

Penerapan Grafik dan Studi Simulasi Hotelling T^2 Trivariat pada Kualitas Parfum Remaja dari Perusahaan “X”

Fitria Puspitoningrum¹⁾, Adi Setiawan²⁾ dan Hanna A. Parhusip²⁾

¹⁾Mahasiswa Program Studi Matematika

Fakultas Sains dan Matematika Universitas Kristen Satya Wacana
Jl.Diponegoro 52-60 Salatiga 50711, e-mail: fitri.puspita99@yahoo.com

²⁾Dosen Program Studi Matematika

Fakultas Sains dan Matematika Universitas Kristen Satya Wacana
Jl.Diponegoro 52-60 Salatiga 50711

Abstrak

Grafik pengendali merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mengendalikan kualitas produk. Makalah ini menjelaskan tentang penerapan grafik Hotelling T^2 trivariat dengan dipilih $\alpha = 0.0027$ yang menitik beratkan adanya korelasi signifikan antara karakteristik satu dengan karakteristik lain yang telah ditetapkan sebagai pengendali kualitas parfum remaja dari perusahaan “X”. Berdasarkan grafik tersebut dapat dibuat perbandingan ellipsoida spesifikasi dengan ellipsoida proses untuk menghitung indeks kemampuan proses yang menghasilkan nilai lebih dari 1. Simulasi dilakukan untuk membuat data baru yang berdistribusi normal trivariat dengan mean dan kovariansi berdasarkan data real. Hasil simulasi memberikan hasil prosentase titik yang di luar kendali mendekati $\alpha = 0.0027$ untuk ukuran sampel yang cukup besar.

Kata Kunci: Grafik Hotelling T^2 Trivariat, Koefisien Korelasi, Indeks Kemampuan Proses, Simulasi.

1. Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Dalam metode statistik pengendalian kualitas produk digambarkan dengan menggunakan grafik pengendali yang diperoleh dari informasi pengambilan sampel, pengujian dan evaluasinya (Montgomery, 1990). Salah satu grafik pengendali dalam statistik dengan menggunakan grafik Hotelling T^2 yang pernah diperkenalkan oleh Harold Hotelling pada tahun 1947 dengan menggunakan data pembidik bom selama Perang Dunia II. Grafik ini merupakan hasil generalisasi dari distribusi- t . Dalam makalah ini akan diterapkan penggunaan grafik Hotelling T^2 terhadap 3 karakteristik yang telah ditetapkan sebagai pengendali kualitas parfum remaja pada perusahaan “X”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas dapat dirumuskan permasalahan yaitu bagaimana menerapkan grafik Hotelling T^2 trivariat dengan menitikberatkan adanya korelasi signifikan antara karakteristik satu dengan karakteristik lainnya. Berdasarkan grafik tersebut dapat digunakan untuk membuat perbandingan batas ellipsoida

spesifikasi dan batas ellipsoida proses, studi simulasi digunakan untuk membandingkan prosentase titik di luar kendali antara hasil simulasi dengan penerapan semula.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini yaitu menerapkan grafik *Hotelling T²* trivariat pada 3 karakteristik kualitas parfum remaja, memperoleh nilai indeks kemampuan proses, serta membandingkan antara prosentase titik di luar kendali hasil dari simulasi dengan penerapan semula.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah mengetahui prosentase titik yang berada di luar kendali serta nilai indeks kemampuan proses dari hasil simulasi yang tidak berbeda dengan perhitungan pada penerapan semula.

