 ISBN : 978-979-16353-8-7

PEMODELAN SISTEM ANTRIAN MULTISERVER DENGAN *MULTITASK SERVER* MENGGUNAKAN *VACATION QUEUEING MODEL*

Esti Nur Kurniawati, Retno Subekti
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

ABSTRAK

Suatu sistem antrian multiserver dengan kedatangan *customer* yang berdistribusi Poisson dan waktu antar kedatangan yang berdistribusi Eksponensial disebut sistem antrian Markovian yang dinotasikan dengan M/M/c, dengan c menyatakan banyaknya server. Jika dalam suatu sistem antrian terdapat satu atau lebih server yang tidak dapat melayani *customer* pada rentang waktu tertentu saat jam operasional, maka server dikatakan sedang melakukan *vacation*. Suatu model antrian multiserver dengan beberapa kali *vacation* yang dapat dilakukan secara individual disebut *Asynchronous Multiple Vacations Model*, dan dinotasikan dengan (M/M/c (AS,MV)). Waktu *vacation* berdistribusi Eksponensial dengan disiplin antrian *FCFS (First Come First Serve).* Penurunan formula untuk mendapatkan ukuran keefektifan sistem antrian M/M/c (AS,MV) dilakukan dengan pendekatan *Quasi Birth-Death Process*. Untuk menganalisis kasus antrian M/M/c (AS,MV) dilakukan langkah-langkah berikut: (1) Melakukan uji kesesuaian distribusi kedatangan *customer*, distribusi waktu pelayanan *customer*, dan distribusi waktu *vacation*, (2) mengkonstruksi submatriks-submatriks yang menyusun matriks generator infinitesimal Q, mengkonstruksi *rate matrix* R dan matriks B[R], (3) menyelesaikan persamaan matriks $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_c)B[R] = 0$, (4) menghitung nilai harapan banyaknya *customer* di dalam sistem antrian dan nilai harapan waktu tunggu di dalam sistem antrian. Ukuran keefektifan pada model antrian M/M/c (AS,MV) meliputi nilai harapan banyaknya *customer* dalam sistem $\left(L_v^{(c)}\right)$ dan nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam sistem $\left(W_v^{(c)}\right)$.

Kata kunci : M/M/c (AS,MV), *multiple vacation*

Makalah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dengan tema *" Kontribusi Pendidikan Matematika dan Matematika dalam Membangun Karakter Guru dan Siswa"* pada tanggal 10 November 2012 di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Pendahuluan

Menurut Sinalungga (2008:238), Teori antrian (*Queueing Theory*) merupakan studi probabilistik kejadian garis tunggu (*waiting lines*), yakni suatu garis tunggu dari *customer* yang memerlukan layanan dari sistem yang ada.

Untuk suatu fase antrian dengan kedatangan *customer* yang relatif banyak, disediakan lebih dari satu server agar jumlah *customer* yang dapat dilayani per satuan waktu lebih optimal. Pada model antrian yang menggunakan lebih dari satu server atau yang disebut dengan multiserver, server diasumsikan selalu tersedia (*online*) untuk melayani *customer*. Namun pada kenyataannya ada banyak faktor yang dapat menunda pelayanan selama beberapa saat, sehingga server tidak dapat melayani secara seketika pada saat *customer* datang. Server yang tidak tersedia pada waktu-waktu pelayanan yang seharusnya sedang berlangsung dalam sistem antrian diasumsikan sedang melakukan *vacation*. Server yang tidak tersedia pada waktu-waktu pelayanan yang seharusnya sedang berlangsung dalam sistem antrian diasumsikan sedang melakukan *vacation*. *Vacation* dapat dianggap sebagai waktu istirahat server, waktu bagi server ketika melakukan tugas sekunder, atau gangguan teknis pada saat server melakukan pelayanan (Tian & Zhang, 2006:viii). Server yang mempunyai tugas sekunder disebut dengan *multitask server*. Adanya *vacation* menyebabkan terjadinya waktu penundaan pelayanan, walaupun waktu penundaan tersebut hanya sesaat. Sedangkan pada model antrian multiserver biasa, waktu penundaan pelayanan diabaikan. Oleh sebab itu, model antrian multiserver biasa tidak sesuai jika digunakan untuk menganalisis model antrian multiserver dengan *vacation*.

Pembahasan

pada bagian ini akan dibahas mengenai *Quasi Birth-Death Process* dan proses penurunan rumus untuk model antrian M/M/c (AS,MV), serta penerapan untuk model antrian tersebut.

