A-12

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS TERREDUKSI REGULER DALAM ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL

Siswanto[1], Ari Suparwanto[2], M. Andy Rudhito[3]

[1]Mahasiswa S3 Matematika FMIPA UGM dan Staff Pengajar FMIPA UNS Surakarta,
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta
[3]FKIP, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
e-mail : [1] sis.mipauns@yahoo.co.id, [2]ari_suparwanto@yahoo.com, [3]arudhito@yahoo.co.id

Abstrak

Misalkan $\Re$ himpunan bilangan real. Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\Re_{\max} = \Re \cup \{ -\infty \}$ dilengkapi dengan operasi maksimum "$\oplus$" dan plus "$\otimes$". Dibentuk himpunan $I(\Re)_{\max}$ yaitu himpunan yang anggotanya merupakan interval-interval tertutup dalam $\Re_{\max}$. Himpunan $I(\Re)_{\max}$ dilengkapi dengan operasi "$\overline{\oplus}$" dan "$\overline{\otimes}$" disebut aljabar Max-Plus interval. Selanjutnya, dapat dibentuk himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan anggota himpunan $I(\Re)_{\max}$ ditulis $I(\Re)_{\max}^{n\times n}$. Misalkan $\mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ dan $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \in I(\Re_{\max}^{n\times n})_b$ dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$, matriks interval A dikatakan tak terreduksi jika untuk setiap matriks $A \in [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$ tak terreduksi. Jika tidak demikian matriks interval A dikatakan terreduksi. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks interval terreduksi reguler.

Kata kunci : Aljabar Max-Plus interval, nilai eigen, vektor eigen, matriks terreduksi reguler.

PENDAHULUAN

Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\Re_{\max} = \Re \cup \{ \varepsilon \}, \varepsilon = -\infty$ dilengkapi dengan operasi maksimum "$\oplus$" dan plus "$\otimes$" merupakan semiring idempoten yang komutatif. Aljabar Max-Plus telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah perencanaan, komunikasi, produksi, sistem antrian dengan kapasitas berhingga, komputasi parallel, dan lalu lintas. (Baccelli, *et.al* [1]). Untuk menyelesaikan masalah jaringan dengan waktu aktifitas bilangan kabur seperti penjadwalan kabur dan sistem antrian kabur, aljabar Max-Plus telah digeneralisasi menjadi aljabar Max-Plus interval dan aljabar Max-Plus bilangan kabur. Aljabar Max-Plus interval yaitu himpunan $I(\Re)_{\max}$ dilengkapi dengan operasi "$\overline{\oplus}$" dan "$\overline{\otimes}$", sedangkan aljabar Max-Plus bilangan kabur yaitu himpunan $F(\Re)_{\max}$ dilengkapi dengan operasi "$\tilde{\oplus}$" dan "$\tilde{\otimes}$" (Rudhito [6]).

Dari himpunan $\Re_{\max}$ dapat dibentuk himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan elemen $\Re_{\max}$, dinotasikan dengan $\Re_{\max}^{n\times n}$. Himpunan ini dilengkapi dengan operasi maksimum "$\oplus$" dan plus "$\otimes$" merupakan semiring yang idempoten (Akian, *et. al*, [1], Butkovic [3], Konigsberg [5]). Demikian juga, $\Re_{\max}^{m\times n}$ yaitu himpunan matriks berukuran $m \times n$ dalam aljabar Max-Plus. Khusus untuk *n* = 1, diperoleh himpunan vektor dalam aljabar Max-Plus ditulis $\Re_{\max}^{m}$ (Farlow [4]).

Misalkan $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$, graf komunikasi dari *A* ditulis *G*(*A*). Jika *G*(*A*) terhubung kuat maka matriks *A* dikatakan tak terreduksi. Sebaliknya, jika *G*(*A*) tak terhubung kuat maka matriks *A* dikatakan terreduksi (Farlow [4], Konigsberg [5]). Farlow [4] dan Tam K. P [10] telah membahas di dalam aljabar Max-Plus beserta tafsirannya dalam teori graf, bahwa nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks masing-masing adalah periode dan barisan dari suatu waktu aktifitas. Farlow [4] membahas khusus untuk matriks tak terreduksi, sedangkan Konigsberg [5] dan Schutter [7] selain membahas matriks tak terreduksi juga matriks terreduksi. Berkaitan dengan nilai eigen dan vektor eigen, Siswanto [8] dan Subiono [9] telah membahas tentang algoritma untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks dalam aljabar Max-Plus.

Sejalan pada aljabar Max-Plus, muncul pula matriks dalam aljabar Max-Plus interval yaitu $I(\Re)_{\max}^{m\times n}$ dan matriks dalam aljabar Max-Plus bilangan kabur yaitu $F(\Re)_{\max}^{m\times n}$, serta nilai eigen dan vektor eigen matriks dalam aljabar Max-Plus interval dan aljabar Max-Plus bilangan kabur. Rudhito [6] telah membahas tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar Max-Plus interval khusus untuk matriks tak terreduksi. Dalam makalah ini akan dibahas tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks terreduksi dalam aljabar Max-Plus interval. Sebelum dibahas hasil utama dari makalah ini, terlebih dahulu akan ditinjau beberapa konsep dasar dan hasil-hasil yang mendukung pembahasan.

Definisi 1.1. Diberikan barisan $\{x(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ yang dibangkitkan oleh sistem persamaan linear $x(k+1) = A \otimes x(k)$ dengan $A \in \Re_{\max}^{n\times n}$ dan $x(0) \in \Re^{n}$ sebagai nilai awal. Misalkan $x(k) = (x_1(k), x_2(k), ..., x_n(k)) \in \Re_{\max}^{n}$ sehingga untuk $j \in \{1, 2, ..., n\}$, $\tau_j = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{x_j(k)}{k}$ ada. Vektor $\tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ disebut vektor waktu sikel. Jika semua τ_i sama maka nilai ini disebut laju pertumbuhan asimtotik barisan $x(k)$.

Definisi 1.2. Suatu matriks dikatakan regular jika memuat paling sedikit satu unsur yang tidak sama dengan ε dalam setiap baris.

Definisi 1.3. Norma l^{∞} untuk vektor $v \in \Re^{n}$ didefinisikan oleh $\|v\|_{\infty} = \max\limits_{i \in \{1, 2, ..., n\}} |v_i|$.

Lema 1.4. [4] Jika $A \in \Re_{\max}^{m\times n}$ matriks regular dan $u, v \in \Re^{m}$ maka $\|(A \otimes u) - (A \otimes v)\|_{\infty} \le \|u - v\|_{\infty}$.

Teorema 1.5. [4] Diberikan sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$ untuk $k \geq 0$, $A \in \Re_{\max}^{n \times n}$ reguler dan nilai awal $x(0)$. Jika $x(0)$ nilai awal sehingga $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{x(k, x(0))}{k}$ ada maka nilai limit ini sama untuk sebarang nilai awal $y(0) \in \Re^n$.

