ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Sistem Persamaan Linear Atas Ring

Ari Dwi Hartanto (Mahasiswa S2 Matematika FMIPA UGM)
E-mail: *ari@mail.ugm.ac.id*
Dian Ariesta Yuwaningsih (Mahasiswa S2 Matematika FMIPA UGM)
E-mail: *dian.ariesta17@gmail.com*
Sri Wahyuni (Dosen PS S2 Matematika Jurusan Matematika FMIPA UGM)
E-mail: *swahyuni@ugm.ac.id*

Abstrak

Dalam makalah ini akan dibicarakan sistem persamaan linear atas ring komutatif dengan elemen satuan, sifat-sifat, serta kaitannya dengan sistem persamaan linear atas lapangan. Pada sistem persamaan linear atas lapangan, salah satu cara untuk menentukan solusi dari SPL $AX = b$ adalah dengan melakukan serangkaian operasi Gaussian pada matriks yang diperluas $[A|b]$. Namun, operasi Gaussian belum tentu dapat digunakan untuk mencari solusi dari sistem persamaan linear atas ring. Oleh karena itu, akan dibahas syarat perlu dan syarat cukup agar sistem persamaan linear atas ring mempunyai solusi. Selanjutnya, dari syarat perlu dan syarat cukup tersebut dapat dikonstruksikan suatu algoritma untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linear atas ring.

Sebagaimana halnya sistem persamaan linear homogen atas lapangan; sistem persamaan linear homogen $AX = O$ atas ring juga selalu konsisten (mempunyai solusi) yakni $X = 0$. Terkait dengan kekonsistenan sistem persamaan linear homogen atas ring akan dipaparkan Teorema McCoy. Pada bagian akhir akan dibicarakan penggunaan aturan Cramer dalam menentukan solusi sistem persamaan linear atas ring.

Kata kunci : *SPL atas ring, konsintensi SPL, aturan Cramer.*

1. PENDAHULUAN

Salah satu pembahasan menarik di bidang matematika, khususnya bidang aljabar, adalah sistem persamaaan linear. Sistem persamaan linear yang telah dikenal oleh khalayak umum adalah sistem linear atas lapangan F. Sistem persamaan linear (disingkat SPL) atas lapangan biasanya dinyatakan dengan $AX = B$ dimana $A \in M_{mxn}(F)$, $X \in R^n$, dan $B \in R^m$. Apabila $B \in R^m$ dalam SPL $AX = B$ merupakan vektor nol, maka SPL $AX = B$ disebut sistem persamaan linear homogen (disingkat SPLH). Pembahasan dalam SPL dan SPLH atas lapangan diantaranya meliputi bagaimana cara mencari solusinya, syarat-syarat serta kondisi apa saja yang harus dipenuhi agar SPL dan SPLH memiliki solusi.

Dalam ilmu aljabar, telah diketahui bahwa lapangan sendiri merupakan suatu ring komutatif dengan elemen satuan. Dalam keseluruhan isi makalah ini R dinotasikan sebagai ring dengan elemen satuan. Selanjutnya, bagaimana apabila dikonstruksikan suatu sistem persamaan linear atas R. Apakah sifat-sifat dan kondisi dalam menentukan solusi dari sistem persamaan linear atas lapangan masih dapat

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

dipertahankan dalam sistem persamaan linear atas R. Jikalau ada sifat yang tidak bisa dipertahankan, sifat-sifat atau kondisi apa saja yang harus ditambahkan dalam sistem persamaan linear atas R agar sifat dari sitem persamaan linear atas lapangan tetap berlaku.

Dalam makalah ini akan dibicarakan generalisasi dari sistem pesamaan linear atas lapangan ke sistem persamaan linear atas R. Syarat perlu dan syarat cukup apa saja yang dibutuhkan agar SPL dan SPLH atas R memiliki solusi. Kekonsistenan dari sistem persamaan linear homogen dipaparkan pada Teorema McCoy dalam buku McCoy(1948). Sedangkan mengenai syarat cukup dan syarat perlu agar sistem persamaan linear konsisten dipaparkan dalam buku Brown(1993). Selain itu, juga akan dibicarakan mengenai Aturan Cramer pada sistem persamaan linear atas R.