A. *Quasi Birth-Death (QBD) Process*

Quasi Birth-Death (*QBD*) *Process* merupakan generalisasi dari *Birth-Death Process* dari suatu *state space* berdimensi satu menjadi *state space* berdimensi lebih dari satu. QBD *process* memiliki matriks generator infinitesimal sebagai berikut

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_0} & \boldsymbol{C_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \boldsymbol{B_1} & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

entri-entri pada matriks **Q** tersebut memenuhi

$$(A_0 + C_0)\mathbf{e} = (A + B_1 + C)\mathbf{e} = (A + B + C)\mathbf{e} = 0$$

 ISBN : 978-979-16353-8-7

pada setiap baris, dengan **e** merupakan vektor kolom yang entri-entrinya 1.

B. *Asynchronous Multiple Vacations Model*

Diasumsikan bahwa laju pelayanan (μ), laju kedatangan *customer* (λ) dan waktu *vacation* (θ) ketiganya saling bebas. Misalkan $L_v(t)$ adalah banyaknya pelanggan di dalam sistem pada waktu t, dan $J(t)$ adalah banyaknya server yang sibuk/tidak melakukan *vacation* pada waktu t. Satu atau lebih server melakukan *vacation* mengikuti aturan (AS,MV). Dengan demikian model antrian M/M/c (AS,MV) dapat dipandang sebagai suatu *QBD Process* yang mempunyai generator infinitesimal berikut

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_0} & \boldsymbol{C_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \boldsymbol{B_1} & \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{C_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B_2} & \boldsymbol{A_2} & \boldsymbol{C_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{B_{c-1}} & \boldsymbol{A_{c-1}} & \boldsymbol{C_{c-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{B_c} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

dengan submatriks-submatriksnya didefinisikan sebagai berikut

$$\mathbf{A_0} = -\lambda,$$
$$\mathbf{C_0} = (\lambda, 0)$$
$$\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -h_0 & c\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_1 & (c-1)\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_{c-1} & \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_c \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = diag(0, \mu, 2\mu, \dots, c\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c-1)\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\mu \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \lambda \mathrm{I} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

 ISBN : 978-979-16353-8-7

$$\mathbf{A_k} = \begin{bmatrix} -h_0 & c\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_1 & (c-1)\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_{k-1} & (c-k+1)\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda + k\mu + (c-k)\theta) \end{bmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}.$$

$$\boldsymbol{B}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (k-1)\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k\mu \end{bmatrix}_{(k+1)\times k}$$

$$\boldsymbol{C}_k = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}_{(k+1)\times(k+2)}$$

h_k didefinisikan sebagai

$$h_k = h_k(\lambda,\theta,\mu) = \lambda + k\mu + (c-k)\theta, \qquad 0 \le k \le c,$$

Untuk menganalisis suatu QBD *Process*, terlebih dahulu dicari solusi non-negatif minimum dari suatu persamaan matriks kuadratik sebagai berikut

$$\boldsymbol{R^2B + RA + C = 0} \tag{2.2}$$

matriks **R** disebut dengan *rate matrix* yang mempunyai entri-entri non-negatif dengan struktur sebagai berikut

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \eta \\ \mathbf{0} & r \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

H merupakan suatu matriks berukuran $c \times c$, η merupakan suatu vektor kolom berukuran $c \times 1$, dan *r* merupakan suatu bilangan real.

Selanjutnya disubstitusikan $k\mu,\ \lambda + k\mu + (c-k)\theta, \text{dan } \lambda$ yang berturut-turut merupakan entri pada kolom terakhir dan baris terakhir dari matriks $\boldsymbol{B}_k, \boldsymbol{A}_k, \text{dan } \boldsymbol{C}_k$ ke dalam persamaan (2.2), diperoleh persamaan

$$k\mu r^2 - [\lambda + k\mu + (c-k)\theta]r + \lambda = 0, \qquad 1 \le k \le c \tag{2.4}$$

r merupakan entri dari *rate matrix* **R**.
Pada kondisi *steady-state*, persamaan

$$k\mu r^2 - [\lambda + k\mu + (c-k)\theta]r + \lambda = 0, \qquad 1 \le k < c$$

mempunyai dua akar, yaitu $r_k < r_k^*$ dan $0 < r_k < 1,\ r_k^* \ge 1$

 ISBN : 978-979-16353-8-7

Akar-akar dari persamaan (2.4) dapat dicari dengan dengan rumus abc, dengan $a = k\mu$, $b = -[\lambda + k\mu + (c-k)\theta]$, dan $c = \lambda$

