

## MODEL REDUKSI UNTUK SISTEM MIMO

Farikhin<sup>1</sup>, Y.D. Sumanto<sup>1</sup>, dan Siti Khabibah<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Program Studi Matematika Jurusan Matematika FSM Undip

### ABSTRAK

Model reduksi berdasarkan subruang Krylov biasa disebut pemadanan momen. Dalam paper ini, dikaji mengenai teknik mereduksi system dinamik linear untuk sistem MIMO menggunakan algoritma Arnoldi-blok yang dimodifikasi. Modifikasi dilakukan dengan cara menyisipkan dekomposisi QR termodifikasi. Bagian akhir paper ini, diberikan keterhandalan algoritma yang diusulkan melalui pembahasan contoh model reduksi.

**Kata Kunci:** Arnoldi-blok, MIMO, dan pemadanan momen

### 1. PENDAHULUAN

Sistem dinamik linear didefinisikan sebagai sistem persamaan diferensial dan sistem persamaan linear yang dituliskan sebagai berikut

$$\begin{cases} \mathbf{E} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

dengan syarat awal  $\mathbf{x}(0) = \theta$ . Matriks-matriks  $\mathbf{A}, \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , dan  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  adalah matriks sistem dinamik (1.1). Sistem (1.1) disebut sistem *multi input multi output* (MIMO) jika  $p, q > 1$ . Untuk  $p = q = 1$ , sistem (1.1) disebut sistem *single input single output* (SISO). Bilangan  $n$  disebut **order sistem** (1.1). Untuk selanjutnya, notasi  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E})$  digunakan untuk menyatakan sistem (1.1). Fungsi transfer untuk sistem (1.1) dinyatakan dengan

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

atau

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}_k (s_0 - s)^k$$

dengan  $s_0$  bilangan kompleks dan

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{C}((s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E})^k (s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (1.2)$$

untuk  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Jika  $G(s)$  diekspansikan di sekitar  $s \rightarrow \infty$ , maka

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_{k,\infty} = \mathbf{C}(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A})^{k-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B} \quad (1.3)$$

untuk  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Matriks  $\mathbf{M}_k$  dinamakan momen ke- $k$  sistem (1) di titik  $s = s_0$ , sedangkan  $\mathbf{M}_{k,\infty}$  dinamakan momen ke- $k$  pada *parameter Markov*. Titik  $s = s_0$  disebut titik interpolasi.

Sistem dinamik (1.1) banyak digunakan sebagai model matematika untuk permasalahan di bidang rekayasa IC, prediksi cuaca, pengendalian kualitas udara, sistem molekuler, sistem akustik, bifurkasi reaktor kimia, dan pendinginan dalam industri baja (Antoulas, 2005).

Makalah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dengan tema "*Kontribusi Pendidikan Matematika dan Matematika dalam Membangun Karakter Guru dan Siswa*" pada tanggal 10 November 2012 di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Model reduksi adalah suatu model yang menghampiri sistem (1.1) dengan persamaan  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{E}})$  yang berorder  $r < n$  sedemikian hingga sifat-sifat penting yang berlaku dalam sistem (1.1), juga akan berlaku dalam  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{E}})$ . Pemadanan momen adalah model reduksi berdasarkan subruang Krylov. Pemadanan momen dapat dijelaskan sebagai berikut. Sistem  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E})$  dihampiri oleh sistem  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{E}})$  menggunakan pemadanan momen di titik interpolasi  $s = s_0$  jika

$$\mathbf{M}_k = \tilde{\mathbf{M}}_k$$

dengan  $\mathbf{M}_k = \tilde{\mathbf{C}} \left( (s_0 \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{E}} \right)^k (s_0 \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}$  dan  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, p$ . Untuk pemadanan momen di parameter Markov didefinisikan serupa (Antoulas, 2005).