2. SISTEM PERSAMAAN LINEAR ATAS *R*

Pembahasan pertama dalam makalah ini mengenai sistem persamaan linear homogen atas R, yang kemudian dilanjutkan pembahasan sistem persamaan linear atas R. Sama halnya dengan sistem persamaan linear homogen atas lapangan, SPLH atas R minimal memiliki solusi trivial. Untuk mengetahui apakah SPLH atas R memiliki solusi nontrivial atau tidak, berikut diberikan suatu teorema yang menjamin SPLH atas R memiliki solusi nontrivial atau tidak.

Teorema 2.1. (N. McCoy) Diberikan $A \in M_{m x n}(R)$ .Sistem Persamaan Linear Homogen $AX = O$ mempunyai solusi nontrivial jika dan hanya jika $rk(A) < n$.

Bukti. $(\Rightarrow)$ Diketahui SPLH $AX = O$ mempunyai solusi nontrivial. Misal $v \in R^n$, dengan $v \neq 0,$ merupakan solusi nontrivial dari $AX = O$. Akan ditunjukkan $rk(A) < n$. Jika $m < n$, maka diperoleh $rk(A) \leq \min\{m,n\} = m < n.$ Oleh karena itu, untuk kasus $m < n$ telah terbukti. Selanjutnya akan dibuktikan untuk kasus $m \geq n$. Misal $\Delta(i_1, i_2, \cdots i_n; 1, 2, \cdots, n)$ adalah minor $n x n$ dari A. Terdapat matriks permutasi $P \in GL(m, R)$ sedemikian hingga PA merupakan matriks dengan n baris pertamanya adalah baris-baris $i_1, i_2, \cdots i_n$ dari A. Jadi,

$$Row_1(PA) = Row_{i_1}(A), Row_2(PA) = Row_{i_2}(A), \cdots, Row_n(PA) = Row_{i_n}(A)$$

dan

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$PA = \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_n 1} & a_{i_n 2} & \cdots & a_{i_n n} \\ \hline & * & & \end{bmatrix}.$$

Dibentuk

$$D = \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_n 1} & a_{i_n 2} & \cdots & a_{i_n n} \end{bmatrix}$$

dan diperoleh $\Delta = \det(D) = \Delta(i_1, i_2, \cdots i_n; 1, 2, \cdots, n)$. Dari yang diketahui bahwa $Av = O$, berakibat $Dv = O$ dan $\Delta v = (\Delta I_n)v = (adj(D))Dv = 0$. Diperoleh $\Delta[v]_k = 0$ untuk setiap k, $1 \le k \le n$. Karena $\Delta = \Delta(i_1, i_2, \cdots i_n; 1, 2, \cdots, n)$ sebarang minor $n\, x\, n$ dari A, dapat disimpulkan bahwa $[v]_k \in Ann_R(I_n(A))$. Oleh karena itu, $Ann_R(I_n(A)) \ne \{0\}$ dan $rk(A) < n$.

($\Leftarrow$) Diketahui $rk(A) < n$. Akan ditunjukkan $AX = O$ mempunyai solusi nontrivial. Misalkan $rk(A) = r < n$. Jika $r = m$, maka dengan menambahkan persamaan-persamaan dengan koefisien nol akan diperoleh persamaan baru $\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix} X = O$. Jika v solusi nontrivial dari $Ax = O$, maka jelas v juga merupakan solusi nontrivial dari $\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix} X = O$. Sebaliknya, jika v solusi nontrivial dari $\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix} X = O$, maka v juga merupakan solusi nontrivial dari $AX = O$. Di lain pihak, $I_t\left(\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}\right) = I_t(A)$, untuk setiap $t \in \mathbf{Z}$, sehingga $rk(A) = rk\left(\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}\right)$. Dengan demikian jika $AX = O$ diganti $\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix} X = O$ maka dapat diasumsikan $r < \min\{m, n\}$.

