

Zur konformen Abbildung beliebiger Profile auf  
den Kreis und Bestimmung der Druckverteilung in  
ebener inkompressibler Strömung.

Übersicht: Die Druckverteilung beliebiger Profile bei inkompressibler Strömung wird mit exakten Methoden behandelt. Vom bekannten Theodorsen-Verfahren abweichend wird ein rein numerisch durchführbares Verfahren vorgelegt, das Zwischenabbildungen auf kreisähnliche Figuren vermeidet. Die genaue Randzuordnung wird mit einem Iterationsverfahren bestimmt. Die Geschwindigkeitsverteilung kann auf zwei verschiedene Weisen ermittelt werden, entweder indem die Ableitung der iterierten genauen Randzuordnung graphisch oder numerisch ermittelt wird, oder auch unter Vermeidung dieser manchmal ungenauen Differentiation. Um die neue Methode klar herauszustellen, ist vorläufig eine Beschränkung auf symmetrische Profile vorgenommen.

Der Bericht umfasst:

12 Seiten Text

5 Abbildungen

AERODYNAMISCHE VERSUCHSANSTALT GOETTINGEN E.V.  
Institut für theoretische Aerodynamik.

Der Leiter:

*Alh Betz*

Die Bearbeiter:

*F. Riegels H. Wittich*

### I. Einleitung.

Die Berechnung der ebenen kompressiblen Strömung und die Berechnung von Grenzschichten um beliebig geformte Körper - uns interessiert besonders die Strömung um Tragflügelprofile - haben die Kenntnis der inkompressiblen Strömung zur Voraussetzung. Wenn man aber die bisherigen Verfahren zur Bestimmung solcher Strömungen überblickt, so stellt man fest, dass ihre Durchführung im allgemeinen recht mühsam ist. Daher besteht das Bedürfnis nach einer genau und doch verhältnismässig schnell arbeitenden Theorie der ebenen inkompressiblen Strömung, die bei genau gegebener Profilform auch genaue Ergebnisse liefert.

### II. Die exakte Geschwindigkeitsverteilung.

Wir behandeln diese Aufgabe mit den Methoden der konformen Abbildung, indem wir das Profil auf den Einheitskreis abbilden. Dafür wählen wir die in Abb. 1 angegebenen Koordinatensysteme und Bezeichnungen. Aus dem Potential der Strömung um einen Kreis mit der Anströmgeschwindigkeit  $V_k$  unter dem Anstellwinkel  $\alpha$  ermitteln wir unter der Bedingung, dass bei  $\varphi = 0$  ein Staupunkt liegt, den Geschwindigkeitsbetrag am Umfang des Kreises zu:

$$\begin{aligned} w_k &= 2 V_k (\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha) \\ &= 2 V_k \cos \alpha \cdot \sin \varphi + 2 V_k \sin \alpha \cdot (1 - \cos \varphi) \end{aligned} \quad (1)$$

Die beiden Glieder der letzten Darstellung können wir auch als Einzelbeiträge der beiden Komponenten  $V_k \cos \alpha$  und  $V_k \sin \alpha$  der Anströmungsgeschwindigkeit deuten.

Die konforme Abbildung des Kreises auf die Profilebene ( $z$ ) werde durch die Funktion:

$$z = z(t) = c_0 + ct + \frac{c}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \dots \quad (2)$$

geleistet, wobei die Koeffizienten für symmetrische Profile reell, für unsymmetrische komplex ( $c_n = a_n + ib_n$ ) anzusetzen sind. Für Punkte des Kreises ist  $t = e^{i\varphi}$ . Die zugeordneten Punkte des Profils ergeben durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil:

$$x = x(\varphi) = a_0 + (a_1 + a_1) \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + a_3 \cos 3\varphi + \dots \\ + (b_1 - b_1) \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + b_3 \sin 3\varphi + \dots \quad (3)$$

$$y = y(\varphi) = (a_1 - a_1) \sin \varphi - a_2 \sin 2\varphi - a_3 \sin 3\varphi - \dots \\ + (b_1 + b_1) \cos \varphi + b_2 \cos 2\varphi + b_3 \cos 3\varphi + \dots \quad (4)$$

Damit ist die Geschwindigkeit an der Profilkontur durch

$$w = w_k \cdot \frac{1}{\left| \frac{dz}{dt} \right|_{t=e^{i\varphi}}} \quad (5)$$

gegeben. Wegen der gewählten Normierung (vgl. Abb. 1) folgt als ungestörte Geschwindigkeit  $V$  in der Profilebene:

$$V = V_k \cdot \frac{1}{\left| \frac{dz}{dt} \right|_{t=\infty}} = V_k \cdot \frac{1}{c} \quad (6)$$

und damit wird die Geschwindigkeit an der Profilkontur  $y = f(x)$ :

$$\frac{w}{V} = 2c (\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha) \frac{1}{\left| \frac{dz}{dt} \right|_{t=e^{i\varphi}}} \quad (7)$$

