ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

A – 3

Keterbatasan Operator Integral Tentu Dan Operator Riemann-Liouville Di Ruang Lebesgue Terboboti

Cicik Alfiniyah

Departemen Matematika, Universitas Airlangga
Jl. Mulyorejo, Kampus C UNAIR, Surabaya 60115 – Indonesia
e-mail : alfiniyah.unair@gmail.com

Abstrak

Paper ini membahas keterbatasan operator integral tentu dan perumumannya yang kemudian disebut operator Riemann-Liouville di ruang Lebesgue terboboti. Dalam hal ini, pembuktian keterbatasan operator-operator tersebut menggunakan ketaksamaan Holder dan Minkowski. Dengan menggunakan fakta bahwa operator integral tentu adalah operator yang terbatas di ruang Lebesgue terboboti diperoleh hasil tentang terbatasnya operator Riemann-Liouville di ruang Lebesgue terboboti.
Kata kunci: Operator integral tentu, Operator Riemann-Liouville, ruang Lebesgue, ruang Lebesgue terboboti.

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Misalkan $f:[0,a]\to R$ sebarang fungsi yang terintegral untuk setiap $a>0.$ Hal ini berarti

$$\int_0^a f(t)\,dt \in R, \quad \forall a \in R.$$

Integral tentu dari f didefinisikan sebagai fungsi $F:[0,a]\to R,$ dengan $x\mapsto F(x):=\int_0^x f(t)dt.$ Integral tentu memiliki sifat-sifat penting yang tertuang dalam *Teorema Fundamental Kalkulus*.

Jika f terbatas maka F kontinu, sedangkan jika f kontinu maka F kontinu seragam dan terdeferensial, seperti yang dinyatakan dalam *Teorema Fundamental Kalkulus.*

Untuk suatu fungsi w yang bersifat $w(t)>0,$ untuk setiap $t>0,$ (fungsi ini disebut *fungsi bobot* atau *bobot*), didefinisikan $L^p(w)$ sebagai himpunan semua fungsi $f:(0,\infty)\to R$ sedemikian sehingga,

$$\int_0^\infty |f(t)|^p\, w(t)dt < \infty, \quad 1\le p<\infty.$$

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Jika $L^p(w)$ dilengkapi dengan dua operasi jumlahan fungsi $(+)$ dan perkalian skalar $(\cdot)$ yang didefinisikan, untuk setiap $f, g \in L^p(w)$ dan $c \in R,$ sebagai:

1. $(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad \forall x \in [0,\infty),$
2. $(cf)(x) \quad := cf(x), \quad \forall x \in [0,\infty)$

maka dapat ditunjukkan bahwa $(L^p(w),+,\cdot)$ adalah ruang vektor bernorm, dengan norm yang didefinisikan sebagai $\|f\|_{L^p(w)} := \left(\int_0^\infty |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p}$. Cukup jelas bahwa $L^p(w) = L^p$, adalah ruang Lebesgue (Bartle, 1966).

Misalkan $v(t) > 0, \quad \forall t > 0.$ Salah satu sifat penting dari $F,$ dinyatakan oleh ketaksamaan berikut ini :

$$\left(\int_0^\infty |F(x)|^q v(x)dx\right)^{1/q} \le c\left(\int_0^\infty |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p},$$

dengan $v(x) = x^{-p}, w \equiv 1, c = \dfrac{p}{p-1} > 0, dan\, 1 < p = q < \infty.$

Fakta di atas menyatakan bahwa F terbatas dari ruang Lebesgue terboboti $L^p(w)$ ke $L^q(v).$ Selain itu, salah satu perumuman F juga dapat dirumuskan sebagai berikut. Misalkan untuk $0 < \alpha \le 1,$ dan sebarang fungsi f , didefinisikan:

$$R_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Jika $\alpha = 1$ maka $R_\alpha f = F.$ Untuk selanjutnya R_α disebut operator Riemann-Liouville.