Karena $rk(A) = r$, maka $Ann_R(I_{r+1}(A)) \ne \{0\}$. Misal $a \in Ann_R(I_{r+1}(A)),\ a \ne 0.$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

i. Jika $r=0$, maka $a \in Ann_R(I_1(A))$. Dibentuk $v=\left(a,a,\cdots,a\right)^T \in R^n$, maka $Av=O$ sehingga v adalah solusi nontrivial dari $AX=O$.

ii. Jika $1 \le r \le \min\{m,n\}$. Karena $rk(A)=r$, maka $Ann_R(I_r(A))=\{0\}$ dan $Ann_R(I_{r+1}(A)) \neq \{0\}$. Misal $a \neq 0 \in Ann_R(I_{r+1}(A))$, maka $a \notin Ann_R(I_r(A))$ sehingga terdapat minor $\Delta(i_1,i_2,\cdots,i_r;j_1,j_2,\cdots,j_r)$ dari A sedemikian hingga $a\Delta(i_1,i_2,\cdots,i_r;j_1,j_2,\cdots,j_r) \neq 0$. Terdapat matriks permutasi $P \in GL(m,R)$ dan $Q \in GL(n,R)$ sedemikian hingga $PAQ=\begin{bmatrix} C & * \\ * & * \end{bmatrix}$, dengan $C=\begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{bmatrix}$.

Dari sini diperoleh $\det(C)=\Delta(i_1,i_2,\cdots,i_r;j_1,j_2,\cdots,j_r)$.

Jika $(PAQ)X=O$ memiliki solusi nontrivial yaitu $\beta \in R^n$, akan ditunjukkan $AX=O$ memiliki solusi nontrivial, katakan $v \in R^n$. Dari $Av=O$, berarti $PAv=O$. Karena Q invertibel, maka diperoleh $PAv=PAIv=PAQQ^{-1}v=O$. Karena $\beta \in R^n$ solusi nontrivial dari $(PAQ)X=O$ maka dapat dipilih $\beta=Q^{-1}v$, sehingga diperoleh $v=Q\beta$. Karena Q bukan matriks nol dan β solusi nontrivial dari $(PAQ)X=O$, maka $v=Q\beta \neq O$. Karena P invertibel, dari $PAv=O$ diperoleh $Av=O$. Jadi, SPLH $AX=O$ memiliki solusi nontrivial.

Oleh karena $I_t(PAQ)=I_t(A)$ untuk setiap $t \in \mathbb{N}$, maka membuktikan $AX=O$ memiliki solusi nontrivial cukup dengan menunjukkan $(PAQ)X=O$ memiliki solusi nontrivial. Hal ini dapat dilakukan dengan mengganti matriks A dengan PAQ. Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan $\Delta(i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r)=\Delta(1,\cdots,r;1,\cdots,r)$.

Jika dipilih $\Delta=\Delta(1,\cdots,r;1,\cdots,r)$ maka diperoleh $A=\begin{bmatrix} C & * \\ * & * \end{bmatrix}$ dengan $C=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}$ dan $\det(C)=\Delta$, sehingga diperoleh $a\Delta \neq 0$. Dibentuk

$$C' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r(r+1)} \\ a_{(r+1)1} & \cdots & a_{(r+1)r} & a_{(r+1)(r+1)} \end{bmatrix} \in M_{(r+1)(r+1)}(R).$$

Dibentuk $d_j = Cof_{(r+1)j}(C')$, untuk setiap $j = 1, 2, \cdots, r+1$. Menggunakan ekspansi Laplace, diperoleh $\sum_{j=1}^{r+1} a_{(r+1)j} d_j = \det(C') \in I_{r+1}(A)$.

