**T-17**

# MODIFIKASI METODE KING DENGAN MENGGUNAKAN INTERPOLASI KUADRATIK

**Wartono[1], Fitriyah Rita[2]**

[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
[1]wartonosarma@yahoo.com

**Abstrak**

Metode King merupakan metode iterasi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dengan orde konvergensi kuartik. Oleh karena kecepatan suatu metode iterasi dalam mendekati akar-akar persamaan nonlinear bergantung kepada orde konvergensi, maka pada makalah ini dibahas modifikasi metode King dengan menggunakan interpolasi kuadratik yang bertujuan untuk meningkatkan orde konvergensi. Berdasarkan hasil kajian menunjukkan bahwa modifikasi metode King mempunyai orde konvergensi tujuh dengan melibatkan tiga evaluasi fungsi *f*(*x*) dan dua evaluasi turunan pertama fungsi *f*(*x*). Simulasi numerik juga diberikan dengan menggunakan beberapa fungsi untuk menunjukkan efesiensi dan performa metode yang

**Kata kunci:** metode King, modifikasi, orde konvergensi, interpolasi kuadratik

## PENDAHULUAN

### a. Analisa Konvergensi

Salah satu persoalan pada persamaan nonlinier adalah menentukan akar-akar persamaan. Oleh karena itu, solusi eksak sering tidak dijumpai, maka hampiran ditentukan dengan menggunakan metode iteratif.

Metode iteratif yang sering digunakan dalam menyelesaikan persamaan nonlinier adalah Metode Newton dengan orde konvergensi kuadratik yang ditulis dalam bentuk umum

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ dengan } f'(x_n) \neq 0 \qquad (1)$$

Pada saat ini, peneliti terus berupaya mengembangkan usaha-usaha untuk meningkatkan orde konvergensi dari suatu metode iteratif, yang bertujuan untuk meminimalkan jumlah iterasi yang digunakan di dalam mendekati akar-akar persamaan nonlinear. Salah satu metode iteratif dengan orde konvergensi empat telah dirumuskan oleh King (1973) dalam bentuk

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n) + \beta f(y_n)}{f(x_n) + (\beta - 2) f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \qquad (2)$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (3)$$

Jika diberikan $\beta = -0.5$ maka pada persamaan (2) menjadi

$$x_{n+1} = y_n - \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{4}$$

dengan $y_n$ ditunjukan pada persamaan (3).

Suatu metode iterasi dengan orde konvergensi yang tinggi akan memberikan dampak kepada sedikitnya jumlah iterasi, namun di sisi lain menghasilkan akurasi yang cukup baik. Oleh karena itu, performa suatu metode iterasi sangat dipengaruhi oleh orde konvergensi, semakin tinggi orde konvergensi, maka performa metode iterasi akan semakin baik, sebaliknya semakin rendah orde konvergensi, maka performa metode iterasi akan semakin buruk.

Beberapa modifikasi telah dilakukan oleh peneliti dengan melibatkan bentuk-bentuk kurvatur atau mengkontruksi kembali langkah-langkah iterasi. Selain itu, keterlibatan derivatif atau turunan orde tinggi dan kompleksitas fungsi yang dievaluasi juga menjadi pertimbangan di dalam melakukan modifikasi metode iterasi.

Peningkatan orde konvergensi dengan melibatkan kurvatur dilakukan oleh Chun et. al (2010). Pada kajiannya, Chun et. al (2010), melibatkan kurvatur pada metode Jarrat dan menghasilkan orde konvergensi duabelas.

Selain itu, teknik dengan mengkontruksi langkah-langkah iterasi dilakukan oleh Hou & Li (2010) dan Li et. al (2010). Pada kajiannya, Hou & Li (2010) mengkontruksi metode King menjadi empat langkah, sedangkan Li et. al (2010) mengkontruksi motede King menjadi tiga langkah iterasi.