Lema 1.6. [4] Diberikan sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$ untuk $k \geq 0$, $A \in \Re_{\max}^{n \times n}$ tak terreduksi dengan v vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda \in \Re$ maka

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x_j(k, x(0))}{k} = \lambda \text{ untuk semua } j \in \{1, 2, ..., n\} \text{ dan } x(0) \in \Re^n.$$

Teorema 1.7. [8,9] Jika untuk sebarang nilai awal $x(0) \neq (\varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon)$ sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$ memenuhi $x(m) = c \otimes x(n)$ untuk bilangan bulat $m > n \geq 0$ dan bilangan real c maka $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{x(k)}{k} = (\lambda, \lambda, ..., \lambda)$ dengan $\lambda = \frac{c}{m-n}$. Selanjutnya, λ adalah suatu nilai eigen dari matriks A dengan vektor eigen diberikan oleh $v = \bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{(m-n-1)} \otimes x(m+i-1)$.

Selanjutnya, dibicarakan konsep aljabar Max-Plus interval dan matriks di dalamnya [6]. Interval tertutup x dalam $\Re_{\max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\Re_{\max}$ yang berbentuk $\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] = \{x \in \Re_{\max} \mid \underline{\mathrm{x}} \preceq_m x \preceq_m \overline{\mathrm{x}}\}$. Interval x dalam $\Re_{\max}$ disebut interval Max-Plus. Suatu bilangan $x \in \Re_{\max}$ dapat dinyatakan sebagai interval [*x*,*x*].

Definisi 1.8. Dibentuk $I(\Re)_{\max} = \{\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] \mid \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \Re, \varepsilon \prec_m \underline{\mathrm{x}} \preceq_m \overline{\mathrm{x}}\} \cup \{\,\varepsilon\,\}$, dengan $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$. Pada himpunan $I(\Re)_{\max}$ didefinisikan operasi "$\overline{\oplus}$" dan "$\overline{\otimes}$" dengan $\mathrm{x} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \oplus \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \oplus \overline{\mathrm{y}}]$ dan $\mathrm{x} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \otimes \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \otimes \overline{\mathrm{y}}]$ untuk setiap $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in I(\Re)_{\max}$. Himpunan $I(\Re)_{\max}$ dilengkapi dengan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan $\overline{0} = [0, 0]$. Selanjutnya disebut aljabar Max-Plus interval dan dinotasikan dengan $I(\overline{\Re})_{\max} = \left(I(\Re)_{\max}; \overline{\oplus}, \overline{\otimes}\right)$.

Definisi 1.10. Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen dalam $I(\Re)_{\max}$ dinotasikan dengan $I(\Re)_{\max}^{m \times n}$ yaitu $I(\Re)_{\max}^{m \times n} = \left\{ \mathrm{A} = [\mathrm{A}_{ij}] \,\middle|\, \mathrm{A}_{ij} \in I(\Re)_{\max};\, i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n \right\}$. Matriks anggota $I(\Re)_{\max}^{m \times n}$ disebut matriks interval Max-Plus. Selanjutnya matriks interval Max-Plus cukup disebut dengan matriks interval.

Definisi 1.11. Struktur aljabar dari $I(\Re)_{\max}^{n \times n}$ yang dilengkapi dengan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dinotasikan dengan $I(\overline{\Re})_{\max}^{n \times n} = \left(I(\Re)_{\max}^{n \times n}; \overline{\oplus}, \overline{\otimes} \right)$ merupakan dioid (semiring yang idempoten), sedangkan $I(\Re)_{\max}^{m \times n}$ merupakan semimodul atas $I(\Re)_{\max}$.

Definisi 1.12. Untuk $\mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{m \times n}$ didefinisikan matriks $\underline{\mathrm{A}} = [\underline{\mathrm{A}}_{ij}] \in \Re_{\max}^{m \times n}$ dan $\overline{\mathrm{A}} = [\overline{\mathrm{A}}_{ij}] \in \Re_{\max}^{m \times n}$ masing-masing disebut matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks interval A.

Definisi 1.13. Diberikan matriks interval $\mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{m \times n}$, dengan $\underline{\mathrm{A}}$ dan $\overline{\mathrm{A}}$ masing-masing adalah matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks A. Didefinisikan interval matriks dari A yaitu $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] = \{ A \in \Re_{\max}^{m \times n} \mid \underline{\mathrm{A}} \preceq_m A \preceq_m \overline{\mathrm{A}} \}$ dan $I(\Re_{\max}^{m \times n})_{\mathrm{b}} = \{ [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \mid \mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{m \times n} \}$.

Definisi 1.14.

1. Untuk $\alpha \in I(\Re)_{\max}$, $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}], [\underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}] \in I(\Re_{\max}^{m \times n})_{\mathrm{b}}$ didefinisikan
   i. $\alpha \,\overline{\otimes}\, [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{\mathrm{A}}, \overline{\alpha} \otimes \overline{\mathrm{A}}]$
   ii. $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \,\overline{\oplus}\, [\underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}] = [\underline{\mathrm{A}} \oplus \underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathrm{B}}]$
2. Untuk $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \in I(\Re_{\max}^{m \times k})_{\mathrm{b}}$, $[\underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}] \in I(\Re_{\max}^{k \times n})_{\mathrm{b}}$ didefinisikan $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \,\overline{\otimes}\, [\underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}] = [\underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathrm{B}}]$.

Teorema 1.15. [9] Struktur aljabar dari $I(\Re_{\max}^{n\times n})_b$ yang dilengkapi dengan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dinotasikan dengan $I(\overline{\Re}_{\max}^{n\times n})_b = \left(I(\Re_{\max}^{n\times n})_b; \overline{\oplus}, \overline{\otimes}\right)$ merupakan dioid (semiring yang idempoten), sedangkan $I(\Re_{\max}^{m\times n})_b$ merupakan semimodul atas $I(\Re)_{\max}$.

Semiring $I(\overline{\Re})_{\max}^{n\times n} = \left(I(\Re)_{\max}^{n\times n}; \overline{\oplus}, \overline{\otimes}\right)$ isomorfis dengan semiring $I(\overline{\Re}_{\max}^{n\times n})_b = \left(I(\Re_{\max}^{n\times n})_b; \overline{\oplus}, \overline{\otimes}\right)$ dengan pemetaan $f : I(\Re)_{\max}^{n\times n} \to I(\Re_{\max}^{n\times n})^*$ $f(\mathrm{A}) = [\,\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}\,], \forall \mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$. Sedangkan semimodul $I(\Re)_{\max}^{m\times n}$ atas $I(\Re)_{\max}$ isomorfis dengan semimodul $I(\Re_{\max}^{m\times n})_b$ atas $I(\Re)_{\max}$. Dengan demikian untuk setiap matriks interval A selalu dapat ditentukan interval matriks $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$ dan sebaliknya untuk setiap interval matriks $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \in I(\Re_{\max}^{n\times n})_b$ dengan $\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}} \in \Re_{\max}^{n\times n}$ dapat ditentukan matriks interval A $\in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ dimana $[\underline{\mathrm{A}}_{ij}, \overline{\mathrm{A}}_{ij}] = I(\Re)_{\max}$ untuk setiap i dan j. Dengan demikian matriks interval $\mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{m\times n}$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \in I(\Re_{\max}^{m\times n})_b$. Interval matriks $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \in I(\Re_{\max}^{n\times n})_b$ disebut interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval A $\in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ dan dilambangkan dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$. Akibat isomorfisme di atas maka berlaku

$$\alpha \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A} \approx [\underline{\alpha} \otimes \underline{\mathrm{A}}, \overline{\alpha} \otimes \overline{\mathrm{A}}],\ \mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B} \approx [\underline{\mathrm{A}} \oplus \underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{A}} \oplus \overline{\mathrm{B}}] \text{ dan } \mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B} \approx [\underline{\mathrm{A}} \otimes \underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathrm{B}}].$$