Dipilih $v = (ad_1 \quad ad_2 \quad \cdots \quad ad_{r+1} \quad 0 \quad \cdots \quad 0)^T \in R^n$. Karena $ad_{r+1} = a\Delta \neq 0$, maka $v \neq 0$. Diklaim v merupakan solusi dari $AX = O$. Berarti $Av = O$ jika dan hanya jika $\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}(ad_j) = 0$ untuk setiap $i = 1, \cdots, m$. Dalam hal ini, terdapat dua kasus. Pertama, jika $1 \leq i \leq r$ maka diperoleh $\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}(ad_j) = a\left(\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij} d_j\right) = 0$. Kedua, jika $i \geq r+1$ maka diperoleh $\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}(ad_j) = a \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r(r+1)} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i(r+1)} \end{bmatrix}\right) \in aI_{r+1}(A) = \{0\}$.

Oleh karena itu, diperoleh $Av = O$. Jadi, $AX = O$ memiliki solusi nontrivial. □

Terdapat banyak teorema-teorema menarik yang merupakan akibat dari Teorema McCoy. Salah satunya akibat berikut ini.

Akibat 2.2. Jika jumlah persamaan kurang dari jumlah variabel maka sistem persamaan linear homogen memiliki solusi nontrivial.

Berikut diberikan algoritma untuk menentukan solusi nontrivial dari SPLH $AX = O$ atas R. Algoritma ini dikonstruksi dari Teorema McCoy.

Algoritma. (Menentukan Solusi Nontrivial dari SPLH $AX = O$)

1. Tentukan $r = rk(A)$. Jika $r \geq n$, maka SPLH tidak mempunyai solusi nontrivial, [berhenti]. Jika $r < n$, maka SPLH mempunyai solusi, masuk ke langkah 2.

2. Jika $m < n$, tambahkan baris-baris nol pada A sehingga diperoleh matriks $A' = \begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}$ berukuran $m' x n$, dengan $m' \geq n$.
3. Tentukan $a \neq 0 \in Ann_R(I_{r+1}(A'))$.
4. Jika $r = 0$, maka $v = (a \quad a \quad \cdots \quad a)^T \in R^n$ merupakan solusi nontrivial dari $AX = O$. Jika $1 \leq r < n$, masuk ke langkah 5.
5. Tentukan minor $\Delta(i_1, \cdots, i_r; j_1, \cdots, j_r)$ dari A' sedemikian hingga $a\Delta(i_1, \cdots, i_r; j_1, \cdots, j_r) \neq 0$.
6. Tentukan $P \in GL(m', R)$ dan $Q \in GL(n, R)$ sedemikian hingga
$$A'' = PA'Q = \begin{bmatrix} C & * \\ * & * \end{bmatrix}$$
dengan $\det(C) = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} = \Delta(i_1, \cdots, i_r; j_1, \cdots, j_r).$
7. Tentukan
$$C' = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_r} & a_{i_1 j_{r+1}} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \cdots & a_{i_r j_r} & a_{i_r j_{r+1}} \\ a_{i_{r+1} j_1} & \cdots & a_{i_{r+1} j_r} & a_{i_{r+1} j_{r+1}} \end{bmatrix}.$$
8. Tentukan $d_j = Cof_{(r+1)j}(C')$, $j = 1, 2, \cdots, r+1$.
9. Dibentuk $v' = (ad_1 \quad ad_2 \quad \cdots \quad ad_{r+1} \quad 0 \quad \cdots \quad 0)^T \neq O \in R^n$.
10. Tentukan $v = Qv'$, yang merupakan solusi dari SPLH $AX = O$.

Selanjutnya, akan dibahas mengenai sistem persamaan linear $AX = B$. Pertama akan dibahas syarat perlu suatu sistem persamaan linear $AX = B$ memiliki solusi untuk setiap $A \in M_{nxn}(R)$ dan $B \in R^n$.

