A8

SISTEM LINEAR MAX-PLUS KABUR WAKTU INVARIANT AUTONOMOUS

M. Andy Rudhito[1]

[1]Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma
Kampus III USD Paingan Maguwoharjo Yogyakarta
[1]e-mail: arudhito@yahoo.co.id

Abstrak

Telah dibahas sistem linear max-plus waktu invariant autonomous (SLMIA), di mana waktu aktifitasnya berupa bilangan real dan interval. Dalam sistem linear max-plus kabur waktu invariant autonomous (SLMKIA), ketidakpastian dalam waktu aktifitasnya dimodelkan sebagai bilangan kabur (*fuzzy number*), yang dapat dipandang sebagai keluarga interval tersarang. Artikel ini membahas tentang generalisasi SLMIIA menjadi SLMKIA dan analisis input-output SLMKIA, serta sifat periodiknya. Dapat ditunjukkan bahwa SLMKIA berupa suatu sistem persamaan linear max-plus bilangan kabur. Analisa input-output SLMKIA dapat dibahas melalui proses rekursif pada sistem persamaan linear max-plus bilangan kabur. Sifat periodik SLMKIA dapat diperoleh dari nilai nilai eigen dan vektor eigen bilangan kabur matriks keadaan dalam sistemnya.

Kata kunci: Sistem Linear, Max-Plus, Bilangan Kabur, Waktu Invariant, Input-Output, Autonomous

PENDAHULUAN

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan, kadang-kadang waktu aktifitasnya tidak diketahui dengan pasti. Hal ini misalkan karena jaringan masih pada tahap perancangan, data-data mengenai waktu aktifitas belum diketahui secara pasti. Ketidakpastian waktu aktifitas jaringan ini dapat dimodelkan dalam suatu bilangan kabur (*fuzzy number*), yang selanjutnya di sebut waktu aktifitas kabur.

Aljabar max-plus (himpunan semua bilangan real **R** dilengkapi dengan operasi max dan plus) telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah-masalah jaringan, seperti masalah: penjadwalan (proyek) dan sistem antrian, lebih detailnya dapat dilihat pada Bacelli, *et al*. (2001), Rudhito, A. (2003). Dalam Schutter (1996) dan Rudhito, A. (2003) telah dibahas pemodelan dinamika sistem produksi sederhana dengan pendekatan aljabar max-plus. Secara umum model ini berupa sistem linear max-plus waktu invariant.

Makalah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dengan tema *" Kontribusi Pendidikan Matematika dan Matematika dalam Membangun Karakter Guru dan Siswa"* pada tanggal 10 November 2012 di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

 ISBN : 978-979-16353-8-7

Konsep aljabar max-plus bilangan kabur yang merupakan perluasan konsep aljabar max-plus, di mana elemen-elemen yang dibicarakan berupa bilangan kabur telah dibahas dalam Rudhito (2008) dan Rudhito (2011a), yang juga meliputi konsep matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur, nilai eigen dan vektor eigen max-plus bilangan kabur.

Sejalan dengan cara pemodelan dan pembahasan input-output sistem linear max-plus waktu invariant (SLMI) seperti dalam Schutter (1996) dan Rudhito, A. (2003), dan dengan memperhatikan hasil-hasil pada aljabar max-plus bilangan kabur, dalam Rudhito (2011a) telah dibahas pemodelan dan analisa input-output sistem linear max-plus kabur waktu invariant (SLMKI), yaitu sistem linear max-plus waktu invariant dengan waktu aktifitas kabur. Dalam situasi tertentu ada suatu SLMI yang keadaannya tidak dipengaruhi kedatangan input, yang disebut dengan SLMI autonomous (SLMIA). Dalam makalah ini akan dibahas pemodelan, analisis input-output dan sifat periodik sistem linear max-plus kabur waktu invariant autonomous (SLMKIA).

Dalam makalah ini diasumsikan pembaca telah mengenal pengertian dan sifat-sifat aljabar max-plus bilangan kabur, matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur, nilai eigen dan vektor eigen max-plus bilangan kabur seperti yang dapat dibaca dalam Rudhito (2011a).

PEMBAHASAN

Berikut diberikan definisi sistem linear max-plus kabur waktu invariant autonomous (SLMKIA).