Selain peneliti di atas, beberapa peneliti lainnya mengembangkan pendekatan interpoladi terhadap suatu metode iteratif. Misalnya Kou (2006) memodifikasi metode Jarrat dengan menggunakan interpolasi linear yang menghasilkan orde konvergensi enam. Selanjutnya, hasil penelitian Kou (2006) kemudian kembangkan lagi oleh Chun (2010) dengan melibatkan interpolasi kuadratik yang menghasilkan modifikasi Jarrat dengan orde konvergensi enam.

## PEMBAHASAN

### a. Analisa Konvergensi

Pandang kembali metode iterasi King pada persamaan (4), kemudian definisikan kembali dalam bentuk

$$z_n = y_n - \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{5}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{6}$$

Selanjutnya, definisikan kembali metode Newton dengan bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{7}$$

dengan $z_n$ didefinisikan oleh persamaan (5). Kemudian, definisikan kembali interpolasi kuadratik yang menginterpolasi titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ pada persamaan $h(x) = ax^2 + bx + c$ sehingga menjadi

$$h(x)=a(x-x_n)(x-y_n)+\frac{(x-x_n)}{(y_n-x_n)}f^{'}(y_n)+\frac{(x-y_n)}{(x_n-y_n)}f^{'}(x_n) \qquad (8)$$

Asumsikan bahwa $f^{'}(x)\approx h(x)$, sehingga $f^{'}(z_n)$ pada persamaan (7) dapat diapproksimasikan dengan $h(x)$ pada persamaan (8), dan dengan mengganti $x$ pada $h(x)$ dengan $z_n$,, maka persamaan (8) sehingga menjadi

$$f^{'}(z_n)\approx h(z_n)=a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+\frac{(z_n-x_n)}{(y_n-x_n)}f^{'}(y_n)+\frac{(z_n-y_n)}{(x_n-y_n)}f^{'}(x_n) \qquad (9)$$

Substitusikan bentuk $z_n$ pada persamaan (5) ke persamaan (9), maka persamaan (9) di atas dapat dibentuk menjadi

$$f^{'}(z_n)\approx a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+\frac{\left(y_n-\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f^{'}(x_n)}-x_n\right)}{\left(x_n-\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}\right)-x_n}f^{'}(y_n)$$

$$+\frac{\left(y_n-\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f^{'}(x_n)}-y_n\right)}{x_n-\left(x_n-\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}\right)}f^{'}(x_n)$$

$$=a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+\left(1+\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f^{'}(x_n)}\right)\frac{f^{'}(x_n)}{f(x_n)}f^{'}(y_n)$$

$$-\left(\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f^{'}(x_n)}\right)\frac{f^{'}(x_n)}{f(x_n)}f^{'}(x_n)$$

Oleh karena

$$y_n-z_n=\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f^{'}(x_n)}$$

maka

$$f^{'}(z_n)\approx a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+\left(1+(y_n-z_n)\right)\frac{f^{'}(x_n)}{f(x_n)}f^{'}(y_n)\quad-(y_n-z_n)\frac{f^{'}(x_n)}{f(x_n)}f^{'}(x_n)$$

$$=a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+\frac{f^{'}(x_n)}{f(x_n)}f^{'}(y_n)+(y_n-z_n)\frac{f^{'}(x_n)}{f(x_n)}\left(f^{'}(y_n)-f^{'}(x_n)\right)$$

sehingga

$$f^{'}(z_n)\approx a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+\frac{f^{'}(x_n)}{f(x_n)}\left(f^{'}(y_n)+(y_n-z_n)(f^{'}(y_n)-f^{'}(x_n))\right) \qquad (10)$$