$$r_k^*, r_k = \frac{-b \pm \sqrt{(-b)^2 - 4ac}}{2a}$$

Maka

$$r_k^* = \frac{\lambda + k\mu + (c-k)\theta + \sqrt{[(\lambda + k\mu + (c-k)\theta)]^2 - 4\lambda k\mu}}{2k\mu} \qquad (2.5)$$

dan

$$r_k = \frac{\lambda + k\mu + (c-k)\theta - \sqrt{[(\lambda + k\mu + (c-k)\theta)]^2 - 4\lambda k\mu}}{2k\mu} \qquad (2.6)$$

$r_c = \rho < 1$ dan $r_c^* = 1$

Dari persamaan (2.5) dan (2.6) dapat ditentukan rumus untuk r_{k+1}^* dan r_{k+1}, yaitu

$$r_{k+1}^* = \frac{\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta + \sqrt{[(\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta)]^2 - 4\lambda(k+1)\mu}}{2(k+1)\mu}$$

$$r_{k+1} = \frac{\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta - \sqrt{[(\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta)]^2 - 4\lambda(k+1)\mu}}{2(k+1)\mu}$$

$$r_{k,k+1} = \left(\frac{c-k}{k+1}\right)\left(\frac{\theta}{\mu}\right)\frac{r_k}{r_{k+1}^* - r_k}, \quad 0 \le k \le c-1$$

$$r_{k,k+2} = \frac{(c-k)(c-k-1)}{(k+1)(k+2)}\left(\frac{\theta}{\mu}\right)^2 \frac{r_k r_{k+2}^*}{(r_{k+2}^* - r_{k+1})(r_{k+1}^* - r_k)}, \quad 0 \le k \le c-2$$

$$r_{k,k+3} = \frac{(c-k)(c-k-1)(c-k-2)}{(k+1)(k+2)(k+3)}\left(\frac{\theta}{\mu}\right)^3 \frac{r_k r_{k+3}^*(r_{k+2}^* r_{k+3}^* - r_k r_{k+1})}{(r_{k+3}^* - r_{k+2})(r_{k+2}^* - r_{k+1})(r_{k+1}^* - r_k)},$$

$0 \le k \le c-3$

$$(k+1)\mu r_{k+1}^* = \frac{\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta + \sqrt{[(\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta)]^2 - 4\lambda(k+1)\mu}}{2}$$

$$= \frac{2[\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta]}{2} - \left\{\frac{[\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta] - \sqrt{[(\lambda + (k+1)\mu + (c-k-1)\theta)]^2 - 4\lambda(k+1)\mu}}{2}\right\}$$

 ISBN : 978-979-16353-8-7

Nilai dari r_k digunakan untuk mengkonstruksi elemen diagonal dari *rate matrix* R. Sedangkan untuk r_0 dan r_c nilainya adalah $r_0 = \lambda(\lambda + c\theta)^{-1}$,dan $r_c = \rho$.

Dengan demikian persamaan matriks (2.2) mempunyai solusi non-negatif minimum

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_0 & r_{01} & \cdots & r_{0c} \\ 0 & r_1 & \cdots & r_{1c} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & r_c \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

sedangkan matriks **H**, η dan B[**R**] didefinisikan sebagai berikut

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} r_0 & r_{01} & \cdots & r_{0,c-1} \\ 0 & r_1 & \cdots & r_{1,c-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & r_{c-1} \end{bmatrix}, \qquad \eta = \begin{bmatrix} r_{0c} \\ r_{1c} \\ \vdots \\ r_{c-1,c} \end{bmatrix}$$

$$B[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{C}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{B}_{c-1} & \boldsymbol{A}_{c-1} & \boldsymbol{C}_{c-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c & \mathbf{RB} + \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

Dimana $r_0 = \lambda(\lambda + c\theta)^{-1}$, $r_c = \rho$, dan r_k, $1 \leq k \leq c - 1$,

C. Nilai Harapan Banyak *Customer* dalam Sistem Antrian

Nilai harapan banyaknya *customer* yang berada pada sistem antrian M/M/c (AS, MV) merupakan jumlahan dari banyak *customer* pada waktu server belum melakukan *vacation* dan banyak *customer* yang datang pada saat server melakukan *vacation*, atau dapat dituliskan dengan persamaan berikut

$$L_v^{(c)} = L_s + L_d$$

dengan

L_s = nilai harapan banyaknya *customer* di dalam antrian pada saat server belum melakukan *vacation*, atau nilai harapan banyaknya *customer* pada sistem antrian multiserver biasa.

