 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

A – 10

Diagonalisasi Matriks Atas Ring Komutatif

Joko Harianto[1], Puguh Wahyu Prasetyo[2], Vika Yugi Kurniawan[3], Sri Wahyuni[4]
[1]Mahasiswa S2 Matematika FMIPA UGM, [2]Mahasiswa S2 Matematika FMIPA UGM,
[3]Mahasiswa S2 Matematika FMIPA UGM, [4]Dosen PS S2 Matematika Jurusan Matematika FMIPA UGM

Abstrak

Dalam artikel ini akan dibicarakan proses diagonalisasi matriks atas ring komutatif sebagai perluasan dari matriks atas lapangan yang sudah dikenal pada Aljabar Linear Elementer. Untuk membahas proses diagonalisasi matriks atas ring komutatif diperlukan nilai eigen, vektor eigen, ruang eigen dan spektrum dari matriks atas ring komutatif. Tentu saja, pendefinisiannya tidak berbeda dengan pendefinisian pada matriks atas lapangan yang telah dikenal dalam Aljabar Linear Elementer.

Namun, menurut teori modul bahwa submodul yang dibangun oleh kolom-kolom matriks atas ring belum tentu punya basis. Selain itu, adanya kendala dalam karakterisasi keterdiagonalan suatu matriks atas ring komutatif, yaitu tidak berlakunya aksioma eksistensi invers elemen tak nol, dan kemungkinan adanya elemen pembagi nol. Oleh karena itu, dalam artikel ini akan dipresentasikan lebih lanjut karakterisasi matriks atas suatu ring komutatif dapat didiagonalkan. Salah satu sifat yang akan dipresentasikan adalah suatu matriks bujur sangkar A atas suatu ring komutatif R dapat didiagonalkan atas R jika dan hanya jika gabungan semua ruang eigen untuk setiap nilai eigennya yang bersesuaian memuat basis untuk R^n. Dapat ditunjukkan bahwa nilai eigen yang diambil cukup nilai eigen yang sekaligus menjadi akar-akar polinomial karakteristiknya.

Kata kunci : nilai dan vektor eigen, spektrum, dan diagonalisasi matriks

I. Pendahuluan

Salah satu jenis matriks bujur sangkar yang sering dipelajari dan digunakan dalam berbagai aplikasi adalah matriks diagonal. Matriks diagonal merupakan matriks yang seluruh elemen-elemennya atau entri-entrinya sama dengan nol kecuali pada diagonal utamanya yang tidak semuanya nol. Karena matriks diagonal memiliki sifat-sifat sederhana dalam berbagai operasi perhitungan maka banyak masalah terapan menggunakan matriks diagonal ini. Salah satu contoh penerapannya adalah dalam menyelesaikan sistem persamaan differensial. Matriks yang sering dikenal terutama pada aljabar linear elementer merupakan matriks yang didefinisikan atas suatu lapangan. Dengan kata lain, matriks yang semua entrinya mempunyai invers terhadap operasi perkalian, kecuali nol. Sehingga dari sini dapat dicari matriks diagonalnya. Sebagai contoh, misalnya dalam persoalan penyelesaian solusi persamaan differensial. Pandang sistem persamaan differensial berikut :

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= y_1 + y_2 \\ y'_2 &= 4y_1 - 2y_2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Matriks koefisien dari sistem (1) adalah $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$. Dengan perhitungan matriks diperoleh matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Oleh karena itu dengan substitusi $Y = PU$ dan $Y' = PU'$ menghasilkan "sistem diagonal" yang baru sebagai berikut.

$U' = DU = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} U$ atau $\left.\begin{matrix} u'_1 = u_1 \\ u'_2 = -3u_1 \end{matrix}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(2)$

Diketahui bahwa $y' = ay$ mempunyai fungsi solusi umum $y = ce^{ax}$, dengan c sebarang konstanta. Dari sini diperoleh solusi sistem (2) adalah

$$u_1 = c_1 e^{2x}$$

$$u_2 = c_2 e^{-3x}$$

Atau $u = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix}$, sehingga persamaan $Y = PU$ menghasilkan solusi Y sebagai berikut :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\ c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{bmatrix}$$

Akan tetapi bagaimana apabila struktur dari lapangan tersebut diperlemah menjadi ring komutatif, apakah matriks bujur sangkar atas ring komutatif secara umum dapat didiagonalkan atau bagaimanakah karakterisasi matriks atas suatu ring komutatif dapat didiagonalkan. Dalam artikel ini akan dijelaskan karakterisasi matriks atas suatu ring komutatif yang dapat didiagonalkan.