2. Metode Penelitian

2.1 Penerapan

Diketahui sampel berdistribusi normal yang terdiri dari q karakteristik kualitas, dengan m menggambarkan banyaknya sampel, dan masing – masing sampel berukuran n , rataan (*mean*) dan variansi (*variance*) sampel dihitung dari

$$\bar{x}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ijk}$$

$j = 1, 2, \dots, q$ dan $k = 1, 2, \dots, n$,

$$S_{jk}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})^2$$

$j = 1, 2, \dots, q$ dan $k = 1, 2, \dots, n$. Dalam hal ini \bar{x}_{jk} adalah pengamatan ke- i pada karakteristik kualitas ke- j dalam sampel ke- k . Kovariansi (*kovariance*) antara karakteristik kualitas j dan karakteristik kualitas h pada sample ke- k adalah

$$S_{jkh} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})(x_{ihk} - \bar{x}_{hk})$$

$k = 1, 2, \dots, m$ dan $j \neq h$. Selanjutnya dari ketiga persamaan di atas dapat dihitung meliputi seluruh m sampel untuk memperoleh

$$\bar{\bar{x}}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{x}_{jk} \quad j = 1, 2, \dots, q$$

$$\bar{S}_j^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jk}^2 \quad j = 1, 2, \dots, q$$

dan

$$\bar{S}_{jh} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jhk} \quad j \neq h.$$

Sedangkan $\bar{\bar{x}}_j$ merupakan elemen dari vektor rata-rata $\bar{\bar{x}}$ dan matriks kovariansi S dapat disusun menjadi

$$S = \begin{bmatrix} S_1^2 & S_{12} & \dots & S_{1q} \\ & S_2^2 & \dots & S_{2q} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & & S_q^2 \end{bmatrix}.$$

Nilai T^2 untuk masing – masing sampel adalah

$$T_j^2 = m(\bar{x} - \bar{\bar{x}})S^{-1}(\bar{x} - \bar{\bar{x}})' \tag{1}$$

dengan n adalah ukuran masing masing sampel dan S^{-1} merupakan invers dari matriks kovariansi S (Montgomery, 2001). Batas grafik pengendali dapat ditentukan dari persamaan

$$BPA = \left(\frac{q(m+1)(m-1)}{m(m-q)} \right) F_{\alpha, q, (q, m-q)} \tag{2}$$

dengan BPA adalah Batas Pengendali Atas, m menggambarkan banyak sampel, dan α adalah prosentase kesalahan proses yang diijinkan (Montgomery, 2001). Jika nilai T^2 untuk sampel ke- j , yaitu $T_j^2 > BPA$, hal ini menunjukkan sampel ke- j di luar kendali (Young, 1999).

2.2 Indeks Kemampuan Proses Multivariat

Indeks Kemampuan Proses Multivariat (*Multivariate Capability Process*) adalah suatu indeks proses yang menunjukkan nilai rasio antara penyebaran (variabilitas) spesifikasi produk yang diijinkan dan penyebaran proses aktual yang melibatkan lebih dari satu variabel. Ada beberapa macam metode perhitungan indeks kemampuan proses,

salah satunya adalah metode indeks kemampuan proses MC_{pm} (Zahid, 2008). Perhitungan nilai indeks kemampuan proses MC_{pm} ini didefinisikan sebagai rasio dari dua volume yaitu

$$MC_{pm} = \frac{vol(R_1)}{vol(R_2)}$$

dengan R_1 merupakan daerah ellips spesifikasi, sedangkan R_2 merupakan daerah proses $100(1-\alpha)\%$. Jika data berdistribusi normal multivariat maka R_2 berbentuk ellips sedangkan R_1 merupakan ellips terbesar yang berada dalam daerah spesifikasi dan berpusat pada target dengan volume R_1 adalah

$$vol(R_1) = \frac{2 \prod_{i=1}^p \mu_i \pi^{p/2}}{p \Gamma(p/2)}$$

dengan μ_i merupakan nilai tengah spesifikasi ke- i ($i=1,2,3,\dots,p$).

Volume R_2 dapat dituliskan dalam bentuk

$$vol(R_2) = |S|^{1/2} (\pi K(p))^{p/2} [\Gamma(p/2+1)]^{-1} \times \left[1 + (x-\mu)' S^{-1} (x-\mu) \right]^{1/2}$$

dengan $K(p)$ merupakan kuantil $100(1-\alpha)\%$ dari distribusi χ^2 dengan derajat bebas p , S adalah matriks kovariansi.