L_d = nilai harapan panjang antrian tambahan saat terjadi penundaan pelayanan sebagai akibat dari adanya *vacation*

Misal sebanyak *k customer* memasuki sistem antrian pada saat *d* server melakukan *vacation*. Menurut Tian & Zhang (2006:227) peluang $L_d = k$ didefinisikan sebagai berikut

$$P\{L_d = k\} = \frac{1}{\sigma}\{\beta_{cc} + \delta \mathbf{H}^{k-1}\eta\}$$

Probability generating function dari L_d adalah

$$L_d(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P\{L_d = k\},$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\frac{1}{\sigma}\{\beta_{cc} + \delta \mathbf{H}^{k-1}\eta\}\right)$$
$$= \frac{1}{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty} z^k \{\beta_{cc} + \delta \mathbf{H}^{k-1}\eta\}$$
$$= \frac{1}{\sigma}\left([z\{\beta_{cc} + \delta\eta\}] + [z^2\{\beta_{cc} + \delta \mathbf{H}^1\eta\}] + [z^3\{\beta_{cc} + \delta \mathbf{H}^2\eta\}] + \cdots\right)$$
$$L_d(z) = \frac{1}{\sigma}\{\beta_{cc} + z\delta(\mathbf{I} - \mathrm{z}\mathbf{H})^{-1}\eta\} \qquad (2.8)$$

sehingga nilai harapan dari L_d adalah

$$E(L_d) = L_d{}'(1)$$
$$= \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\delta(\mathbf{I} - \mathrm{z}\mathbf{H})\eta - (z\delta\eta)(-\mathbf{H})}{(\mathbf{I} - \mathrm{z}\mathbf{H})^2}\right)$$
$$E(L_d) = \frac{1}{\sigma}\delta(\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-2}\eta$$

Jadi nilai harapan banyaknya *customer* dalam sistem antrian M/M/c (AS, MV) adalah

$$L_v^{(c)} = L_s + L_d$$
$$L_v^{(c)} = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{\sigma}\delta(\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-2}\eta \qquad (2.9)$$

D. Nilai Harapan Waktu Tunggu dalam Sistem

Waktu menunggu dalam sistem antrian M/M/c (AS, MV), yang dinotasikan dengan $W_v^{(c)}$, dapat dicari menggunakan *Little's Law*, yaitu

$$W_v^{(c)} = \frac{L_v^{(c)}}{\lambda}$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{\sigma}\delta(\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-2}\eta\right)$$

(2.10)

Substitusikan $\lambda = \rho c\mu$ ke dalam persamaan (2.10), diperoleh

 ISBN : 978-979-16353-8-7

$$W_v^{(c)} = \frac{1}{c\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\rho c\mu\sigma}\delta(\mathbf{I}-\mathbf{H})^{-2}\eta$$

E. Implementasi

Diberikan contoh ilustrasi antrian yang terjadi di sebuah kantor pos dengan dua orang petugas. Dalam kasus ini petugas berperan sebagai server. Apabila di dalam kantor pos hanya terdapat satu *customer*, maka hanya ada satu petugas yang aktif. Kemudian petugas yang menganggur akan melakukan tugas menyortir surat-surat di meja yang lain. Apabila ada *customer* kedua yang masuk ke dalam kantor pos tetapi petugas yang aktif belum selesai melayani *customer* sebelumnya, maka petugas yang menyortir surat harus kembali melayani *customer*. Penyortiran surat dilakukan beberapa kali sesuai dengan banyaknya waktu server menganggur. Tugas tersebut dapat dilakukan secara individual oleh setiap petugas yang sedang menganggur. Tugas menyortir surat-surat yang dilakukan oleh petugas dianggap sebagai *vacation*. Pada kasus ini diketahui banyaknya server (c) adalah 2 orang, laju kedatangan (λ) adalah 18 orang per jam. Sedangkan laju pelayanan (μ) diperoleh 20 orang per jam dan rata-rata waktu *vacation* adalah 0,525 jam, serta

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{18}{2(200)} \approx 0{,}45$$

Jika dinyatakan sebagai model antrian, maka kasus tersebut merupakan model antrian M/M/2 (AS,MV). generator infinitesimalnya sebagai berikut

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_0} & \boldsymbol{C_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{B_1} & \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{C_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B_2} & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dilakukan langkah-langkah berikut untuk menyelesaikannya

a) Melakukan uji kesesuaian distribusi kedatangan *customer*, distribusi waktu pelayanan *customer* dan distribusi waktu *vacation*.
b) mengkonstruksi submatriks-submatriks yang menyusun matriks generator infinitesimal Q
c) mengkonstruksi *rate matrix* **R** dan matriks **B**[**R**]
d) menyelesaikan persamaan matriks $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_c)B[\mathbf{R}] = 0$
e) menghitung nilai harapan banyaknya *customer* di dalam sistem antrian dan nilai harapan waktu tunggu di dalam sistem antrian.