Dalam sistem persamaan linear atas lapangan, jika diketahui SPL $AX = B$ mempunyai solusi, maka $rank(A \mid B) = rank(B)$. Sama halnya dengan sistem persamaan linear atas R. Oleh karena definisi rank matriks atas R adalah

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$\max\{t \in \mathbf{Z} \mid Ann_R(I_t(A)) = \{0\}\}$ maka syarat perlu SPL $AX = B$ memiliki solusi adalah $I_t(A|B) = I_t(A)$ untuk setiap $t \in \mathbf{Z}$. Hal ini dipaparkan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3. (Syarat Perlu) Diberikan $A \in M_{nxn}(R)$. Jika $AX = B$ mempunyai solusi maka $I_t(A|B) = I_t(A)$ untuk setiap $t \in \mathbf{Z}$.

Selanjutnya, akan diberikan suatu teorema yang merupakan syarat cukup suatu sistem persamaan linear $AX = B$ memiliki solusi untuk setiap $A \in M_{nxn}(R)$ dan $B \in R^n$. Namun, sebelumnya telah diketahui bahwa $z \in R$ merupakan elemen regular di R jika bukan merupakan elemen pembagi nol dari R. Dengan demikian apabila $Z(R)$ merupakan himpunan semua elemen-elemen pembagi nol dari R maka $R \setminus Z(R)$ merupakan himpunan elemen-elemen regular dalam R.

Teorema 2.4. (Syarat Cukup) Diberikan matriks $A = [a_{ij}] \in M_{mxn}(R)$ dengan $m \le n$, $rk(A) = m$, dan matriks $B \in R^m$. Jika terdapat ideal I di R dan elemen regular $z \in R$ sedemikian sehingga $\mathrm{I} I_m(A|B)^* \subseteq Rz \subseteq \mathrm{I} I_m(A)$, dengan $I_m(A|B)^*$ merupakan ideal di R yang dibangun oleh himpunan $\{\Delta(1,..,m; j_1,.., j_{m-1}, n+1 \mid 1 \le j_1 < .. < j_{m-1} \le n)\}$, maka sistem persamaan linear $AX = B$ memiliki solusi.

Bukti. Karena diketahui $rk(A) = m$ maka $Ann_R(I_m(A)) = \{0\}$, sehingga diperoleh $I_m(A) \ne 0$. Akibatnya terdapat minimal minor mxm dari A yang tidak nol, katakan $\Delta = \Delta(1,..,m; j_1,.., j_m)$ dengan $\Delta(1,..,m; j_1,.., j_m) \ne 0$. Diperhatikan submatriks mxm dari A yakni $\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_m} \end{bmatrix}$. Diperoleh $\det(\bar{A}) = \Delta(1,..,m; j_1,.., j_m) \ne 0$ dan

$$\Delta \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \det(\bar{A}) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \bar{A} adj(\bar{A}) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \qquad ...(i)$$

Di sisi lain diketahui bahwa:

$$adj\left(\bar{A}\right)\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cof_{11}\left(\bar{A}\right) & \cdots & cof_{m1}\left(\bar{A}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ cof_{1m}\left(\bar{A}\right) & \cdots & cof_{mm}\left(\bar{A}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} cof_{j1}\left(\bar{A}\right) b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} cof_{jm}\left(\bar{A}\right) b_j \end{bmatrix} \quad \text{...(ii)}$$

Misalnya, dipilih $\left(c_1,...,c_m\right)^T \in R^m$ dengan:

$$c_i = \sum_{j=1}^{m} b_j cof_{ji}\left(\bar{A}\right)\det\begin{bmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_{i-1}} & b_1 & a_{1j_{i+1}} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_{i-1}} & b_m & a_{mj_{i+1}} & \cdots & a_{mj_m} \end{bmatrix} \in I_m\left(A\,|\,B\right)^*$$

untuk setiap nilai $i = 1,2,...,m$. Dari Persamaan (i) dan (ii) diperoleh:

$$\Delta\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh $\Delta b_i = \sum_{u=1}^{m} a_{ij_u} c_u$ untuk setiap nilai $i = 1,2,...,m$.

