T-14

DIGRAF EKSENTRIK DARI GRAF GEAR

SRI KUNTARI[1], TRI ATMOJO K.[2], NUGROHO A.S., RINDANG P.

[1,2] [1]Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,

Universitas Sebelas Maret

[1]kuntari@uns.ac.id, [2] trikusma@uns.ac.id

Abstrak

Diberikan G dengan himpunan berhingga *vertex* $V(G)$ dan himpunan edge $E(G)$. Jarak dari *vertex* u ke *vertex* v di G, dinotasikan $d(u,v)$, adalah panjang dari *path* terpendek dari *vertex* u ke v. Eksentrisitas *vertex* u dalam graf G adalah jarak maksimum dari *vertex* u ke sebarang *vertex* yang lain di G, dinotasikan $e(u)$. *Vertex* v disebut *vertex* eksentrik dari u jika $d(u,v) = e(u)$. Sedangkan untuk menentukan jarak dari *vertex* u ke sembarang *vertex* v dalam graf G digunakan algoritma Breadth First Search (BFS) Moore yang diambil dari Chartrand dan Oellermann [3]. Digraf eksentrik $ED(G)$ dari suatu graf G adalah suatu graf yang mempunyai himpunan *vertex* yang sama dengan himpunan *vertex* G, dan terdapat suatu *arc* (*edge* berarah) yang menghubungkan *vertex* u ke v jika v adalah suatu *vertex* eksentrik dari u. Boland dan Miller [1] memperkenalkan digraf eksentrik dari suatu digraf. Mereka memberi saran untuk menemukan digraf ekesentrik dari bermacam kelas graf. Di sini diselidiki digraf eksentrik dari salah satu kelas graf yaitu graf *gear*.

Kata kunci: eksentrisitas, digraf eksentrik, graf *gear*.

PENDAHULUAN

Pengertian dan notasi yang berkaitan dalam makalah ini diambil dari Chartrand dan Lesniak [2] serta Harris *et al*. [7]. Diketahui graf G dengan himpunan *vertex* $V(G)$ dan himpunan *edge* $E(G)$. Jarak dua *vertex* u dan v dalam G, dinotasikan dengan $d(u,v)$, merupakan panjang *path* terpendek dari *vertex* u ke *vertex* v. Jika tidak ada *path* yang menghubungkan kedua *vertex*, $d(u,v) = \infty$. Eksentrisitas dari *vertex* u dalam graf G didefinisikan sebagai jarak maksimum dari *vertex* u ke sembarang *vertex* lainnya dalam G. eksentrisitas *vertex* u dinotasikan sebagai $e(u) = \max\{d(u, v) | v \in V(G)\}$. Sedangkan *vertex* v merupakan *vertex* eksentrik dari *vertex* u jika $d(u,v) = e(u)$. Digraf eksentik dari graf G yaitu $ED(G)$ adalah graf yang mempunyai himpunan *vertex* yang sama dengan G, $V(ED(G)) = V(G)$ dan terdapat *arc* (*edge* berarah) yang menghubungkan setiap *vertex* dalam G ke *vertex* eksentriknya. Suatu *arc* dalam digraf D dikatakan *arc* simetri jika *arc* tersebut menghubungkan *vertex* u dan v, demikian juga sebaliknya.

Dalam perkembangan di bidang Matematika, eksentrisitas suatu graf telah banyak diteliti diantaranya dapat dilihat pada barisan eksentrik dan *cycle* dalam graf [8], karakterisasi dari digraf eksentrik [6] dan diameter determinasi pada keluarga graf tertentu [4]. Sedangkan penyelidikan digraf eksentrik dari graf ladder telah dipublikasikan oleh Kusmayadi dan Rivai [9] serta eksentrik digraf dari graf lintang oleh Kusmayadi dan Fathmawatie [10]. Telah dipublikasikan juga eksentrisitas dari graf buku oleh Kuntari et *al*. [11]. Dalam makalah ini diselidiki digraf eksentrik pada klas graf yang lain yaitu graf gear.

PEMBAHASAN

Graf *wheel* berorder n dengan n ≥ 3, menurut Gallian [5] adalah suatu graf yang terdiri dari *cycle* berorder n-1 dan setiap *vertex* dalam *cycle* dihubungkan dengan satu *vertex* di luar *cycle*. Sedangkan graf *gear* berorder n, n ≥ 3 adalah graf *wheel* berorder n ditambahkan satu *vertex* pada setiap *edge cycle*. Diperlukan tiga langkah dalam menentukan digraf eksentrik dari graf tersebut. Langkah pertama adalah menentukan jarak dari *vertex u* ke *vertex v* dalam graf *G* yang merupakan panjang lintasan terpendek dari v*ertex u* ke *vertex v*. Tetapi, jika tidak ada lintasan yang menghubungkan kedua *vertex* tersebut, $d(u,v) = \infty$. Selanjutnya untuk menentukan jarak dari *vertex u* ke sembarang *vertex v* dalam graf *G* digunakan algoritma Breadth First Search (BFS) Moore yang diambil dari Chartrand and Oellermann [3] yaitu

1. diambil salah satu vertex dalam graf *G*, misal *u* dan dilabeli 0 yang menyatakan jarak *u* ke dirinya sendiri, sedangkan semua *vertex u* dilabeli ∞,
2. semua *vertex* berlabel ∞ yang *adjacen*t dengan *u* dilabeli 1,
3. semua *vertex* berlabel ∞ yang *adjacent* dengan *vertex* berlabel 1 dilabeli 2, dan seterusnya sampai *vertex* yang dimaksud misal *v* berjarak hingga. Label setiap *vertex* menyatakan jarak dari *vertex u*.

