Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen e. V. Abteilung: Wiss. 1		Bericht: 42/A/11 Auftrag: LA 117 Datum: 21.7.1942

Zur Berechnung der Druckverteilung von Profilen.

Der Bericht umfasst:

9 Seiten Text

6 Abbildungen

13 Tabellen

AERODYNAMISCHE VERSUCHSANSTALT GOETTINGEN E V.

Institut für theoretische Aerodynamik.

Der Leiter

Alb. Betz

Der Bearbeiter

F. Riegels

Zur Berechnung der Druckverteilung von Profilen.

Die folgenden Ausführungen weisen auf ein einfaches Verfahren zur Berechnung der Druckverteilung von Profilen in ebener Strömung hin, welches in der AVA seit einiger Zeit in Benutzung ist und mit wenig Aufwand gute Ergebnisse liefert. Die Grundlagen des Verfahrens sind bereits vom Verfasser und H. W i t t i c h ausführlich dargelegt [1]. Jetzt sollen lediglich einige weitere Tabellen mitgeteilt werden, die der unmittelbaren Anwendung des Verfahrens dienen und eine Ergänzung gegeben werden, die die Wirkung der dicken Saugseitengrenzschicht auf die Ausbildung des Auftriebs betrifft. Dadurch wird es möglich, auch bei hohen c_a-Werten ausserordentliche Zuverlässigkeit der Rechnung zu erzielen, wie Vergleiche mit Windkanalmessungen bestätigen.

Für ein beliebiges Profil, das durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= \frac{l}{2}\cos\varphi \\ y &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cos\nu\varphi + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin\nu\varphi \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben ist, (vgl. Abb. 1), ist die Geschwindigkeitsverteilung an der Profiloberfläche durch die geschlossene Näherungsformel

$$\frac{w}{V} = \frac{\left| \begin{array}{l} \cos\alpha\left(-\frac{1}{2}\sin\varphi - \Sigma\nu a_\nu \cos\nu\varphi - \Sigma\nu b_\nu \sin\nu\varphi + \Sigma\nu a_\nu\right) \\ +\sin\alpha\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi - \Sigma\nu a_\nu \sin\nu\varphi + \Sigma\nu b_\nu \cos\nu\varphi - \Sigma\nu b_\nu\right) \end{array} \right|}{\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\varphi + \left(-\Sigma\nu a_\nu \sin\nu\varphi + \Sigma\nu b_\nu \cos\nu\varphi\right)^2}} \tag{2}$$

anzugeben, wie M o r i y a [2] zuerst gezeigt hat. Diese Darstellung erfordert die Fourierentwicklung der Profilform nach dem durch die erste der beiden Gleichungen (1) definierten Kreiswinkel φ (Abb. 1) . Das neue AVA-Verfahren geht nun noch einen

Schritt weiter, indem es auch diese Fourierentwicklung noch vermeidet, und zwar durch Anwendung mechanischer Quadraturverfahren. Dadurch wird erreicht, dass in der Druckverteilungsberechnung nur noch die Profilkoordinaten x und y eingehen. Die Ordinaten y sind dabei an den fest vorgegebenen Stellen x zu nehmen. Diese Stellen sind bei gleichen Winkelabständen φ gewählt, so dass die Punkte in der Umgebung der Profilnase und der Profilhinterkante dichter als in Profilmitte liegen. [1]

Ist die Anzahl der vorgegebenen Punkte gleich 2N und ist an der Stelle x_m [2] der Wert der Profilordinate auf der Saugseite durch y_m, der auf der Druckseite durch y_{2N-m} gegeben (Abb. 2), so werden die Fourierreihen der Gl. (2) durch die folgenden endlichen Summen ersetzt, deren Glieder aus den Produkten der Profilordinaten mit festen, ein für allemal berechneten Koeffizienten bestehen:

$$
\begin{aligned}
\sum \nu b_\nu \sin \nu\varphi &= \sum_{m=1}^{N} A_{mn}(y_m - y_{2N-m}) = A_n \\
\sum \nu b_\nu \cos \nu\varphi &= \sum_{m=1}^{N} B_{mn}(y_m - y_{2N-m}) = B_n \qquad (3)\\
\sum \nu a_\nu \cos \nu\varphi &= \sum_{m=1}^{N} C_{mn}(y_m + y_{2N-m}) = C_n \\
\sum \nu a_\nu \sin \nu\varphi &= \sum_{m=1}^{N} D_{mn}(y_m + y_{2N-m}) = D_n
\end{aligned}
$$