Selanjutnya, didefinisikan $y_1, y_2,..., y_n$ sebagai berikut:

$$y_v = \begin{cases} 0 & \text{, jika } v \in \{1,...,n\} - \{j_1,..., j_m\} \\ c_i & \text{, jika } v = j_i \text{ untuk setiap } i = 1,2,..m \end{cases}$$

Karena $c_i \in I_m\left(A\,|\,B\right)^*$ untuk setiap $i = 1,2,...,m$,maka diperoleh $y_v \in I_m\left(A\,|\,B\right)^*$ untuk setiap $v = 1,2,...,n$. Selain itu diperoleh:

$$\sum_{v=1}^{n} a_{iv} y_v = a_{ij_1} y_{j_1} + ... + a_{ij_m} y_{j_m} = a_{ij_1} c_1 + ... + a_{ij_m} c_m = \Delta b_i$$

untuk setiap nilai $i = 1,2,...,m$. Dengan demikian untuk setiap $i = 1,2,...,m$ diperoleh:

$$\Delta b_i = \sum_{v=1}^{n} a_{iv} y_v \text{ , dengan } y_1, y_2,..., y_n \in I_m\left(A\,|\,B\right)^*.$$

Misalnya,minor-minor mxm tak nol dari A adalah $\Delta_1,...,\Delta_p$ maka untuk setiap $k = 1,2,..., p$ terdapat $\{y_{kv} \in R\,|\,v = 1,2,...,n\} \subseteq I_m\left(A\,|\,B\right)^*$ sedemikian sehingga $\Delta_k b_i = \sum_{v=1}^{n} a_{iv} y_{kv}$, untuk $i = 1,2,...,m$. Karena diketahui $\text{I}I_m\left(A\,|\,B\right)^* \subseteq Rz \subseteq \text{I}I_m\left(A\right)$

maka $z \in \mathrm{I} I_m(A)$. Oleh karena $\Delta_1,\ldots,\Delta_p$ membangun $I_m(A)$ maka $z = \sum_{k=1}^{p} q_k \Delta_k$ dengan $q_1,\ldots,q_p \in \mathrm{I}$. Dengan demikian diperoleh:

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{v=1}^{n} a_{iv} q_k y_{kv} = \sum_{k=1}^{p} q_k \left(\sum_{v=1}^{n} a_{iv} y_{kv}\right) = \sum_{k=1}^{p} q_k \Delta_k b_i = z b_i$$

untuk setiap $i = 1,2,\ldots,m$. Oleh karena itu , diperoleh $\sum_{v=1}^{n} a_{iv}\left(\sum_{k=1}^{p} q_k y_{kv}\right) = z b_i$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,m$. Oleh karena $q_k \in \mathrm{I}$ dan $y_{kv} \in I_m(A\,|\,B)^*$ untuk setiap $k = 1,2,\ldots,p$ dan $v = 1,2,\ldots,n$ maka diperoleh $\sum_{k=1}^{p} q_k y_{kv} \in \mathrm{I} I_m(A\,|\,B)^*$ untuk $v = 1,2,\ldots,n$. Oleh karena $\mathrm{I} I_m(A\,|\,B)^* \subseteq Rz$ maka untuk $v = 1,2,\ldots,n$ diperoleh $\sum_{k=1}^{p} q_k y_{kv} = r_v z$ untuk suatu $r_v \in R$. Akibatnya diperoleh $\sum_{v=1}^{n} a_{iv} r_v z = z b_i$ untuk $i = 1,2,\ldots,m$. Atau, $z\left(\sum_{v=1}^{n} a_{iv} r_v\right) = z b_i$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,m$. Oleh karena z merupakan elemen regular di R maka $\sum_{v=1}^{n} a_{iv} r_v = b_i$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,m$. Jadi diperoleh bahwa $\xi = (r_1, r_2, \ldots, r_n)^T \in R^n$ merupakan solusi dari sistem persamaan linear $AX = B$. □