Definisi 1 (SLMKIA)

Sistem Linear Max-Plus Kabur Waktu-Invariant Autonomous adalah Sistem Kejadian Diskrit yang dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{x}}(k+1) &= \tilde{A} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{\boldsymbol{x}}(k) \\ \tilde{\boldsymbol{y}}(k) &= \tilde{C} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{\boldsymbol{x}}(k) \end{aligned} \tag{1}$$

untuk k = 1, 2, 3, ... , dengan kondisi awal $\tilde{\boldsymbol{x}}(0) \neq \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$ dan $\tilde{C} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{1\times n}$.

Vektor kabur $\tilde{\boldsymbol{x}}(k) \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n}$ menyatakan *keadaan* (*state*) kabur dan $\tilde{\boldsymbol{y}}(k) \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{1}$ adalah *vektor output kabur* sistem saat waktu ke-k.

SLMKIA dalam definisi di atas merupakan sistem dengan satu input dan satu output (SISO). SLMKIA seperti dalam definisi di atas secara singkat akan dituliskan dengan SLMKIA($\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{\boldsymbol{x}}(0) \neq \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$). Jika kondisi awal diberikan pada sistem, maka secara rekursif juga dapat ditentukan barisan keadaan sistem dan barisan output sistem yang bersesuaian dengan kondisi awal tersebut. Secara umum sifat input-output SLMKIA ($\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{\boldsymbol{x}}(0) \neq \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$) diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 1 (Input-Output SLMKIA($\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{\boldsymbol{x}}(0) \neq \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$))
Diberikan suatu bilangan bulat positip *p*. Jika vektor output kabur $\tilde{\boldsymbol{y}} = [\, \tilde{y}(1),\ \tilde{y}(2), \ldots,\ \tilde{y}(p)]^{T}$ diberikan pada SLMKIA($\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{\boldsymbol{x}}(0) \neq \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$), maka $\tilde{\boldsymbol{y}} = \tilde{K} \mathbin{\tilde{\otimes}} \tilde{\boldsymbol{x}}(0)$, dengan

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \mathbin{\tilde{\otimes}} \tilde{A} \\ \tilde{C} \mathbin{\tilde{\otimes}} A^{\tilde{\otimes}2} \\ \vdots \\ \tilde{C} \mathbin{\tilde{\otimes}} A^{\tilde{\otimes}p} \end{bmatrix}.$$

Bukti: Pembuktian analog dengan pembuktian pada kasus waktu aktifitas yang berupa bilangan real, dengan mengingat bahwa operasi penjumlahan dan perkalian matriks potongan-α yang berupa matriks interval konsisten terhadap urutan yang telah didefinisikan di atas. Di samping itu untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$, elemen-elemen matriks potongan-α juga bersarang (*nested*). Bukti untuk kasus waktu aktifitas yang berupa bilangan real dapat dilihat dalam Rudhito (2003: hal 56 -58).

Selanjutnya akan diberikan teorema yang memberikan cara penentuan keadaan awal tercepat untuk suatu $\alpha \in [0, 1]$, sehingga interval keadaan selanjutnya akan berada dalam interval terkecil yang batas bawah dan batas atasnya periodik dengan periode tertentu. Sebelumnya akan dikonstruksikan suatu vektor bilangan kabur dalam definisi berikut.

Definisi 2
Diberikan matriks $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$ irredusibel dan dengan $\tilde{\boldsymbol{v}}$ adalah vektor eigen max-plus bilangan kabur fundamental yang bersesuaian dengan $\tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A})$. Dibentuk vektor bilangan kabur $\tilde{\boldsymbol{v}}^{*}$ di mana vektor potongan-α-nya adalah $\boldsymbol{v}^{*\alpha} \approx [\, \underline{\boldsymbol{v}^{*\alpha}}, \overline{\boldsymbol{v}^{*\alpha}}\,]$, dengan langkah-langkah sebagai berikut. Untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$ dan $i = 1, 2, \ldots, n$, dibentuk

 ISBN : 978-979-16353-8-7

1. $\underline{v'}^{\alpha} = \delta_1 \otimes \underline{v}^{\alpha}$, $\overline{v'^{\alpha}} = \delta_1 \otimes \overline{v^{\alpha}}$, dengan $\delta_1 = -\min_i(\underline{v}^0_i)$.