Beberapa peneliti mengusulkan pemadanan momen untuk sistem (1.1) MIMO melalui generalisasi pemadanan momen untuk sistem SISO. Salimbahrami et. al. mengusulkan pemadanan momen pada parameter Markov untuk sistem MIMO menggunakan algoritma Arnoldi-blok yang dimodifikasi. Setiap vektor kolom dalam matriks  $\mathbf{B}$  diortogonalisasi, kemudian vektor berikutnya diortogonalkan dengan kumpulan vektor ortogonal yang sudah ada (Salimbahrami et. al., 2005). Dengan perkataan lain, algoritma Arnoldi-blok yang termodifikasi tersebut adalah algoritma Arnoldi dengan inputnya multi vektor. Modifikasi algoritma Arnoldi-blok dapat dilakukan melalui penggunaan hasil kali Kronecker. Dengan hasil kali Kronecker ini, dapat dibentuk basis untuk subruang Krylov-blok. Selanjutnya, dapat dibuat model reduksi untuk sistem MIMO menggunakan modifikasi algoritma Arnoldi-blok tersebut (Chia-chi Chu et. al., 2008; Heyouni et. al., 2008).

Dalam makalah ini, penulis mengusulkan algoritma untuk membuat model reduksi di parameter Markov menggunakan algoritma Arnoldi-blok termodifikasi. Algoritma Arnoldi-blok baku disisipkan dekomposisi QR yang dapat mendeteksi vektor-vektor yang tak bebas linear secara numerik.

Untuk penulisan notasi dalam makalah ini dijabarkan sebagai berikut. Matriks dan vector ditulis dengan cetak tebal seperti  $\mathbf{F}$  dan  $\mathbf{g}$ . Notasi  $\mathbb{R}^{n \times r}$  menyatakan himpunan matriks real berorde  $n \times r$ . Selanjutnya, notasi  $\mathbf{I}$  dan  $\mathbf{A}^T$  berturut-turut menyatakan matriks identitas dan *transpose* matriks  $\mathbf{A}$ . Seperti dalam penulisan notasi standar pada aljabar linear,  $rank(\mathbf{G})$  menyatakan rank dari matriks  $\mathbf{G}$ .

Sistematika penulisan makalah ini dijelaskan sebagai berikut. Di Bagian 2, dibahas subruang Krylov dan subruang Krylov-blok serta beberapa algoritma yang dapat digunakan untuk membentuk basis kedua subruang tersebut. Selanjutnya, dibahas secara ringkas beberapa teorema yang menyangkut pemadanan momen seperti yang ditulis dalam Bagian 3 dan mengusulkan algoritma pemadanan momen untuk sistem MIMO. Kemudian diberikan beberapa contoh penyusunan model reduksi untuk sistem MIMO seperti yang ditulis dalam Bagian 4. Semua komputasi dalam makalah ini menggunakan software Matlab. Kesimpulan makalah ini ditulis dalam Bagian 5.

## 2. SUBRUANG KRYLOV

### 2.1. Algoritma Arnoldi dan Dekomposisi QR

Di dalam bagian ini, diberikan definisi subruang Krylov dan algoritma Arnoldi untuk mencari basis subruang tersebut. Selanjutnya, dibahas dekomposisi QR menggunakan algoritma Gram-Schmidt termodifikasi.

Diberikan matriks persegi  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dan vektor  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ . Subruang Krylov didefinisikan sebagai berikut

$$K_r(\mathbf{F}, \mathbf{g}) = \text{span} \{ \mathbf{g}, \mathbf{F}\mathbf{g}, \mathbf{F}^2\mathbf{g}, \dots, \mathbf{F}^{r-1}\mathbf{g} \} \quad (4)$$

dengan  $r$  bilangan asli. Jika  $\mathbf{z} \in K_r(\mathbf{F}, \mathbf{g})$  maka terdapat polinomial berderajat  $r$ , katakan  $p_r$ , sehingga  $\mathbf{z} = p_r(\mathbf{F})\mathbf{g}$ . Dimensi subruang Krylov  $K_r(\mathbf{F}, \mathbf{g})$  kurang dari atau sama dengan  $r$ .