Selanjutnya, apabila $I_m(A) = R$ maka $rk(A) = m$. Untuk setiap $B \in R^m$ memenuhi $RI_m(A\,|\,B)^* \subseteq R1 \subseteq RI_m(A)$. Oleh karena 1 merupakan elemen regular di R , maka berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh bahwa sistem persamaan linear $AX = B$ memiliki solusi. Dengan demikian, diperoleh akibat sebagai berikut ini.

Akibat 2.5. Jika diberikan matriks $A \in M_{mxn}(R)$ dengan $I_m(A) = R$ maka untuk setiap $B \in R^m$ sistem persamaan linear $AX = B$ memiliki solusi.

Selanjutnya, berikut diberikan suatu algoritma untuk menentukan solusi dari SPL $AX = B$ atas R. Algoritma ini dikonstruksi dari Teorema 2.3 dan Teorema 2.4.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Algoritma (menentukan solusi dari SPL $AX = B$, dengan $A \in M_{mxn}(R)$ dan $B \in R^m$)

1. Tentukan $I_t(A|B)$ dan $I_t(A)$, untuk setiap $t \in \mathbf{Z}$. Jika $I_t(A|B) \neq I_t(A)$ untuk suatu $t \in \mathbf{Z}$, maka SPL $AX = B$ tidak mempunyai solusi. [proses berhenti]
   Jika $I_t(A|B) = I_t(A)$ untuk setiap $t \in \mathbf{Z}$, maka masuk ke langkah 2.
2. Jika $m > n$, maka ubah SPL $AX = B$ menjadi SPL $A'X' = B$ dengan $A' = [A|O_{mxn'}]$ dan $X' = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n'})^T$, $n' \geq m$.
3. Tentukan $rk(A)$, ideal I dari R, dan elemen regular z dari R sedemikian hingga $\mathrm{I}\, I_m(A|B)^* \subseteq Rz \subseteq \mathrm{I}\, I_m(A)$.
4. Tentukan semua minor $m\,x\,m$ dari A yang tak nol, katakan $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_p$.
5. Untuk $k = 1, 2, \cdots, p$ dan $i = 1, 2, ..., m$ didefinisikan:

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{m} b_j Cof_{ji}(\overline{A}^{(k)})$$

   dengan

$$\overline{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{1j_1}^{(k)} & \cdots & a_{1j_m}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mj_1}^{(k)} & \cdots & a_{mj_m}^{(k)} \end{bmatrix} \text{ dan } \det(\overline{A}^{(k)}) = \Delta_k .$$

6. Tentukan $y_{kl} = \begin{cases} 0 \;, & \text{jika } l \in \{1, \cdots, n\} - \{j_1^{(k)}, \cdots, j_m^{(k)}\} \\ c_{ki} \;, & jika\ l = j_i^{(k)} \end{cases}$.
7. Tentukan $q_1, \cdots, q_p \in \mathrm{I}$ sedemikian hingga $z = \sum_{k=1}^{p} q_k \Delta_k$.
8. Untuk $l = 1, \cdots, n$, tentukan r_l sedemikian hingga $\sum_{k=1}^{p} q_k y_{kl} = r_l\, z$.
9. Diperoleh $v = (r_1, r_2, \cdots, r_n)^T$ yang merupakan solusi dari $AX = B$.

Terakhir pada makalah ini akan diberikan Aturan Cramer yang ternyata masih dapat digunakan untuk mencari ketunggalan dari solusi sistem persamaan linear atas ring R.

