

## PROSEP-PROSEP DALAM MATEMATIKA SEKOLAH

Sugiman

*Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta*

### Abstrak

Simbol-simbol matematika digunakan untuk merepresentasikan suatu konsep atau suatu proses. Adapun sebuah simbol yang digunakan sekaligus untuk menyatakan keduanya disebut sebagai prosep. Makalah ini membahas pengertian prosep dan contoh prosep matematika yang diajarkan di sekolah.

**Kata kunci:** simbol, konsep, proses, prosep

### PENDAHULUAN

Gagne (Bell, 1978, Ruseffendi, 2006) menyebutkan adanya dua objek belajar dalam matematika; yaitu objek tak langsung dan objek langsung. Objek tak langsung dari belajar matematika meliputi kemampuan-kemampuan yang membentuk karakter siswa, seperti halnya: kemandirian, sikap positif, dan belajar tentang tata cara belajar yang baik (*learning to learn*). Objek langsung yang dimaksud Gagne terdiri dari fakta, konsep, aturan/prinsip, dan keterampilan. Fakta berkaitan dengan kesepakatan-kesepakatan matematik, konsep berkenaan dengan objek abstrak dalam matematika yang didefinisikan secara tegas, aturan/prinsip matematik berkenaan dengan hal-hal yang harus diikuti ketika menyelesaikan suatu masalah matematik, dan keterampilan berkenaan dengan ketepatan dan kelancaran dalam menggunakan prosedur.

Gray dan Tall (1994) mengemukakan adanya objek lain dalam belajar matematika yakni yang disebutnya dengan istilah prosep. Prosep berkenaan dengan penggunaan sebuah simbol guna merepresentasikan suatu dualitas antara konsep dan proses. Pengertian konsep sama seperti yang digagas oleh Gagne, yakni merupakan objek abstrak dari matematika. Dalam belajar, siswa membangun konsep sebagai suatu skema dalam kognisinya. Pengertian proses berkenaan dengan proses kognisi atau proses matematik, seperti misalnya “proses perkalian” dan “proses menyelesaikan sebuah persamaan”. Pengertian proses berbeda dengan prosedur. Menurut Davis (Gray and Tall, 1994), prosedur merujuk pada algoritma khusus dalam mengimplementasikan suatu proses, sebagai contoh prosedur dalam “membilang” dan “menjumlah” guna melakukan proses pembilangan dan penjumlahan. Anak melakukan prosedur ini bisa secara mental dengan cara menggunakan kemampuan kognisinya maupun secara fisik dengan menggunakan bantuan jejari tangannya.

Matematikawan seringkali menggunakan satu simbol untuk menyatakan proses dan produk dari proses tersebut sekaligus, sebagai misal simbol  $a/b$  atau  $a$  dibagi dengan  $b$  menyatakan suatu proses dan sekaligus produk. Dalam hal ini simbol  $\frac{3}{4}$  merepresentasikan suatu proses pembagian, yakni 3 dibagi 4, dan sekaligus konsep pecahan. Dalam konteks lain, simbol  $3 \times 4$  menyatakan suatu konsep “kali” dan proses penjumlahan berulang (yakni  $4 + 4 + 4$ ) dalam satu simbol yang sama. Penjumlahan berulang tersebut menghasilkan 12. Digunakannya satu simbol yang sama untuk menyatakan suatu konsep dan proses maupun suatu proses dan produk berpotensi menimbulkan keambiguan yang membingungkan siswa. Kenyataannya banyak siswa yang mengalami kesulitan dalam memahami bilangan pecahan. Untuk itu agar berhasil dalam belajar matematika, siswa harus fleksibel dalam memandang setiap simbol matematika.