Kemudian, subtitusikan persamaan (10) ke persamaan (7) sehingga diperoleh metode iterasi modifikasi King dengan bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}\left(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n))\right)}$$

atau

$$= z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n)f(x_n) + f'(x_n)\left(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n))\right)} \qquad (11)$$

yang mana $z_n$ dan $y_n$ masing-masing didefinisikan pada persamaan (5) dan (6). Berdasarkan nilai konstanta $a$, maka persamaan (11) dapat dibentuk tiga persamaan, yaitu:

untuk $a = 0$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{f'(x_n)\left(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n))\right)} \qquad (12)$$

untuk $a = 1$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{(z_n - x_n)(z_n - y_n)f(x_n) + f'(x_n)\left(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n))\right)} \qquad (13)$$

untuk $a = -1$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{f'(x_n)\left(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n))\right) - (z_n - x_n)(z_n - y_n)f(x_n)} \qquad (14)$$

Persamaan (12) – (14) merupakan persamaan metode iteratif modifikasi King dengan menggunakan interpolasi linear. Selanjutnya, akan ditunjukkan orde konvergensi persamaan tersebut.

**Teorema 1.** Misalkan $\alpha \in I$ adalah akar dari fungsi $f : I \to R$ untuk suatu interval terbuka $I$. Jika $x_0$ adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat ke $\alpha$ maka metode iterasi pada persamaan (11) memiliki persamaan *error :*

$$e_{n+1} = \left(\frac{a}{f'(\alpha)}C_2^2C_3 - 3C_2^2C_3\right)e_n^7 + O(e_n^8) \qquad (15)$$

**Bukti :** Misalkan $\alpha \in I$ dimana $\alpha$ merupakan akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$, dengan menggunakan deret Taylor diperoleh:

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + C_4e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (16)$$

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + 4C_4e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (17)$$

$$f''(x_n) = f'(\alpha)(2C_2 + 6C_3e_n + 12C_4e_n^2 + O(e_n^3) \qquad (18)$$

$$f'''(x_n) = f'(\alpha)(6C_3 + 14C_4e_n + O(e_n^2) \qquad (19)$$

$$f^{(4)}(x_n) = f'(\alpha)(14C_4 + O(e_n) \qquad (20)$$

dengan $C_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$ dan $j = 1, 2, 3, \cdots$ dan $e_n = x_n - \alpha$ . Selanjutnya, dari persamaan (16) dan (17) diperoleh:

$$d_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -e_n + C_2 e_n^2 - 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 - (7C_2C_3 - 3C_4 + 4C_2^3)e_n^4 + O(e_n^5) \quad (21)$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha + C_2 e_n^2 - 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 - (7C_2C_3 - 3C_4 + 4C_2^3)e_n^4 + O(e_n^5) \quad (22)$$

Kemudian dengan mengekspansi $f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$ terhadap $x_n$, diperoleh:

$$f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = f(y_n) = f(x_n) + f'(x_n)d_n + \frac{1}{2!}f''(x_n)d_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_n)d_n^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(x_n)d_n^4 + O(e_n^5) \quad (23)$$

Subtitusikan persamaan (16) - (20) ke persamaan (23) dan sederhanakan, sehingga diperoleh:

$$f(y_n) = f'(\alpha)\left(C_2 e_n^2 - 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + (3C_4 + 5C_2^3 - 7C_2C_3)e_n^4 + O(e_n^5)\right) \quad (24)$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (16) dan persamaan (24), maka diperoleh:

$$\frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} = 1 + 2C_2 e_n - (2C_2^2 - 4C_3)e_n^2 + (6C_4 - \frac{3}{2}C_2^3)e_n^3 + \left(22C_2C_4 + \frac{111}{4}C_2^4 - 59C_3C_2^2 + 16C_3^2\right)e_n^4 + O(e^5) \quad (25)$$

Selanjutnya, dengan membagi persamaan (24) dengan persamaan (17) diperoleh:

$$\frac{f(y_n)}{f'(x_n)} = C_2 e_n^2 + (2C_3 - 4C_2^2)e_n^3 + (3C_4 + 13C_2^3 - 14C_2C_3)e_n^4 + O(e^5) \quad (26)$$