2. $\underline{v''}^{\alpha} = \delta_2(\alpha) \otimes \underline{v'}^{\alpha}$, $\overline{v''^{\alpha}} = \delta_2(\alpha) \otimes \overline{v'^{\alpha}}$, dengan $\delta_2(\alpha) = -\min_i(\underline{v'}^{\alpha}_i - \underline{v'}^0_i)$.

3. $\overline{v'''^{\alpha}} = \delta_3 \otimes \overline{v''^{\alpha}}$, dengan $\delta_3 = -\min_i(\underline{v''}^0_i - \overline{v''^0}_i)$.

4. $\underline{v}^{*\alpha} = \underline{v''}^{\alpha}$, $\overline{v^{*\alpha}} = \delta_4(\alpha) \otimes \overline{v'''^{\alpha}}$, dengan $\delta_4(\alpha) = -\min_i(\overline{v'''^0}_i - \overline{v'''^{\alpha}}_i)$.

Teorema 2

Diberikan SLMKIA($\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{x}(0) \neq \tilde{\varepsilon}$)) dengan $\tilde{A}$ irredusibel. Untuk suatu $\alpha \in [0, 1]$, vektor $\underline{v}^{*\alpha}$ seperti yang didefinisikan dalam Definisi 2, merupakan keadaan awal tercepat, sehingga interval keadaan berikutnya akan berada dalam interval terkecil yang batas bawah dan batas atasnya periodik dengan besar periode berturut-turut $\lambda_{\max}(\underline{A}^{\alpha})$ dan $\lambda_{\max}(\overline{A^{\alpha}})$.

Bukti:

Persamaan $\tilde{x}(k+1) = \tilde{A} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{x}(k)$ dapat dinyatakan melalui keadaan awal $\tilde{x}(0)$, dengan potongan-α-nya $x^{\alpha}(0) \approx [\,\underline{x}^{\alpha}(0), \overline{x^{\alpha}}(0)\,]$ untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$. Perhatikan bahwa untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$ berlaku $x^{\alpha}(k+1) = A^{\alpha} \,\overline{\otimes}\, x^{\alpha}(k) \approx [\,\underline{A}^{\alpha} \otimes \underline{x}^{\alpha}(k), \overline{A^{\alpha}} \otimes \bar{x}^{\alpha}(k)\,] = [\,(\underline{A}^{\alpha})^{\otimes k} \otimes \underline{x}^{\alpha}(0), (\overline{A^{\alpha}})^{\otimes k} \otimes \bar{x}^{\alpha}(0)\,] \approx (A^{\alpha})^{\overline{\otimes} k} \,\overline{\otimes}\, x^{\alpha}(0)$. Jadi untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$ berlaku $x^{\alpha}(k+1) = (A^{\alpha})^{\overline{\otimes} k} \,\overline{\otimes}\, x^{\alpha}(0)$, yang berarti berlaku bahwa $\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}^{\tilde{\otimes} k} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{x}(0)$. Mengingat keadaan awal dapat ditentukan dengan pasti, maka keadaan awal merupakan adalah tegas atau berupa bilangan kabur titik, yaitu $\tilde{x}(0)$, dengan $x^{\alpha}(0) \approx [\,\underline{x}^{\alpha}(0), \bar{x}^{\alpha}(0)\,]$ di mana $\underline{x}^{\alpha}(0) = \bar{x}^{\alpha}(0)$ untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$.

Karena matriks $\tilde{A}$ irredusibel, maka dapat dibentuk vektor bilangan kabur $\tilde{v}^*$ seperti pada Definisi 2 di atas. Vektor bilangan kabur $\tilde{v}^*$ tersebut juga merupakan vektor eigen max-plus bilangan kabur yang bersesuaian dengan $\tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A})$. Dari konstruksi vektor eigen max-plus bilangan kabur di atas diperoleh bahwa komponen $\underline{v}^{*0}$ yaitu $\underline{v}^{*0}_i$, semuanya tak negatif dan terdapat $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sedemikian hingga $\underline{v}^{*\alpha}_i = 0$ untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$. Sementara vektor potongan-α-nya merupakan interval-interval terkecil, dalam arti $\min_i(\overline{v}^{*0}_i - \underline{v}^{*0}_i) = 0$ untuk $i = 1, 2, ..., n$, di antara semua kemungkinan vektor eigen max-plus bilangan kabur hasil modifikasi vektor eigen max-plus bilangan kabur fundamental $\tilde{\boldsymbol{v}}$ di atas, yang semua batas bawah komponennya tak negatif dan paling sedikit satu bernilai nol.