In Ergänzung von [1] seien hier die Formeln für die Koeffizienten A_{mn} bis D_{mn} allgemein für jede beliebige Punktzahl 2N an-

[1] Weitere Zwischenpunkte für die Druckverteilung lassen sich leicht durch Interpolation zwischen den unten eingeführten Werten A(n), B(n), C(n) und D(n) gewinnen. (Aus Tabelle A bis D)

[2] Die x_m bzw. x_n sind in den Tabellen so gewählt, dass x=0 der Profilnase und x=1 der Profilhinterkante entspricht (also anders als in Gl. (1) !).

gegeben.

$$A_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}-1}{4N}\left[\frac{1}{1-\cos\frac{\pi(m-n)}{N}} - \frac{1}{1-\cos\frac{\pi(m+n)}{N}}\right] \text{ für } m \neq n$$

$$A_{mn} = \frac{N}{4} \qquad \text{für } m = n$$

$$B_{mn} = \frac{(-1)^{m+n+1}}{4}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(m-n)}{2N} + \operatorname{ctg}\frac{\pi(m+n)}{2N}\right] \text{ für } m \neq n$$

$$B_{mn} = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi m}{N} \text{ für } m = n$$

$$C_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}-1}{4N}\left[\frac{1}{1-\cos\frac{\pi(m-n)}{N}} + \frac{1}{1-\cos\frac{\pi(m+n)}{N}}\right] \text{ für } m \neq n \qquad (4)$$

$$C_{mn} = \frac{N}{4} \qquad \text{für } m = n$$

$$D_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}}{4}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(m-n)}{2N} - \operatorname{ctg}\frac{\pi(m+n)}{2N}\right] \text{ für } m \neq n$$

$$D_{mn} = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi m}{N} \qquad \text{für } m = n$$

Unter Benutzung der eingeführten Grössen schreibt sich Gl. (2) in der Form

$$\frac{w}{V} = \frac{\left|\cos\alpha\,(a_n - A_n - C_n + C_0) + \sin\alpha\,(b_n + B_n - B_0 - D_n)\right|}{\sqrt{c_n + (B_n - D_n)^2}} \qquad (5)$$

oder abgekürzt

$$\frac{w}{V} = |S| = |A\cos\alpha + B\sin\alpha|$$

bzw. (6)

$$\frac{w}{V} = |S| = |C\cos\alpha + D\sin\alpha|$$

für symmetrische bzw. beliebig gewölbte Profilformen. Die Ausdrücke A,B,C, D werden mit den beiliegenden Tabellen, die bisher für N = 6, N = 12 und N = 18 aufgestellt wurden, auf einfache Weise berechnet.

Zur Bestimmung der Anstellwinkelempfindlichkeit $dc_a/d\alpha$ und des Nullauftriebswinkels α_o dienen beim vorliegenden Verfahren die Formeln

$$\frac{dc_a}{d\alpha} = 2\pi(1 + 2B_o) \tag{7}$$

$$\alpha_o = \operatorname{arctg} \frac{C_o}{0,5 + B_o} \quad [3] \tag{8}$$

Wie die ganze Theorie, so stellen auch diese Formeln Näherungswerte dar, die von den exakten Werten nur ganz wenig abweichen. Vergleiche der Druckverteilung mit Messungen oder anderen Theorien haben daher zweckmässig bei gleichen Auftriebsbeiwerten stattzufinden.

Sollten gelegentlich kleine Schwankungen in den Druckverteilungen auftreten, so kann man mit guter Genauigkeit eine Kurve durch die berechneten Werte so hindurchziehen, dass die Streuung gleichmässig nach beiden Seiten erfolgt. Will man diese geringen Schwankungen ganz vermeiden, so berechne man die Werte B_n bzw. bei gewölbten Profilen $(B_n - D_n)$ nicht mittels der Tabellen B und D, sondern benutze die Beziehung $B_n - D_n = dy/d\varphi$; man trage y über φ (durch Gl. (1) definiert !) auf und bestimme die Tangenten graphisch oder numerisch.[4]

[3] B_o und C_o sind die Werte von B_n und C_n bei n=0 in Tabelle B u.C.

