 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

A – 16

Modul Faktor Dari Modul $\oplus$ −Supplemented

Puguh Wahyu Prasetyo
S2 Matematika FMIPA UGM, Yogyakarta
Email : puguhwp@gmail.com

Ari Suparwanto
Jurusan Matematika FMIPA UGM, Yogyakarta
Email : ari_suparwanto@ugm.ac.id

ABSTRAK

Diberikan M suatu modul atas ring asosiatif dengan elemen kesatuan R. Dalam Wisbauer $M_1 \leq M$ dikatakan *small* di M (dinotasikan dengan $M_1 \ll M$) apabila untuk setiap M_1 submodul sejati dari M maka $M_1 + M_2 \neq M$. Selanjutnya apabila setiap submodul sejati dari M *small* di M, maka M disebut sebagai modul *hollow*. Disisi lain apabila diberikan $M_3, M_4 \leq M$. Submodul M_4 disebut *supplement* dari M_3 apabila M_4 merupakan submodul yang memenuhi $M_3 + M_4 = M$ dan $M_3 \cap M_4 \ll M_4$ Kemudian dalam Idelhadj dan Tribak, modul M disebut modul $\oplus$–*supplemented* jika setiap submodul sejati dari M mempunyai *supplement* yang merupakan *direct summand* dari M. Dalam artikel ini akan diberikan contoh dimana modul faktor dari modul $\oplus$–*supplemented* secara umum belum tentu merupakan modul $\oplus$–*supplemented.*

Kata Kunci : *supplemented module*, $\oplus$–*supplemented module.*

I. Pendahuluan

Pada paper ini semua ring merupakan ring asosiatif dengan elemen kesatuan dan semua modul merupakan modul kiri. Misalkan M merupakan modul atas ring R. Kemudian $M_1, M_2 \leq M$. Submodul M_2 disebut *supplement* dari submodul M_1 jika M_2 merupakan submodul yang memenuhi $M_1 + M_2 = M$ dan $M_1 \cap M_2 \ll M_2$. Apabila setiap modul mempunyai *supplement* di M maka M disebut dengan modul *supplemented*. Sedangkan apabila setiap submodul dari M mempunyai *supplement* yang merupakan *direct summand* dari M, maka M disebut modul $\oplus$–*supplemented.* Dalam artikel ini akan dibahas materi-materi terkait dengan jawaban dari pertanyaan apakah setiap modul faktor dari modul $\oplus$–*supplemented* juga merupakan modul $\oplus$–*supplemented.* Untuk menjawab pertanyaan tersebut akan dibentuk contoh modul $\oplus$–*supplemented* yang modul faktor dari modul tersebut bukan modul $\oplus$–*supplemented.*

II. Pembahasan

2.1. Modul

Definisi 2.1.1

Misalkan R suatu ring dengan identitas dan M suatu grup abelian dengan operasi penjumlahan.

M dikatakan sebagai modul kiri atas R jika dan hanya jika pemetaan :

$$\cdot : R \text{ x } M \rightarrow M$$

memenuhi

1. $a(m+n) = am + an.$
2. $(a+b)n = an + bn.$
3. $(ab)m = a(bm).$
4. $1m = m.$

Contoh 2.1.2

Z merupakan modul atas dirinya sendiri.

Teorema 2.1.3

Diketahui M suatu modul atas ring R. Jika S_1, S_2 merupakan submodul M, maka $S_1 \cap S_2$ submodul M.

Bukti

Ambil sebarang $a, b \in S_1 \cap S_2$, artinya $a, b \in S_1$ dan $a, b \in S_2$.

Perhatikan $a, b \in S_1$, karena S_1 merupakan submodul M akibatnya $a - b \in S_1$.

Perhatikan $a, b \in S_2$, karena S_2 merupakan submodul M akibatnya $a - b \in S_2$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $a - b \in S_1 \cap S_2$.

Ambil sebarang $r \in R$, dan sebarang $a \in S_1 \cap S_2$.