II. Pembahasan

Definisi 3.1 (Brown, 1993)

Misalkan $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}(\mathrm{R})$, dengan R adalah sebarang ring komutatif yang memiliki elemen satuan.

i. Suatu elemen $\lambda \in \mathrm{R}$, disebut nilai eigen matriks A jika dipenuhi $A\mathrm{v} = \lambda\mathrm{v}$ untuk suatu $\mathrm{v} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ yang tak nol.

ii. $\mathcal{G}(\mathrm{A}) = \{\lambda \in \mathrm{R} | \lambda$ nilai eigen A$\}$ disebut spektrum dari matriks A.

iii. Vektor tak nol $\mathrm{v} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ disebut vektor eigen A jika $A\mathrm{v} = \lambda\mathrm{v}$ untuk suatu $\lambda \in \mathrm{R}$.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

iv. $E(\lambda) = \{v \in R^n | Av = \lambda v\}$ disebut ruang eigen yang bersesuaian dengan suatu nilai eigen $\lambda \in \mathcal{G}(A)$.

v. $\Re(A) = \{\lambda \in R | C_A(\lambda) = 0\}$ disebut himpunan akar-akar $C_A(\lambda)$ di R.

Dengan demikian, jika $A \in M_{n\times n}(R)$ mempunyai nilai eigen λ, maka terdapat vektor tak nol $\mathbf{v} \in R^n$ sedemikian sehingga $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{v}$ tersebut dikatakan sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Menurut definisi 3.1(iv), dapat dilihat bahwa $\mathbf{v} \in E(\lambda)$ sehingga $E(\lambda) \neq \emptyset$. Jelas bahwa, $E(\lambda) = NS[\lambda I_n - A]$, dengan NS menotasikan Null Space (ruang nol/ruang solusi). Selanjutnya, polinomial karakteristik matriks A dinotasikan sebagai $C_A(\lambda)$ dan $Z(R)$ menotasikan himpunan semua elemen pembagi nol (kanan dan kiri) dalam R.

Berikut ditunjukkan beberapa lemma yang akan digunakan untuk membahas karakterisasi dari keterdiagonalan matriks atas suatu ring komutatif.

Lemma 3.2 (Brown, 1993)

λ adalah nilai eigen A $\left(\lambda \in \mathcal{G}(A)\right)$ jika dan hanya jika $C_A(\lambda) \in Z(R)$.

$C_A(\lambda)$ dapat dipandang sebagai fungsi polinom dari R ke R. Nilai $C_A(R)$ pada suatu elemen $Z \in R$, ditulis dengan $C_A(Z)$. Jika λ adalah suatu nilai eigen A, maka menurut lemma 3.2 $C_A(\lambda)$ adalah pembagi nol di R.

Contoh:

Misalkan $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(R)$$

Maka

$Z(R) = \{0, 2\}$

$$\begin{aligned} C_A(\lambda) &= \det(\lambda I_2 - A) \\ &= \det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya, dapat dihitung bahwa:

$C_A(0) = 1 \notin Z(R)$, $C_A(1) = 0 \in Z(R)$, $C_A(2) = 1 \notin Z(R)$, $C_A(3) = 0 \in Z(R)$

Jadi, nilai eigen matriks A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 3$, sehingga $\mathcal{G}(A) = \Re(A) = \{1, 3\}$.

Lemma 3.3 (Brown, 1993)

Misalkan $\lambda \in \mathcal{G}(A)$ dan $Av = \lambda v$ untuk suatu $v \neq 0 \in R^n$. Jika $\{v\}$ bebas linear atas R ,maka $C_A(\lambda) = 0$.

Perlu diperhatikan bahwa kebalikan dari lemma 3.3 belum tentu berlaku. Artinya, walaupun

$C_A(\lambda) = 0$ dengan $\lambda \in \mathcal{G}(A)$ dan $Av = \lambda v$, belum tentu vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigennya bebas linear atas R.

Berikut ini contoh penyangkalnya:

Misalkan $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(R)$$

Maka

$Z(R) = \{0, 2\}$

$$\begin{aligned} C_A(\lambda) &= \det(\lambda I_2 - A) \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{aligned}$$

Ambil $\lambda = 1$, diperoleh $C_A(\lambda) = 0$. Selanjutnya, dapat dihitung bahwa

$$\begin{aligned} E(1) &= NS(I_n - A) \\ &= NS \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa tak ada satupun vektor di $E(1)$ yang bebas linear atas R, karena $2E(1) = 0$.

Berdasarkan definisi 3.1(v), bila R hanya merupakan ring komutatif maka mungkin saja $\Re(A)$ memiliki lebih dari n elemen. Bahkan mungkin saja $\Re(A)$ tidak mempunyai elemen. Pada keadaan tertentu, lemma 3.2 berakibat $\Re(A) \subseteq \mathcal{G}(A)$. Selanjutnya, $\Re(A)$ menjadi himpunan yang perlu diperhatikan untuk menentukan apakah suatu matriks atas ring komuatatif dapat didiagonalkan.

