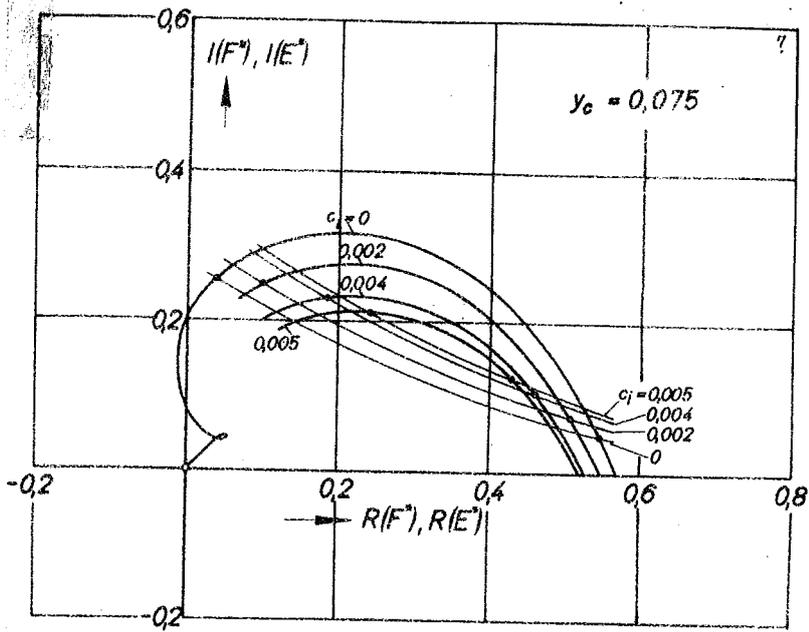


Abb. 7.

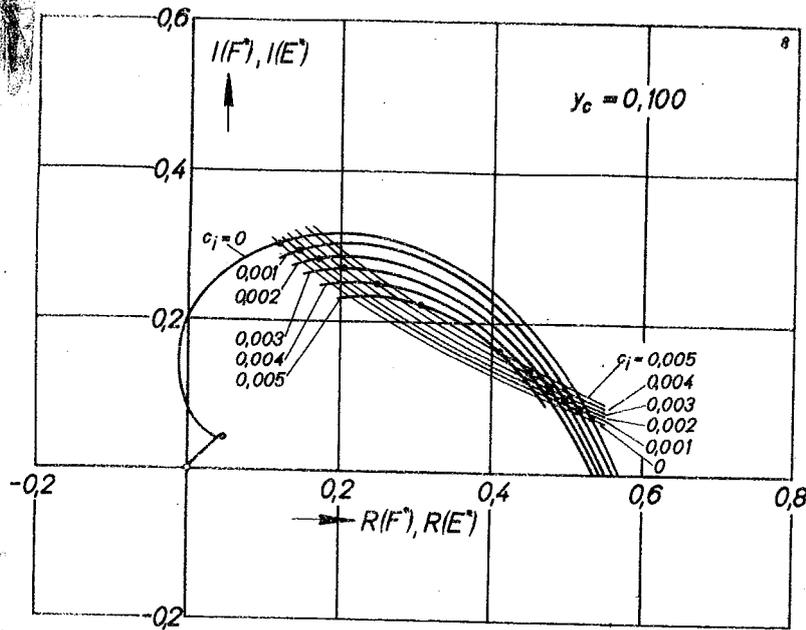


Abb. 8.