Perhatikan $a \in S_1 \cap S_2$ artinya $a \in S_1$ dan $a \in S_2$.

Karena S_1, S_2 merupakan submodul M maka $ra \in S_1$ dan $ra \in S_2$, akibatnya $a \in S_1 \cap S_2$.

Dari penjabaran diatas maka dapat disimpulkan bahwa Jika S_1, S_2 merupakan submodul M, maka $S_1 \cap S_2$ submodul M.

Pada penjelasan diatas jelas bahwa irisan dari suatu submodul juga merupakan submodul. Berikut akan dijelaskan tentang jumlahan dari suatu submodul juga merupakan submodul.

Teorema 2.1.4

Diketahui M suatu modul atas ring R. Jika S_1, S_2 merupakan submodul M, maka $S_1 + S_2$ submodul M.

Bukti

Ambil sebarang $a, b \in S_1 + S_2$, artinya $a \in S_1 + S_2$ dan $b \in S_1 + S_2$.

Perhatikan $a \in S_1 + S_2$, hal ini berarti a dapat direpresentasikan sebagai $a = u_1 + u_2$ dengan $u_1 \in S_1$ dan $u_2 \in S_2$.

Perhatikan $b \in S_1 + S_2$, hal ini berarti b dapat direpresentasikan sebagai $b = v_1 + v_2$ dengan $v_1 \in S_1$ dan $v_2 \in S_2$.

Sehingga diperoleh :

$$a - b = (u_1 + u_2) - (v_1 + v_2) = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2)$$

Perhatikan S_1 submodul M, $u_1, v_1 \in S_1$ maka $u_1 - v_1 \in S_1$.

Perhatikan S_2 submodul M, $u_2, v_2 \in S_2$ maka $u_2 - v_2 \in S_2$.

Dengan demikian $(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) \in S_1 + S_2$ akibatnya $a - b \in S_1 + S_2$.

Ambil sebarang $r \in R$ dan ambil sebarang $a \in S_1 + S_2$.

Perhatikan $a \in S_1 + S_2$, hal ini berarti a dapat direpresentasikan sebagai $a = u_1 + u_2$ dengan $u_1 \in S_1$ dan $u_2 \in S_2$, akibatnya

$$ra = r(u_1 + u_2\,) = ru_1 + ru_2$$

Perhatikan S_1 submodul M, $u_1 \in S_1$ maka $ru_1 \in S_1$.

Perhatikan S_2 submodul M, $u_2 \in S_2$ maka $rv_2 \in S_2$.

Dengan demikian $ru_1 + ru_2 \in S_1 + S_2$, jadi dapat disimpulkan bahwa$ra \in S_1 + S_2$

Dari penjabaran diatas dapat disimpulkan bahwa $S_1 + S_2$ submodul *M*.

Dari sebarang submodul dari suatu modul *M* atas *R*, dapat didefinisikan dua sifat dari submodul tersebut, yaitu submodul maksimal dan submodul minimal, berikut definisinya.

Definisi 2.1.5

Diberikan *M* suatu modul atas ring *R*, suatu submodul S dikatakan submodul maksimal jika dan hanya jika $\forall S_1 \leq M$ (dibaca S_1 submodul *M*) $\Rightarrow S_1 \subseteq S$.

Definisi 2.1.6

Diberikan *M* suatu modul atas ring *R*, suatu submodul S dikatakan submodul minimal jika dan hanya jika $\forall S_1 \leq M$ (dibaca S_1 submodul *M*) $\Rightarrow S \subseteq S_1$.

Apabila diperhatikan *M* suatu modul atas ring *R*, maka *M* dapat dipandang sebagai grup abelian atas operasi penjumlahan. Sedangkan pada struktur grup dikenal adanya subgrup normal. Sehingga dapat dibentuk grup faktor $M/_S$ dan hal ini mendasari

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

munculnya modul faktor, karena grup faktor $M/_S$ merupakan grup abelian. Berikut akan dibahas tentang modul faktor.