Da am Kreis

$$\left| \frac{dz}{dt} \right| = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (8)$$

ist, können wir die Geschwindigkeit, wenn wir in (1) berücksichtigen, dass  $1 - \cos \varphi = \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi/2$  ist, auch so schreiben:

$$\frac{w}{V} = \cos \alpha \cdot \frac{2c \sin \varphi}{|x| \sqrt{1 + (dy/dx)^2}} + \sin \alpha \cdot \frac{2c \sin \varphi}{|x| \sqrt{1 + (dy/dx)^2}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad (9)$$

Es genügt also, sich vorerst mit der Anblasung des Profils bei  $\alpha = 0^\circ$  zu befassen, da die andere Komponente der Geschwindigkeit daraus durch Multiplikation mit  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$  unmittelbar folgt.

Nehmen wir einstweilen an, uns sei die Randzuordnung bekannt, zu jedem Wertepaar  $(x, y)$  gehöre ein bestimmter Kreiswinkel  $\varphi$ , so können wir, - da auch  $y = f(x)$  gegeben ist - durch Differenzieren von  $x$  nach  $\varphi$  die Geschwindigkeit aus (9) berechnen. Dies wäre eine Methode, die durchaus brauchbar ist, jedoch neben einer genauen Bestimmung der Randzuordnung einige Geschicklichkeit im Differenzieren erfordert.

Ergänzend geben wir noch die Grösse des Auftriebsanstieges  $dc_a/dc$  an. Die Zirkulation um das Profil beträgt  $\Gamma = 4\pi V_k \sin \alpha = 4\pi c V \sin \alpha$ , woraus unter Benutzung des Kutta-Joukowski'schen Satzes folgt:  $c_a = 8\pi c \sin \alpha$ , oder für kleine  $\alpha$ :  $dc_a/dc = 8\pi c$  (Profiltiefe zu 1 normiert.)

### III. Die Abbildung auf den Einheitskreis.

Wir überlegen noch, wie man auf einfache Weise die Randzuordnung gewinnen kann. Dabei beschränken wir uns zunächst auf symmetrische Profile ( $b_n = 0$ ). Die Behandlung unsymmetrischer Profile geschieht auf dieselbe Weise, soll aber einem späteren Bericht vorbehalten werden. Wir erinnern an die Gleichungen (3) und (4) und schreiben  $x(\varphi)$  in der Form:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= a_0 + 2a_1 \cos \varphi + (a_2 - a_1) \cos 2\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots \\ &= a_0 + 2a_1 \cos \varphi + h(\varphi) \end{aligned} \quad (10)$$

Durch Vergleich mit (4) stellen wir fest, dass die so als Fourierreihe eingeführte Funktion  $h(\varphi)$  die entgegengesetzt gleichen Koeffizienten wie  $y(\varphi)$  besitzt. Wir nennen  $h(\varphi)$  daher die zu  $y(\varphi)$  konjugiert harmonische Funktion und können sie bestimmen, indem wir

$$h(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\varphi') \cos \frac{\varphi' - \varphi}{2} d\varphi' \quad (11)$$

bilden, also ohne die höheren Koeffizienten im Einzelnen zu kennen. Die Konstanten  $a_0$  und  $a$  bestimmen sich aus den Bedingungen  $x(0) = \frac{1}{2}$  und  $x(\pi) = -\frac{1}{2}$  zu:

$$a_0 = -\frac{1}{2}(h(0) + h(\pi)); \quad 2a = \frac{1}{2}(1 - h(0) + h(\pi)) \quad (12)$$

Nunmehr bedienen wir uns des folgenden Iterationsverfahrens: Das Profil sei durch  $y = f(x)$  formelmässig oder numerisch genau gegeben. Wir wählen als Ausgangsnäherung  $x_0 = \frac{1}{2} \cos \varphi$ . Vermöge dieser Beziehungen sind auch die Werte  $y$  Funktionen von  $\varphi$ :  $y = y_0(\varphi)$ . Zu  $y_0(\varphi)$  bestimmen wir mittels (11)<sup>1)</sup> die konjugiert harmonische Funktion  $h_1(\varphi)$  bzw. mit (10) und (12)  $x_1(\varphi)$  und dazu mittels des vorgegebenen Zusammenhangs  $y = f(x)$  die Funktion  $y_1(\varphi)$ . Aus  $y_1(\varphi)$  folgt wieder eine konjugiert harmonische Funktion  $h_2(\varphi)$  bzw. mit (10) und (12)  $x_2(\varphi)$  usw. - Wir können