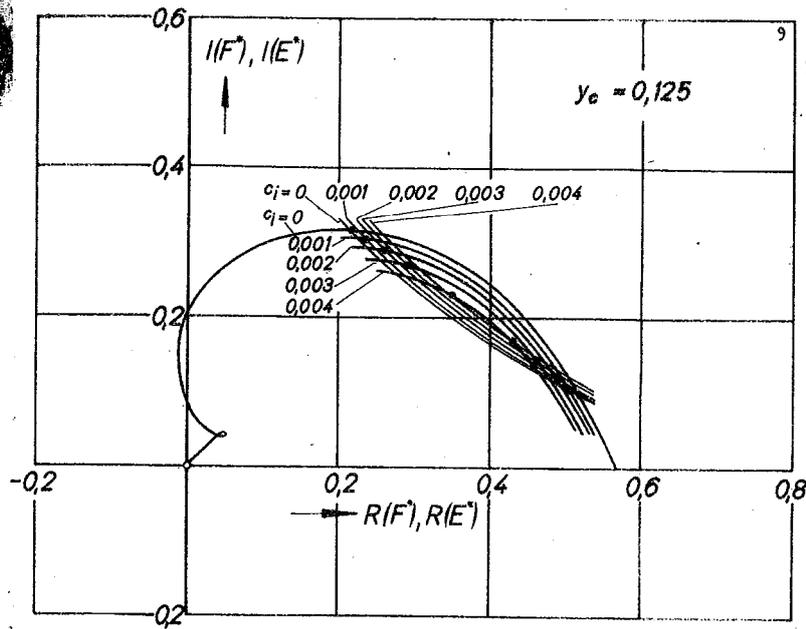


Abb. 9.

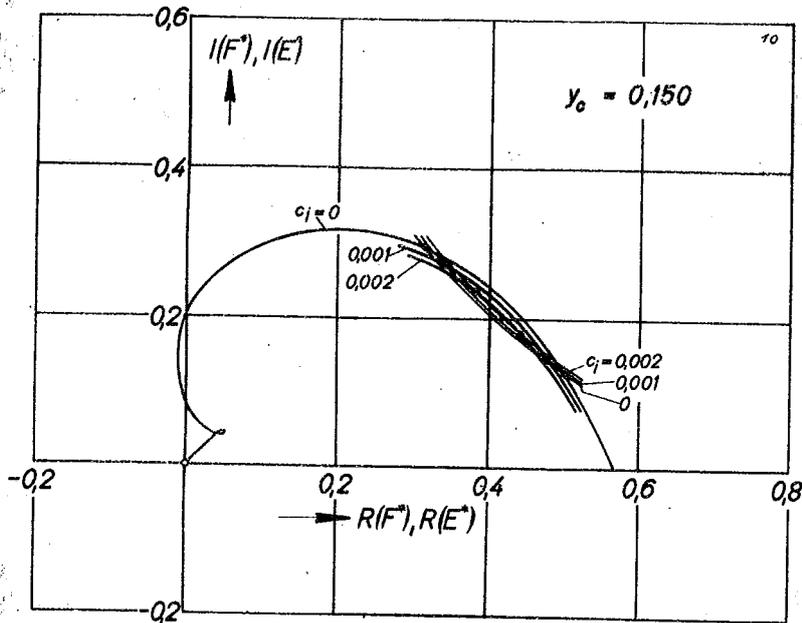


Abb. 10.

Abb. 5-10 Polardiagramme zur Ermittlung der Linien konstanter Anfachung.

Die Schnittpunkte der durch dasselbe Wertepaar  $c_r, c_i$  einander zugeordneten Funktionen  $F(\eta_0^*)$  und  $E^*(\alpha, c_r, c_i)$  geben zunächst die zu den entsprechenden  $\alpha =$  Werten gehörenden Werte  $\eta_0$  und dann mit (60) die gesuchte Kurve der konstanten Anfachung  $c_i$ . Diese Auftragung und Rechnung wird dann für andere Werte  $c_i$  wiederholt. In Abb. 11 sind die Linien konstanter Anfachung ( $\beta_i = c_i \alpha$ ) eingezeichnet; das Zeitintegral  $\int_t^{\infty} \beta_i dt$  bezeichnet das logarithmische Inkrement der Störungsanfachung. Der Maximalbetrag der Anfachung

beträgt etwa  $\left(\frac{\beta_i \delta^*}{a}\right)_{\max} = 4,65 \cdot 10^{-4}$  und damit nur 13,5% des Maximalbetrags der Anfachung bei der ebenen Platte ohne Absaugung [6]. Die stabilisierende Wirkung der Anfachung besteht also in einer starken Erhöhung der Stabilitätsgrenze einerseits und in einer Verminderung der Anfachung der instabilen Störungen andererseits.