Matematika menjadi lebih menarik dan lebih efisien karena digunakannya satu simbol yang sama guna menyajikan suatu konsep matematika dan suatu proses dan selanjutnya dikenal dengan prosep. Bilamana konsep berdiri sendiri tanpa dikoneksikan dengan suatu proses maka

konsep akan menjadi suatu objek abstrak yang kurang berdayaguna dan sebaliknya suatu proses tidak mungkin dikerjakan tanpa didasari konsep. Dengan demikian prosep berperan guna mempermudah siswa dalam menuliskan proses berfikir dan bernalarnya ketika menyelesaikan persoalan-persoalan matematika.

### PENGERTIAN PROSEP DALAM MATEMATIKA

Tiga dunia dalam matematika, menurut Tall (2004), terdiri dari perwujudan konseptual (*conceptual embodiment*), simbol proseptual (*proceptual symbol*), dan formal aksiomatik (*axiomatic formal*). Pertama, perwujudan konseptual dapat terjadi secara fisik maupun mental. Secara fisik dilakukan melalui kegiatan-kegiatan enaktif yang berupa aktivitas fisik (*hand-on activity*), misalkan dalam melakukan penjumlahan siswa menggunakan batang lidi ataupun jemari tangan. Aktivitas secara mental (*mind-on activity*) dilakukan dengan menggunakan pikirannya, misalkan menghitung  $3 \times 4$  dengan membayangkan 12 gelas yang ditata dengan struktur 3 baris dan 4 kolom. Kedua, simbol proseptual berkenaan dengan pemakaian lambang-lambang matematika yang mana dalam satu lambang menandai suatu konsep dan suatu proses secara simultan. Proses tersebut menghasilkan suatu produk yang mungkin berupa konsep serupa maupun konsep baru; sebagai contoh proses pada  $3 + 4$  menghasilkan bilangan 7 yang serupa dengan konsep bilangan 3 dan 4 sedangkan proses 3 dibagi 4 menghasilkan bilangan pecahan  $\frac{3}{4}$  yang merupakan konsep baru. Ketiga, formal aksiomatik digunakan dalam matematika tingkat lanjut yang terkait dengan berfikir matematik tingkat tinggi (*advanced mathematical thinking*) yang terjadi pada aljabar. Di dunia ketiga ini, penyelesaian problem matematika hanya dengan menggunakan simbol-simbol matematika formal yang kosong dari arti (*meaningless*).

Berbeda acuan dengan yang digunakan Tall seperti diuraikan di atas, Bruner membagi matematika berdasarkan aktivitas yang dilakukan yakni menjadi aktivitas enaktif, ikonik, dan simbolik (Ruseffendi, 2006). Ketiga aktivitas ini bisa terjadi pada dunia perwujudan konseptual dan simbol proseptual sedangkan aktivitas simbolik dapat terjadi pada dunia simbol proseptual maupun aksiomatik formal. Sedangkan Gravemeijer (1994) membagi dunia matematika berdasarkan tingkat keformalannya menjadi empat tingkatan, yakni: situasional/kontekstual, referensial yang disebut juga dengan *model of situation*, general yang disebut juga *model for mathematics*, dan formal matematika.

Kembali ke pembahasan proseptual sebagaimana yang diuraikan di atas. Secara eksplisit, Gray dan Tall (1992-a) mendefinisikan "... a procept to be a combined mental object consisting of both process and concept in which the same symbolization is used to denote both the process and the object which is produced by the process". Terdapat empat istilah kunci dalam definisi prosep di atas, yakni simbol, proses, produk, dan objek. Objek yang dimaksud berupa konsep serupa atau konsep baru. Sebagai contoh penjumlahan enam suku pertama pada deret aritmetika dapat disimbulkan dengan notasi sigma  $\sum_{i=1}^6(3i + 1)$ . Dalam notasi tersebut memuat konsep variabel dan konsep penjumlahan dari suku-suku yang berpola, yakni untuk  $i = 1$  diperoleh suku pertama  $3 \times 1 + 1 = 4$ , untuk  $i = 2$  diperoleh suku kedua  $3 \times 2 + 1 = 7$ , hingga untuk  $i = 6$  diperoleh suku keenam  $3 \times 6 + 1 = 19$ . Selanjutnya dengan melakukan proses mensubstitusi variabel dan menjumlahkan didapatkan hasil:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^6(3i + 1) &= (3 \times 1 + 1) + (3 \times 2 + 1) + (3 \times 3 + 1) + (3 \times 4 + 1) + (3 \times 5 + 1) + (3 \times 6 + 1) \\ &= 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 \\ &= 69.\end{aligned}$$