Teorema 2.6. (Aturan Cramer) Jika diberikan matriks $A \in M_{nxn}(R)$ dengan $\det(A) \in U(R)$ maka untuk setiap $B \in R^n$ sistem persamaan linear $AX = B$ memiliki solusi tunggal $v=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)^T$ dengan $y_j=\frac{\left|A_j\right|}{A}$, dimana A_j merupakan determinan dari matriks A dengan mengganti kolom ke- j dari matriks A dengan B, untuk nilai $j=1,2,...,n$

Bukti. Diketahui $v=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)^T$ dengan $y_j=\frac{\left|A_j\right|}{A}$ untuk setiap $j=1,2,...,n$. Menggunakan Ekspansi Laplace diperoleh:

$$\det(A)\,y_j=\det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n} b_i cof_{ij}(A)$$

Oleh karena itu, diperoleh:

$$\det(A)\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} cof_{i1}(A)b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} cof_{in}(A)b_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cof_{11}(A) & \cdots & cof_{n1}(A) \\ \vdots & & \vdots \\ cof_{1n}(A) & \cdots & cof_{nn}(A) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=adj(A)B$$

Karena diketahui bahwa $\det(A)I_n=adj(A)A$ maka diperoleh $adj(A)[Av]=adj(A)B$. Oleh karena $adj(A)$ merupakan matriks invertibel (dengan inversnya adalah $\left(adj(A)\right)^{-1}=\left(\det(A)\right)^{-1}(A)$), maka diperoleh $Av=B$. Jadi terbukti bahwa $v=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)^T$, dengan $y_j=\frac{\left|A_j\right|}{A}$ untuk setiap $j=1,2,...,n$, merupakan solusi dari $AX=B$. Selanjutnya, andaikan v' juga merupakan solusi dari $AX=B$, maka diperoleh $Av'=Av=B$. Akibatnya diperoleh $A(v'-v)=0$. Oleh karena $\det(A)\in U(R)$ maka matriks A invertibel, sehingga diperoleh $v'-v=0$. Akibatnya v merupakan solusi tunggal dari $AX=B$. □

Berdasarkan Cramer diperoleh bahwa ketunggalan dari solusi SPL $AX=B$ atas R dapat ditentukan apabila A merupakan matriks persegi yang invertibel. Dengan demikian, Aturan Cramer hanya dapat digunakan untuk kasus khusus matriks A merupakan matriks persegi yang invertibel.

3. KESIMPULAN

Dari keseluruhan pembahasan makalah ini dapat disimpulkan:

1. Kekonsistenan SPLH atas ring komutatif dijamin oleh Teorema McCoy yang menyatakan bahwa SPL $AX = 0$, dengan $A \in M_{mxn}(R)$, memiliki solusi nontrivial jika dan hanya jika $rk(A) < n$. Lebih lanjut, jika jumlah persamaan kurang dari jumlah variabel maka sistem persamaan linear homogen memiliki solusi nontrivial.
2. Syarat perlu agar SPL $AX = B$ memiliki solusi adalah $I_t(A|B) = I_t(A)$ untuk setiap $t \in \mathbb{N}$. Sedangkan, syarat cukup agar SPL $AX = B$ memiliki solusi adalah apabila terdapat ideal I di R dan elemen regular $z \in R$ sedemikian sehingga memenuhi $\mathrm{I} I_m(A|B)^* \subseteq Rz \subseteq \mathrm{I} I_m(A)$. Lebih lanjut, jika $I_m(A) = R$ maka untuk setiap $B \in R^m$ diperoleh SPL $AX = B$ memiliki solusi.
3. Jika matriks A invertibel maka berdasarkan Aturan Cramer sistem persamaan linear atas ring komutatif $AX = B$ memiliki solusi tunggal untuk setiap $B \in R^n$.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Brown, W.C., 1993, *Matrices Over Commutative Rings*, Marcel Dekker Inc., New York

[2] McCoy, N.H., 1948, *Rings and Ideals*, George Banta Company Inc., Winconsin