<sup>1)</sup> Wir erinnern hier daran, dass das Integral praktisch bestimmt werden kann durch Bildung der Summe

$h(\varphi) = 2 \sum \beta_{mn} y_m$   
mit festen Koeffizienten  $\beta_{mn}$  und den an festen Stellen  $x_m$  bestimmten Ordinaten  $y_m$ . Zur Berechnung der  $\beta_{mn}$  mittels mechanischer Quadraturen und für die Zahlenwerte vgl. H. Wittich: "Bemerkungen zur Druckverteilungsrechnung nach Theodorsen-Garrick," Jahrb. 1941 d. dt. Luftfahrtforsch., S. I 52

erwarten, dass dieses Verfahren konvergiert. Bei praktischen Beispielen haben sich meist schon nach der dritten Iteration kaum noch Änderungen ergeben. Bei dickeren Profilen kann es jedoch vorkommen, dass man die Konvergenz verbessern möchte. In solchen Fällen kommt man schnell zum Ziel, wenn man das arithmetische Mittel aus je zwei aufeinanderfolgenden Näherungsfunktionen, z.B.  $\bar{x}_1 = \frac{1}{2} (x_0 + x_1)$ ,  $\bar{x}_2 = \frac{1}{2} (\bar{x}_1 + x_2)$ , usw. bildet und damit weiteriteriert.

#### IV. Eine andere Methode der Geschwindigkeitsbestimmung und Uebergang zu einer einfachen Näherung.

Unbequem ist bei dieser Methode der Geschwindigkeitsbestimmung, dass  $x(\varphi)$  noch nach  $\varphi$  differenziert werden muss. Es entsteht daher die Frage nach einer anderen Möglichkeit zur Bestimmung des Ausdruckes  $2a \sin \varphi / |\dot{x}|$ , bei welcher das Differenzieren vermieden wird. Wir führen wieder die Hilfsfunktion  $h(\varphi)$  ein durch

$$x(\varphi) = a_0 + 2a \cos \varphi + h(\varphi)$$

und bilden

$$\dot{x}(\varphi) = -2a \sin \varphi + \dot{h}(\varphi) \quad (13)$$

und

$$\frac{2a \sin \varphi}{|\dot{x}|} = - \frac{1}{1 - \frac{\dot{h}}{2a \sin \varphi}} \quad (14)$$

Führen wir weiterhin einen Kreiswinkel  $\varphi_0$  ein, der durch die Beziehung

$$x = \frac{1}{2} \cos \varphi_0 \quad (15)$$

gegeben sei, so werden wir  $\varphi_0$  als Näherung für den genaueren Kreiswinkel  $\varphi$  ansehen können und zwischen beiden gilt

$$\varphi_0 = \varphi + \varepsilon \quad (16)$$

wo  $\varepsilon$  von  $\varphi$  bzw.  $\varphi_0$  abhängt<sup>2)</sup> und dem Betrage nach sicher klein gegen diese Grössen ist, und zwar auch dann noch, wenn  $\varphi$  bzw.  $\varphi_0$  gegen Null gehen. Mit diesen Grössen  $\varphi_0$  und  $\varepsilon$  ergibt sich, wenn wir in Zukunft mit einem Strich (z.B.:  $\varepsilon'$ ) eine Differentiation nach  $\varphi_0$ , mit einem Punkt (z.B.:  $\dot{\varepsilon}$ ) eine solche nach  $\varphi$  bezeichnen und beachten, dass  $\dot{\varepsilon} = \varepsilon' \dot{\varphi}_0$  und  $\dot{\varphi}_0 = 1/1-\varepsilon'$  gilt:

$$\frac{2a \sin \varphi}{|x|} = 4a (1-\varepsilon') (\cos \varepsilon - \varepsilon' \sin \varepsilon) \quad (17)$$

oder aus (14) und (17) unter Benutzung der Beziehung  $\dot{h} = \dot{h}'/1-\varepsilon'$

$$\frac{2a \sin \varphi}{|x|} = 1 + \frac{2h'}{\sin \varphi_0} \quad (18)$$

Damit haben wir die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung zurückgeführt auf die Bestimmung von  $h'$ , also auf eine Differentiation nach  $\varphi_0$ .