Definisi 3.5 (Brown, 1993)

Misalkan $A \in M_{n\times n}(R)$. Matriks A dapat didiagonalkan atas R jika terdapat matriks invertibel Misalkan P sedemikian sehingga Misalkan $P^{-1}AP$ merupakan matriks diagonal atas R.

Definisi 3.5 sama artinya jika disebutkan matriks A similar dengan suatu matriks diagonal. Jadi, jika dikatakan suatu matriks A similar dengan B, ini berarti terdapat matriks invertibel P sedemikian sehingga $P^{-1}AP = B$.

Teorema 3.6 (Brown, 1993 "Sifat Keterdiagonalan Matriks atas Ring Komutatif")

Misalkan $A \in M_{n\times n}(R)$. Matriks A dapat didiagonalkan jika dan hanya jika $\bigcup_{\lambda\in\Re(A)} E(\lambda)$ memuat suatu basis dari R-modul di R^n.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui $A \in M_{n\times n}(R)$ dapat didiagonalkan. Artinya, terdapat matriks P invertibel sedemikian sehingga $P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in M_{n\times n}(R)$.

Selanjutnya,

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD$$

Misalkan $P = (w_1| \dots |w_n)$, maka

$AP = (Aw_1| \dots |Aw_n)$ dan $PD = (\lambda_1 w_1| \dots |\lambda_n w_n)$

Karena $AP = PD$, maka $Aw_i = \lambda_i w_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Karena P invertibel, maka $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ adalah suatu basis dari R-modul di R^n.

Secara khusus, setiap himpunan $\{w_i\}$ adalah bebas linear $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Menurut lemma 3.3, $C_A(w_i) = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ atau dikatakan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Re(A)$ dan $w_i \in E(\lambda_i), \forall i$. Akibatnya, $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Re(A)} E(\lambda)$.

Jadi, $\bigcup_{\lambda\in\Re(A)} E(\lambda)$ memuat suatu basis dari R-modul di R^n.

($\Leftarrow$) Diketahui $\bigcup_{\lambda\in\Re(A)} E(\lambda)$ memuat suatu basis R-modul di R^n.

Misalkan basis tersebut adalah $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, maka setiap w_i adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_i \in \Re(A)$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Berarti, $Aw_i = \lambda_i w_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Bentuk $P = (w_1| \dots |w_n)$, karena $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ basis R-modul di R^n, maka P invertibel.

Selanjutnya,

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$
\begin{aligned}
AP &= A(w_1|\dots|w_n) \\
&= (Aw_1|\dots|Aw_n) \\
&= (\lambda_1 w_1|\dots|\lambda_n w_n) \\
&= (w_1|\dots|w_n)\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \\
&= PD
\end{aligned}
$$

Karena P^{-1} ada, diperoleh $P^{-1}AP = D$.

Jadi, matriks A dapat didiagonalkan.

Teorema 3.6 mengatakan bahwa untuk menentukan apakah suatu matriks sebarang atas suatu ring komutatif dapat didiagonalkan atau tidak, cukup dengan menyelidiki ruang-ruang eigen matriks tersebut yang bersesuaian dengan semua akar-akar polinomial karakteristiknya. Jika gabungan dari semua ruang eigen ini memuat sejumlah vektor yang bebas linear yang dapat membangun R^n, maka matriks tersebut dapat didiagonalkan.

Contoh:

Misalkan $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ dan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(R)$$

Maka

$Z(R) = \{0, 2, 3, 4\}$

$$
\begin{aligned}
C_A(\lambda) &= \det(\lambda I_2 - A) \\
&= \det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \\
&= \lambda^2 + 3\lambda + 2
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, dapat dihitung bahwa:

$C_A(0) = 2 \in Z(R)$,

$C_A(1) = 0 \in Z(R)$,

$C_A(2) = 0 \in Z(R)$,

$C_A(3) = 2 \in Z(R)$,

$C_A(4) = 0 \in Z(R)$,

$C_A(5) = 0 \in Z(R)$.

Jadi, diperoleh $\mathcal{G}(A) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $\Re(A) = \{1, 2, 4, 5\}$.

Dapat dilihat bahwa meskipun $C_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ adalah polinomial monik berderajat dua, namun memiliki empat akar berbeda di R. Setiap elemen R adalah nilai eigen matriks A. Menururt Lemma 3.3, untuk menentukan apakah matriks A dapat didiagonalkan, cukup diselidiki empat ruang eigen, yaitu $E(1)$, $E(2)$, $E(4)$ dan $E(5)$.