Dari uraian di atas, penulis tertarik untuk mengkaji ulang permasalahan tentang syarat-syarat yang harus dipenuhi oleh p, q, v dan w agar operator Riemann-Liouville (atau operator integral tentu) merupakan operator terbatas di ruang Lebesgue terboboti, dan kemudian menuliskannya kembali dalam bahasa sendiri serta melengkapi pembuktian yang ada.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana keterbatasan operator integral tentu dari $L^p(w)$ ke $L^q(v)$ untuk kasus $1 \le p \le q < \infty$?

2. Bagaimana keterbatasan operator Riemann-Liouville dari L^p ke $L^q(v)$ untuk kasus $1 < p \le q < \infty$?

1.3 Tujuan

1. Menentukan syarat yang harus dipenuhi oleh *v* dan *w*, agar operator integral tentu terbatas dari $L^p(w)$ ke $L^q(v)$ untuk kasus $1 \le p \le q < \infty$.
2. Menentukan syarat yang harus dipenuhi oleh *v*, agar operator Riemann-Liouville terbatas dari L^p ke $L^q(v)$ untuk kasus $1 < p \le q < \infty$.

1.4 Manfaat

Untuk mengetahui lebih jauh sifat-sifat integral tentu jika diketahui fungsi yang terintegralkan memiliki sifat tertentu.

2. BAHASAN UTAMA

2.1 Keterbatasan Operator Integral Tentu

Misalkan $f \in L^p\left(w \cap L^1\right)$ dan integral tentu dari f didefinisikan sebagai fungsi $F:[0,a] \to R,$ dengan

$$x \mapsto F(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

Salah satu sifat penting dari F, dinyatakan oleh ketaksamaan $\left(\int_0^\infty |F(x)|^q v(x)dx\right)^{1/q} \le c\left(\int_0^\infty |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p}$, dengan $v(x) = x^{-p}, w \equiv 1, c = \frac{p}{p-1} > 0,$ dan $1 < p = q < \infty.$

Sifat di atas menyatakan bahwa F terbatas dari ruang Lebesgue terboboti $L^p(w)$ ke $L^q(v)$ untuk kasus $1 < p = q < \infty.$ Pada subbab ini akan dibahas mengenai sifat keterbatasan F dari ruang Lebesgue terboboti $L^p(w)$ ke $L^q(v)$ untuk kasus $1 \le p \le q < \infty$.

Teorema 1. *Jika* $\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty v(x)dx\right)^{1/q}\left(\int_0^t w^{1-p'}(x)dx\right)^{1/p'} < \infty,$ *dengan* $\left(p' = \frac{p}{p-1}\right)$

maka $\|F\|_{L^q(v)} \le C\|f\|_{L^p(w)}$.

(Meskhi, 1998)

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Bukti.

Diketahui $F(x)=\int_0^x f(t)dt,$ dengan $f\in L^p\left(w\cap L^1\right)$. Karena $f\in L^1,$ maka $\int_0^\infty |f(t)|dt<\infty.$ Oleh karena itu terdapat $m\in Z$ sedemikian hingga $2^m\le\int_0^\infty |f(t)|dt<2^{m+1}.$

Misalkan $t_m=\infty$ dan $I(t)=\int_0^t |f(t)|dt,$ maka $2^m\le\int_0^{t_m}|f(t)|dt<2^{m+1}$ dengan kata lain $2^m\le I(t_m)<2^{m+1}.$ Karena fungsi f terbatas maka I kontinu.