Nilai estimasi indeks MC_{pm} ditentukan dengan rumus

$$M\hat{C}_{pm} = \frac{vol(R_1)}{|S|^{1/2} (\pi K(p))^{p/2} [\Gamma(p/2+1)]^{-1}} \times \frac{1}{\left[1 + \frac{m}{m-1} (\bar{x}-\mu)' S^{-1} (\bar{x}-\mu) \right]^{1/2}}$$

atau

$$M\hat{C}_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\hat{D}} \tag{3}$$

dengan

$$\hat{C}_p = \frac{vol(R_1)}{|S|^{1/2} (\pi K(p))^{p/2} [\Gamma(p/2+1)]^{-1}}$$

$$\hat{D} = \left[1 + \frac{m}{m-1} (\bar{x}-\mu)' S^{-1} (\bar{x}-\mu) \right]^{1/2} .$$

Notasi $|\bullet|$ menyatakan nilai determinan, notasi \bar{x} menyatakan vektor rata-rata data dan $\Gamma(\bullet)$ menyatakan fungsi *gamma* (Pan & Lee, 2009).

Menurut Zahid (2008) Jika nilai indeks lebih dari 1 maka proses mempunyai variasi lebih kecil dibandingkan dengan batas spesifikasi sehingga dapat dikatakan proses produksi telah berjalan dengan baik. Sebaliknya, jika indeks bernilai kurang dari 1 hal tersebut menunjukkan variasi proses lebih besar daripada batas spesifikasi perusahaan, artinya proses tersebut banyak menghasilkan produk yang tidak sesuai dengan spesifikasi. Komputasi dilakukan dengan bantuan *software Matlab 6.5* dan paket program *R*.

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder dari produk parfum remaja yang diproduksi pada perusahaan “X” selama periode April 2010 hingga Desember 2010. Data produk parfum remaja ini merupakan 3 macam karakteristik kualitas yang telah ditetapkan sebagai pengendali kualitas parfum remaja yaitu pH dengan batas spesifikasi perusahaan 4 – 8, *refractive index (RI)* atau indeks bias parfum remaja setelah dikemas dengan batas spesifikasi perusahaan 1.349 – 1.369 dan masa jenis parfum remaja dengan batas spesifikasi perusahaan adalah 0.884 – 0.930.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Penerapan Grafik *Hotelling T²*

Dalam makalah ini diterapkan penggunaan grafik *Hotelling T²* trivariat pada karakteristik kualitas parfum remaja dengan menitikberatkan adanya korelasi antara karakteristik satu dengan lainnya. Dimisalkan sebagai variabel $x_1 = \text{pH}$ dalam parfum remaja, $x_2 = \text{refractive index (RI)}$ atau indeks bias parfum remaja setelah dikemas dan $x_3 = \text{massa jenis parfum remaja}$. Uji korelasi *Pearson* menunjukkan adanya korelasi signifikan yaitu untuk variabel x_1 dan x_2 koefisien korelasi sebesar 0.168, untuk variabel x_1 dan x_3 koefisien korelasinya adalah -0.155 sedangkan untuk variabel x_2 dan x_3 adalah -0.658 (tingkat signifikan $\alpha = 0.01$). Penerapan grafik *Hotelling T²* trivariat berdasarkan persamaan (1) pada tiga variabel dan dipilih $\alpha = 0.0027$ diperoleh vektor rata-rata $\bar{\bar{x}} = [6.8297 \quad 1.3626 \quad 0.9131]$, dan matriks kovariansi

$$S = \begin{bmatrix} 0.1269 & 8.2 \times 10^{-5} & -0.541 \times 10^3 \\ 8.2 \times 10^{-5} & 1.8821 \times 10^{-6} & -8.8477 \times 10^{-6} \\ -0.541 \times 10^3 & -8.8477 \times 10^{-6} & 9.6101 \times 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