Teorema 2.1.7

Diketahui *M* suatu modul atas *R*, jika *S* submodul *M* maka dapat dibentuk $M/_S$ yang merupakan modul atas *R.*

Bukti

Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian sebagai berikut.

$$\forall \bar{m}, \bar{n} \in M/_S, \bar{m} + \bar{n} = m + S + n + S = m + n + S = \overline{m+n} + S$$

$$\forall r \in R, \forall \bar{m} \in M/_S, r\bar{m} = \overline{rm}$$

Dengan operasi penjumlahan dan perkalian diatas akan ditunjukkan bahwa $M/_S$ merupakan modul atas *R*.

1. Ambil sebarang $r_1, r_2 \in R$ dan sebarang $\bar{m} \in M/_S$, maka berlaku :
$$(r_1 + r_2)\bar{m} = r_1\bar{m} + r_2\bar{m} = \overline{r_1 m} + \overline{r_2 m}$$
2. Ambil sebarang $r \in R$ dan sebarang $\bar{m}, \bar{n} \in M/_S$, maka berlaku :
$$r(\bar{m} + \bar{n}) = r\bar{m} + r\bar{n} = \overline{rm} + \overline{rn}$$
3. Ambil sebarang $r_1, r_2 \in R$ dan sebarang $\bar{m} \in M/_S$, maka berlaku :
$$(r_1 r_2)\bar{m} = \overline{r_1 r_2 m} = \overline{r_1(r_2 m)} = r_1(\overline{r_2 m}) = r_1(r_2\bar{m})$$
4. Ambil sebarang $\bar{m} \in M/_S$, maka $1.\bar{m} = \overline{1.m} = \bar{m}$.

Dari penjabaran diatas dapat disimpulkan bahwa $M/_S$ merupakan modul atas *R*.

Definisi 2.1.8

Diberikan *M* merupakan modul atas ring *R*. $N_1, N_2 \leq M$ merupakan *dirrect summand* dari *M* yang dinotasikan dengan $M = N_1 \oplus N_2$ jika dan hanya jika $M = N_1 + N_2$ dan $N_1 \cap N_2 = \{0\}$.

2.2 Modul ⊕–Supplemented

Definisi 2.2.1

Apabila diberikan sebarang modul M atas ring *R*. Dan $M_1 \leq M$. Submodul M_1 disebut *small* di M. Jika untuk sebarang $M_2 \leq M$ dengan sifat $M_1 + M_2 = M$, maka $M_2 = M$ dan dinotasikan dengan $M_1 \ll M$.

Contoh 2.2.2

Diberikan grup abelian $(Z_6, +)$ dengan + merupakan operasi penjumlahan modulo 6. Apabila diperhatikan Z_6 merupakan modul atas ring bilangan bulat Z. Dari modul Z_6 dapat diperoleh submodul-submodul dari Z_6 adalah {{0}, {0, 2, 4}}. Dari definisi 3.1 dinyatakan bahwa Submodul $M_1 \ll M$. Jika untuk sebarang $M_2 \leq M$ dengan sifat $M_1 + M_2 = M$, maka $M_2 = M$ atau dengan kata lain jika untuk setiap $M_2 < M$ sehingga $M_2 \neq M$ maka $M_1 + M_2 \neq M$. Submodul $\{0\} \ll Z_6$. Sebab $\{0, 2, 4\} \neq Z_6$ maka {0} + {0, 2, 4}$\neq M$. Hal ini berlaku juga untuk $\{0, 2, 4\} \ll Z_6$.

Dari penjabaran diatas dijelaskan bahwa {0} dan {0, 2, 4} *small* di Z_6. di Akan tetapi tidak semua submodul dari suatu modul *small* di modul tersebut. Berikut akan dijelaskan definisi *hollow*.

Definisi 2.2.3

Sebarang modul *M* dikatakan *hollow* jika dan hanya jika $\forall M_1 \leq M \Rightarrow M_1 \ll M$.