[4] Entsprechend kann man die Werte A_n bzw. C_n durch das ctg-Integral $-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dy}{d\varphi'} \operatorname{ctg}\frac{\varphi'-\varphi}{2}\, d\varphi'$ ersetzen, das mit einer ähnlichen Tabelle bequem berechnet werden kann [1, 3].

Die Schwankungen treten dann nicht mehr auf und es ergeben sich vollkommen glatt liegende Kurven.

Abb.3 gibt einen Vergleich von Rechnungen mit verschiedener Punktzahl am Beispiel des Joukowski-Profils J 215 , wobei die Punkte für N = 6 zuerst ausgezogen und nachträglich dann erst die Punkte für N = 18 und nach der exakten Theorie eingetragen wurden. In Abb.4 ist für das Profil NACA 23012 ein Vergleich mit Messungen für mehrere Auftriebsbeiwerte c_a durchgeführt, wobei der Anstellwinkel mit (7) und (8) jeweils so bestimmt ist, dass der gemessene c_a-Wert erreicht wurde. Die Uebereinstimmung ist wohl für die meisten praktischen Fälle völlig ausreichend.

Bei grösseren c_a-Werten weisen die Messungen im allgemeinen an der Saugseite etwas grössere Unterdruckspitzen und einen etwas steileren Druckanstieg auf als die Rechnung bei gleichem c_a ergibt. Dies ist dadurch bedingt, dass die Grenzschicht auf der Saugseite des Profils die Ausbildung der Zirkulation beeinflusst. Um diesem Verhalten Rechnung zu tragen, überlagert man nach B e t z eine, dem gemessenen Auftrieb entsprechende, geringere Zirkulation, sodass der hintere Staupunkt etwas auf die Saugseite des Profils verlegt wird, wobei man die entstehende Umströmung der Hinterkante in Kauf nimmt.
P i n k e r t o n [4] erfüllt auch die Abflussbedingung noch, indem er die gewünschte Auftriebsverminderung durch eine nachträgliche kleine Aenderung des Profils - etwa in der in Abb.5a skizzierten Weise durch Hochbiegen der Hinterkante - erhält, sodass die neue Hinterkante etwa in der Mitte des bei dem betreffenden Anstellwinkel vorhandenen Totwassergebietes liegt.

Durch sinngemässe Anwendung der von R.M. Pinkerton und A. Walz [5] eingeführten Ansätze auf das neue Verfahren ergibt sich für die abgeänderte Druckverteilung die Gleichung

$$\frac{w}{V} = \frac{1 - \frac{\Delta\alpha}{2}\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\varphi + \left(-\sum \nu a_\nu \sin\nu\varphi + \sum \nu b_\nu \cos\nu\varphi\right)^2}} \times \qquad (9)$$

$$\times \left| \begin{array}{l} \cos(\alpha-\alpha')\left(-\frac{1}{2}\sin\varphi - \sum \nu a_\nu \cos\nu\varphi - \sum \nu b_\nu \sin\nu\varphi\right) + \sum \nu a_\nu \cdot \cos(\alpha-\Delta\alpha) \\ + \sin(\alpha-\alpha')\left(\frac{1}{2}\cos\varphi - \sum \nu a_\nu \sin\nu\varphi + \sum \nu b_\nu \cos\nu\varphi\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum \nu b_\nu\right)\sin(\alpha-\Delta\alpha) \end{array} \right|$$

bzw. mit den oben eingeführten Abkürzungen

$$\frac{w}{V} = \left(1 - \frac{\Delta\alpha}{2}\sin\varphi\right) \left| \begin{array}{l} \left(C - \frac{C_0}{\sqrt{F(u)}}\right)\cos(\alpha-\alpha') + \left(D + \frac{\frac{1}{2} + B_0}{\sqrt{F(u)}}\right)\sin(\alpha-\alpha') \\ \quad + \frac{C_0}{\sqrt{F(u)}}\cos(\alpha-\Delta\alpha) - \frac{\frac{1}{2}+B_0}{\sqrt{F(u)}}\sin(\alpha-\Delta\alpha) \end{array} \right| \qquad (10)$$