Untuk lebih jelas penerapan persamaan (1) berikut ini contoh perhitungan sampel ke-1 dari 3 variabel karakteristik yaitu $x_1 = [6.80 \ 1.364 \ 0.9028]$, sehingga nilai untuk

$$x_1 - \bar{x} = [6.80 \ 1.364 \ 0.9028] - [6.8297 \ 1.3626 \ 0.9131] \\ = [-0.0297 \ 0.0014 \ -0.0103].$$

Berdasarkan persamaan (1) diperoleh

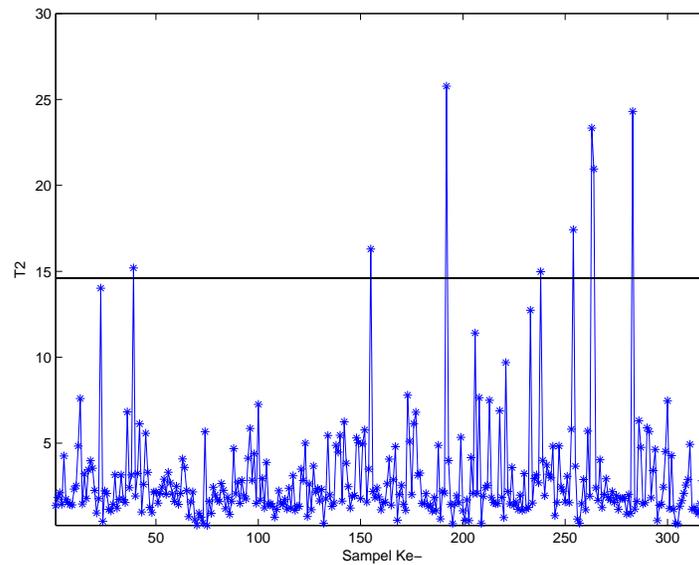
$$T_1^2 = [-0.0297 \ 0.0014 \ -0.0103] \times \begin{bmatrix} 0.1269 & 8.2 \times 10^{-5} & -0.541 \times 10^3 \\ 8.2 \times 10^{-5} & 1.8821 \times 10^{-6} & -8.8477 \times 10^{-6} \\ -0.541 \times 10^3 & -8.8477 \times 10^{-6} & 9.6101 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.0297 \\ 0.0014 \\ -0.0103 \end{bmatrix} \\ = 1.3762$$

dan berdasarkan persamaan (2) diperoleh $BPA = 14.5905$, hal ini berarti bahwa nilai *Hotelling T²* sampel ke-1 berada di bawah *BPA*. Pengamatan tersebut diperoleh hasil 8 titik di atas *BPA* yang ditunjukkan pada Tabel 1 dan Gambar 1.

Tabel 1. Hasil Pengamatan 3 variabel Sampel yang Berada di Atas *BPA*

Sampel Ke-	Nilai T^2
39	15.1969
155	16.2953
192	25.7646
238	14.9772
254	17.4195
263	23.3349
264	20.9547
283	24.2986

Berdasarkan pengamatan tersebut, jika urutan titik sampel dibandingkan dengan pengamatan sampel terhadap 2 variabel (Puspitoningrum et.al, 2011) yang berada di atas *BPA* diperoleh persamaan urutan titik sampel. Hal ini menunjukkan nilai T^2 merupakan akumulasi dari nilai ketiga sampel.