Diese Form legt den Gedanken nahe, die Funktion  $h'$ , die sicher im ganzen Intervall klein gegen 1 ist, in Abhängigkeit von  $\varphi_0$ , also dem uns bekannten Näherungswert des Kreiswinkels, zu bestimmen. Wir bilden also unter Verwendung von Gl. (11):

$$h' = (1-\varepsilon') \dot{h} = (1-\varepsilon') \frac{d}{d\varphi} \left( -\frac{1}{2a} \int_0^{\varphi} y(\varphi^*) \varepsilon' \frac{\varphi^* - \varphi}{2} d\varphi^* \right) \quad (19)$$

Durch Differenzieren und partielles Integrieren - was wegen der Voraussetzungen, die man über  $y(\varphi)$  machen muss, weil es sich immer um übliche Tragflügelprofile handeln soll, hier erlaubt

<sup>2)</sup> Die Einführung des kleinen Korrekturwinkels  $\varepsilon$  verdanken wir einer Anregung von A. Betz.

ist - folgt

$$h' = (1 - \varepsilon') \left( -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{d\varphi^2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi^2 - \varphi}{2} d\varphi^2 \right) \quad (20)$$

Bei Einführung von  $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon$  sowie nach weiteren Umformungen ergibt sich schliesslich - wenn wir noch mit

$$F[\theta(\varphi_0)] = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta(\varphi_0^2) \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0^2 - \varphi_0}{2} d\varphi_0^2 \quad (21)$$

abkürzen - die Darstellung:

$$h'(\varphi_0) = F\left[\frac{dy}{d\varphi_0}\right] - \varepsilon' F\left[\frac{dy}{d\varphi_0}\right] + (1 - \varepsilon') \left( F\left[\frac{d\varepsilon}{d\varphi_0} \frac{dy}{d\varphi_0} + \varepsilon(\varphi_0) \frac{d^2 y}{d\varphi_0^2}\right] - \varepsilon F\left[\frac{d^2 y}{d\varphi_0^2}\right] \right) \quad (22)$$

In dieser Form finden wir den Hauptanteil der Funktion  $h'$  im ersten Glied, das - da es nur den näherungsweise angenommenen Kreiswinkel  $\varphi_0$  enthält, leicht berechenbar ist <sup>3)</sup>. - Die übrigen Glieder stellen Korrekturen zu diesem Hauptglied dar, die (bei bekannter Randzuordnung, also bekanntem  $\varepsilon(\varphi_0)$ ) auch berechenbar sind. Für die Geschwindigkeit beim Anstellwinkel  $\alpha = 0$  ergibt sich somit:

$$\frac{w}{V} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} \left( 1 + \frac{2\varepsilon'}{\sin \varphi_0} \right) \quad (23)$$

mit  $h'$  aus (22). Daraus berechnet sich der Druck:

$$\frac{p}{q} = 1 - \left( \frac{w}{V} \right)^2 \quad (24)$$

<sup>3)</sup> vgl. Fussnote 1); statt  $y_m$  ist hier  $(dy/d\varphi_0)_m$  einzuführen.



Wir erkennen hier deutlich den Zusammenhang dieser exakten Darstellung der Geschwindigkeit längs der Kontur eines beliebigen Profils mit unserer früher mitgeteilten Näherungstheorie<sup>\*)</sup> sowie dem von T.Moriya gewählten Ansatz. Damals ergab sich

$$\frac{u}{V} = \frac{1}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}} \left( 1 - \frac{2}{\sin\varphi_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{d\varphi^*} d\varphi^* \frac{\varphi^* - \varphi_0}{2} d\varphi^* \right) \quad (25)$$

### V. Anwendungen.

Um eine Anschauung von der wirklichen Randzuordnung zu vermitteln, ist in Abb.2 der Verlauf des Verschiebungswinkels  $\epsilon$  über dem Winkel  $\varphi_0$  gezeigt und zwar in Abhängigkeit von der Profildicke bei Joukowskiprofilen (also bei einer Rücklage der maximalen Profildicke von etwa 25 - 27 v.H. der Flügeltiefe) und in Abhängigkeit von der Dickenrücklage bei verallgemeinerten Joukowskiprofilen mit einem Verhältnis Dicke/Flügeltiefe von 15 v.H. Man erkennt den ausserordentlich starken Einfluss der Dickenrücklage auf die Grösse der Winkelverschiebungen. Aufgetragen sind ferner in Abb.3 die mit Hilfe des vorne erwähnten Iterationsverfahrens für symmetrische NACA-Profilen mit 30 v.H. Dickenrücklage ermittelten Verschiebungen.

Über die Grössenverhältnisse in der allgemeinen Formel (23) gibt das in Bild 4 angegebene Beispiel des symmetrischen Joukowskiprofiles von 25 o/o Dicke Aufschluss. Dieses Bild zeigt die ohne Korrekturglied (also mit Gl. (25)) berechnete Druckverteilung im Vergleich zu den für dieses Profil auf bekannte Weise exakt berechneten Werten. Die Gleichung (23) mit Korrektur-

<sup>\*)</sup> F.Riegels u.H.Wittlich, Zur Berechnung der Druckverteilung von Profilen, Jahrb. 1942 d. dtsh. Luftf.-Forschung

glied liefert Werte, die mit den exakten übereinstimmen. Die Verteilung für das angestellte Profil wurde mit (25) unter Berücksichtigung von Gl. (9) ermittelt.