Contoh 2.2.4

Diberikan $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ dengan operasi penjumlahan merupakan modul atas *Z*. Dan submodul-submodul dari Z_4 adalah {0} dan {0, 2}. Diperhatikan {0} dan {0, 2} *small* di Z_4. Karena semua submodul dari Z_4 *small* di Z_4, maka dapat dikatakan Z_4 modul *hollow*.

Setelah dibahas tentang *small* dan *hollow*, berikut akan dijelaskan tentang suatu *supplement* dari suatu submodul.

Definisi 2.2.5

Diberikan sebarang modul M dan $M_1, M_2 \leq M$. Submodul M_2 disebut *supplement* dari M_1 dalam M apabila M_2 merupakan submodul minimal yang memenuhi $M_1 + M_2 = M$. Dengan kata lain submodul M_2 disebut *supplement* dari M_1 jika dan hanya jika $M_1 + M_2 = M$ dan $M_1 \cap M_2 \ll M_2$. Selanjutnya apabila setiap submodul dari M mempunyai *supplement* maka modul M disebut modul *supplemented* sedangkan submodul M_2 disebut *supplement submodule*.

Pada definisi 3.3 dideskripsikan definisi *supplement* suatu submodul, selanjutnya akan dijelaskan pada suatu kasus ketika setiap submodul mempunyai supplement.

Definisi 2.2.6.

Diberikan sebarang modul M, apabila untuk setiap $M_1 \leq M$ terdapat M_2 yang merupakan *supplement* dari M_1 di M maka M disebut modul *supplemented*. Kemudian apabila M_1 dan M_2 merupakan *direct summand* dari M, maka M disebut dengan $\oplus$–*supplemented module* (modul $\oplus$–*supplemented*).

Proposisi 2.2.7

Diberikan sebarang modul M, pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :

i. M modul $\oplus$–*supplemented*
ii. Untuk setiap $M_1 \leq M$, terdapat *direct summand* M_2 dari M sedemikian hingga berlaku $M_1 + M_2 = M$ dan $M_1 \cap M_2 \ll M_2$.

Bukti

i $\Rightarrow$ ii

Diketahui M modul $\oplus$–*supplemented.* Perhatikan definisi M modul $\oplus$–*supplemented* yaitu untuk setiap submodul dari M mempunyai *supplement* di M yang merupakan *direct summand* dari M. Kemudian dari definisi ini dapat diambil sebarang $M_1 \leq M$, terdapat $M_2 \leq M$ sedemikian hingga M_2 merupakan *supplement* dari M_1. Selanjutnya perhatikan M_2 merupakan *supplement* dari M_1 atau hal ini berarti $M_1 + M_2 = M$ dan $M_1 \cap M_2 \ll M_2$. Jadi terbukti bahwa untuk setiap $M_1 \leq M$, terdapat *direct summand* M_2 dari M sedemikian hingga berlaku $M_1 + M_2 = M$ dan $M_1 \cap M_2 \ll M_2$.

ii $\Rightarrow$ i

Diketahui M suatu modul dengan sifat untuk setiap $M_1 \leq M$, terdapat *direct summand* M_2 dari M sedemikian hingga berlaku $M_1 + M_2 = M$ dan $M_1 \cap M_2 \ll M_2$. Apabila diperhatikan maka dari pernyataan diatas dapat disimpulkan bahwa M_2 merupakan *supplement* dari M_1 yang merupakan *direct summand* dari M. Hal ini berarti untuk setiap submodul $M_1 \leq M$, terdapat $M_2 \leq M$ *supplement* dari M_1 yang merupakan *direct summand* dari M, maka dapat disimpulkan bahwa M merupakan modul $\oplus$–*supplemented.*

Dari pembuktian proposisi 3.1.5 dapat disimpulkan bahwa M modul $\oplus$–*supplemented* jika dan hanya jika untuk setiap $M_1 \leq M$, terdapat *direct summand* M_2 dari M sedemikian hingga berlaku $M_1 + M_2 = M$ dan $M_1 \cap M_2 \ll M_2$.

2.3 Dual Goldie Dimension

Dual Goldie Dimension dari suatu modul M atas ring R dinotasikan dengan *corank* $({}_R M)$.