Gambar 1. Grafik Hotelling T^2 dari Pengamatan Tiga Variabel

3.2 Indeks Kemampuan Proses

Bagian ini menunjukkan perhitungan dari perbandingan batas ellipsoida spesifikasi (R_1) dengan batas ellipsoida proses (R_2) untuk $\alpha = 0.0027$ yang ditunjukkan pada Gambar 2. Persamaan ellipsoida yang memenuhi batas ellipsoida spesifikasi (R_1) ditunjukkan dengan persamaan

$$\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{b^2} + \frac{(x_3 - \mu_3)^2}{c^2} = 1 . \tag{4}$$

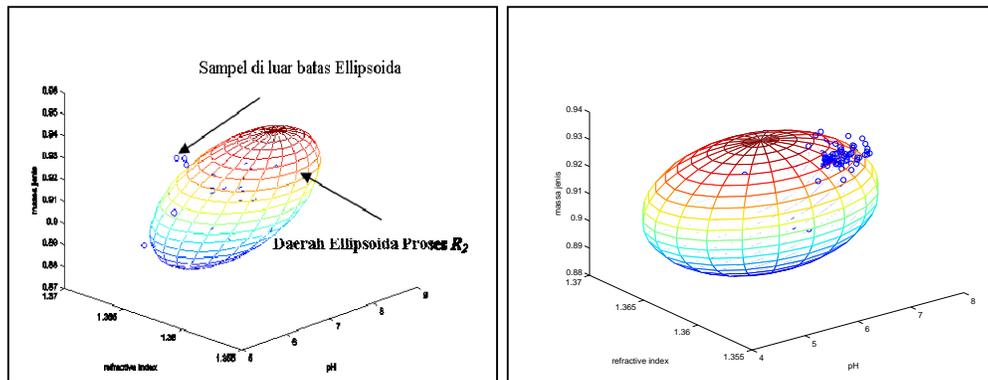
Notasi μ merupakan nilai tengah batas spesifikasi, a, b, c merupakan setengah panjang sumbu ellipsoida, sehingga persamaan batas ellipsoida (R_1) menurut persamaan (4) adalah

$$\frac{(x_1 - 6.8504)^2}{2^2} + \frac{(x_2 - 1.3626)^2}{0.005^2} + \frac{(x_3 - 0.907)^2}{0.023^2} = 1 .$$

Berdasarkan perhitungan diperoleh hasil berdasarkan persamaan (3) yaitu

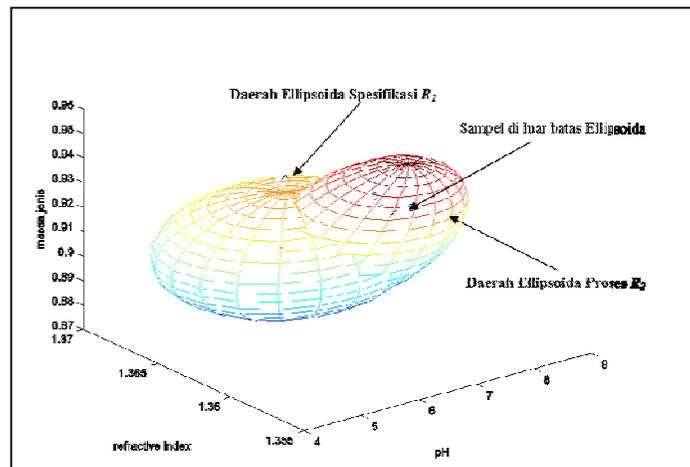
$$MC_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\hat{D}} = \frac{12.4786}{3.272322} = 3.813378 .$$

Terlihat bahwa nilai indeks kemampuan proses diperoleh lebih dari 1. Hal ini menunjukkan variasi proses lebih kecil daripada batas spesifikasi perusahaan sehingga dapat disimpulkan bahwa proses produksi parfum remaja sudah dalam keadaan baik.