Terdapat dua algoritma untuk membentuk basis subruang Krylov, yakni algoritma Lanczos dan algoritma Arnoldi. Algoritma Lanczos dapat bekerja dengan baik untuk matriks  $\mathbf{F}$  yang bersifat simetris atau Hermitian. Algoritma Arnoldi dapat digunakan untuk matriks  $\mathbf{F}$  yang tak-simetris, seperti ditulis sebagai berikut.

**Algoritma 2.1**

Input :  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$  dan bilangan asli  $r$

1. Hitung  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}/\|\mathbf{g}\|$
2. Untuk  $j = 1, 2, \dots, r - 1$ , kerjakan
  - 2.1. untuk  $k = 1, 2, \dots, j$ , kerjakan
    - 2.1.1. hitung  $h_{k,j} = \mathbf{v}_k^T \mathbf{F} \mathbf{v}_j$
  - 2.2.  $\mathbf{u}_j = \mathbf{F} \mathbf{v}_j - \sum_{k=1}^j h_{k,j} \mathbf{v}_k$
  - 2.3.  $h_{j+1,j} = \|\mathbf{u}_j\|$
  - 2.4. Jika  $h_{j+1,j} = 0$  maka stop
  - 2.5.  $\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{u}_j/h_{j+1,j}$
3. Stop. ♦

Algoritma 2.1 biasa disebut algoritma Arnoldi. Algoritma tersebut merupakan modifikasi dari proses ortogonalisasi Gram-Schmidt. Jika Algoritma 2.1 akan berhenti setelah  $r$  iterasi, diperoleh dua matriks :

- matriks  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_r] \in \mathbb{R}^{n \times r}$
- matriks Hessenberg

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & \dots & h_{1,r-1} & h_{1,r} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & \dots & h_{2,r-1} & h_{2,r} \\ 0 & h_{3,2} & h_{3,3} & \dots & h_{3,r-1} & h_{3,r} \\ 0 & 0 & h_{4,3} & \dots & h_{4,r-1} & h_{4,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{r,r-1} & h_{r,r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

Vektor-vektor kolom matriks  $\mathbf{V}$  merupakan basis ortonormal untuk subruang Krylov. Syarat penggunaan subruang Krylov untuk problema aproksimasi adalah persamaan

$$\mathbf{FV} = \mathbf{VH} + h_{r,r+1} \mathbf{v}_r \mathbf{e}_r^T \tag{2.1}$$

dengan  $\mathbf{e}_r^T = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^r$ , harus dipenuhi (Antoulas, 2005; Heres, 2005).

Dekomposisi QR untuk matriks menyatakan bahwa  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  dapat ditulis  $\mathbf{G} = \mathbf{QR}$  dengan  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  dan  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , dan  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  matriks segitiga atas. Jika  $n > r$  dan  $rank(\mathbf{G}) = r$ , maka dekomposisi QR dapat dilakukan pada matriks  $\mathbf{G}$ . Perhatikan kembali langkah 2 pada Algoritma 1.1 di atas. Dekomposisi QR matriks dapat dilakukan dengan Algoritma 1 yang dimodifikasi. Pembahasan lebih lanjut mengenai hal ini dapat dilihat dalam (Mayer, 2001, hal. 311). Algoritma 1.1 yang dimodifikasi untuk mencari dekomposisi QR ditulis seperti berikut.