Wir stellen also fest, dass bei Nullanstellung des symmetrischen Profils bereits ohne genaue Kenntnis der Randzuordnung eine einfache und, wie numerische Rechnungen gezeigt haben, recht gute Näherung für die Geschwindigkeit an der Profilkontur angegeben werden kann. Daher wird man praktisch bei beliebigen Profilen <sup>damit auskommen,</sup> die Geschwindigkeitsverteilung  $(\frac{w}{V})_0$  für den Anstellwinkel  $\alpha = 0^\circ$  mit Gl. (25) zu bestimmen und sodann wegen (9) mit der Gleichung

$$\frac{w}{V} = \left(\frac{w}{V}_0\right) \left(\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 - \varepsilon}{2}\right) \quad (26)$$

die Geschwindigkeitsverteilung für irgend einen beliebigen Anstellwinkel zu ermitteln. Die hierbei benötigte Winkelverschiebung  $\varepsilon$  ergibt sich mit dem oben angegebenen Iterationsverfahren für  $x(\varphi)$  unter Beachtung von Gl. (15) und (16) zu  $\varepsilon = -\varphi + \arccos \cos 2x$

Abb. 5 gibt schliesslich für das Profil NACA 0015 die exakte Druckverteilung für die Anstellwinkel  $\alpha = 0^\circ$  und  $\alpha = 3,5^\circ$  nach der in Abschnitt II und III dargelegten Methode.

#### VI Zusammenfassung.

Die Bestimmung der Druckverteilung von beliebigen Profilen in ebener inkompressibler Strömung wird im Vorstehenden mittels konformer Abbildung auf den Kreis durchgeführt, wobei es gelingt die genaue Randzuordnung von Profil- und Kreispunkten durch ein numerisch leicht durchführbares Iterationsverfahren zu gewinnen, bei welchem die Kreiswinkel unverändert bleiben und jeder Ite-

rationseschrift ein etwas korrigiertes Wertepaar  $(x, y)$  liefert. Die Bestimmung der Druckverteilung ist dann auf verschiedene Weise möglich. Eine erste Methode erfordert die Differentiation der durch die Iteration gewonnenen Zuordnung  $x = x(\varphi)$ . Eine zweite Methode spaltet den Ausdruck für die Geschwindigkeit in zwei Anteile auf, von denen der Hauptbeitrag ohne Kenntnis der genauen Randzuordnung bestimmt ist. Diese Methode arbeitet bei festgehaltenen  $x$ -Werten ( $x = \frac{1}{2} \cos \varphi_0$ ) und führt kleine Kreiswinkelverschiebungen  $\varepsilon = \varphi_0 - \varphi$  ein, die jedoch nur beim angestellten Profil und bei der Berechnung eines sehr kleinen Restgliedes eingehen, welches um weniger als 1 v.H. vom Hauptglied abweicht und dessen Bestimmung daher meistens unnötig ist.

Abbildungsunterschriften.

- Bild 1:            Bezeichnungen
- Bild 2:            Der die genaue Randzuordnung festlegende Verschiebungswinkel  $\epsilon$  für Joukowski-Profile.
- Bild 3:            Der die genaue Randzuordnung festlegende Verschiebungswinkel  $\epsilon$  für NACA - Profile.
- Bild 4:            Druckverteilung eines Joukowski-Profiles nach der in IV angegebenen Näherungsmethode im Vergleich zu einer nach der bekannten Formel für Joukowski-Profile gerechneten exakten.
- Bild 5:            Exakte Druckverteilung für das Profil NACA 0015 (nach Abschnitt II und III).