Subtitusikan persamaan (22), (25) dan (26) ke dalam persaman (5) sehingga diperoleh:

$$z_n = \alpha - C_2C_3 e_n^4 + \left(-22C_2C_4 + 66C_2^2C_3 - \frac{73}{2}C_2^4 - 14C_3^2\right)e_n^5 + O(e_n^6) \quad (27)$$

Pembagian persamaan (24) terhadap persamaan (16) memberikan

$$\frac{f(y_n)}{f(x_n)} = C_2 e_n + (2C_3 - 3C_2^2)e_n^2 + (3C_4 + 8C_2^3 - 10C_2C_3)e_n^3 + O(e^4) \quad (28)$$

sehingga, dengan mengalikan persamaan (25) dengan (28) diperoleh:

$$\frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)}\,\frac{f(y_n)}{f(x_n)} = C_2 e_n - (2C_2^2 - 2C_3)e_n^2 + (3C_4 + C_2^3 - 2C_2C_3)e_n^3 + (O(e_n^4)) \quad (29)$$

Selanjutnya, dari persamaan (24) diperoleh

$$f'(y_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2C_2 e_n^2 + 4(C_2C_3 - C_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right) \quad (30)$$

sehingga, untuk

$$\left(1+\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)f^{'}(y_n)=f^{'}(\alpha)[1+C_2e_n+(C_2^2+2C_3)e_n^2$$
$$+(-C_2^3+2C_2C_3+3C_4)e_n^3+$$
$$(8C_3C_2^2-6C_2^4)e_n^4+O(e_n^5)] \quad (31)$$

$$\left(\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)f^{'}(x_n)=f^{'}(\alpha)[C_2e_n+(C_2^2+2C_3)e_n^2+(-C_2^3$$
$$+5C_2C_3+3C_4)e_n^3+(10C_2C_4$$
$$-7C_3C_2^2+6C_3^2+2C_2^4)e_n^4+O(e_n^5)] \quad (32)$$

dan diperoleh

$$\left(1+\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)f^{'}(y_n)-\left(\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)f^{'}(x_n)$$
$$=f^{'}(\alpha)[1-3C_2C_3e_n^3+O(e_n^4)] \quad (33)$$

Berdasarkan persaman (21) diperoleh

$$z_n-x_n=-e_n+C_2C_3e_n^4+O(e_n^5) \quad (34)$$

$$z_n-y_n=-C_2e_n^2+2(C_2^2-C_3)e_n^4+O(e_n^5) \quad (35)$$

$$a(z_n-x_n)(z_n-y_n)=a(C_2e_n^3+O(e_n^4)) \quad (36)$$

Sehingga dari persamaan (33) – (36) diperoleh

$$a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+\left(1+\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)f^{'}(y_n)$$
$$-\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}f^{'}(x_n)$$
$$=f^{'}(\alpha)\left(1+\left(\frac{a}{f^{'}(\alpha)}C_2-3C_2C_3\right)e_n^3+O(e_n^4)\right) \quad (37)$$

Ekspansi deret Taylor terhadap $f(z)$ disekitar $\alpha$ diberikan oleh

$$f(z)=f^{'}(\alpha)\left(1+(z_n-\alpha)+O(z_n-\alpha)^2\right) \quad (38)$$

sehingga dengan membagi persamaan (38) dengan persamaan (37) maka diperoleh

$$\frac{f(z_n)}{a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+\left(1+\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)f^{'}(y_n)-\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}f^{'}(x_n)}$$
$$=\frac{f^{'}(\alpha)\left(1+(z_n-\alpha)+O(z_n-\alpha)^2\right)}{f^{'}(\alpha)\left(1+\left(\frac{a}{f^{'}(\alpha)}C_2-3C_2C_3\right)e_n^3+O(e_n^4)\right)}$$
$$=\frac{1+(z_n-\alpha)+O(z_n-\alpha)^2}{1+\left(\frac{a}{f^{'}(\alpha)}C_2-3C_2C_3\right)e_n^3+O(e_n^4)}$$