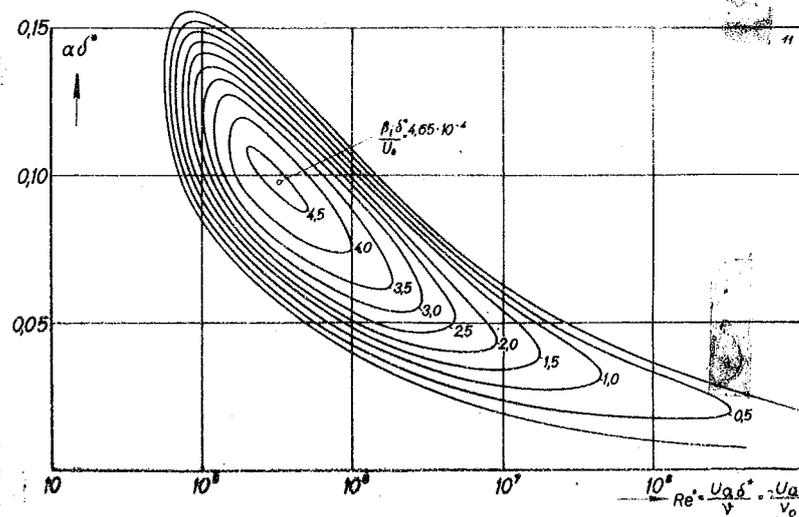


Abb. 11. Linien konstanter Anfachung für die asymptotische Plattengrenzschicht mit konstanter Absaugung.

IV. Vergleich der Stabilität der Plattenreibungsschicht mit und ohne Absaugung.

Wenn man den Verlauf der instabilen Störungen in der Plattengrenzschicht mit und ohne Absaugung im einzelnen vergleicht, so

ergibt sich neben dem bereits herausgestellten Ergebnis, dass bei Absaugung die Stabilitätsgrenze achtzigmal grösser und die maximale örtliche Anfachung etwa siebenmal kleiner wird, ein ganz verschiedenes Verhalten.

In der Plattengrenzschicht ohne Absaugung durchläuft die Störung einer bestimmten zeitlichen Kreisfrequenz  $\frac{\beta_r v}{U_a^2} = \frac{c_r}{U_a} \frac{\alpha \delta^*}{Re} = \text{const.}$  zunächst ein stabiles Gebiet (Abb. 12), tritt dann bei einer be-

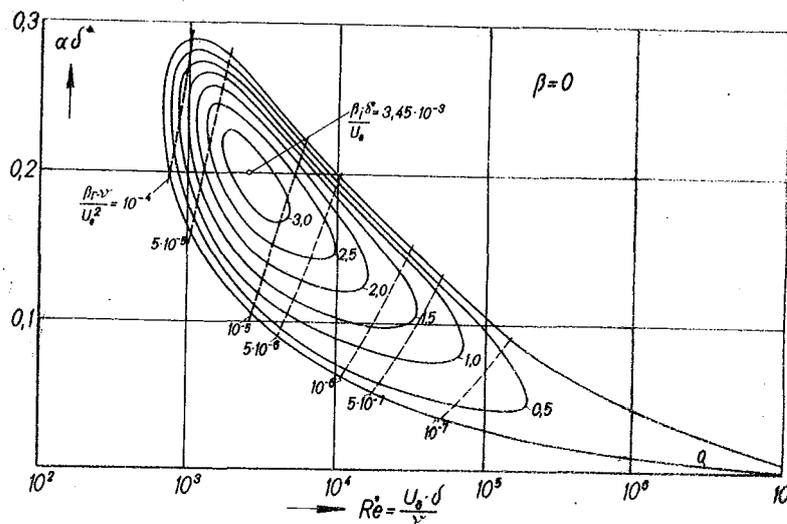


Abb. 12. Linien konstanter Anfachung für die Plattengrenzschicht ohne Absaugung (Blasius-Profil).