Definisi 1.16. Didefinisikan $I(\Re)_{\max}^{n} = \left\{ \mathrm{x} = [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_n]^T \,\middle|\, \mathrm{x}_i \in I(\Re)_{\max}; i = 1, 2, ..., n \right\}$. Himpunan $I(\Re)_{\max}^{n}$ dapat dipandang sebagai $I(\Re)_{\max}^{n\times 1}$. Unsur-unsur dalam $I(\Re)_{\max}^{n}$ disebut vektor interval atas $I(\Re)_{\max}$. Vektor interval x bersesuaian dengan interval vektor yaitu $\mathrm{x} \approx [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}]$.

Definisi 1.17. Diberikan A $\in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$. Skalar interval $\lambda \in I(\Re)_{\max}$ disebut nilai eigen Max-Plus interval matriks interval A jika terdapat suatu vektor interval v $\in I(\Re)_{\max}^{n}$ dengan v $\neq \varepsilon_{n\times 1}$ sehingga $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{v} = \lambda \,\overline{\otimes}\, \mathrm{v}$. Vektor v disebut vektor eigen Max-Plus interval matriks interval A yang bersesuaian dengan λ. Berikut diberikan suatu teorema yang memberikan eksistensi nilai eigen interval Max-Plus suatu matriks interval.

Teorema 1.18. [9] Diberikan $\mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{n \times n}$ dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$. Skalar interval $\lambda_{\max}(\mathrm{A}) = [\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}), \lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})]$, merupakan suatu nilai eigen Max-Plus interval matriks interval A, dimana $\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}})$ dan $\lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})$ berturut-turut adalah bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $G(\underline{\mathrm{A}})$ dan $G(\overline{\mathrm{A}})$.

Definisi 1.19. Suatu matriks interval $\mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{n \times n}$ dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$, dikatakan tak terreduksi jika setiap matriks $A \in [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$ tak terreduksi.

Teorema 1.20. [9] Suatu matriks interval $\mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{n \times n}$, dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$, tak terreduksi jika dan hanya $\underline{\mathrm{A}} \in \Re_{\max}^{n \times n}$ tak terreduksi.

Akibat 1.21. [9] Diberikan $\mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{n \times n}$, dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$. Jika matriks interval A tak terreduksi maka $\lambda_{\max}(\mathrm{A}) = [\lambda_{\max}(\underline{\mathrm{A}}), \lambda_{\max}(\overline{\mathrm{A}})]$ merupakan nilai eigen interval Max-Plus tunggal matriks interval A.

PEMBAHASAN

Misalkan $\mathrm{x}(k+1) = \mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{x}(k)$ yaitu sistem persamaan dalam aljabar Max-Plus interval. Akan dibahas hasil penelitian yaitu tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks interval terreduksi reguler. Pembahasan ini berkaitan dengan perilaku periodik dari suatu sistem persamaan dalam aljabar Max-Plus interval, sedangkan perilaku periodik dari suatu sistem persamaan berkaitan dengan vektor interval waktu sikel.

Definisi 2.1. Diberikan barisan $\left\{ \mathrm{x(k)} = [\mathrm{x}_1(k), \mathrm{x}_2(k), \ldots, \mathrm{x}_n(k)]^T \in I(\Re)_{\max}^{n} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$, $\mathbb{N}$ himpunan bilangan asli yaitu barisan yang dibangkitkan oleh $\mathrm{x}(k+1) = \mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{x}(k)$ sehingga untuk $\mathrm{x}_j(k) = [\underline{x}_j, \overline{x}_j]$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\dfrac{\mathrm{x}_j(k)}{k} = \left[\dfrac{\underline{x}_j}{k}, \dfrac{\overline{x}_j}{k} \right]$ dan bahwa $\tau_j = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{\mathrm{x}_j(k)}{k}$ ada. Vektor $\tau = [\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n]^T$ disebut vektor interval waktu sikel. Jika semua τ_i sama maka interval ini disebut laju pertumbuhan asimtotik barisan vektor interval $\mathrm{x}(k)$.

Misalkan $\left\{ \mathrm{x(k)} \in I(\Re)_{\max}^{n} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ barisan yang dibangkitkan oleh sistem $\mathrm{x}(k+1) = \mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{x}(k)$, dengan $\mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{n \times n}$ dan $\mathrm{x}(0) \in I(\Re)^n$ sebagai nilai awal. Barisan $\mathrm{x}(k)$ dapat ditulis $\mathrm{x}(k) = \mathrm{A}^{\overline{\otimes} k} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{x}(0)$. Jika A matriks interval tak terreduksi, laju pertumbuhan asimtotik sebarang $\mathrm{x}_j(k)$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ merupakan nilai eigen interval yang tunggal dari A. Selanjutnya, untuk $\mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{n \times n}$ tak terreduksi dengan nilai eigen interval λ dan vektor eigen interval v, maka nilai eigen interval dari $A^{\overline{\otimes} k}$ adalah $\lambda^{\overline{\otimes} k}$ dan vektor eigen intervalnya adalah v. Ini dinyatakan dalam lema berikut.

Lema 2.2. Jika v eigen vektor interval dari matriks tak terreduksi $A \in I(\Re)^{n\times n}_{\max}$ dengan nilai eigen interval λ maka $A^{\overline{\otimes} k} \overline{\otimes} v = \lambda^{\overline{\otimes} k} \overline{\otimes} v$ untuk semua $k \geq 0$.
Bukti : Diperhatikan bahwa untuk $n \geq 0$ berlaku :

$$A \overline{\otimes} (\lambda^{\overline{\otimes} n} \overline{\otimes} v) = (A \overline{\otimes} \lambda^{\overline{\otimes} n}) \overline{\otimes} v = (\lambda^{\overline{\otimes} n} \overline{\otimes} A) \overline{\otimes} v = \lambda^{\overline{\otimes} n} \overline{\otimes} (A \overline{\otimes} v)$$
$$= \lambda^{\overline{\otimes} n} \overline{\otimes} (\lambda \overline{\otimes} v)$$
$$= \lambda^{\overline{\otimes} (n+1)} \overline{\otimes} v .$$

Selanjutnya, bukti lema dilakukan dengan induksi matematika.