Dengan alasan yang sama dapat dipilih t_{m-1} sedemikian hingga $0<t_{m-1}<t_m$ maka $I(t_{m-1})<I(t_m)$ sehingga $I(t_{m-1})=2^{m-1}$. Proses ini dapat dilanjutkan singga diperoleh barisan $(t_k)_{k=-\infty}^m$ sedemikian hingga $2^m\le I(t_m)<2^{m+1}$, dan $I(t_k)=2^k$ untuk $k=m-1,m-2,...$

$$\begin{aligned}
\|F\|_{L^q(v)}^q &= \int_0^\infty |F(x)|^q v(x)dx \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\int_0^{t_k}|f(t)|dt\right)^q v(x)dx \\
&\le C\sum_{k=-\infty}^{m}\left(\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}|f(t)|^p w(t)dt\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int_{t_{k-1}}^{\infty}v(x)dx\right)\left(\int_0^{t_{k-1}}w(x)^{-\frac{p'}{p}}dx\right)^{\frac{q}{p'}} \\
&\le C\sum_{k=-\infty}^{m}\left(\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}|f(t)|^p w(t)dt\right)^{\frac{q}{p}}\le C\left(\int_0^{t_m}|f(t)|^p w(t)dt\right)^{\frac{q}{p}} \\
&\le C\left(\int_0^{\infty}|f(t)|^p w(t)dt\right)^{\frac{q}{p}}=C\|f\|_{L^p(w)}^q
\end{aligned}$$

dengan demikian operator integral tentu terbatas dari $L^p(w)$ ke $L^q(v)$ untuk kasus $1\le p\le q<\infty$ ■

Teorema 2. *Jika* $\left(\int_0^\infty\left[\left(\int_0^\infty v(x)dx\right)\left(\int_0^t w^{1-p'}(x)dx\right)^{q-1}\right]^{\frac{p}{p-q}}w^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{p-q}{pq}}<\infty$

maka $\|F\|_{L^q(v)}\le C\|f\|_{L^p(w)}$. (Meskhi, 1998)

2.2 Keterbatasan Operator Riemann-Liouville

Salah satu bentuk perumuman integral tentu dapat dirumuskan sebagai $R_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,$ untuk $0 < \alpha \le 1$ dan sebarang fungsi f. Oleh karena operator Riemann-Liouville (atau R_α) merupakan bentuk perumuman dari operator integral tentu maka pada bagian subbab ini akan dibahas mengenai sifat keterbatasan R_α dari ruang Lebesgue terboboti L^p ke $L^q(v)$ untuk kasus $1 < p \le q < \infty$ dan $1 < q < p < \infty$, dengan $\frac{1}{p} < \alpha < 1$ atau $\alpha > 1$.

Teorema 3. *Jika* $\sup_{t>0} \left(\int_0^\infty \frac{v(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \right)^{1/q} t^{1/p'} < \infty$

maka $\|R_\alpha f\|_{L^q(v)} \le C\|f\|_{L^p}$, *dengan* $R_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$

(Meskhi, 1998)

Bukti.

Ambil sebarang $f \in L^p$,

$$\begin{aligned}
\|R_\alpha f\|_{L^q(v)}^q &= \int_0^\infty |R_\alpha f(x)|^q v(x)dx \\
&\le C\left(\int_0^\infty \left(\left| \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right|^q + \left| \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right|^q \right) v(x)dx \right) \\
&= C\int_0^\infty \left| \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right|^q v(x)dx + C\int_0^\infty \left| \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right|^q v(x)dx
\end{aligned}$$

Oleh karena

$$\begin{aligned}
C\int_0^\infty \left| \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right|^q v(x)dx &\le C\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt \right)^q v(x) x^{(\alpha-1)q} dx \\
&\le C\left(\int_0^\infty |f(t)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} = C\|f\|_{L^p}^q ,
\end{aligned}$$

dan

$$C\int_0^\infty \left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt\right|^q v(x)dx \le C\int_0^\infty v(x)\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{\frac{q}{p'}} dx$$

$$= C\sum_{k\in Z}\int_{2^k}^{2^{k+1}} v(x)\left(x^{(\alpha-1)p'+1}\right)^{\frac{q}{p'}}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{q}{p}} dx$$