a. Batas Ellipsoida Proses 99.73%

b. Batas Ellipsoida Spesifikasi Perusahaan



c. Batas Ellipsoida Spesifikasi dengan Proses

Gambar 2. Gambar Perbandingan Batas Ellipsoida

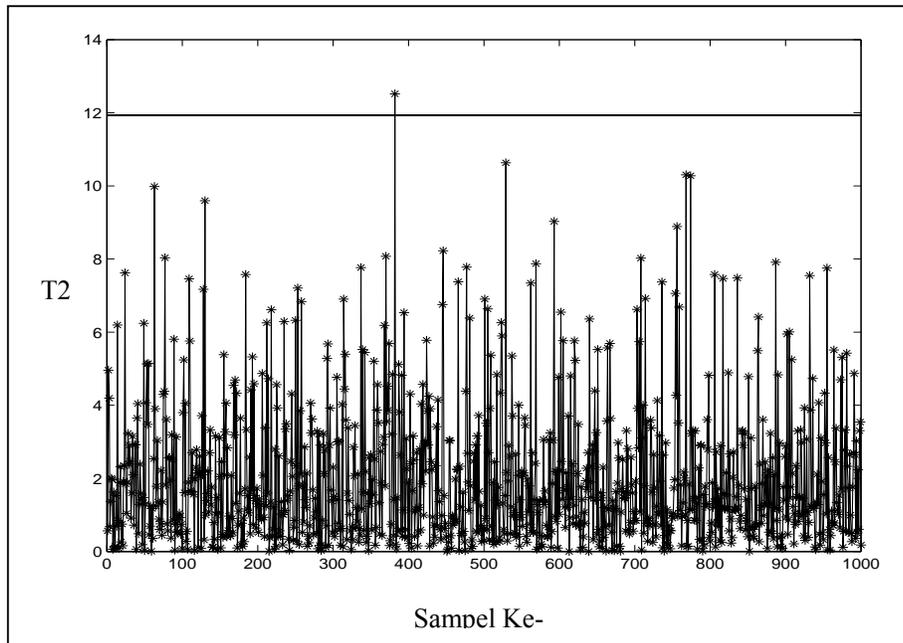
3.3 Studi Simulasi Penerapan Grafik *Hotelling T²*

a. Studi Simulasi Bivariat

Pada makalah Puspitoningrum et.al. (2011) telah diterapkan grafik *Hotelling T²* bivariat pada 3 karakteristik kualitas parfum remaja dari perusahaan “X”. Dalam makalah ini akan dilakukan simulasi penerapan grafik *Hotelling T²* bivariat pada karakteristik pH dan *refractive index* untuk menghitung prosentase titik sampel yang berada di atas *BPA* dengan data berdistribusi normal bivariat yang dibangkitkan dari mean dan kovariansi berdasarkan data semula. Diketahui vektor rata-rata $\bar{x} = [6.8297 \quad 1.3626]$ dan matrik kovariansi

$$S = \begin{bmatrix} 0.1269 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0019 \times 10^{-3} \end{bmatrix},$$

dibangkitkan data sebanyak m titik sampel dan disimulasikan sebanyak 1000 kali pengulangan. Sebagai salah satu contoh penerapan grafik *Hotelling T^2* hasil simulasi ditunjukkan pada Gambar 3 dan rata – rata banyaknya titik yang berada di atas *BPA* ditunjukkan pada Tabel 2 yang menunjukkan proporsi banyaknya titik yang berada di atas *BPA* (*out of control*) mendekati $\alpha = 0.0027$ untuk jumlah titik sampel yang cukup besar.



Gambar 3. Hasil Simulasi Penerapan Grafik *Hotelling T^2* dengan 1000 Ukuran Sampel