Langkah kedua menentukan *vertex* eksentrik dari *vertex u*, dinotasikan dengan $e(u)$, yaitu vertex dalam graf G yang memiliki jarak maksimum dari *u*. *Vertex v* adalanh suatu *vertex* eksentrik dari *u* jika $d(u,v) = e(u)$. Langkah ketiga, menghubungkan *vertex u* dangan *vertex* eksentriknya dengan suatu *arc d* diperoleh digraph eksentrik dari graf yang diberikan.

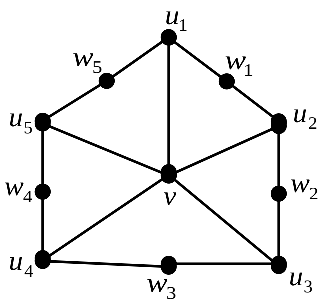
Diberikan graf *gear* G_n, $n \geq 3$ dengan himpunan *vertex* $V(G_n)=\{v, u_1, u_2, \ldots, u_n, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ dan himpunan *edge* $E(G_n)=\{vu_i, u_iw_i, w_iu_{i+1(mod\ n)} \mid i=1, 2, \ldots, n\}$. Digraf eksentrik dari graf *gear* disajikan dalam Teorema 1.

Teorema 1. Diberikan graf *gear* G_n, $n \geq 3$. Digraf eksentrik dari graf *gear* adalah $S_3 \cup 3P_2$ untuk n=3 dan $C(2, 3, \ldots, n\text{-}2) \cup nS_{n-2} \cup S_n$ untuk n>3 dengan S_n graf bintang, P_n graf lintasan masing-masing berorder *n* dan C(*k*, *k*+1, …, *n*-l) graf *circulant*.

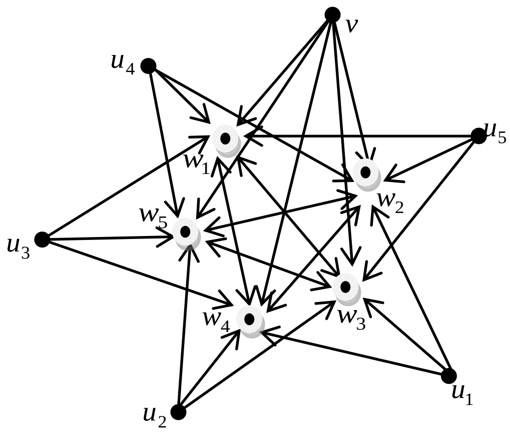
Bukti. Menggunakan algoritma BFS Moore diperoleh eksentrisitas dari *v* adalah 2 dengan vertex eksentriknya w_i, i=1, 2, …, *n*. Eksentrisitas dari u_i , i=1, 2, …, *n* adalah 3 dengan vertex eksentriknya $w_{i+1(mod\ n)}$ untuk n=3 dan $w_{i+1(mod\ n)}$, $w_{i+2(mod\ n)}$, …, $w_{i+n-2(mod\ n)}$ untuk *n*>3. Sedangkan eksentrisitas dari w_i adalah 4 dengan *vertex* eksentriknya $w_{i+2(mod\ n)}$, $w_{i+3(mod\ n)}$, …, $w_{i+n-2(mod\ n)}$, i=1, 2, …, *n*. Terbentuk *arc* dengan menghubungkan antara *vertex* dan *vertex* eksentriknya. *Arc* yang simetrik adalah $w_iw_{i+2(mod\ n)}$, $w_iw_{i+3(mod\ n)}$, …, $w_iw_{i+n-2(mod\ n)}$, i=1, 2, …, *n*, dan *arc* yang lain tidak simetrik. Berdasarkan *arc* yang telah diperoleh dapat dibentuk digraf eksentrik dari graf *gear* adalah $S_3 \cup 3P_2$ untuk n=3 dan untuk *n*>3 adalah $C(2, 3, \ldots, n\text{-}2) \cup nS_{n-2} \cup S_n$. □

Gambar 1 merupakan contoh graf *gear* G_5 (a) dan digraf eksentriknya (b).