$$\le C\sum_{k\in Z}\left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int_{2^k}^{2^{k+1}} v(x)x^{(\alpha-1)q}\right)2^{\frac{kq}{p'}}$$

$$\le C\sum_{k\in Z}\left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{q}{p}},$$

dengan menggunakan ketaksamaan Minkowski, diperoleh

$$C\sum_{k\in Z}\left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{q}{p}} \le C\left(\sum_{k\in Z}\left(\int_{2^{k-1}}^{2^{k}} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{q}{p}} + \sum_{k\in Z}\left(\int_{2^{k}}^{2^{k+1}} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{q}{p}}\right)$$

$$\le C\left(\left(\int_0^\infty |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{q}{p}} + \left(\int_0^\infty |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{q}{p}}\right)$$

$$= C\|f\|_{L^p}^q.$$

Sehingga

$$\|R_\alpha f\|_{L^q(v)} \le C\|f\|_{L^p}.$$

Dengan demikian operator Riemann-Liouville terbatas dari L^p ke $L^q(v)$ untuk kasus $1 < p \le q < \infty$ ■

Teorema 4. *Jika* $\displaystyle \sup_{t>0} t^{-\frac{1}{p'}}\left(\int_t^\infty \frac{v(x)}{x^{(1-\alpha)q}}\,dx\right)^{1/q} < \infty$

maka $\|R_\alpha f\|_{L^q(v)} \le C\|f\|_{L^p}$, *dengan* $\displaystyle R_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$

(Meskhi, 1998)

3. SIMPULAN DAN SARAN

3.1 Simpulan

1. Operator integral tentu (atau F) terbatas dari $L^p(w)$ ke $L^q(v)$ atau dengan kata lain memenuhi sifat $\left(\int_0^\infty |F(x)|^q v(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p}$, apabila memenuhi syarat $\underset{t>0}{Sup}\left(\int_t^\infty v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t w^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$ dengan $\left(p' = \dfrac{p}{p-1}\right)$, $v(x) > 0$ untuk setiap $x > 0$, $w \equiv 1$ untuk kasus $1 \leq p \leq q < \infty$.
2. Operator Riemann-Liouville (atau R_α) terbatas dari L^p ke $L^q(v)$ atau dengan kata lain memenuhi sifat $\left(\int_0^\infty |R_\alpha f(x)|^q v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty |f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$, apabila memenuhi syarat $\underset{t>0}{Sup}\left(\int_t^\infty A_1(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t B_1^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$ dengan $\left(p' = \dfrac{p}{p-1}\right)$, $A_1(x) = v(x).x^{(\alpha-1)q}$, $B_1(x) = 1$ untuk kasus $1 < p \leq q < \infty$.

3.2 Saran

Penelitian dapat dilanjutkan untuk keterbatasan operator integral tentu dari $L^p(w)$ ke $L^q(v)$ untuk kasus $1 \leq q < p < \infty$. Selain itu, penelitian dapat dilanjutkan untuk keterbatasan operator Riemann-Liouville dari L^p ke $L^q(v)$ untuk kasus $1 \leq q < p < \infty$. Serta penelitian ini juga dapat dilakukan untuk mencari nilai konstanta terbaik (atau C) yang berlaku pada ketaksamaan untuk masing-masing kasus

4. REFERENSI

1. Bartle, G.Robert, (1966). *The Element of Integration*. Champagn-Urbana, Illinois.
2. Jones, F, (1936). *Lebesgue Integration on Euclidean Space*. Jones and Bartlett Publishers, Boston, London.
3. Kreszig, Erwin, (1978). *Introductory Functional Analysis With Applications*. University of Windors, Canada.

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

4. Meskhi, (1998). ”Georgian Mathematical Journal”, Plenum Publishing Corporation, Georgia.
5. Purcell dan Varberg, (1980). *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Erlangga, Jakarta.