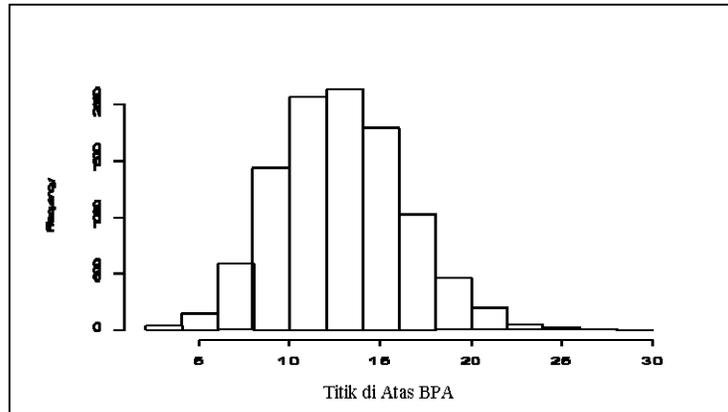
Tabel 2. Proporsi Titik Sampel yang Berada di Atas *BPA*

Banyaknya Sampel (m)	Rata - Rata Banyaknya Titik di Atas <i>BPA</i>	Proporsi Banyaknya Titik di Atas <i>BPA</i>
1000	2.511	$2.511/1000 = 0.002511$
2000	5.243	$5.243/2000 = 0.0026215$
3000	7.923	$7.923/3000 = 0.002641$
5000	13.215	$13.215/5000 = 0.002643$

b. Studi Simulasi Trivariat

Berdasarkan vektor rata-rata dan matriks kovariansi yang diperoleh pada pembahasan sebelumnya serta dipilih $\alpha = 0.0027$ digunakan untuk membangkitkan m titik sampel yang berdistribusi normal trivariat. Titik sampel tersebut dibangkitkan

dengan jumlah m yang berbeda-beda dengan simulasi dilakukan sebanyak 10000 kali pengulangan yang ditunjukkan pada Tabel 3. Untuk lebih jelasnya akan diberikan contoh membangkitkan data dengan jumlah sampel sebanyak 5000. Diperoleh $\alpha = 0.00256355$ dan simulasi menghasilkan perbandingan sampel di atas *BPA* yang dapat ditunjukkan pada histogram Gambar 4 dan sebagai salah satu contoh penerapan grafik *Hotelling T²* hasil dari simulasi ditunjukkan pada Gambar 5.

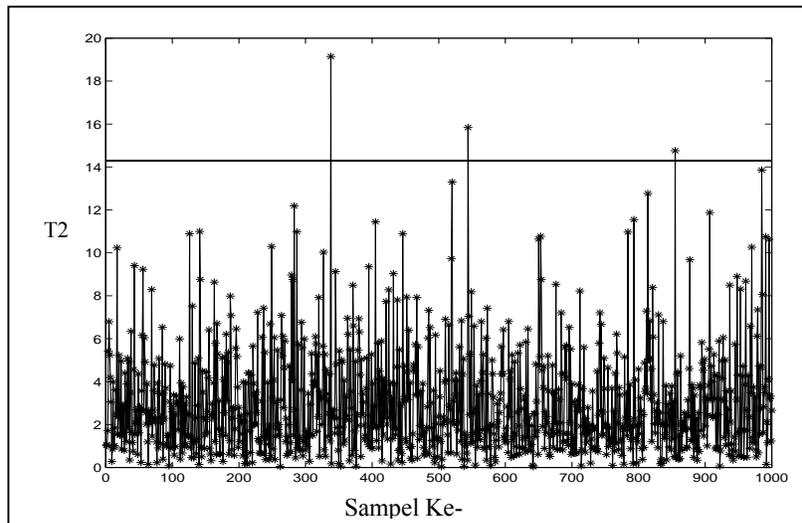


Gambar 4. Histogram Banyaknya Titik Sampel di Atas *BPA* untuk Simulasi 5000 Ukuran Sampel dengan Pengulangan 10000 kali

Secara lengkap hasil simulasi dengan jumlah sampel yang berbeda – beda dapat ditunjukkan pada Tabel 3. Terlihat dari Tabel 3 tersebut menunjukkan bahwa jika ukuran sampel yang disimulasikan bertambah maka proporsi banyaknya titik di atas *BPA* semakin mendekati $\alpha = 0.0027$.