$$= (z_n - \alpha) \times [1 - \left( \frac{a}{f^{'}(\alpha)} C_2 - 3C_2C_3 \right) e_n^3 + O(e_n^4) +$$

$$\left( (\frac{a}{f^{'}(\alpha)} C_2 - 3C_2C_3) e_n^3 + O(e_n^4) \right)^2 + \cdots]$$

$$= (z_n - \alpha) + \left( -\frac{a}{f^{'}(\alpha)} C_2^2 C_3 + 3C_2C_3 \right) e_n^7 + O(e_n^8) \tag{39}$$

dan untuk

$$x_{n+1} = z_n - \left( (z_n - \alpha) + \left( -\frac{a}{f^{'}(\alpha)} C_2^2 C_3 + 3C_2C_3 \right) e_n^7 + O(e_n^8) \right)$$

$$= \alpha + \left( \frac{a}{f^{'}(\alpha)} C_2^2 C_3 - 3C_2C_3 \right) e_n^7 + O(e_n^8) \tag{40}$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, maka diperoleh,

$$e_{n+1} = \left( \frac{a}{f^{'}(\alpha)} C_2^2 C_3 - 3C_2C_3 \right) e_n^7 + O(e_n^8) \tag{41}$$

Berdasarkan Teorema 1, maka metode iteratif pada persamaan (11) memiliki orde konvergensi ketujuh, sehingga untuk

$a = 0$, maka orde konvergensi persamaan (12) adalah

$$e_{n+1} = -3C_2C_3e_n^7 + O(e_n^8) \tag{42}$$

$a = 1$, maka orde konvergensi persamaan (13) adalah

$$e_{n+1} = \left( \frac{C_2^2 C_3}{f^{'}(\alpha)} - 3C_2C_3 \right) e_n^7 + O(e_n^8) \tag{43}$$

dan $a = -1$, maka orde konvergensi persamaan (14) adalah

$$e_{n+1} = \left( -\frac{C_2^2 C_3}{f^{'}(\alpha)} - 3C_2C_3 \right) e_n^7 + O(e_n^8) \tag{44}$$

Oleh karena itu, secara umum modifikasi king dengan menggunakan interpolasi kuadratik memiliki orde konvergensi tujuh.

**b. Simulasi Numerik**

Pada sub bab ini, akan ditunjukkan keefektivan dari persamaan (12), (13), dan (14) dalam menyelesaikan persamaan nonlinier. Oleh karena itu, dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan *processor* komputer Intel Pentium (R) Dual Core CPU T2310 @ 1.46 GHz (2CPUs), *Operating System* Windows XP SP3 , memori 2 GB dan melibatkan aplikasi pemograman MATLAB versi 6.5, dengan digit error *e* = $10^{-16}$ dan kriteria penghentian program komputer:

i. $|x_{n+1} - x_n| < \sqrt{e}$

ii. $|f(x_{n+1})| < \sqrt{e}$

yang bertujuan untuk membandingkan jumlah iterasi beberapa metode iteratif dalam menghampiri akar persamaan dari fungsi-fungsi berikut:

$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ $\alpha \approx 1{,}3652300134140968$

$f_2(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$ $\alpha \approx 0{,}2575302854398608$

$f_3(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos x + 5$ $\alpha \approx -1{,}2076478271309189$

$f_4(x) = (x-1)^3 - 2$ $\alpha \approx 2{,}2599210498948732$

$f_5(x) = (x+2)e^x - 1$ $\alpha \approx -0{,}4428544010023886$

$f_6(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1$ $\alpha \approx 1{,}4044916482153412$

Berdasarkan hasil perhitungan komputasi atau simulasi numerik diperoleh jumlah iterasi dari berbagai metode iterative seperti : metode metode Newton (NW) dengan orde kovergensi kuadratik, metode King (KN) dengan orde konvergensi kuartik, KBN dinotasikan sebagai metode modifikasi King-Neta (KBN) dengan orde konvergensi enam. Selanjutnya, KM1, KM2 dan KM3 masing-masing dinotasikan sebagai metode iteratif pada persamaan (12), (13),dan (14) dengan orde konvergensi tujuh.