Definisi 2.3.1

Kalathoor Varadarajan mendefinisikan *corank* $({}_R M)$ sebagai berikut ini :

(i). Jika $M = 0$, maka *corank* $({}_R M) = 0$

(ii). Jika $M \neq 0$ dan k sebuah bilangan bulat yang lebih besar atau sama dengan satu. Jika terdapat suatu epimorfisma $f: M \to \prod_{i=1}^{k} N_i$, dengan $N_i \neq 0$, maka *corank* $({}_R M) \geq k$. Jika *corank* $({}_R M) \geq k$ dan *corank* $({}_R M) \ngeq k+1$ maka *corank* $({}_R M) = k$. Jika *corank* $({}_R M) \geq k$ untuk setiap $k \geq 1$, maka *corank* $({}_R M) = \infty$.

Sehingga dari definisi diatas dapat disimpulkan bahwa *corank* $({}_R M) < \infty$, maka terdapat suatu epimorfisma $f: M \to \prod_{i=1}^{k} H_i$, dengan H_i *hollow* dan $\ker(f)$ *small* di M.

Contoh 2.3.2

corank$(Z_2) = 1$

Dari definisi *Dual Goldie Dimension* diatas berikut akan diberikan contoh suatu modul ⊕–*supplemented* yang modul faktornya bukan modul ⊕–*supplemented* dengan proses pembuktiannya menggunakan *Dual Goldie Dimension*.

Lemma 2.3.3

Diberikan R sebuah ring lokal komutatif (*commutative local ring*) yang bukan merupakan ring valuasi (*valuation ring*). Misalkan F suatu modul bebas dengan generator x_1, x_2 dan x_3. Misalkan K sebuah submodul yang dibangun oleh $ax_1 - bx_2$ dan misalkan $M = {}^{F}\!/_{K}$ untuk suatu modul M, maka

i. $M = (R\overline{x_1} + R\overline{x_2}) \oplus R\overline{x_3}$.

ii. *Corank* $(M) = 3$

Bukti

i. Diberikan R sebuah ring lokal komutatif (*commutative local ring*) yang bukan merupakan ring valuasi (*valuation ring*). Misalkan $a, b \in R$ yang salah satunya tidak membagi yang lain. Diasumsikan $(a) \cap (b) = 0$ dan $aI_m = bI_m = 0$ dengan I_m merupakan ideal maksimal dari R. Misalkan F suatu modul bebas dengan generator x_1, x_2 dan x_3. Misalkan K sebuah submodul yang dibangun oleh $ax_1 - bx_2$ dan misalkan $M = {}^{F}/_{K}$. Perhatikan F suatu modul bebas dengan generator x_1, x_2 dan x_3 atau dengan kata lain $F = \{\sum_{i=1}^{3} r_i x_i | r_i \in R, i = 1,2,3\}$ dengan $Rx_i \cap Rx_j = 0$ untuk $i, j = 1,2,3$ dan $i \neq j$. Dengan demikian diperoleh $F = Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3$ dan $K = R(ax_1 - bx_2)$, sehingga

$$M = {}^{Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3}/_{R(ax_1 - bx_2)}$$

Perhatikan

$${}^{Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3}/_{R(ax_1 - bx_2)} = \{pR(ax_1 - bx_2) | \forall p \in Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3\}$$

Perhatikan $p \in Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3$ hal ini berarti p dapat direpresentasikan sebagai $p = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$ dengan $p_ix_i \in Rx_i\ \forall i = 1,2,3.$, sehingga diperoleh

$$pR(ax_1 - bx_2) = (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)R(ax_1 - bx_2)$$
$$= p_1x_1R(ax_1 - bx_2) + p_2x_2\, R(ax_1 - bx_2) + p_3x_3R(ax_1 - bx_2)$$