stimmten Reynoldszahl  $Re_1^*$  (Entfernung  $x_1$  von der Vorderkante;  $Re_1^* = 1,73 \sqrt{\frac{\nu x}{a}}$ ) in den Instabilitätsbereich ein, wird in zunächst steigendem, dann abfallendem Masse angefacht und verlässt den Instabilitätsbereich bei der Reynoldszahl  $Re_2^*$  (Entfernung  $x_2$  von der Vorderkante) und wird wieder gedämpft. Man vergleiche dazu die in Abb. 12 eingezeichneten gestrichelten Linien. In der Plattengrenzschicht ohne Absaugung gibt es also, wenn überhaupt, immer nur eine vorübergehende Anfachung, die indes natürlich genügen kann, um den Umschlag der Laminarströmung herbeizuführen.

Beim asymptotischen Absaugeprofil dagegen ist die Störung einer bestimmten Frequenz  $\beta_r$  bei einer bestimmten Absauggeschwindigkeit  $-v_0$  entweder auf ihrem ganzen Wege stromab immer stabil oder immer instabil, weil die Reynoldszahl  $Re^* = \frac{U_a \cdot \delta^*}{\nu} = -\frac{U_a}{v_0} = \frac{1}{\alpha_Q}$  ja konstant bleibt und den gesamten Strömungsbereich der asymptotischen Reibungsschicht kennzeichnet. Am gefährlichsten ist offenbar (Abb. 11) die Störung mit der Wellenlänge

$$\frac{\lambda}{\delta^*} = \frac{2\pi}{\alpha \delta^*} = \frac{2\pi}{0,975} = 6,45$$

bei dem Mengenbeiwert

$$\alpha_Q = \frac{1}{Re^*} = \frac{1}{3,24 \cdot 10^5} = 3,09 \cdot 10^{-6},$$

weil dort die Anfachung ihren Höchstwert von

$$\left(\frac{\beta_1 \delta^*}{U_a}\right)_{\max} = 4,65 \cdot 10^{-4}$$

erreicht. Dagegen sind für das asymptotische Absaugeprofil unterhalb der Stabilitätsgrenze

$$Re^*_{\text{krit}} = 5,52 \cdot 10^4$$

d.h. bei Absaugemengen

$$\alpha_Q \geq 1,82 \cdot 10^{-5}$$

die Störungen aller Frequenzen stabil.

Hieraus ist indessen noch nicht zu schließen, daß an der Saugplatte für  $\alpha_Q > 1,82 \cdot 10^{-5}$  überhaupt kein Umschlag eintreten kann. Denn es besteht immerhin die Möglichkeit, daß die Geschwindigkeitsprofile in der Anlaufstrecke zwischen Vorderkante und asymptotischer Grenzschicht bereits bei größeren  $\alpha_Q$  instabil werden.

Es muß dem Experiment überlassen werden, nachzuweisen, ob so niedrige Absaugemengen tatsächlich zur Laminarhaltung der Reibungsschicht an der ebenen Platte ausreichen.

In diesem Zusammenhang sei noch eine kurze Bemerkung über die örtlichen Widerstände der Platten mit und ohne Absaugung gestattet.