Berikut ini adalah tabel perbandingan jumlah iterasi dari metode tersebut.

**Tabel.1. Perbandingan Jumlah Iterasi**

| $f(x)$ | $x_0$ | Jumlah Iterasi | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | NW | KN | KBN | KM1 | KM2 | KM3 |
| $f_1(x)$ | -0.5 | 131 | 10 | 11 | 18 | Div | 5 |
| | -0.3 | 53 | 57 | 26 | 7 | 9 | 11 |
| $f_2(x)$ | 3.6 | 7 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | 7 | 9 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 |
| $f_3(x)$ | -3 | 14 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 |
| | -1.5 | 6 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 |
| $f_4(x)$ | -0.5 | 8 | 7 | 11 | 5 | Div | 17 |
| | 3 | 6 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $f_5(x)$ | 1.5 | 8 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 |
| | 4 | 11 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| $f_6(x)$ | 3 | 6 | 4 | 3 | 3 | 2 | 3 |
| | 6 | 7 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

Tabel 1 mengambarkan perbandingan jumlah iterasi dari berbagai metode, dengan menggunakan beberapa fungsi dan nilai awal yang berbeda, dimana secara umum Tabel 1 menunjukkan bahwa metode iterasi dengan orde yang lebih tinggi memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan metode iterasi yang mempunyai orde konvergensi lebih rendah. Meskipun demikian, pada beberapa fungsi ada yang menunjukkan orde yang lebih tinggi memiliki iterasi yang lebih banyak dibandingkan metode iterasi yang orde konvergensi yang lebih rendah, seperti pada $f_4(x)$ dengan nilai awal -0.5 KM3 dan KNB yang memiliki orde ke-tujuh dan ke-enam memiliki iterasi yang lebih banyak dibandingan KN yang memiliki orde konvergensi ke-empat. Hal ini bisa saja terjadi karena setiap metode memiliki cara tersendiri dalam menghampiri akar sebuah fungsi tergantung pada bentuk persamaan serta seberapa dekat nilai awal yang diberikan dengan nilai akar sebenarnya.

Selain dengan menggunakan iterasi, kekonvergenan dapat dilihat dengan menggunakan *Computational Order of Convergence* (COC), yakni perhitungan orde konvergensi secara numerik. Perhitungan dilakukan secara manual yang melibatkan hasil pemograman pada Tabel 1 dan menggunakan aplikasi *Microsoft Excel 2007*, dengan digit error $e = 10^{-14}$. Berikut ini adalah tabel perbandingan COC dari berbagai metode tersebut diatas.

**Tabel 2. Perbandingan Nilai COC**

| $f(x)$ | $x_0$ | COC | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | NW | KN | KBN | KM1 | KM2 | KM3 |
| $f_1(x)$ | -0.5 | 2.00 | 3.51 | 6.48 | 5.76 | Div | 6.25 |
| | -0.3 | 1.99 | 3.61 | 5.23 | 3.96 | 6.65 | 5.51 |
| $f_2(x)$ | 3.6 | 1.99 | 2.98 | 3.53 | 5.66 | 4.48 | 5.38 |
| | 7 | 1.38 | 3.29 | 3.01 | 6.08 | 5.88 | 12.99 |
| $f_3(x)$ | -3 | 1.98 | 4.03 | 5.91 | 6.94 | 6.94 | 6.94 |
| | -1.5 | 2.00 | 3.93 | 6.16 | 7.46 | 7.46 | 7.47 |
| $f_4(x)$ | -0.5 | 2.00 | 5.52 | 5.03 | 5.75 | Div | 3.70 |
| | 3 | 2.00 | 3.48 | TTd | TTd | TTd | TTd |
| $f_5(x)$ | 1.5 | 1.99 | 2.72 | 3.86 | 5.07 | 5.68 | 4.84 |
| | 4 | 2.00 | 3.61 | 5.73 | 6.95 | 7.02 | 7.12 |
| $f_6(x)$ | 3 | 2.00 | 4.88 | 6.10 | 6.46 | TTd | 6.57 |
| | 6 | 1,99 | 3.49 | 4.25 | 5.24 | 3.69 | 4.63 |