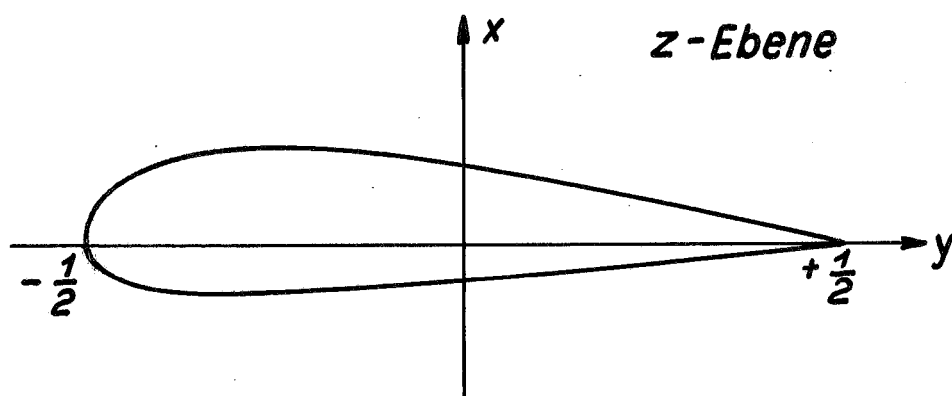
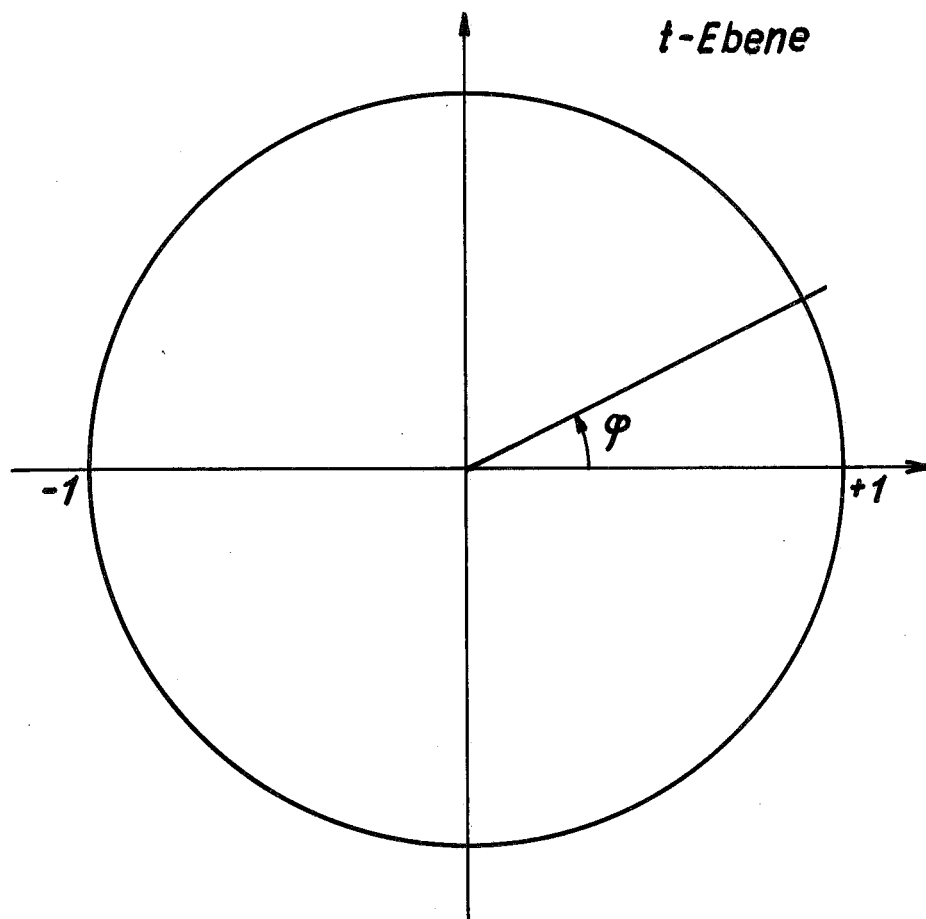


Bild 1.