**Algoritma 2.1** (Mayer, 2001)

Input :  $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \dots \ \mathbf{g}_r] \in \mathbb{R}^{n \times r}$

Output :  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  dan  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{r \times r}$

1. Untuk  $j = 1, 2, \dots, r$ , kerjakan

- 1.1.  $\mathbf{q}_j = \mathbf{g}_j$
- 1.2. Untuk  $i = 1, 2, \dots, j - 1$ , kerjakan
  - 1.2.1.  $r_{i,j} = \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j$
  - 1.2.2.  $\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j - r_{i,j} \mathbf{q}_i$
- 1.3.  $r_{j,j} = \|\mathbf{q}_j\|$
- 1.4. Jika  $r_{j,j} = 0$ , berhenti
- 1.5.  $\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j / \|\mathbf{q}_j\|$
2. Stop. ♦

Jika  $\text{rank}(\mathbf{G}) < r$ , maka matriks  $\mathbf{G}$  disebut matriks *rank deficiency*. Algoritma 1 tidak dapat digunakan untuk mencari matriks  $\mathbf{Q}$  dan  $\mathbf{R}$ . Transformasi Householder atau rotasi Givens dapat digunakan membentuk dekomposisi QR untuk matriks *rank deficiency* (Golub and Van Loan, 1999, hal. 249). Langkah 2.1 dalam Algoritma 2.1 akan menghasilkan vektor

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{q}_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{i,j} \mathbf{q}_i$$

untuk  $j = 2, 3, \dots, r$ . Jika  $\|\mathbf{d}_j\|$  cukup kecil dibandingkan dengan  $\|\mathbf{q}_j\|$ , secara numerik vektor  $\mathbf{q}_j$  merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{j-1}$ . Oleh karena itu, vektor  $\mathbf{q}_j$  harus dikeluarkan dari keanggotaan basis subruang Krylov atau direortogonalisasi terhadap  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{j-1}$ . Dalam implementasi komputasinya,

$$\|\mathbf{d}_j\| \leq \frac{1}{10} \|\mathbf{q}_j\|$$

menjadi syarat agar vektor  $\mathbf{q}_j$  direortogonalisasi terhadap  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{j-1}$  (Gander, 1980). Secara umum, penentuan nilai  $c > 0$  yang memenuhi

$$\|\mathbf{d}_j\| \ll c \|\mathbf{q}_j\|$$

bergantung pada *software komputasi yang digunakan*.

Berdasarkan ide dalam (Gander, 1980), penulis mengusulkan dekomposisi QR sedemikian hingga jika  $\|\mathbf{d}_j\| \leq \frac{1}{10} \|\mathbf{q}_j\|$  maka vektor  $\mathbf{q}_j$  dikeluarkan dari keanggotaan basis subruang Krylov. Selanjutnya, dekomposisi QR yang dihasilkan disebut dekomposisi QRpresisi. Adapun algoritma yang dihasilkan ditulis seperti berikut.

**Algoritma 2.2** (Dekomposisi QRpresisi)

Input :  $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \dots \ \mathbf{g}_r] \in \mathbb{R}^{n \times r}$

Output :  $\mathbf{Q}$  dan  $\mathbf{R}$

1. Untuk  $j = 1, 2, \dots, r$ , kerjakan
  - 1.1.  $\mathbf{q}_j = \mathbf{g}_j$
  - 1.2.  $\mathbf{d}_j = \mathbf{g}_j$
  - 1.3. Untuk  $i = 1, 2, \dots, j - 1$ , kerjakan
    - 1.3.1.  $r_{i,j} = \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j$
    - 1.3.2.  $\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j - r_{i,j} \mathbf{q}_i$
  - 1.4.  $r_{j,j} = \|\mathbf{q}_j\|$
  - 1.5. Jika  $r_{j,j} = 0$ , berhenti
  - 1.6. Jika  $\|\mathbf{d}_j\| \leq \frac{1}{10} \|\mathbf{q}_j\|$ , keluarkan  $\mathbf{q}_j$  dari keanggotaan ruang kolom  $\mathbf{Q}$
  - 1.7.  $\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j / \|\mathbf{q}_j\|$ .
2. Stop. ♦

## 2.2. Subruang Krylov-Blok

Subruang Krylov-blok merupakan bentuk pengitlakan subruang Krylov. Untuk membentuk subruang Krylov  $K_r(\mathbf{F}, \mathbf{g})$ , diperlukan matriks dan vektor. Subruang Krylov-blok adalah subruang Krylov dibangun oleh dua matriks,

$$K_r(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = \bigcup_{k=1}^m K_r(\mathbf{F}, \mathbf{g}_k)$$

dengan  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \dots \ \mathbf{g}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$  dan  $m < n$ . Oleh karenanya, dimensi subruang Krylov-blok  $K_r(\mathbf{F}, \mathbf{G})$  kurang dari atau sama dengan  $mr$ .