Langkah-langkah tersebut apabila dikonversi ke dalam bahasa pemrograman pada *software* Matlab menjadi seperti berikut ini

ISBN : 978-979-16353-8-7

```
%Program_menghitung_nilai_keefektifan_sistem_antrian_M/M/c(AS
,MV)

lambda=input('masukan_laju_kedatangan=');
mu=input('masukan_laju_pelayanan=');
teta=input('masukan_rata-rata_waktu_vacation=');
c=input('banyak_server=');
rho=lambda/(c*mu);
r2b=1;

%menghitung_r0
      r0=lambda/(lambda+c*teta);

%menghitung_r1
      r1=(lambda+mu+teta-sqrt((lambda+mu+teta)^2-
(4*lambda*mu)))/(2*mu);

%menghitung_r1b
r1b=(lambda+mu+teta+sqrt((lambda+mu+teta)^2-
(4*lambda*mu)))/(2*mu);

%menghitung_r2
      r2=rho;

%menghitung_r01
      r01=2*(teta/mu)*(r0/(r1b-r0));

%menghitung_r02
      r02=((teta/mu)^2)*r0*r2b/((r2b-r1)*(r1b-r0));

%menghitung_r12
      r12=(1/2)*(teta/mu)*(r1/(r2b-r1));

%matriks_R
      R=[r0 r01 r02; 0 r1 r12; 0 0 r2];

%mengkonstruksi_matrix_B[R]
      A0=[-lambda];
      C0=[lambda 0];
      A1=[-(lambda+2*teta) 2*teta; 0 -(lambda+mu)];
      B1=[0; mu];
      B2=[0 0; 0 mu; 0 2*mu];
      C1=[lambda 0 0; 0 lambda 0];
A=[-(lambda+2*teta) 2*teta 0; 0 -(lambda+mu+teta) teta; 0 0 -
(lambda+2*mu)];
      B=[0 0 0; 0 mu 0; 0 0 2*mu];
      C=[lambda 0 0; 0 lambda 0; 0 0 lambda];

matriks=A+(R*B);
BR=[A0(1:1,1:1) C0(1:1,1:2) 0 0 0
    B1(1:1,1:1) A1(1:1,1:2) C1(1:1,1:3)
    B1(2:2,1:1) A1(2:2,1:2) C1(2:2,1:3)
    0 B2(1:1,1:2) matriks(1:1,1:3)
    0 B2(2:2,1:2) matriks(2:2,1:3)
    0 B2(3:3,1:2) matriks(3:3,1:3)];

beta00=1;
beta10=lambda/(lambda+2*teta);
beta11=lambda/mu;
beta20=(lambda/(lambda+2*teta))^2;
beta21=((lambda/mu)*r1)+((2*teta)/mu)*((r0^2)/(r1b-r0));
beta22=((teta*1*mu)/(2*mu*(1-r1)*mu))*((r0/(r1b-r0))+r1);

H=[r0 r01; 0 r1];
E=[r02; r12];
D=[beta20 beta21];
I=eye(2,2);
```

```
M=I-H;
N=inv(M);
P=N*N;

sigma=(beta22+(D*P*E));

disp('____________________________________________________________________________________')
disp('nilai harapan banyaknya customer dalam sistem')
L=(rho/(1-rho))+((1/sigma)*D*P*E);
L_vacation=ceil(L)

disp('nilai harapan waktu menunggu customer dalam sistem (dalam jam)')
W_vacation=L/lambda
```

Apabila program tersebut dijalankan, hasilnya sebagai berikut

```
%Program_menghitung_nilai_keefektifan_sistem_antrian_M/M/c(AS,MV)

masukan_laju_kedatangan=18
masukan_laju_pelayanan=20
masukan_rata-rata_waktu_vacation=0.525
banyak_server=2
_____________________________________________________________________
nilai harapan banyaknya customer dalam sistem
L_vacation = 3
nilai harapan waktu menunggu customer dalam sistem (dalam jam)
W_vacation = 0.1552
```