Selanjutnya disajikan teorema sebagai perluasan dari graf *gear* yang disebut sebagai graf 2-*gear*, yaitu dua graf *gear* yang salah satu *vertex* pada *cycle* dari kedua graf saling berhimpit. Graf 2-*gear* berorder n disimbulkan dengan $2\text{-}G_n$, yang mempunyai himpunan *vertex* $V(2\text{-}G_n)=\{ v, t_1, t_2, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ dan himpunan *edge* $E(2\text{-}G_n)=\{ vt_1, vt_2, u_ix_i, x_{i+1}u_i, x_1v, vx_n, y_iw_i, w_iy_{i+1}, y_nv, vy_1 \mid i=1, 2, \ldots, n\}$. Teorema 2 menyajikan eksentrisitas dari graf ini.



a. Graf *gear* G_5

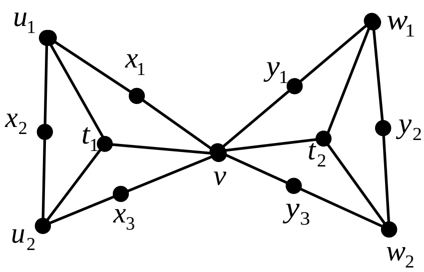


b. Digraf eksentrik dari G_5

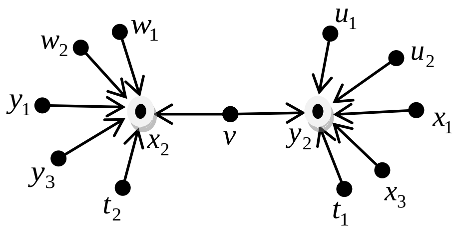
Gambar 1. Graf *gear* G_5 dan digraf eksentriknya

Teorema 2. Diberikan graf $2\text{-}G_n$, $n\geq 3$. Digraf eksentrik dari graf $2\text{-}G_n$ adalah $K_{5,1}\cup P_3\cup K_{1,5}$ untuk n=3 dan $K_{n+2,n-2}\cup K_{n-2,n-2}\cup K_{n-2,n+2}\cup S_{2(n-2)}$ untuk n>3.

Bukti. Menggunakan algoritma BFS Moore diperoleh eksentrisitas dari v adalah 3 dengan *vertex* eksentriknya adalah $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$. Eksentrisitas dari t_1 dan t_2 adalah 4, eksentrisitas dari u_i dan w_i adalah 5. Vertex eksentrik dari t_1, ui, xj adalah $y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$ sedangkan vertex eksentrik dari t_2, w_i, y_j adalah $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ dengan i=1, 2, …, n-1 dan j=1, 2, …, n. Terbentuk *arc* dengan menghubungkan antara *vertex* dan *vertex* eksentriknya. *Arc* yang simetrik adalah x_iy_i, i =2, 3, …, n-1, dan *arc* yang lain tidak simetrik. Dengan memperhatikan *arc* yang terbentuk diperoleh digraf eksentrik dari graf $2\text{-}G_n$ adalah $K_{5,1}\cup P_3\cup K_{1,5}$ untuk n=3 dan $K_{n+2,n-2}\cup K_{n-2,n-2}\cup K_{n-2,n+2}\cup S_{2(n-2)}$ untuk n>3. □
Gambar 2 merupakan graf $2\text{-}G_3$ (a) dan digraf eksentriknya (b).



a. Graf $2\text{-}G_3$



b. Digraf eksentrik dari $2\text{-}G_3$

Gambar 2. Graf $2\text{-}G_3$ dan digraf eksentriknya

PENUTUP

Berkaitan dengan graf *gear* dapat dibentuk lebih umum menjadi graf n-*gear* dan menggunakan algoritma BFS Moore dapat disajikan digraf eksentrik dari graf tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Boland, J. and M. Miller, *The Eccentric Digraph of a Digraph,* Proceeding of AWOCA'01, Lembang-Bandung, Indonesia, 2001.

[2] Cartrand, G. And L. Lesniak, *Graphs and Digraphs* 3rd ed., Chapman and Hall/RCR, New York, 1996.

[3] Chartrand, G. and O. R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc, California, 1993.

[4] Corneil, D. G., F.F. Dragan, M. Habib and I. Paul, Diameter Determination on Restricted Graph Families, *Discrete Applied Mathematics* 113:143-166, 2001.

[5] Galian, J. A., A Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics* 17: 1-246, 2010.

[6] Gimbert, J., N. lopez, M. Miller and J. Ryan, Characterization of Eccentric Digraphs, *Discrete Mathematics* 306:210-219, 2006.

[7] Harris, J. M., J. L. Hirst and M. J. Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory* 2nd ed.. Springer, New York, 2000.

[8] Haviar, A., P. Hrnciar and G. Monoszava, Eccentric Sequence and Cycles in Graphs, *Acta Univ. M. Belii Math* no 11:7-25, 2004.

[9] Kusmayadi, T. A. and M. A. Rivai, The Eccentric Digraph of Ladder Graph, Prosiding Seminar Nasional Matenatika 2010 " Matematika dalam Riset Teknologi dan Pendidikan " :16-26, 2010.

[10] Kusmayadi, T. A. dan F. Fathmawatie**,** The Eccentric Digraph of a Lintang Graph, Math-Info vol 1 no 12: 8-12, Juli 2008.

[11] Kuntari, S., N. A. Sudibyo dan T. A. Kusmayadi, Digraf Eksentrik dari Graf Buku, *Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA*, FMIPA UNY: M223-M226, 2011.