Für die Platte ohne Absaugung (Blasius-Profil) ist die Wand-schubspannung:

$$\frac{\tau_0}{\rho U_a^2} = \frac{\mu}{\rho U_a^2} \left( \frac{dU}{dy} \right)_{y=0} = 0,332 \sqrt{\frac{\nu}{U_a x}} = 0,332 \cdot 1,72 \frac{\nu}{U_a \delta^*} = \frac{0,571}{Re^*} \quad (63)$$

Für die Platte mit konstanter Absaugung erhält man aus (1) den asymptotischen Wert

$$\frac{\tau_0}{\rho U_a^2} = \frac{\mu U_a}{\delta^* \rho U_a^2} = \frac{1}{Re^*} \quad (64)$$

Bei gleicher Verdrängungsdicke und unter sonst gleichen Umständen hat also die asymptotische Wandschubspannung an der Platte mit konstanter Absaugung etwa den 1,75-fachen Betrag der örtlichen Schubspannung an der Platte ohne Absaugung. Das ist ohne weiteres aus dem völligeren Charakter des Absaugeprofils gegenüber dem Blasius-Profil zu verstehen.

Der Gesamtwiderstand der Platte mit Absaugung hängt natürlich auch von dem Verlauf der Schubspannung in der Anlaufstrecke ab, die sicher größer ist als im asymptotischen Zustand. Da die Geschwindigkeitsprofile in dieser Anlaufstrecke noch nicht bekannt sind, kann man einen integralen Widerstandsbeiwert der Platte mit konstanter Absaugung noch nicht aufstellen.

#### V. Zusammenfassung.

Um auf theoretischem Wege zur Klärung beizutragen, in welchem Masse durch Absaugung der Reibungsschicht ihr Umschlagbeginn verzögert werden kann, wurde nach der Methode der kleinen Schwingungen die Stabilität desjenigen Geschwindigkeitsprofils untersucht, das sich an einer längsangeströmten Platte asymptotisch einstellt, wenn über deren ganze Fläche mit konstanter Geschwindigkeit abgesaugt wird. Die Stabilitätsuntersuchung erfolgte erstmalig ohne Inanspruchnahme eines Näherungsprofils, indem zwei verschiedene exakte Lösungspaare der reibungslosen Störungsgleichung für die Wandnähe und für den Anschlußbereich an die Potentialgeschwindigkeit aufgestellt wurden. Die kritische Reynoldszahl  $Re^*_{krit} = \frac{U_a \delta^*}{\nu}$ , unterhalb deren alle Störungen gedämpft werden, ergibt sich zu  $5,52 \cdot 10^4$  (an der Platte ohne Absaugung ist  $Re^*_{krit} = 680$ ); umgerechnet heißt das, daß diese asymptotische Reibungsschicht für Absaugemengenbeiwerte  $\alpha_Q > 1,82 \cdot 10^{-5}$  stets stabil ist. Die maximale örtliche Anfachung der instabilen Störungen ist etwa siebenmal kleiner als der entsprechende Wert für die Platte ohne Absaugung, sodaß die Absau-

gung insgesamt eine stark stabilisierende und damit den Umschlag aufschiebende Wirkung auf die Plattengrenzschicht ausübt.

VI. Schrifttum.

- [1] H. Holstein Messungen zur Laminarhaltung der Grenzschicht durch Absaugung an einem Tragflügel. (Preisausschreiben 1940 der Lilienthal-Ges. für Luftfahrtforschung) Bericht S 10 der Lilienthal-Ges. für Luftfahrtforschung S. 17.
- [2] L. Hopf Der Verlauf kleiner Schwingungen in einer Strömung reibender Flüssigkeit. Ann. d. Phys. 44, S. 1, 1914.
- [3] R. v. Mises Zur Turbulenztheorie. Jahresber. d. Deutschen Mathem. Vereinig. 1912.
- [4] J. Pretsch Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg (Preisausschreiben 1940 der Lilienthal-Ges. für Luftfahrtforschung) Jahrbuch 1941 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. 58.
- [5] J. Pretsch Über die Stabilität einer Laminarströmung in einem geraden Rohr mit kreisförmigem Querschnitt. ZAMM 1941, S. 204.
- [6] J. Pretsch Die Anfachung instabiler Störungen in einer laminaren Reibungsschicht. (Erscheint demnächst als F.B.)
- [7] H. Schlichting Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.=Phys. Klasse 1933, S. 181.
- [8] H. Schlichting Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.=Phys. Klasse 1935, S. 47.
- [9] H. Schlichting Die Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen Luftfahrtforschung Bd. 19, S. 179, 1942.
- [10] W. Tollmien Über die Entstehung der Turbulenz Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.=Phys. Klasse 1929, S. 21.
- [11] W. Tollmien Diskussionsbemerkung zu einem Vortrag von K. Maruhn Bericht 141 der Lilienthal-Ges. für Luftfahrtforschung S. 31.