Kesimpulan

1. Model antrian multiserver dengan lebih dari satu kali *vacation* dan dilakukan secara tidak bersamaan dinotasikan dengan M/M/c (AS, MV). Banyaknya server yang terdapat di dalam sistem antrian dinyatakan dengan c.
2. Formula untuk mengukur kinerja/keefektifan model antrian M/M/c (AS, MV) adalah sebagai berikut
   a. Nilai harapan banyak *customer* di dalam sistem dinyatakan dengan
   $$L_v^{(c)} = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{\sigma}\delta(\mathbf{I}-\mathbf{H})^{-2}\eta$$
   b. Nilai harapan waktu tunggu *customer* di dalam sistem dinyatakan dengan
   $$W_v^{(c)} = \frac{1}{c\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\rho c\mu\sigma}\delta(\mathbf{I}-\mathbf{H})^{-2}\eta$$
   c. Persentase pemanfaatan sarana pelayanan dinyatakan dengan
   $$\bar{c} = \rho \times 100\%$$

Saran

Dari hasil pengkajian model antrian multiserver dengan lebih dari satu kali *vacation* secara tidak bersamaan oleh semua server dapat dikembangkan lebih lanjut sampai dengan tingkat pengambilan keputusan, misalnya dengan model biaya. Selain itu juga dapat dikembangkan variasi dari model antrian dengan *vacation*, yaitu model antrian satu server dengan satu kali *vacation*, model antrian satu server dengan beberapa kali *vacation*, model antrian multiserver dengan satu kali *vacation* , serta model antrian multiserver dengan *vacation* beberapa kali secara bersamaan oleh semua server.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. (2000). *Elementary Linear Algebra 8th ed*. Canada : Anton Textbooks, Inc.

Bain, L, & Engelhardt. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. California : Wadsworth Publishing Company.

Bhat, U. Narayan. (2008). *An Introduction to Queueing Theory, Modeling and Analysis in Applications.* New York : Springer Science and Business Media.

Bronson, R. (1996). *Teori dan Soal-Soal Operations Research* (Terjemahan Hans Wospakrik). Jakarta: Erlangga.

Bunday, B. D. (1996). *An Introduction to Queuing Theory*. New York : John Wiley and Sons Inc.

Dimyati, A, & Tarliyah, T. (1999). *Operation Research, Model-Model Pengambilan Keputusan.* Bandung : PT Sinar Baru Algesindo.

Djauhari, M. (1997). *Statistika Matematika*. Bandung : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, ITB.

Ecker, J, & Kupferschimd, M. (1988). *Introduction to Operation Research*. New York : John Wiley and Sons.

Gross, D. & Harris, C. M. (1998). *Fundamental of Queuing Theory 3rd ed*. New York : John Wiley and Sons.

Hogg, R. V, & Tanis, E. A. (2001). *Probability and Statistical Inference. 6th. ed*. New Jersey : Prentice Hall International, Inc.

Latouche, G & Ramaswami, V. (1999). *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*. ASA-SCAM series on Applied Probability

Martini, Ari. (2009). *Analisis Sistem Antrian Bus di Pos Kota Terminal Terboyo Semarang.* Semarang : Universitas Diponegoro

Ross, S. M. (1983). *Stochastic Processes*. New York : John Wiley & Sons Inc.

Taha, Hamdy A. (1997). *Operation Research, An Introduction*. USA : Mc. Millan Publ. Co. NY.

Tian, Zhang, Naishuo & Zhe George. (2006). *Vacation Queueing Models Theory and Applications.* New York : Springer Science & Business Media.

Tijms, H.C. (2003). *First Course in Stochastic Models*. New York : John Wiley and Sons Inc.

Varberg, D, & Purcell, E. J. (2001). *Kalkulus Jilid I*. (Terjemahan I Nyoman Susila). Batam : Interaraksa

 ISBN : 978-979-16353-8-7

Winston, Wayne L.(2003).*Operations Research, Applications and Algorithms.* California : Duxbury Press.

Wospakrik, H. (1996). *Teori dan Soal-Soal Operations Research*. Bandung : Erlangga.

Yue, Wuyi dkk. (2009). *Advances in Queueing Theory and Network Applications.* New York : Springer Science and Business Media

Zhang, Fuzhen. (2010). *Matrix Theory : Basic Results and Techniques*. New York : Springer Science and Business Media