### Algoritma 2.3

**Input** :  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , dan integer  $r$

**Output** :  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times mr}$  dan  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{mr \times mr}$ .

1. Hitung matriks ortogonal  $\mathbf{V}_1$  menggunakan dekomposisi QR terhadap matriks  $\mathbf{G}$ . Katakan  $\mathbf{G} = \mathbf{V}_1 \mathbf{R}$ .
2. Untuk  $j = 1, 2, \dots, r$ , kerjakan
  - 2.1.  $\mathbf{Z}_j = \mathbf{FV}_j$
  - 2.2. untuk  $k = 1, 2, \dots, j$ , kerjakan
    - 2.2.1.  $\mathbf{H}_{k,j} = (\mathbf{V}_k)^T \mathbf{Z}_j$
    - 2.2.2.  $\mathbf{Z}_j = \mathbf{Z}_j - \mathbf{V}_k \mathbf{H}_{k,j}$
  - 2.3. Hitung  $\mathbf{V}_{j+1}$  dan  $\mathbf{H}_{j+1,j}$  menggunakan dekomposisi QR terhadap  $\mathbf{Z}_j$ , namakan  $\mathbf{Z}_j = \mathbf{V}_{j+1} \mathbf{H}_{j+1,j}$ .
3. Stop. ♦

Algoritma 4 disebut algoritma Arnoldi-blok baku. Modifikasi Algoritma 4 difokuskan pada penyisipan dekomposisi QR untuk matriks *rank deficiency*. Heres mengusulkan dekomposisi QR untuk matriks *rank deficiency* dengan cara mengganti langkah 1.6 dalam Algoritma 2.2 oleh  $\|\mathbf{q}_j\| < \varepsilon$  di mana nilai  $\varepsilon$  diketahui sebelumnya. Algoritma yang diusulkan Heres telah teruji dapat mendeteksi vektor-vektor yang tak bebas linear (Heres, 2005). Penulis mengusulkan dekomposisi QR pada Algoritma 2.3 diganti dengan dekomposisi QRpresisi seperti yang ditulis dalam Algoritma 2.2.

## 3. PEMADANAN MOMEN

Dalam bagian ini, dibahas algoritma mencari sistem tereduksi berdasarkan teorema pemadanan momen seperti yang akan ditulis dalam Teorema 3.1 dan Teorema 3.2. Dua teorema berikut tidak diberikan pembuktiannya. Pembuktian dua teorema tersebut dapat dilihat dalam (Farikhin, 2011).

Pada umumnya, mencari model reduksi untuk sistem (1.1) menggunakan matriks proyeksi. Matriks proyeksi yang dimaksudkan adalah  $\mathbf{W}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  dan  $\mathbf{W}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$ . Matriks  $\mathbf{W}$  dan  $\mathbf{V}$  dapat dipandang sebagai transformasi proyektif dari ruang  $\mathbb{R}^n$  ke ruang  $\mathbb{R}^r$ . Kemudian matriks-matriks dari sistem tereduksinya didefinisikan

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V}, \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V}, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{W}^T \mathbf{B}, \text{ dan } \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{V}.$$