i. Untuk $k = 1$, $A^{\overline{\otimes} 1} \overline{\otimes} v = \lambda^{\overline{\otimes} 1} \overline{\otimes} v \Leftrightarrow A \overline{\otimes} v = \lambda \overline{\otimes} v$

ii. Dianggap benar untuk $k = n - 1$, yaitu $A^{\overline{\otimes} (n-1)} \overline{\otimes} v = \lambda^{\overline{\otimes} (n-1)} \overline{\otimes} v$

iii. Untuk $k = n$, $A \overline{\otimes} (\lambda^{\overline{\otimes} (n-1)} \overline{\otimes} v) = \lambda^{\overline{\otimes} n} \overline{\otimes} v \Leftrightarrow A \overline{\otimes} (A^{\overline{\otimes} (n-1)} \overline{\otimes} v) = \lambda^{\overline{\otimes} n} \overline{\otimes} v$
$$\Leftrightarrow (A \overline{\otimes} A^{\overline{\otimes} (n-1)}) \overline{\otimes} v = \lambda^{\overline{\otimes} n} \overline{\otimes} v$$
$$\Leftrightarrow A^{\overline{\otimes} n} \overline{\otimes} v = \lambda^{\overline{\otimes} n} \overline{\otimes} v$$

Dari i, ii dan iii terbukti, $A^{\overline{\otimes} k} \overline{\otimes} v = \lambda^{\overline{\otimes} k} \overline{\otimes} v$ untuk semua $k \geq 0$. ■

Dari lema 2.2, yaitu $A^{\overline{\otimes} k} \overline{\otimes} v = \lambda^{\overline{\otimes} k} \overline{\otimes} v$ dan dari $x(k) = A^{\overline{\otimes} k} \overline{\otimes} \overline{x}(0)$, jika $\overline{x}(0)$ dipilih v suatu vektor eigen interval maka $\overline{x}(k) = A^{\overline{\otimes} k} \overline{\otimes} \overline{x}(0) \Leftrightarrow x(k) = A^{\overline{\otimes} k} \overline{\otimes} v \Leftrightarrow x(k) = \lambda^{\overline{\otimes} k} \overline{\otimes} v$. Dengan menggunakan operasi di dalam aljabar konvensional bahwa, jika $\overline{\lambda} = [\lambda, \lambda, ..., \lambda]^T$ maka $x(k) = k\,\overline{\lambda} + v \Leftrightarrow x(k) - v = k\,\overline{\lambda}$ $\Leftrightarrow x(k) - v = [k\lambda, k\lambda, ..., k\lambda]^T$ sehingga berlaku $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{x_j(k)}{k} - \frac{v_j}{k}\right) = \lambda$ atau $\lim_{k\to\infty}\frac{x_j(k)}{k} = \lambda$ untuk $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Oleh karena itu, jika x(0) = v yang merupakan vektor eigen interval maka laju pertumbuhan asimtotik dari x(k) adalah nilai eigen interval yang bersesuaian dengan vektor eigen interval v dari matriks interval A. Selanjutnya, bagaimana jika barisan x(k) diberikan nilai awal selain vektor eigen interval dari A.

Untuk pembicaraan ini, diperlukan norma l^{∞} yang dimodifikasi untuk vektor interval $v \in I(\Re)^n$ dan beberapa lema.

Definisi 2.3. Untuk n = 1, berarti $v = [\underline{v}, \overline{v}] \in I(\Re)$. Didefinisikan

$$\|v\|_{\infty} = \begin{cases} \overline{v} - \underline{v}, \text{ untuk } \underline{v} \neq \overline{v} \\ |v| \text{ untuk } v = \underline{v} = \overline{v} \end{cases} .$$

 ISBN : **978-979-16353-8-7**

Lema 2.4. Misalkan $\mathrm{v} = [\underline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{v}}] \in I(\Re)$ maka $\|\mathrm{v}\|_\infty$ yang didefinisikan pada definisi 2.3 merupakan norma dari $\mathrm{v} \in I(\Re)$.

Bukti : Ambil $\mathrm{v} = [\underline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{v}}]$, $\mathrm{w} = [\underline{\mathrm{w}}, \overline{\mathrm{w}}] \in I(\Re)$ dan $\alpha \in \Re$.

i. a. Jika $\mathrm{v} = [\underline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{v}}]$ dengan $\underline{\mathrm{v}} \neq \overline{\mathrm{v}}$ maka

$$\|\alpha\mathrm{v}\|_\infty = \|[\alpha\underline{\mathrm{v}}, \alpha\overline{\mathrm{v}}]\|_\infty = \alpha\overline{\mathrm{v}} - \alpha\underline{\mathrm{v}} = \alpha(\overline{\mathrm{v}} - \underline{\mathrm{v}}) = \alpha\|[\underline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{v}}]\|_\infty = \alpha\|\mathrm{v}\|_\infty.$$

b. Jika $\mathrm{v} = [\underline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{v}}]$ dengan $\mathrm{v} = \underline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{v}}$ maka

$$\|\alpha\mathrm{v}\|_\infty = \|[\alpha\underline{\mathrm{v}}, \alpha\overline{\mathrm{v}}]\|_\infty = |\alpha\mathrm{v}| = \alpha|\mathrm{v}| = \alpha\|\mathrm{v}\|_\infty.$$

Jadi $\|\alpha\mathrm{v}\|_\infty = \alpha\|\mathrm{v}\|_\infty$.

ii. a. Jika $\mathrm{v} = [\underline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{v}}]$, $\mathrm{w} = [\underline{\mathrm{w}}, \overline{\mathrm{w}}] \in I(\Re)$ dengan $\underline{\mathrm{v}} \neq \overline{\mathrm{v}}$ dan $\underline{\mathrm{w}} \neq \overline{\mathrm{w}}$ maka

$$\begin{aligned}\|\mathrm{v+w}\|_\infty &= \|[\underline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{v}}] + [\underline{\mathrm{w}}, \overline{\mathrm{w}}]\|_\infty = \|[\underline{\mathrm{v}} + \underline{\mathrm{w}}, \overline{\mathrm{v}} + \overline{\mathrm{w}}]\|_\infty = \overline{\mathrm{v}} + \overline{\mathrm{w}} - (\underline{\mathrm{v}} + \underline{\mathrm{w}}) \\ &= (\overline{\mathrm{v}} - \underline{\mathrm{v}}) + (\overline{\mathrm{w}} - \underline{\mathrm{w}}) \\ &= \|\mathrm{v}\|_\infty + \|\mathrm{w}\|_\infty.\end{aligned}$$

b. Jika $\mathrm{v} = [\underline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{v}}]$, $\mathrm{w} = [\underline{\mathrm{w}}, \overline{\mathrm{w}}] \in I(\Re)$ dengan $\mathrm{v} = \underline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{v}}$ dan $\mathrm{w} = \underline{\mathrm{w}} = \overline{\mathrm{w}}$ maka

$$\|\mathrm{v+w}\|_\infty = \|[\underline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{v}}] + [\underline{\mathrm{w}}, \overline{\mathrm{w}}]\|_\infty = \|[\underline{\mathrm{v}} + \underline{\mathrm{w}}, \overline{\mathrm{v}} + \overline{\mathrm{w}}]\|_\infty = |\mathrm{v+w}| \leq |\mathrm{v}| + |\mathrm{w}| = \|\mathrm{v}\|_\infty + \|\mathrm{w}\|_\infty.$$

c. Jika $\mathrm{v} = [\underline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{v}}]$, $\mathrm{w} = [\underline{\mathrm{w}}, \overline{\mathrm{w}}] \in I(\Re)$ dengan $\underline{\mathrm{v}} \neq \overline{\mathrm{v}}$ dan $\mathrm{w} = \underline{\mathrm{w}} = \overline{\mathrm{w}}$ maka

$$\begin{aligned}\|\mathrm{v+w}\|_\infty &= \|[\underline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{v}}] + [\underline{\mathrm{w}}, \overline{\mathrm{w}}]\|_\infty = \|[\underline{\mathrm{v}} + \underline{\mathrm{w}}, \overline{\mathrm{v}} + \overline{\mathrm{w}}]\|_\infty = |\overline{\mathrm{v}} + \overline{\mathrm{w}} - (\underline{\mathrm{v}} + \underline{\mathrm{w}})| \\ &= |\overline{\mathrm{v}} - \underline{\mathrm{v}}| \\ &= \|\mathrm{v}\|_\infty \leq \|\mathrm{v}\|_\infty + \|\mathrm{w}\|_\infty\end{aligned}$$