Katakan $p_1x_1R(ax_1 - bx_2) = R\overline{x_1}$, $p_2x_2\, R(ax_1 - bx_2) = R\overline{x_2}$, dan $p_3x_3R(ax_1 - bx_2) = R\overline{x_3}$. Karena $R(ax_1 - bx_2)$ merupakan ideal yang dibangun oleh $(ax_1 - bx_2)$, hal ini berarti $R\overline{x_1} \cap R\overline{x_2} \neq 0$ dengan demikian diperoleh $pR(ax_1 - bx_2) = R\overline{x_1} + R\overline{x_2} + R\overline{x_3}$, karena $R\overline{x_3} \cap R\overline{x_k} = 0$ untuk $k = 1,2$ maka $pR(ax_1 - bx_2) = (R\overline{x_1} + R\overline{x_2}) \oplus R\overline{x_3}\ \ \forall p \in Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $M = (R\overline{x_1} + R\overline{x_2}) \oplus R\overline{x_3}$.

ii. Perhatikan pada pembuktian lemma 3.2.6 (i) telah dibuktikan bahwa $M = (R\overline{x_1} + R\overline{x_2}) \oplus R\overline{x_3}$. Akan dibuktikan bahwa *Corank* $(M) = 3$.

Dibentuk pemetaan

$$f: M \rightarrow \prod_{i=1}^{3} P_i,\ \ P_i = R\bar{x}_i, \forall i = 1,2,3$$

Yang didefinisikan oleh :

$f(m) = (m_1, m_2, m_3), \forall m \in M$. Dengan $m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \alpha_2 m_3$, untuk suatu $\alpha_i m_i \in R\bar{x}_i, \forall i = 1,2,3$. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan f suatu homomorfisma.

Diambil sebarang $m, n \in M$ dan $r \in R$ dengan $f(m) = (m_1, m_2, m_3)$ dan $f(n) = (n_1, n_2, n_3)$ untuk suatu $m_i, n_i \in \bar{x}_i, \forall i = 1,2,3$. Sedemikian hingga berlaku

$f(m+n) = (m_1+n_1, m_2+n_2, m_3+n_3)$

$= (m_1, m_2, m_3) + (n_1, n_2, n_3)$

$f(m+n) = f(m) + f(n)$

$f(rm) = (rm_1, rm_2, rm_3) = r(m_1, m_2, m_3)$

Jadi dapat disimpulkan bahwa pemetaan f suatu homomorfisma.

Kemudian untuk menunjukkan bahwa pemetaan f suatu epimorfisma, harus ditunjukkan bahwa pemetaan f bersifat surjektif. Pembuktiannya sebagai berikut.

Diambil sebarang $\bar{m} \in \prod_{i=1}^{3} R\bar{x}_i$ dengan $\bar{m} = (m_1, m_2, m_3)$. Maka dapat dibentuk $\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \alpha_2 m_3 \in M$, katakan $\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \alpha_2 m_3 = m$, untuk suatu $m \in M$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat $m \in M$ sedemikian hingga berlaku $f(m) = (m_1, m_2, m_3)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa pemetaan f bersifat surjektif. Karena pemetaan f suatu homomorfisma dan bersifat surjektif, maka dapat disimpulkan bahwa pemetaan f merupakan suatu epimorfisma. Oleh sebab itu *Corank* $(M) = 3$.

Contoh 2.3.4

Diberikan R sebuah ring lokal komutatif (*commutative local ring*) yang bukan merupakan ring valuasi (*valuation ring*). Misalkan $a, b \in R$ yang salah satunya tidak membagi yang lain. Diasumsikan $(a) \cap (b) = 0$ dan $aI_m = bI_m = 0$ dengan I_m merupakan ideal maksimal dari R. Misalkan F suatu modul bebas dengan generator x_1, x_2 dan x_3. Misalkan K sebuah submodul yang dibangun oleh $ax_1 - bx_2$ dan misalkan $M = {}^{F}/_{K}$. Perhatikan F suatu modul bebas dengan generator x_1, x_2 dan x_3 atau dengan kata lain $F = \{\sum_{i=1}^{3} r_i x_i | \, r_i \in R, i = 1,2,3\}$ dengan $Rx_i \cap Rx_j = 0$ untuk $i, j = 1,2,3$ dan $i \neq j$. Dengan demikian diperoleh $F = Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3$ dan $K = R(ax_1 - bx_2)$, sehingga

$$M = {}^{Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3}/_{R(ax_1 - bx_2)}$$