Keterangan :

$x_0$ : Nilai Awal
Div : Divergen
TTd : Tidak Terdefinisi

Tabel 2 mengambarkan mengenai perbandingan nilai perhitungan orde konvergensi secara numerik. Pada Tabel 2 juga menunjukkan bahwa orde konvergensi pada setiap metode berbeda-beda tergantung pada fungsi serta nilai awal yang diberikan pada setiap metode. Namun, secara umum hasil perhitungan orde konvergensi secara numerik (COC) metode iterasi yang memiliki orde konvergensi yang lebih tinggi secara teori menunjukkan nilai COC lebih tinggi dibandingkan metode iterasi yang memiliki orde konvergensi yang lebih rendah secara teori.

## KESIMPULAN

Metode King memiliki orde konvergensi keempat, setelah dimodifikasi dengan menggunakan interpolasi kuadratik diperoleh tiga metode King baru yang memiliki orde konvergensi ketujuh. Berdasarkan hasil simulasi numerik pada Tabel 1 dan Tabel 2, KM1, KM2 dan KM3 secara umum memiliki hasil iterasi yang lebih sedikit serta memiliki nilai COC yang lebih tinggi dibandingkan metode iterasi Newton, King (1973) dan modifikasi King (Neta (1979)). Sehingga, metode ini lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinier dibandingkan metode lainnya yang memiliki orde konvergensi yang lebih rendah.

## DAFTAR PUSTAKA

Argyros, J. K., Chen, D., Qian, Q. 1994. The Jarrat Method In Banach Space Setting. *J. Comput. Appl. Math.* 51: 103-106.

Burden, Richard L. 1993. *Numerical Analysis Fifth Edition*. New York: WS Publishing Company.

Chapra, Steven, C. dan Raymond P. Canale. 2006. *Numerical Methods for Engineers, fifth edition.* Singapura: MC Graw Hill.

Chun, C., 2007. Some Improvement of Jarratt's Method with Sixth-order Convergence. A*pplied Mathematics and Computation.* 90: 1432-1437.

Chun, C & Kim, Y., 2010. New twelfth-order modification of Jarrat's method for solving nonlinear equations. *Studies in Nonlinear Sciences*, 1(1):14 – 18.

Conte, S. D & Boor C. 1980. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach.* Singapore : McGraw-Hill.

Kou, J., Li, Y., dan Wang, X. 2006. An Improvement of the Jarrat Method. *Applied Mathematics and Computations*.

Hou, L & Li, X., 2010. Twelfth-order method for nonlinear equations, *IJRRAS*, 3(1):30 – 36.

Kendall, A. 1978. *An Introduction to Numerical Analysis*. Canada : Johh Wiley & Sons, Inc.

Li, X *et. al*. 2010. Sixteenth-order method for nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 215: 3754 – 3758.

Mathews, John H., 1992. *Numerical Methods for Mathematics Science and Engineering, Second Edition,* USA *:* Prentice-Hall International,Inc.

Neta, B. 1979. A Sixth Order Family of Methods for Nonlinier Equations. *Intern. J. Computer Math.* 7 : 157-161.

Richard, F. King, 1973. A Family of Fourth Order Method for Nonlinier Equation", *Siam Journal on Numerical Analysis.* 10 : 876-879.

Smith, Tobert T., dan Roland B Milton,.2000. *Calculus. Second edition*, USA : MC Graw Hill.

Traub, J.F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations*. New York : Prentice-Hall, Inc.

Weerakoon, S., dan Fernando, T. G. I. 2000. A Varian of Newton's Method with Accelerated Third-Order Convergence. *Applied Mathematics Letters.* 13: 87-93.