Dengan persamaan karakteristik $(\lambda I_2 - A)v = 0$, maka:

Untuk $\lambda = 1$, diperoleh $E(1) = NS\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\right\}$$

Untuk $\lambda = 2$, diperoleh $E(2) = NS\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}\right\}$$

Untuk $\lambda = 4$, diperoleh $E(4) = NS\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right\}$$

Untuk $\lambda = 5$, diperoleh $E(5) = NS\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

Jika seluruh ruang eigen tersebut digabungkan diperoleh

$$\bigcup_{\lambda \in \Re(A)} E(\lambda)$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

Diperhatikan bahwa salah satu basis dari R-modul di R^2 adalah

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Re(A)} E(\lambda)$$

Jadi menurut Teorema 3.6, matriks A dapat didiagonalkan atas R.

Jika dibentuk $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka $AP = \left[A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Oleh karena itu, $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1,2)$.

Selanjutnya, basis dari R-modul di R^2 lainnya adalah

$$B_2 = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Re(A)} E(\lambda)$$

Jika dibentuk $Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka $AQ = \left[A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Oleh karena itu, $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(4,5)$.

Jadi, A similar dengan sedikitnya dua matriks diagonal di $M_{n\times n}(R)$.

Contoh tersebut mengilustrasikan perbedaan penting keterdiagonalan matriks atas suatu lapangan dengan atas suatu ring komutatif.

Jika matriks A similar dengan B di $M_{n\times n}(R)$, maka dapat dibuktikan bahwa $\lambda I_2 - A$ similar dengan $\lambda I_2 - B$ di $M_{n\times n}(R)$. Khususnya, $C_A(\lambda) = C_B(\lambda)$, yaitu matriks-matriks yang similar mempunyai polinomial karakteristik sama.

Atas suatu lapangan, jika suatu matriks A similar dengan matriks $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_i)$ dan matriks $\mathrm{diag}(e_1, e_2, \dots, e_i)$, maka barisan $(e_1, e_2, \dots, e_i)$ hanyalah permutasi lain dari barisan $(d_1, d_2, \dots, d_i)$. Jadi, atas suatu lapangan sebarang matriks diagonal yang similar dengan A adalah unik, tergantung pada permutasi dari entri-entri diagonalnya. Hal ini tidak berlaku pada kasus matriks atas suatu ring komutatif sebarang. Pada contoh dapat dilihat bahwa A similar dengan $\mathrm{diag}(1,2)$ dan juga similar dengan $\mathrm{diag}(4,5)$ di $M_{2\times 2}(R)$. Namun, perlu diperhatikan bahwa barian $(1,2)$ bukanlah salah satu permutasi dari barisan $(4,5)$.

Pada contoh tersebut diperoleh empat ruang eigen, yaitu ruang $E(1)$, $E(2)$, $E(4)$ dan $E(5)$. Seluruh ruang-ruang tersebut adalah submodul-submodul bebas di R^2 atas R. Masing-masing ruang eigen tersebut mempunyai basis, yaitu $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ dan $\left\{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$.

Perlu diperhatikan bahwa vektor $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ tidak bebas linear di R^2, karena

$$3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ di } R^2$$

Jadi, berbeda dengan kasus matriks atas lapangan, pada kasus matriks atas ring komutatif vektor-vektor yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda belum tentu bebas linear.

III. Kesimpulan

Syarat cukup agar matriks A atas suatu ring komutatif R dapat didiagonalkan adalah jika $\bigcup_{\lambda\in\Re(A)} E(\lambda)$ memuat suatu basis R-modul di R^n. λ adalah nilai eigen matriks A dan $\Re(A)$ menyatakan himpunan akar polinomial karakteristik matriks A.

Dengan kata lain, jika gabungan semua ruang eigen yang bersesuaian dengan semua akar-akar polinomial karakteristiknya memuat sejumlah vektor yang bebas linear dan membangun R^n, maka matriks tersebut dapat didiagonalkan. Dalam proses diagonalisasi, cukup diperhatikan ruang-ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai-niali eigen yang menjadi akar-akar polinomial karakteristiknya. Selain itu, diperoleh juga bahwa matriks diagonal yang similar dengan suatu matriks atas ring komutatif tidaklah tunggal.

Daftar Pustaka

Anton, H., Rorres, C.W., 2004. *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons, Inc

Brown, C.W., 1993. *Matrices Over Commutative Rings*. MARCEL DEKKER,INC

Dummit, S.D., Foote, M.R., 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. John Wiley & Sons, Inc

John B Fraeleigh, 1994. *A First Course in Abstract Algebra*, Addison Wesley Publishing Company Inc, United States.

ghostyoen.files.wordpress.com/2008/01/teorema2.pdf