Jadi, $\|\mathrm{v+w}\|_\infty \leq \|\mathrm{v}\|_\infty + \|\mathrm{w}\|_\infty$.

iii. $\|\mathrm{v}\|_\infty \geq 0$, $\forall \mathrm{v} \in I(\Re)$ dan $\|\mathrm{v}\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \mathrm{v} = 0 = [0,0]$.

Selanjutnya untuk $n \geq 2$, disajikan definisi dan lema berikut.

Definisi 2.5. Untuk setiap vektor interval $\mathrm{v} \in I(\Re)^n$, $\mathrm{v} = [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, ..., \mathrm{v}_n]^T$ dengan $\mathrm{v}_i = [\underline{v}_i, \overline{v}_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ didefinisikan

$$\|\mathrm{v}\|_\infty = \begin{cases} \max\limits_{i \in \{1, 2, ..., n\}} |\underline{v}_i - \overline{v}_i|, \text{ jika } \exists i \in \{1, 2, ..., n\} \ni \underline{v}_i \neq \overline{v}_i \\ \max\limits_{i \in \{1, 2, ..., n\}} |\overline{v}_i|, \text{ jika } \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \ni \underline{v}_i = \overline{v}_i \end{cases}.$$

Lema 2.6. Misalkan vektor interval $\mathrm{v} \in I(\Re)^n$, $\mathrm{v} = [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, ..., \mathrm{v}_n]^T$ dengan $\mathrm{v}_i = [\underline{v}_i, \overline{v}_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ maka $\|\mathrm{v}\|_\infty$ yang didefinisikan pada definisi 2.5 merupakan norma dari $\mathrm{v} \in I(\Re)^n$.

Bukti : Ambil $\mathrm{v}, \mathrm{w} \in I(\Re)^n$ dan $\alpha \in \Re$ dengan $\mathrm{v} = [\,[\underline{v}_1, \overline{v}_1], [\underline{v}_2, \overline{v}_2], ..., [\underline{v}_n, \overline{v}_n]\,]^T$ dan $\mathrm{w} = [\,[\underline{w}_1, \overline{w}_1], [\underline{w}_2, \overline{w}_2], ..., [\underline{w}_n, \overline{w}_n]\,]^T$

i. a. Untuk $\mathrm{v} = [\,[\underline{v}_1, \overline{v}_1], [\underline{v}_2, \overline{v}_2], ..., [\underline{v}_n, \overline{v}_n]\,]^T$ dimana $\exists i \in \{1, 2, ..., n\} \ni \underline{v}_i \neq \overline{v}_i$.

Berarti,

$$\alpha\mathrm{v} = [\alpha[\underline{v}_1, \overline{v}_1], \alpha[\underline{v}_2, \overline{v}_2], ..., \alpha[\underline{v}_n, \overline{v}_n]\,]^T = [\,[\alpha\underline{v}_1, \alpha\overline{v}_1], [\alpha\underline{v}_2, \alpha\overline{v}_2], ..., [\alpha\underline{v}_n, \alpha\overline{v}_n]\,]^T$$

sehingga, $\|\alpha\mathrm{v}\|_\infty = \max\limits_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|\alpha\overline{v}_i - \alpha\underline{v}_i\right| = \max\limits_{i\in\{1,2,...,n\}} |\alpha|\left|\overline{v}_i - \underline{v}_i\right|$

$$= |\alpha| \max_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|\overline{v}_i - \underline{v}_i\right| = |\alpha|\,\|\mathrm{v}\|_\infty .$$

b. Untuk $\mathrm{v} = [\,[\underline{v}_1, \overline{v}_1], [\underline{v}_2, \overline{v}_2], ..., [\underline{v}_n, \overline{v}_n]\,]^T$ dimana $\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \ni \underline{v}_i = \overline{v}_i$.

Berarti,

$$\alpha\mathrm{v} = [\alpha[\underline{v}_1, \overline{v}_1], \alpha[\underline{v}_2, \overline{v}_2], ..., \alpha[\underline{v}_n, \overline{v}_n]\,]^T = [\,[\alpha\underline{v}_1, \alpha\overline{v}_1], [\alpha\underline{v}_2, \alpha\overline{v}_2], ..., [\alpha\underline{v}_n, \alpha\overline{v}_n]\,]^T$$

sehingga, $\|\alpha\mathrm{v}\|_\infty = \max\limits_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|\alpha\overline{v}_i\right| = \max\limits_{i\in\{1,2,...,n\}} |\alpha|\left|\overline{v}_i\right| = |\alpha| \max\limits_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|\overline{v}_i\right| = |\alpha|\,\|\mathrm{v}\|_\infty$.

Jadi $\|\alpha\mathrm{v}\|_\infty = \alpha\|\mathrm{v}\|_\infty$.

ii. a. Untuk $\mathrm{v} = [\,[\underline{v}_1, \overline{v}_1], [\underline{v}_2, \overline{v}_2], ..., [\underline{v}_n, \overline{v}_n]\,]^T$ dimana $\exists i \in \{1, 2, ..., n\} \ni \underline{v}_i \neq \overline{v}_i$ dan

dan $\mathrm{w} = [\,[\underline{w}_1, \overline{w}_1], [\underline{w}_2, \overline{w}_2], ..., [\underline{w}_n, \overline{w}_n]\,]^T$ dimana $\exists i \in \{1, 2, ..., n\} \ni \underline{w}_i \neq \overline{w}_i$.

Berarti, $\mathrm{v} + \mathrm{w} = [[\underline{v}_1, \overline{v}_1], [\underline{v}_2, \overline{v}_2], ..., [\underline{v}_n, \overline{v}_n]\,]^T$

$+ [[\underline{w}_1, \overline{w}_1], [\underline{w}_2, \overline{w}_2], ..., [\underline{w}_n, \overline{w}_n]]^T$

$$= [[\underline{v}_1 + \underline{w}_1, \overline{v}_1 + \overline{w}_1], [\underline{v}_2 + \underline{w}_2, \overline{v}_2 + \overline{w}_2], ..., [\underline{v}_n + \underline{w}_n, \overline{v}_n + \overline{w}_n]]^T$$

sehingga, $\|\mathrm{v}+\mathrm{w}\|_\infty = \max\limits_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|(\overline{v}_i + \overline{w}_i) - (\underline{v}_i + \underline{w}_i)\right|$

$$= \max_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|(\overline{v}_i - \underline{v}_i) + (\overline{w}_i - \underline{w}_i)\right|$$

$$\leq \max_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|\overline{v}_i - \underline{v}_i\right| + \max_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|\overline{w}_i - \underline{w}_i\right| = \|\mathrm{v}\|_\infty + \|\mathrm{w}\|_\infty .$$

b. Untuk $\mathrm{v} = [\,[\underline{v}_1, \overline{v}_1], [\underline{v}_2, \overline{v}_2], ..., [\underline{v}_n, \overline{v}_n]\,]^T$ dimana $\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \ni \underline{v}_i = \overline{v}_i$ dan

dan $\mathrm{w} = [\,[\underline{w}_1, \overline{w}_1], [\underline{w}_2, \overline{w}_2], ..., [\underline{w}_n, \overline{w}_n]\,]^T$ dimana $\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \ni \underline{w}_i = \overline{w}_i$.