**Teorem 3.1.** Jika (a)  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E})$  dengan  $\mathbf{E}$  tak singular, (b)  $\mathbf{W} = \mathbf{V}$  adalah matriks yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok untuk subruang Krylov blok  $K_m(\mathbf{E}^{-1} \mathbf{A}, \mathbf{E}^{-1} \mathbf{B})$  yang tidak berhenti sebelum iterasi ke- $m$ , (c)  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{E}})$  adalah model reduksi untuk  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E})$  dan  $\tilde{\mathbf{E}}$  tak singular, maka

$$\mathbf{M}_{\infty,k} = \tilde{\mathbf{M}}_{\infty,k}$$

untuk  $k = 1, 2, \dots, m$ . ♦

**Teorem 3.2** Jika (a)  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E})$  dengan  $\mathbf{E}$  tak singular, (b)  $\mathbf{V}$  matriks yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok yang tidak berhenti sebelum iterasi ke- $m$  dan kolom-kolomnya merupakan basis untuk subruang Krylov blok  $K_m(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}, \mathbf{E}^{-1}\mathbf{B})$  (c)  $\mathbf{W}$  matriks yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok yang tidak berhenti sebelum iterasi ke- $m$  dan kolom-kolomnya merupakan basis untuk subruang Krylov blok  $K_m(\mathbf{E}^{-T}\mathbf{A}^T, \mathbf{E}^{-T}\mathbf{C}^T)$  (d)  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{E}})$  model reduksi untuk  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E})$  dengan  $\tilde{\mathbf{E}}$  tak singular, maka

$$\mathbf{M}_{\infty,k} = \tilde{\mathbf{M}}_{\infty,k}$$

untuk  $k = 1, 2, \dots, 2m$ . ♦

Berdasarkan dua teorema di atas, dibuat algoritma penyusunan model tereduksi untuk sistem (1.1) seperti berikut

**Algoritma 3.1**

Input : matriks sistem (1.1) yakni  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ,  
 $r =$  order sistem tereduksi

Output :  $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}$

1. Hitung matriks  $\mathbf{V}$  sebagai output Algoritma 2.3 dengan dekomposisi QR diganti dengan dekomposisi QRpresisi seperti ditulis dalam Algoritma 2.2.
2. Hitung  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^T \mathbf{B}$ , dan  $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{V}$ .

Algoritma 3.1 digunakan dengan asumsi matriks sistem (1.1)  $\mathbf{E} = \mathbf{I}$ .

**4. ILUSTRASI CONTOH**

Dalam bagian ini, contoh diambil dari (Chahlaoui & Van Dooren, 2002). Dalam pembuatan stasiun ruang angkasa internasional dilakukan dalam beberapa tahapan. Model vibrasi dalam pembuatan itu yang diakibatkan oleh getaran pesawat ruang angkasa dimodelkan menggunakan sistem (1.1) dengan  $\mathbf{E} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{270 \times 270}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{270 \times 3}$ , dan  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 270}$ . Sistem ini merupakan sistem MIMO dengan 3 input dan 3 output. Matriks-matriks sistem  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{270 \times 270}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{270 \times 3}$ , dan  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 270}$  merupakan matriks *sparse*.

Untuk mengukur kinerja sistem tereduksi yang dihasilkan, digunakan ralat aproksimasi sistem (1.1) seperti dituliskan berikut.

**Definisi 4.1** (Yan & Lam, 1999). Misalkan  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{I})$  dan fungsi transfernya  $G$ , dan model peringkat terturunya  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{I}})$  bersama fungsi pindah  $\tilde{G}$ . Misalkan

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{\Theta} \\ \mathbf{\Theta} & \tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \text{ dan } \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix}.$$

Ralat aproksimasi  $G$  oleh  $\tilde{G}$  ditakrifkan sebagai  $\text{tr}(\bar{\mathbf{C}} \mathbf{P} \bar{\mathbf{C}}^T)$  dengan matriks  $\mathbf{P}$  adalah penyelesaian persamaan matriks  $\bar{\mathbf{A}} \mathbf{P} + \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{B} = \mathbf{\Theta}$ . ♦