Dabei ist φ der durch Gl. (1) definierte Kreiswinkel und

$$\alpha' = \frac{\Delta\alpha}{2}(1+\cos\varphi)$$

zu setzen. $\Delta\alpha$ ist ein vom Anstellwinkel abhängiger Korrekturwinkel (vgl. Abb. 5b) der, wie A. Walz festgestellt hat, in erster Näherung nicht mit der Profilform variiert und in Abb. 5c dargestellt ist. Wenn man berücksichtigt, dass $\Delta\alpha$ ein kleiner Winkel ist, so kann man $\cos\Delta\alpha = 1$ und $\sin\Delta\alpha = \Delta\alpha$ setzen und erhält für Gl. (10) die linearisierte Darstellung:

$$\frac{w}{V} = \left| S' + \Delta\alpha\left(\frac{1-x_u}{2\sqrt{F(u)}} + x_u\left(C\sin\alpha - D\right) + a_u S'\right)\right| \qquad (11)$$

bzw., wenn man noch auf den Druck übergeht:

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{p}{q}\right)_\alpha - \Delta\alpha\, S'\left(\frac{1-x_n}{\sqrt{F(n)}} + 2x_n\left(C\sin\alpha - D\right) + 2a_n S'\right) \quad (12)$$

Dabei ist $(\frac{p}{q})_\alpha$ die mit der üblichen Rechnung bestimmte Druckverteilung bei dem Anstellwinkel α der Messung; in dem zweiten Glied, das den Grenzschichteinfluss additiv dazu liefert, bedeuten S, $F(n)$, C, D, a_n und x_n die bei der üblichen Druckverteilungsrechnung schon vorhandenen Werte. Aus dem Beispiel der Abb.6 sieht man die ausgezeichnete Uebereinstimmung mit einer besonders guten Druckverteilungsmessung im Windkanal.

Zur Uebertragung gemessener oder gerechneter Druckverteilungen auf andere Anstellwinkel kann man sich folgenden einfachen Verfahrens bedienen. Es seien zwei Druckverteilungen bei verschiedenen Anstellwinkeln bekannt. Durch Uebergang auf die Geschwindigkeit findet man

$$\frac{w_1}{V} = \sqrt{1-\frac{p_1}{q}} \qquad \frac{w_2}{V} = \sqrt{1-\frac{p_2}{q}}$$

Wegen (6) kann man daraus A und B berechnen, die nur von der Lage der Meßstellen abhängig sind und erhält für den neuen Anstellwinkel:

$$\frac{w_3}{V} = \left| A\cos\alpha_3 + B\sin\alpha_3 \right|$$

Linearisiert man, so ergibt sich

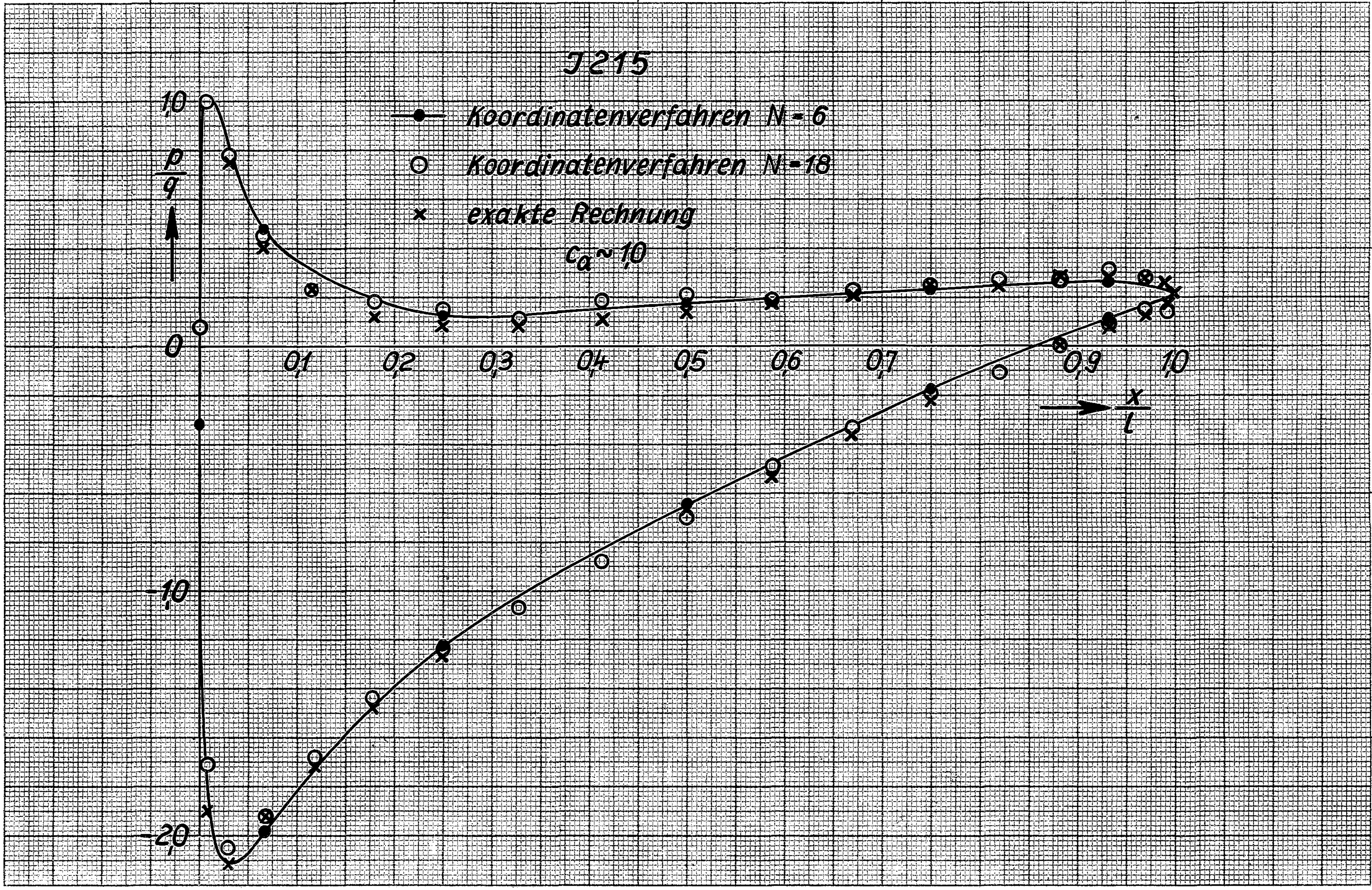
$$\frac{w_3}{V} = \frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\frac{w_1}{V} + \frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\frac{w_2}{V} \quad (13)$$