Berarti, $\mathrm{v} + \mathrm{w} = [[\underline{v}_1, \overline{v}_1], [\underline{v}_2, \overline{v}_2], ..., [\underline{v}_n, \overline{v}_n]\,]^T$

$+ [[\underline{w}_1, \overline{w}_1], [\underline{w}_2, \overline{w}_2], ..., [\underline{w}_n, \overline{w}_n]]^T$

$$= [[\underline{v}_1 + \underline{w}_1, \overline{v}_1 + \overline{w}_1], [\underline{v}_2 + \underline{w}_2, \overline{v}_2 + \overline{w}_2], ..., [\underline{v}_n + \underline{w}_n, \overline{v}_n + \overline{w}_n]]^T$$

sehingga, $\|\mathrm{v}+\mathrm{w}\|_\infty = \max\limits_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|\overline{v}_i + \overline{w}_i\right|$

$$\leq \max_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|\overline{v}_i\right| + \max_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|\overline{w}_i\right| = \|\mathrm{v}\|_\infty \leq \|\mathrm{v}\|_\infty + \|\mathrm{w}\|_\infty$$

c. Untuk $\mathrm{v} = [\,[\underline{v}_1, \overline{v}_1], [\underline{v}_2, \overline{v}_2], ..., [\underline{v}_n, \overline{v}_n]\,]^T$ dimana $\exists i \in \{1, 2, ..., n\} \ni \underline{v}_i \neq \overline{v}_i$ dan

dan $w = [\,[\underline{w}_1, \overline{w}_1], [\underline{w}_2, \overline{w}_2], ..., [\underline{w}_n, \overline{w}_n]\,]^T$ dimana $\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \ni \underline{w}_i = \overline{w}_i$.

Berarti, $v + w = [[\underline{v}_1, \overline{v}_1], [\underline{v}_2, \overline{v}_2], ..., [\underline{v}_n, \overline{v}_n]\,]^T$

$+ [[\underline{w}_1, \overline{w}_1], [\underline{w}_2, \overline{w}_2], ..., [\underline{w}_n, \overline{w}_n]]^T$

$= [[\underline{v}_1 + \underline{w}_1, \overline{v}_1 + \overline{w}_1], [\underline{v}_2 + \underline{w}_2, \overline{v}_2 + \overline{w}_2], ..., [\underline{v}_n + \underline{w}_n, \overline{v}_n + \overline{w}_n]]^T$

sehingga, $\|v+w\|_\infty = \max_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|(\overline{v}_i + \overline{w}_i) - (\underline{v}_i + \underline{w}_i)\right|$

$= \max_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|(\overline{v}_i - \underline{v}_i) + (\overline{w}_i - \underline{w}_i)\right|$

$= \max_{i\in\{1,2,...,n\}} \left|\overline{v}_i - \underline{v}_i\right| = \|v\|_\infty \le \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$

Jadi, $\|v+w\|_\infty \le \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$.

iii. $\|v\|_\infty \ge 0$, $\forall v \in I(\Re)^n$ dan $\|v\|_\infty = 0 \Leftrightarrow v = [\,[0,0],[0,0], ..., [0,0]]^T$

Oleh karena itu, $\|v\|_\infty$ yang didefinisikan pada definisi 2.3 dan definisi 2.5 merupakan norma dari $v \in I(\Re)^n$.

Definisi 2.7. Suatu matriks interval $A \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ dengan $A \approx [\,\underline{A}, \overline{A}\,]$, dikatakan regular jika untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ regular.

Lema 2.8. Matriks interval $A \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$ dikatakan regular jika dan hanya jika $\underline{A} \in \Re_{\max}^{n\times n}$ regular.

Bukti : ($\Rightarrow$) Menurut definisi 2.7, karena $\underline{A} \in [\underline{A}, \overline{A}]$ maka $\underline{A}$ regular.

($\Leftarrow$) Diketahui $\underline{A}$ regular, berarti memuat paling sedikit satu unsur yang tidak sama dengan ε dalam setiap baris. Ambil $A \in [\,\underline{A}, \overline{A}\,]$ sebarang. berarti $\underline{A} \preceq_m A$. Oleh karena itu, A memuat paling sedikit satu unsur yang tidak sama dengan ε dalam setiap baris. Dengan kata lain A reguler. Karena A sebarang maka setiap matriks $A \in [\,\underline{A}, \overline{A}\,]$ regular.

Lema 2.9. Jika $A \in I(\Re)_{\max}^{m\times n}$ matriks regular dan $u, v \in I(\Re)^m$ dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, $u \approx [\underline{u}, \overline{u}]$ dan $v \approx [\underline{v}, \overline{v}]$ maka $\|(A \,\overline{\otimes}\, u) - (A \,\overline{\otimes}\, v)\|_\infty \le \|u - v\|_\infty$.

Bukti : Misalkan $A \,\overline{\otimes}\, u$ dan $A \,\overline{\otimes}\, v$ vektor interval berhingga dalam $I(\Re)^m$ dengan $A \,\overline{\otimes}\, u \approx [\underline{A} \otimes \underline{u}, \overline{A} \otimes \overline{u}]$ dan $A \,\overline{\otimes}\, v \approx [\underline{A} \otimes \underline{v}, \overline{A} \otimes \overline{v}]$. Bukti diberikan untuk kasus jika $\exists i \in \{1, 2, ..., n\} \ni (\underline{A} \otimes \underline{u})_i \ne (\overline{A} \otimes \overline{u})_i$ dan $(\underline{A} \otimes \underline{v})_i \ne (\overline{A} \otimes \overline{v})_i$, sedangkan untuk kasus jika $\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \ni (\underline{A} \otimes \underline{u})_i = (\overline{A} \otimes \overline{u})_i$ dan $(\underline{A} \otimes \underline{v})_i = (\overline{A} \otimes \overline{v})_i$ sejalan bukti Teorema 1.4. didefinisikan $\beta = \|(A \,\overline{\otimes}\, u) - (A \,\overline{\otimes}\, v)\|_\infty$. Berarti bahwa, ada $i_0 \in \{1, 2, ..., m\}$ sehingga $\beta = \left|\left[(\overline{A} \otimes \overline{u}) - (\overline{A} \otimes \overline{v})\right]_{i_0} - \left[(\underline{A} \otimes \underline{u}) - (\underline{A} \otimes \underline{v})\right]_{i_0}\right|$. Oleh karena itu, i_0 adalah indeks dari elemen dalam $\left[(\overline{A} \otimes \overline{u})-(\overline{A} \otimes \overline{v})\right]_{i_0} - \left[(\underline{A} \otimes \underline{u})-(\underline{A} \otimes \underline{v})\right]_{i_0}$ dengan nilai mutlak maksimum. Tanpa kehilangan keumuman misalkan bahwa $\beta = \left[(\overline{A} \otimes \overline{u})-(\overline{A} \otimes \overline{v})\right]_{i_0} - \left[(\underline{A} \otimes \underline{u})-(\underline{A} \otimes \underline{v})\right]_{i_0} \geq 0$. Menurut perkalian matrik dalam aljabar Max-Plus, berarti

$$\beta = \max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}((\overline{a}_{i_0 j}+\overline{u}_j)-(\overline{a}_{i_0 j}+\overline{v}_j)) - \max_{l\in\{1,2,\ldots,n\}}((\underline{a}_{i_0 j}+\underline{u}_j)-(\underline{a}_{i_0 j}+\underline{v}_j)).$$