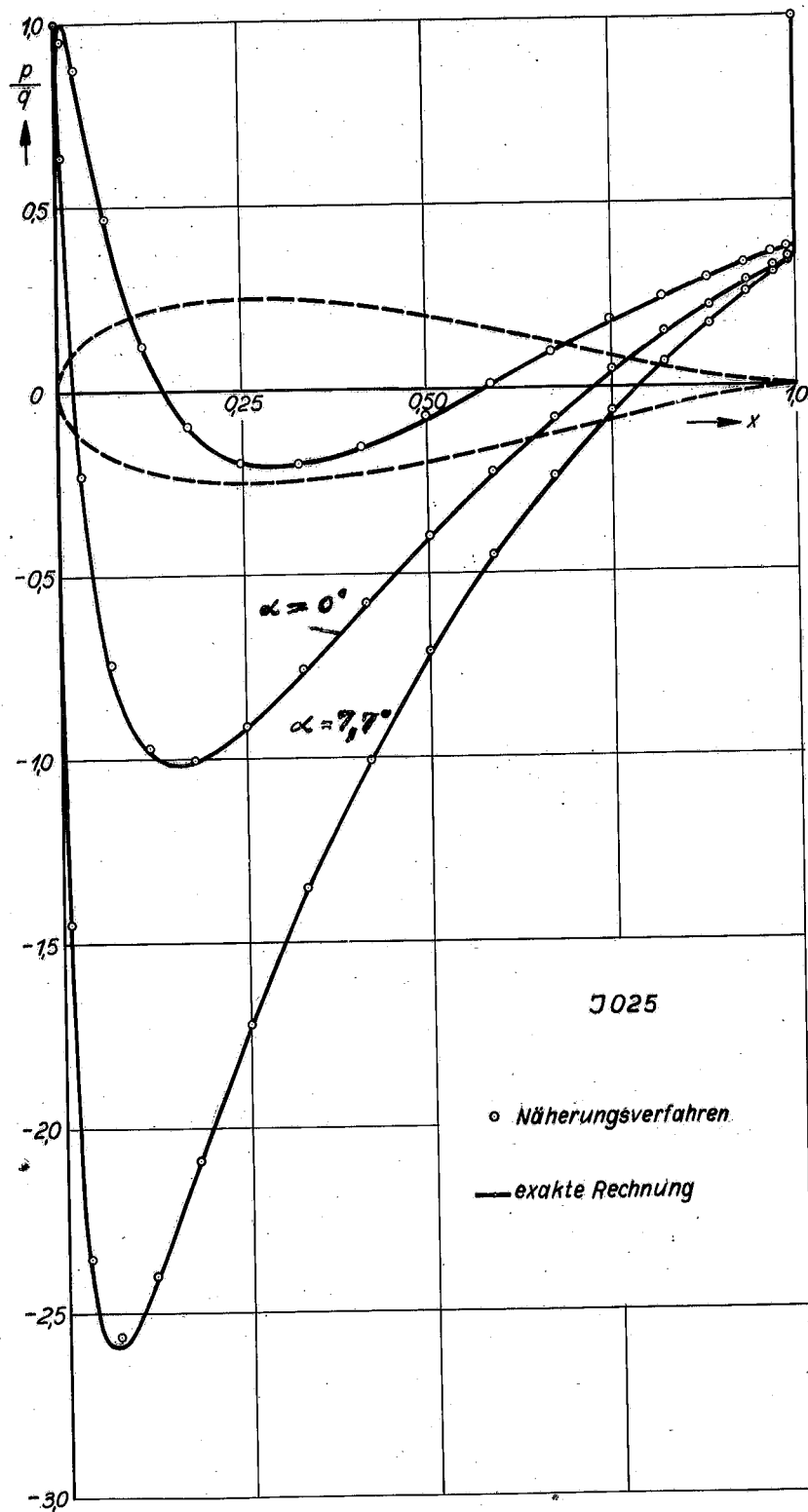


Bild 4.