woraus wieder der Druck $p_3/q = 1 - w_3/V$ folgt. Diese Formel gilt eigentlich für die mit Vorzeichen behafteten Geschwindigkeiten; da aber w_1 und w_2 im allgemeinen an denselben Stellen dasselbe Vorzeichen haben, kann man auch mit den Absolutbeträgen der Geschwindigkeit rechnen. Die Formel gilt übrigens streng, wenn man $\frac{w_1}{V\cos\alpha_1}$ statt $\frac{w_1}{V}$ bzw. $\mathrm{tg}\,\alpha_1$ statt α_1 (entsprechend für die Indizes 2 und 3) schreibt. Will man mit dem neuen Anstellwinkel ein bestimmtes c_a erreichen, so setze man $\alpha_3 - \alpha_0 = c_a/c_a'$ (mit α_0, c_a' aus (7,8)). Beim Umrechnen von Messungen nimmt man nach Möglichkeit Ausgangsverteilungen bei kleinen c_a-Werten (wegen des Grenzschichteinflusses bei den höheren c_a).

Zum Schluss sei darauf hingewiesen, dass das Verfahren auch auf sehr unregelmässige Profilformen, wie z.B. Profile mit ausgeschlagener Klappe und abgeknickter Nase, anwendbar ist, worüber noch ein Bericht von W. L i e s s in Vorbereitung ist.

Schrifttum:

1	F.R i e g e l s u. H.W i t t i c h	Zur Berechnung der Druckverteilung von Profilen. FB 1527
2	T.M o r i y a	A method of calculating aerodynamic characteristics of an arbitrary wing section. Journal Soc.Aeron.Sci. Nippon, Vol 5 (1938) Nr.33.
3	H. W i t t i c h	Bemerkungen zur Druckverteilungsrechnung nach Theodorsen-Garrick. Jb.1941 der dtsch.Luftfahrtfg. , S.I 52
4	R.M. P i n k e r t o n	Calculated and measured pressure distributions over the midspan section of the NACA 4412 airfoil. NACA-Rep.563 (1936)
5	A. W a l z	Uebertragung gemessener Druckverteilungen auf beliebige Anstellwinkel. Lufo 16 (1939) 121.


J 215
Koordinatenverfahren N = 6
Koordinatenverfahren N = 18
exakte Rechnung
$c_a \sim 1{,}0$
$\frac{p}{q}$
$\frac{x}{l}$
1,0
0
-1,0
-2,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,9
1,0