Oleh karena itu, ada suatu $j_0 \in \{1,2,\ldots,n\}$ sehingga,

$$\beta = ((\overline{a}_{i_0 j_0}+\overline{u}_{j_0})-(\overline{a}_{i_0 j_0}+\overline{v}_{j_0})) - \max_{l\in\{1,2,\ldots,n\}}((\underline{a}_{i_0 j}+\underline{u}_j)-(\underline{a}_{i_0 j}+\underline{v}_j))$$
$$\leq ((\overline{a}_{i_0 j_0}+\overline{u}_{j_0})-(\overline{a}_{i_0 j_0}+\overline{v}_{j_0})) - ((\underline{a}_{i_0 j_0}+\underline{u}_{j_0})-(\underline{a}_{i_0 j_0}+\underline{v}_{j_0}))$$
$$= (\overline{u}_{j_0}-\overline{v}_{j_0})-(\underline{u}_{j_0}-\underline{v}_{j_0})$$

Ini mengakibatkan bahwa,

$$\beta \leq (\overline{u}_{j_0}-\overline{v}_{j_0})-(\underline{u}_{j_0}-\underline{v}_{j_0}) \leq \max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}(\overline{u}_j-\overline{v}_j)-(\underline{u}_j-\underline{v}_j)$$
$$\leq \max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}\left|(\overline{u}_j-\overline{v}_j)-(\underline{u}_j+\underline{v}_j)\right| = \|\mathrm{u}-\mathrm{v}\|_\infty .$$

Terbukti, $\|(\mathrm{A}\,\overline{\otimes}\,\mathrm{u})-(\mathrm{A}\,\overline{\otimes}\,\mathrm{v})\|_\infty \leq \|\mathrm{u}-\mathrm{v}\|_\infty$. ■

Dalam teorema berikutnya, dipandang $\mathrm{x}(0)$ tidak perlu merupakan vektor eigen interval dari A. Notasi $\mathrm{x}(k,\mathrm{x}(0))$ menyatakan vektor interval $\mathrm{x}(k)$ dimulai dengan $\mathrm{x}(0)$.

Lema 2.10. Diberikan sistem $\mathrm{x}(k+1)=\mathrm{A}\,\overline{\otimes}\,\mathrm{x}(k)$ untuk $k\geq 0$, $\mathrm{A}\in I(\Re)^{n\times n}_{\max}$ reguler dan nilai awal $\mathrm{x}(0)$. Jika $\mathrm{x}(0)$ mengakibatkan $\lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{x}(k,\mathrm{x}(0))}{k}$ ada maka nilai limit ini sama untuk sebarang nilai awal $\mathrm{y}(0)\in I(\Re)^n$.

Bukti : Misalkan bahwa, $\mathrm{x}(0)\in I(\Re)^n$ dan $\lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{x}(k,\mathrm{x}(0))}{k}=\tau$ dengan $\tau\in I(\Re)^n$.

Oleh karena itu, untuk sebarang $\mathrm{y}(0)\in I(\Re)^n$ diperoleh,

$$0\leq\left\|\frac{\mathrm{x}(k,\mathrm{y}(0))}{k}-\frac{\mathrm{x}(k,\mathrm{x}(0))}{k}\right\|_\infty \leq \frac{1}{k}\left\|(\mathrm{A}^{\overline{\otimes}k}\,\overline{\otimes}\,\mathrm{y}(0))-(\mathrm{A}^{\overline{\otimes}k}\,\overline{\otimes}\,\mathrm{x}(0))\right\|_\infty \leq \frac{1}{k}\|\mathrm{y}(0)-\mathrm{x}(0)\|_\infty$$

Untuk $k\to\infty$ maka $\frac{1}{k}\|\mathrm{y}(0)-\mathrm{x}(0)\|_\infty\to 0$ dan $\left\|\frac{\mathrm{x}(k,\mathrm{y}(0))}{k}-\frac{\mathrm{x}(k,\mathrm{x}(0))}{k}\right\|_\infty\to 0$.

Akibatnya $\lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{x}(k,\mathrm{y}(0))}{k}=\tau$. ■

Menurut teorema ini, untuk suatu matriks interval regular jika vektor waktu sikel ada maka vektor ini tidak tergantung dari nilai awal. Selanjutnya, untuk suatu matriks tak terreduksi A, lema berikut menjamin eksistensi vektor waktu sikelnya. Menurut lema

2.10 dan lema 2.2, bahwa semua komponen vektor waktu sikelnya adalah λ untuk sebarang nilai awal.

Lema 2.11. Diberikan sistem $\mathrm{x}(k+1) = \mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{x}(k)$ untuk $k \geq 0$, $\mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ tak terreduksi dengan v vektor eigen interval yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda \in I(\Re)$ maka $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\mathrm{x}_j(k, \mathrm{x}(0))}{k} = \lambda$ untuk semua $j \in \{1, 2, ..., n\}$ dan $\mathrm{x}(0) \in I(\Re)^n$.

Bukti : Misalkan v suatu vektor eigen dari matriks interval A. Jika dipilih $\mathrm{x}(0) = \mathrm{v} \in I(\Re)^n$ diperoleh $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\mathrm{x}_j(k, \mathrm{x}(0))}{k} = \lambda$ untuk semua *j*. Karena A tak terreduksi maka A reguler dan v berhingga. Menurut lema 2.10, vektor waktu sikel ada dan tidak tergantung dari x(0). Dengan kata lain semua komponen vektor waktu sikelnya adalah λ untuk sebarang nilai awal. ■

Berdasarkan uraian sebelumnya, eksistensi nilai eigen interval dan vektor eigen interval untuk matriks interval terreduksi diberikan oleh teorema berikut :

Teorema 2.12. Jika untuk sebarang nilai awal $\mathrm{x}(0) \neq [\varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon]^T$ sistem $\mathrm{x}(k+1) = \mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{x}(k)$ memenuhi $\mathrm{x}(m) = \mathrm{c} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{x}(n)$ untuk bilangan bulat $m > n \geq 0$ dan interval c maka $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\mathrm{x}(k)}{k} = [\lambda, \lambda, ..., \lambda]^T$ dengan $\lambda = \frac{\mathrm{c}}{m-n}$. Selanjutnya, λ adalah suatu nilai eigen interval dari matriks A dengan vektor eigen diberikan oleh $\mathrm{v} = \overline{\bigoplus}_{i=1}^{m-n} (\lambda^{(m-n-1)} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{x}(n+i-1))$.