Perhatikan

$$ {}^{Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3}/_{R(ax_1 - bx_2)} = \{pR(ax_1 - bx_2) | \forall p \in Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3\}$$

Perhatikan $p \in Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3$ hal ini berarti p dapat direpresentasikan sebagai $p = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3$ dengan $p_i x_i \in Rx_i \; \forall i = 1,2,3.$, sehingga diperoleh

$pR(ax_1 - bx_2) = (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)R(ax_1 - bx_2)$

$= p_1x_1R(ax_1 - bx_2) + p_2x_2\, R(ax_1 - bx_2) + p_3x_3R(ax_1 - bx_2)$

Katakan $p_1x_1R(ax_1 - bx_2) = R\overline{x_1}$, $p_2x_2\, R(ax_1 - bx_2) = R\overline{x_2}$, dan $p_3x_3R(ax_1 - bx_2) = R\overline{x_3}$. Karena $R(ax_1 - bx_2)$ merupakan ideal yang dibangun oleh $(ax_1 - bx_2)$, hal ini berarti $R\overline{x_1} \cap R\overline{x_2} \neq 0$ dengan demikian diperoleh $pR(ax_1 - bx_2) = R\overline{x_1} + R\overline{x_2} + R\overline{x_3}$, karena $R\overline{x_3} \cap R\overline{x_k} = 0$ untuk $k = 1{,}2$ maka $pR(ax_1 - bx_2) = (R\overline{x_1} + R\overline{x_2}) \oplus R\overline{x_3}$ $\forall p \in Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $M = (R\overline{x_1} + R\overline{x_2}) \oplus R\overline{x_3}$. Misalkan M merupakan modul $\oplus$–*supplemented*, maka terdapat submodul-submodul M_1 dan M_2 dari M sedemikian hingga $M = M_1 \oplus M_2$, misalkan $M_2 = R\overline{x_1}$, maka $R\overline{x_1} + M_2 = M$, dan $R\overline{x_1} \cap M_2 \ll M_2$. Perhatikan $R\overline{x_1} + R\overline{x_2}$ merupakan modul *indecomposable* yang tidak dapat dibangun kurang dari dua elemen. Oleh sebab itu *corank* $(R\overline{x_1} + R\overline{x_2}) = 2$ akibatnya *corank* $(M) = 3$. Karena $M_1 \cong {}^{M}/_{M_2}$ dan ${}^{M}/_{M_2} \cong {}^{R\overline{x_1}}/_{(M_2 \cap R\overline{x_1})}$, sehingga diperoleh M_2 *direct summand*