**Tabel 4.1.** Ralat aproksimasi untuk berbagai order sistem tereduksi

$m$	Order Sistem Tereduksi	Ralat Aproksimasi
3	9	1.4899e-004
5	15	1.2338e-004
7	21	9.4186e-005
10	30	7.2239e-005
20	60	2.8491e-005

Tinjau kembali Algoritma 3.1. Matriks  $\mathbf{V} \in R^{n \times mr}$  merupakan output dari Algoritma 3.1. Oleh karenanya, order dari sistem tereduksi adalah  $mr$ . Dalam contoh ini, diketahui bahwa  $r = 3$ , sehingga untuk  $m = 3, 5, 7, 10, 20$  berturut-turut akan menghasilkan order sistem tereduksi 9, 15, 21, 30, dan 60. Tabel 4.1 memperlihatkan berbagai nilai ralat aproksimasi untuk berbagai order sistem tereduksi. Sementara itu, order sistem semula adalah 270. Tabel 4.1 memperlihatkan bahwa sistem berorder 9 mengaproksimasi secara baik sistem vibrasi yang berorder 270. Semua komputasi dalam makalah ini menggunakan software Matlab R2010a.

## 5. KESIMPULAN

Untuk mendeteksi vektor-vektor yang tak bebas linear dalam basis subruang Krylov dapat menggunakan proses reortogonalisasi dalam algoritma Arnoldi. Selanjutnya, pendeteksian tersebut teruji dalam sistem dinamik linear untuk matriks-matriks sistem yang *sparse*. Hal ini diperlihatkan dalam Bagian 4, di mana ralat aproksimasi antara sistem semula dan sistem tereduksi dianggap cukup kecil.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Tulisan ini merupakan bagian dari Penelitian yang didanai oleh Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro dengan no kontrak penelitian **25/UN7.3.8/PL/2012**.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Antoulas, A.C. (2005). *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Publisher.
- [2]. Chia-chi Chu, Ming-Hong Lai, and Wu-shiung Feng, (2008). *Model order reductions for MIMO systems using global Krylov subspace methods*. Mathematics and Computer in simulation, 79, 1153-1164.
- [3]. Chahlaoui, Y. and Van Dooren, P.: A collection of benchmark examples for model reduction of linear time invariant dynamical systems, Techincal report (2002)
- [4]. Farikhin. (2011). *Model reduksi pada parameter Markov*, Jurnal Matematika (Undip), 14(2), 110-114.
- [5]. Farikhin and Ismail Mohd, *Mathematical Approach for Moment Matching*. The paper was presented on Monthly Seminar of INSPEM, Universiti Putra Malaysia (UPM), 9 July 2010.

- 
- [6]. Gander, W. (1980). *Algorithms for The QR-Decomposition*. Research Report No 80-02, Eidgenoessische Technische Hochschule, Zuerich.
  - [7]. Golub, Gene H., and Van Loan, C. (1999). *Matrix Computation*, Third Edition, Baltimore : John Hopkins University Press.
  - [8]. Heres, P.J. (2005). *Robust and Efficient Krylov Subspace Method for Model Reduction*. Doctoral Dissertation, TU Eindhoven , Eindhoven, The Netherland.
  - [9]. Heyouni, M., Jbilou, K., Messaoudi, A., and Tabaa, K. (2008) *Model reduction in large scale MIMO dynamical system via the block Lanczos method*. Computational & Applied Mathematics, 27(2), 211-236.
  - [10]. Mayer, Carl D. (2001). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Philadelphia : SIAM Publisher.
  - [11]. Salimbahrami, B., Lohmann, B., Bechtold, T., and Korvink, J.G. (2005) *A two sided Arnoldi algorithm with stopping criterion and MIMO selection procedure*. Mathematical and computer modelling of dynamical systems, 11(1), 79-93
  - [12]. Yan, Wei-yong and Lam, J. (1999). An Approximate Approach to  $H^2$  Optimal Model Reduction, IEEE Trans. On Automatic Control, 44(7), 1341-1358.