Mengingat vektor bilangan kabur $\tilde{\boldsymbol{v}}^*$ merupakan vektor eigen max-plus bilangan kabur yang bersesuaian dengan $\tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A})$, maka berlaku

$\tilde{A} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{\boldsymbol{v}}^* = \tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A}) \,\tilde{\otimes}\, \tilde{\boldsymbol{v}}^*$ atau $A^\alpha \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{v}^{*\alpha} = \lambda_{\max}(A^\alpha) \,\overline{\otimes}\, \boldsymbol{v}^{*\alpha}$ atau

$[\underline{A}^\alpha \otimes \underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}, \overline{A}^\alpha \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}] = [\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha) \otimes \underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}, \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha) \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}]$ yang berarti pula $\underline{A}^\alpha \otimes \underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha} = \lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha) \otimes \underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}$ dan $\overline{A}^\alpha \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha} = \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha) \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}$ untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$.

Untuk suatu nilai $\alpha \in [0, 1]$, diambil keadaan awal tercepat $\tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}$ sehingga batas bawah interval keadaan sistem periodik. Hal ini karena terdapat $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sedemikian hingga $\underline{v}^{*\alpha}_i = 0$ untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$. Mengingat operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks konsisten terhadap urutan "$\preceq_m$", maka berlaku $(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha} \preceq_m (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha} \preceq_m (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}$.

Akibatnya $\boldsymbol{d}^\alpha(k) \approx [(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}, (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}] \subseteq [(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}, (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}] = [(\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha))^{\otimes k} \otimes \underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}, (\lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha))^{\otimes k} \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}] = [(\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha))^{\otimes k}, (\lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha))^{\otimes k}] \,\overline{\otimes}\, [\underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}, \overline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}]$ $= [\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]^{\otimes k} \,\overline{\otimes}\, [\underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}, \overline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}]$ untuk setiap $k = 1, 2, 3, ...$.

Dengan demikian untuk suatu $\alpha \in [0, 1]$, vektor $\underline{\boldsymbol{v}}^{*\alpha}$ merupakan keadaan awal tercepat, sehingga interval keadaan selanjutnya akan berada dalam interval terkecil yang batas bawah dan batas atasnya periodik dengan besar periode berturut-turut $\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha)$ dan $\lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)$). ■

SIMPULAN DAN SARAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa bahwa SLMKIA berupa suatu sistem persamaan linear max-plus bilangan kabur. Analisa input-output SLMKIA dapat

 ISBN : 978-979-16353-8-7

dibahas melalui proses rekursif pada sistem persamaan linear max-plus bilangan kabur, di mana barisan output dapat dituliskan dalam suatu persamaan matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur. Sifat periodik SLMKIA dapat diperoleh dari nilai nilai eigen dan vektor eigen bilangan kabur matriks keadaan dalam sistemnya, di mana untuk suatu $\alpha \in [0, 1]$, dapat ditentukan keadaan awal tercepat sehingga interval keadaan selanjutnya akan berada dalam interval terkecil yang batas bawah dan batas atasnya periodik.

Dalam pembahasan pada makalah ini masih sebatas teoritis, sehingga teori ini perlu diterapkan dalam masalah nyata sehari-sehari, seperti dalam masalah sistem produksi, masalah antrian dan sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. 2001. Synchronization and Linearity. New York: John Wiley & Sons.

Rudhito, Andy. 2003. Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Rudhito, Andy. Wahyuni, Sri. Suparwanto, Ari dan Susilo, F. 2008. Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur. Berkala Ilmiah MIPA Majalah Ilmiah Matematika & Ilmu Pengetahuan Alam. Vol. 18 (2): pp. 153-164

Rudhito, Andy. 2011. Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian Kabur, Disertasi: Program S3 Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Rudhito, Andy. 2012a. Sistem Linear Max-Plus Interval Waktu Invariant. Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY, Yogyakarta, 3 Desember 2011. pp. MA-104-113.

Rudhito, Andy. 2012b. Fuzzy Max-Plus Linear Systems Time-Invariant. Seminar Nasional Aljabar 2012 di FMIPA Universitas Diponegoro, Semarang, 14 April 2012.

Schutter, B. De., 1996. Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems, PhD thesis Departement of Electrical Enginering Katholieke Universiteit Leuven, Leuven