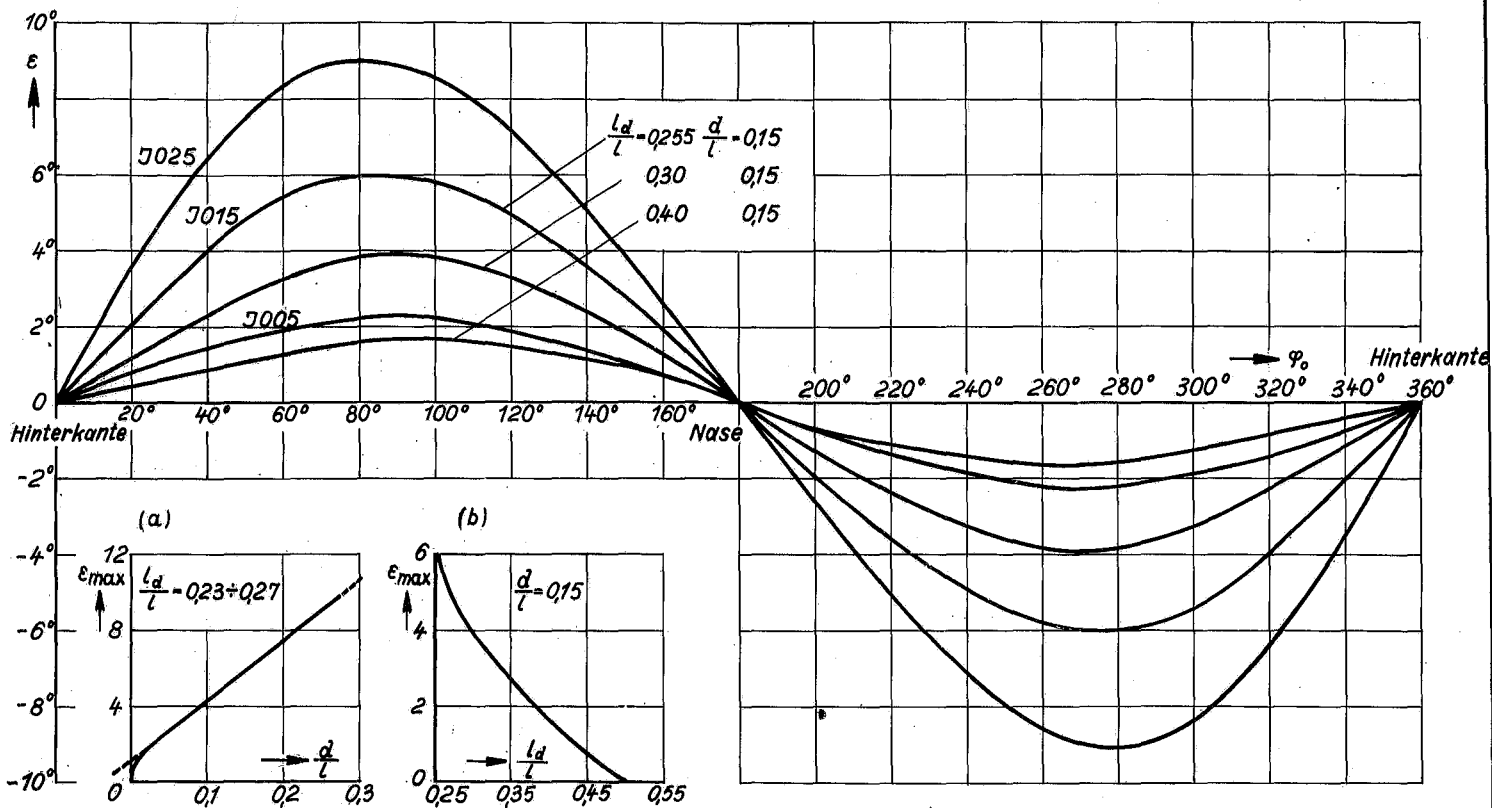


Bild 2.

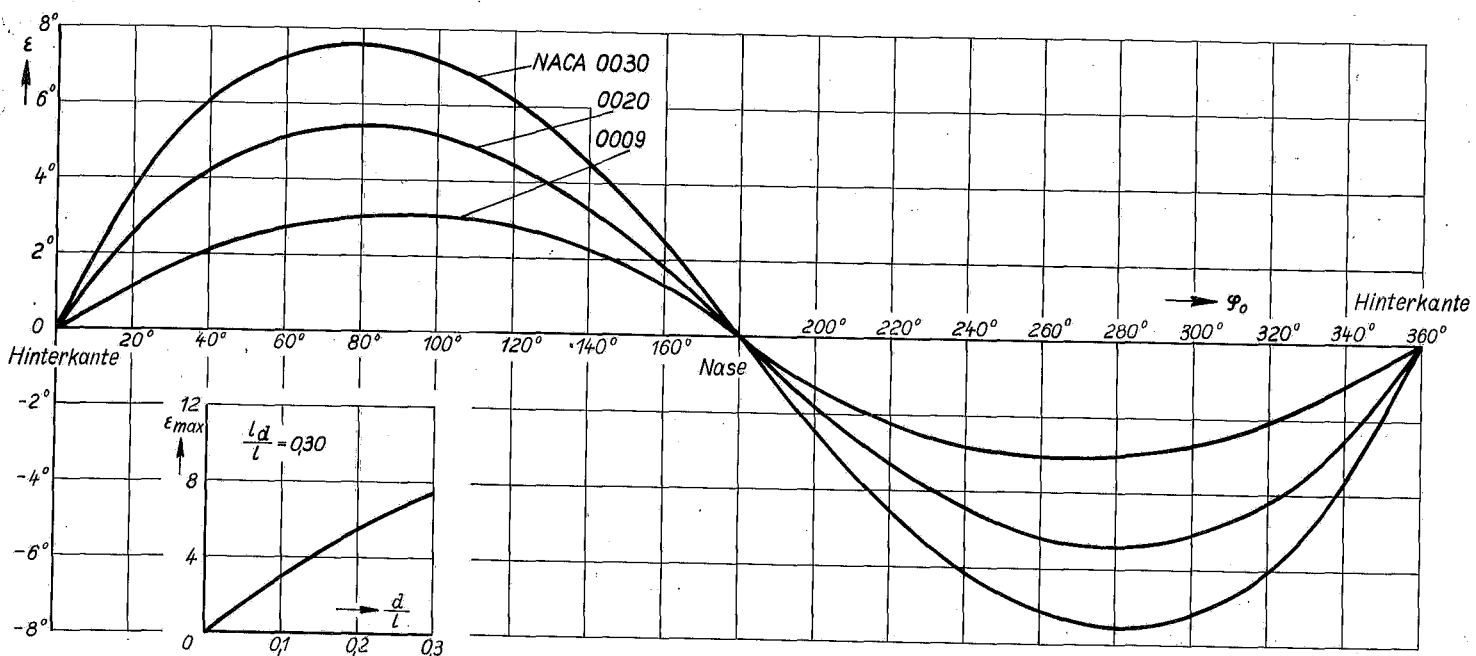


Bild 3.

42/A20