Tabel 3. Proporsi Titik Sampel yang Berada di Atas *BPA*

Banyaknya Sampel (m)	Rata - Rata Banyaknya Titik di Atas <i>BPA</i>	Proporsi Banyaknya Titik di Atas <i>BPA</i>
1000	2.42483	0.00242483
2000	5.1271	0.00256355
5000	7.94304	0.00264768
10000	26.8245	0.00268245



Gambar 5. Hasil Simulasi Penerapan Grafik *Hotelling T²* dengan 1000 Ukuran Sampel

3.4 Studi Simulasi Perhitungan Indeks Kemampuan Proses

Dalam studi simulasi ini proses perhitungan tidak jauh berbeda dengan perhitungan indeks kemampuan proses pada pembahasan sebelumnya. Perhitungan diawali dengan penghilangan sampel data yang berada di atas *BPA*, kemudian data dibangkitkan berdasarkan distribusi normal sebanyak *m* titik sampel dengan pengulangan dilakukan sebanyak 1000 kali, mean dan kovariansi berasal dari data dengan sampel yang berada di atas *BPA* telah dihilangkan. Hasil lebih lengkap untuk simulasi perhitungan indeks kemampuan proses bivariat dan trivariat ditunjukkan pada Tabel 4. Berdasarkan pengamatan Tabel 4, diperoleh rata-rata perhitungan indeks kemampuan proses dari data yang dibangkitkan diperoleh nilai indeks lebih dari satu, hal ini menunjukkan bahwa data yang dibangkitkan menghasilkan nilai yang tidak jauh berbeda dari data semula.

Tabel 4. Hasil Perhitungan Indeks Kemampuan Proses Berdasarkan Simulasi

Banyaknya Titik Sampel (<i>m</i>)	Pengamatan pada Variabel	
	x_1 dan x_2	x_1, x_2 dan x_3
1000	2.420185	3.859933
2000	2.569077	3.833557
3000	2.409063	3.776725
5000	2.463358	3.805475

4. Simpulan dan Saran

Hasil penerapan grafik *Hotelling T²* pada pengamatan trivariat diperoleh 8 titik di atas *BPA*, namun proses masih dapat dikatakan baik karena perhitungan nilai indeks kemampuan proses menghasilkan nilai lebih dari 1. Hasil simulasi pada penerapan grafik *Hotelling T²*, diperoleh nilai prosentase titik di atas *BPA* mendekati $\alpha = 0.0027$ untuk titik sampel yang cukup besar dan perhitungan indeks kemampuan proses menghasilkan nilai lebih dari 1.

5. Daftar Pustaka

Montgomery, D.C. 1990. *Pengantar Pengendalian Kualitas Statistik*. Alih Bahasa:

Zanzawi Soejoeti. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada, hal. : 3 120.

-----, 2001. *Introduction to Statistical Quality Control 4th Edition*. John Wiley & Sons, Inc: USA, page: 515-516.

Pan, Jeh-Nan dan Lee, Chun Yi. 2009. New Capability Indices for Evaluating the

Performance of Multivariate Manufacturing Process. *Journal of Quality and Reability Engineering Internasional*. Vol. 26 : 3 –15.

Puspitoningrum, F., Setiawan, A., dan Parhusip, H.A. 2011. Penerapan Grafik *Hotelling T²* Bivariat pada Karakteristik Kualitas Parfum Remaja dari Perusahaan “X”. *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika. FKIP, Universitas Sebelas Maret*. tanggal 26 November 2011.

Young, Timothy. 1999. Multivariate Control Chart of MDF and OSB Vertical Density Profile Attributes. *Forest Product Journal*. Vol 49: 79-86

Zahid, Abu. Arifa Sultana. 2008. Assesment and Comparison Of Multivariate Process Capability Indices in Ceramic Industry. *Journal of Mechanical Engineering* Vol. ME39: 18 – 25