Zahlentafel 1.

Reihenoeffizienten der Lösungen  $\varphi_1, \varphi_2$  für die Grundströmung:

$$\frac{U}{U_a} = 1 - e^{-y/\delta^*}$$

$$\beta_1 = 1; \beta_2 = -\frac{1}{2} - \alpha^2; \beta_\nu = \frac{B_\nu - 1}{(\nu - 1)!}, \text{ für } \nu \geq 3 (B_\lambda = \text{Bernoullische Zahlen})$$

$$e_0 = 1; e_1 = -\frac{1}{2!}; e_2 = \frac{1}{3!} + \frac{\alpha^2}{3!}; e_3 = -\frac{1}{4!} - \frac{\alpha^2}{18};$$

$$e_4 = \frac{1}{5!} + \frac{11}{720} \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{5!}; e_5 = -\frac{1}{6!} - \frac{71}{21600} \alpha^2 - \frac{23}{10800} \alpha^4;$$

$$e_6 = \frac{1}{7!} + \frac{43\alpha^2}{75600} + \frac{233\alpha^4}{453600} + \frac{\alpha^6}{7!};$$

$$e_7 = -\frac{1}{8!} - \frac{13}{156800} \alpha^2 - \frac{1261}{12700800} \alpha^4 - \frac{11}{264600} \alpha^6;$$

.....

$$b_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2!}; b_3 = \frac{5}{24} + \frac{\alpha^2}{18}; b_4 = -\frac{1}{16} - \frac{25}{432} \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{4!};$$

$$b_5 = \frac{41}{2880} + \frac{421}{21600} \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{225};$$

$$b_6 = -\frac{1}{384} - \frac{3277}{648000} \alpha^2 - \frac{701\alpha^4}{324000} + \frac{\alpha^6}{6!};$$

.....

Zahlentafel 2.

Werte der Differentialquotienten des Real- und Imaginärteiles  
der Funktion  $F(\eta_0)$  nach  $\eta_0$ .

$\eta_0$	$\frac{\partial F_r}{\partial \eta_0}$	$\frac{\partial F_i}{\partial \eta_0}$
- 2	0,135	- 0,226
- 2,1	0,121	- 0,230
- 2,2	0,117	- 0,235
- 2,3	0,118	- 0,239
- 2,4	0,121	- 0,242
- 2,5	0,128	- 0,245
- 2,6	0,135	- 0,246
- 2,7	0,145	- 0,246
- 2,8	0,157	- 0,243
- 2,9	0,172	- 0,237
- 3,0	0,191	- 0,226
- 3,1	0,219	- 0,210
- 3,2	0,256	- 0,188
- 3,3	0,296	- 0,162
- 3,4	0,340	- 0,133
- 3,5	0,380	- 0,102

$\eta_0$	$\frac{\partial F_r}{\partial \eta_0}$	$\frac{\partial F_i}{\partial \eta_0}$
- 3,6	0,396	- 0,066
- 3,7	0,399	- 0,030
- 3,8	0,395	+ 0,010
- 3,9	0,379	0,055
- 4,0	0,360	0,100
- 4,1	0,330	0,155
- 4,2	0,297	0,205
- 4,3	0,250	0,270
- 4,4	0,180	0,338
- 4,5	0,080	0,341
- 4,6	0,020	0,282
- 4,7	- 0,026	0,226
- 4,8	- 0,045	0,182
- 4,9	- 0,057	0,150
- 5,0	- 0,062	0,118