lokal dari M dan karena *corank* $(N) = 2$. Karena R merupakan ring lokal komutatif, maka End$_R(R\overline{x_3})$ merupakan ring lokal. Karena $R\overline{x_3}$ mempunyai sifat *exchange*, terdapat submodul-submodul $M_2{}' \leq M_2$ dan $M_1{}' \leq M_1$ sedemikian hingga $M = R\overline{x_3} \oplus M_2{}' \oplus M_1{}'$. Oleh sebab itu ${}^{M}/_{R\overline{x_3}} \cong R\overline{x_1} + R\overline{x_2} \cong M_2{}' \oplus M_1{}'$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $M_2{}' \oplus M_1{}'$ *indecomposable*. Oleh sebab itu $M_1' = 0$ atau $M_2' = 0$. Akan tetapi *corank* $(M) = 3$. Dan *corank* $(N) = 2$, jadi $M = R\overline{x_3} \oplus M_1$ dan $M_1 \cong R\overline{x_1} + R\overline{x_2}$ *indecomposable*. Karena $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in M$, terdapat $\propto, \beta \in R$ dan $\overline{y_1}, \overline{y_2} \in M_1$ sedemikian hingga $\overline{x_1} = \propto \overline{x_3} + \overline{y_1}$ dan $\overline{x_2} = \beta\overline{x_3} + \overline{y_2}$. Oleh sebab itu $\overline{x_1} - \propto \overline{x_3} \in M_1$ dan $\overline{x_2} - \beta\overline{x_3} \in M_1$. Akan tetapi $M = R\overline{x_3} \oplus [R(\overline{x_1} - \propto \overline{x_3}) + R(\overline{x_2} - \beta\overline{x_3})]$. Maka $M_1 = R(\overline{x_1} - \propto \overline{x_3}) + R(\overline{x_2} - \beta\overline{x_3})$. Sekarang $M = R\overline{x_1} + N$ dan $\overline{x_3} \in M$, jadi terdapat $\alpha' \in R$ sedemikian hingga $\overline{x_3} - \alpha'\overline{x_1} \in M_1$. Catat bahwa $\alpha'\overline{x_1} - \alpha'\alpha\overline{x_3} \in M_1$ dan $(1 - \alpha'\alpha)\overline{x_3} \in M_1 \cap R\overline{x_3}$. Dengan demikian $(1 - \alpha'\alpha)\overline{x_3} = 0$, yaitu $(1 - \alpha'\alpha)\overline{x_3} \in R(ax_1 - bx_2)$. Oleh sebab itu $1 - \alpha'\alpha = 0$. Jadi $\alpha'\alpha = 1$ atau dengan kata lain α *invertible* dan $\alpha^{-1} = \alpha'$. Catat bahwa

$$\alpha(\overline{x_1} - \propto \overline{x_3}) - b(\overline{x_2} - \beta\overline{x_3}) = (b\beta - a\alpha)\overline{x_3}$$

Dengan demikian $\alpha(\overline{x_1} - \propto \overline{x_3}) - b(\overline{x_2} - \beta\overline{x_3}) \neq 0$. Sebaliknya $(b\beta - a\alpha)\overline{x_3} \in R(ax_1 - bx_2)$, yang mengakibatkan $b\beta = a\alpha$ selanjutnya diperoleh $b\beta\alpha' = a$. Hal ini kontradiksi. Karena $(b\beta - a\alpha)M_1 \cap R\overline{x_3}$, maka $M_1 \cap R\overline{x_3} \neq 0$, hal ini juga kontradiksi. Jadi dapat disimpulkan bahwa M bukan merupakan modul ⊕–*supplemented*. Akan tetapi $Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3$ merupakan modul ⊕–*supplemented.*

Setelah diberikan contoh diatas maka dapat disimpulkan bahwa modul faktor dari modul ⊕–*supplemented* secara umum belum tentu merupakan modul ⊕–*supplemented*.

III. Penutup

Kesimpulan

Dari pembahasan dapat disimpulkan bahwa Setelah diberikan contoh diatas maka dapat disimpulkan bahwa modul faktor dari modul ⊕–*supplemented* secara umum belum tentu merupakan modul ⊕–*supplemented*.

Saran

Perlu dibahas lebih dalam tentang dual goldie dimension, dan sifat-sifat dari modul ⊕–*supplemented.*

Daftar Pustaka

A. Idelhadj and R. Tribak. *On Some Properties of ⊕–supplemented modules*. IJMMS 2003 : 69, 4373-4387 PII. S016117120320346X, Hindawi Publishing Corporation.

________________, *A dual notion of CS-modules generalization*, Algebra and Number Theory (Fez) (M. Boulagouaz and J.-P. Tignol, eds.), LectureNotes in Pure and Appl. Math., vol. 208, Marcel Dekker, New York, 2000, pp. 149–155.

F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 13, Springer-Verlag, New York, 1974.

K. Varadarajan, *Dual Goldie dimension*, Comm. Algebra **7** (1979), no. 6, 565–610.

O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra. Vol. 1*, Graduate Texts in Mathematics, no. 28, Springer-Verlag, New York, 1975.

Wisbauer, R, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Philadelphia, 1991.