Bukti : Diketahui bahwa untuk sebarang nilai awal $\mathrm{x}(0) \neq [\varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon]^T$ sistem $\mathrm{x}(k+1) = \mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{x}(k)$ memenuhi $\mathrm{x}(m) = \mathrm{c} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{x}(n)$ untuk bilangan bulat $m > n \geq 0$ dan interval c. Misalkan *l* = *m* – *n*, sehingga

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{x}(k)}{k} = \lim_{i\to\infty} \frac{\mathrm{x}(n+il)}{n+il} = \lim_{i\to\infty} \frac{\mathrm{c}^{\overline{\otimes} i} \otimes \mathrm{x}(n)}{n+il} = \left(\lim_{i\to\infty} \frac{\mathrm{c}^{\overline{\otimes} i}}{n+il} \right) \otimes \left(\lim_{i\to\infty} \frac{\mathrm{x}(n)}{n+il} \right)$$

$= \left(\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\mathrm{c}i}{n+il} \right) \overline{\otimes} \left(\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\mathrm{x}(n)}{n+il} \right) = \frac{\mathrm{c}}{l} \,\overline{\otimes}\, \overline{0} = \frac{\mathrm{c}}{m-n} \,\overline{\otimes}\, \overline{0}$. Jadi jika $\lambda = \frac{\mathrm{c}}{m-n}$ maka vektor waktu sikelnya adalah $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\mathrm{x}(k)}{k} = [\lambda, \lambda, ..., \lambda]^T$.

Selanjutnya, jika $\mathrm{v} = \overline{\bigoplus}_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\overline{\otimes}\,(m-n-1)} \overline{\otimes}\, \mathrm{x}(n+i-1))$ maka

$$\mathrm{A} \overline{\otimes}\, \mathrm{v} = \mathrm{A} \overline{\otimes} \left(\overline{\bigoplus}_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\overline{\otimes}\,(m-n-1)} \overline{\otimes}\, \mathrm{x}(n+i-1) \right)$$

$$= \overline{\bigoplus}_{i=1}^{m-n} (\mathrm{A} \overline{\otimes} (\lambda^{\overline{\otimes}\,(m-n-1)} \otimes \mathrm{x}(n+i-1)))$$

$$= \overline{\bigoplus}_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\overline{\otimes}\,(m-n-1)} \overline{\otimes} (\mathrm{A} \overline{\otimes}\, \mathrm{x}(n+i-1)))$$

$$= \overline{\bigoplus}_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\overline{\otimes}\,(m-n-1)} \overline{\otimes} (\mathrm{x}(n+i))$$

$$= \overline{\bigoplus}_{i=2}^{m-n+1} (\lambda^{\overline{\otimes}\,(m-n-i-1)} \overline{\otimes}\, \mathrm{x}(n+i-1))$$

$$= \lambda \overline{\otimes} \left(\overline{\bigoplus}_{i=2}^{m-n+1} (\lambda^{\overline{\otimes}\,(m-n-i)} \overline{\otimes}\, \mathrm{x}(n+i-1)) \right)$$

$$= \lambda \overline{\otimes} \left(\overline{\bigoplus}_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\overline{\otimes}\,(m-n-i)} \overline{\otimes}\, \mathrm{x}(n+i-1)) \right) = \lambda \overline{\otimes}\, \mathrm{v}\,. \ \blacksquare$$

Berdasarkan teorema ini, berikut adalah langkah-langkah yang digunakan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $\mathrm{A} \in I(\Re)_{\max}^{n\times n}$ dilakukan secara berulang dari sistem $\mathrm{x}(k+1) = \mathrm{A} \overline{\otimes}\, \mathrm{x}(k)$ sebagai berikut :

Ambil sebarang vektor $\mathrm{x}(0) \neq [\varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon]^T$.

i. Lakukan iterasi sistem $\mathrm{x}(k+1) = \mathrm{A} \overline{\otimes}\, \mathrm{x}(k)$ sampai terdapat bilangan bulat $m > n \geq 0$ dan interval sehingga perilaku periodik terjadi yaitu $\mathrm{x}(m) = \mathrm{c} \overline{\otimes}\, \mathrm{x}(n)$.

ii. Hitung nilai eigen $\lambda = \dfrac{\mathrm{c}}{m-n}$.

iii. Vektor eigen $\mathrm{v} = \overline{\bigoplus}_{i=1}^{m-n} (\lambda^{(m-n-1)} \overline{\otimes}\, \mathrm{x}(n+i-1))$.

KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa :

a. Matriks interval terreduksi regular A mempunyai nilai eigen interval dan vektor eigen interval jika vektor interval waktu sikelnya merupakan laju pertumbuhan asimtotik barisan $\mathrm{x}(k)$ dari sistem persamaan linear $\mathrm{x}(k+1) = \mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{x}(k)$.
b. Batas bawah dan batas atas nilai eigen interval tersebut berturut-turut adalah nilai eigen Max-Plus matriks batas bawah dan nilai eigen Max-Plus matriks batas atas dari matriks intervalnya.
c. Batas bawah dan batas atas vektor eigen interval tersebut berturut-turut adalah vektor eigen matriks batas bawah dan vektor eigen matriks batas atas dari matriks intervalnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Akian, M., Cohen, G., Gaubert, S., Quadrat, J. P., and Viot, M. 1994. Max-Plus Algebra and Applications to System Theory and Optimal Control. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Zurich, Switzerland.
[2] Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., Quadrat, J. P. 2001. *Synchronization and Linearity*, New York : John Wiley & Sons.
[3] Butkovic, P., Tam K. P., 2009. On Some Properties of The Image of a Max Linear Mapping. *Contemporary Mathematics*. Volume 495.
[4] Farlow, K. G. 2009. *Max-Plus Algebra*. Master's Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Masters in Mathematics.
[5] Konigsberg Z. R. 2009. A Generalized Eigenmode Algorithm for Reducible Regular Matrices over the Max-Plus Algebra. *International Mathematical Forum*, 4. 24. 1157 – 1171.
[6] Rudhito, Andy. 2011. *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian*. Disertasi : Program Studi S3 Matematika FMIPA UGM. Yogyakarta.
[7] Schutter, B. D. 1996. *Max Algebraic System Theory for Discrete Event Systems.* Ph.D Thesis, Katholike Universiteit Leuven, Departement Elektrotechniek.
[8] Siswanto. 2012. *Nilai Eigen dan Vektor Eigen suatu Matriks Terreduksi dalam Aljabar Max-Plus*. Prosiding Seminar Nasional Aljabar 2012 Jurusan Matematika UNDIP. 152 – 161.
[9] Subiono. 2000. *On Classes of Min-Max-Plus Systems and Their Applications*, Published by Delf University Press.
[10] Tam. K. P. 2010. *Optimizing and Approximating Eigenvectors In Max-Algebra*. A thesis Submitted to the University of Birmingham for The Degree of Doctor of Philosophy (PHD).