Dengan demikian notasi sigma  $\sum_{i=1}^6(3i + 1)$  dipandang sebagai sebuah prosep sebab notasi ini merepresentasikan konsep dan sekaligus proses; konsep yang termuat adalah konsep jumlah suku-suku berpola dan konsep variabel sedangkan proses yang termuat adalah proses substitusi dan proses menjumlahkan.

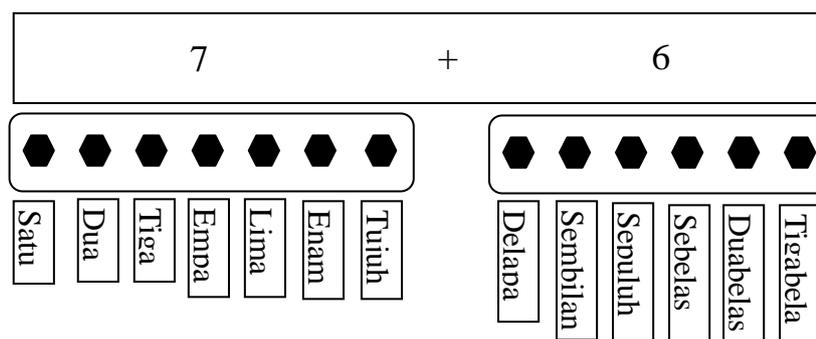
## PROSEP-PROSEP DALAM MATEMATIKA SEKOLAH

Prosep terbagi menjadi tiga tingkatan, yaitu prosep dasar (*elementary procept*), prosep antara yang berupa pengkaitan antar prosep dasar, dan prosep formal (Gray dan Tall, 2002b, Chin, 2003). Dengan kata lain, tingkatan proses tersebut secara berturut-turut dapat diberi istilah prosep informal, prosep antara, dan prosep formal. Prosep informal berkaitan dengan bahasa nonformal matematik yang memungkinkan siswa menggunakan bahasa atau notasinya sendiri dimana kekentalan konteks dari prosep masih kuat. Pada tahap prosep antara, siswa mengkoneksikan antara prosep dengan prosep lainnya, prosep dengan konsep, dan prosep dengan proses dengan menggunakan bahasa informal maupun semi-formal matematik. Tahapan yang paling tinggi dari prosep adalah tahapan formal matematik yang mana siswa sudah mencapai daya abstraksi yang tertinggi dari prosep yang bersangkutan yang ditandai dengan telah mampunya siswa memahami serta menggunakan notasi-notasi matematika secara benar.

Prosep matematik dapat ditemui di semua level sekolah, baik itu sekolah dasar, sekolah menengah pertama, maupun sekolah menengah atas. Gray dan Tall (2002-a) memberikan contoh-contoh prosep yang diajarkan di sekolah dasar, misalnya: prosep bilangan bulat (*whole number*), prosep penjumlahan (*addition*), prosep pengurangan (*subtraction*), prosep perkalian (*multiplication*), prosep pembagian (*division*), dan prosep nilai tempat (*place value*). Sebagai ilustrasi, berikut ini diuraikan secara singkat berkenaan dengan prosep jumlah dan prosep nilai tempat.

Notasi jumlah adalah “+” dan notasi ini merupakan suatu prosep karena notasi tersebut sekaligus merepresentasikan proses jumlah dan konsep jumlah. Proses penjumlahan melibatkan konsep dua bilangan yang hendak dijumlahkan. Sebagai contoh proses penjumlahan  $7 + 6$  dapat dilakukan dengan berbagai cara seperti berikut.

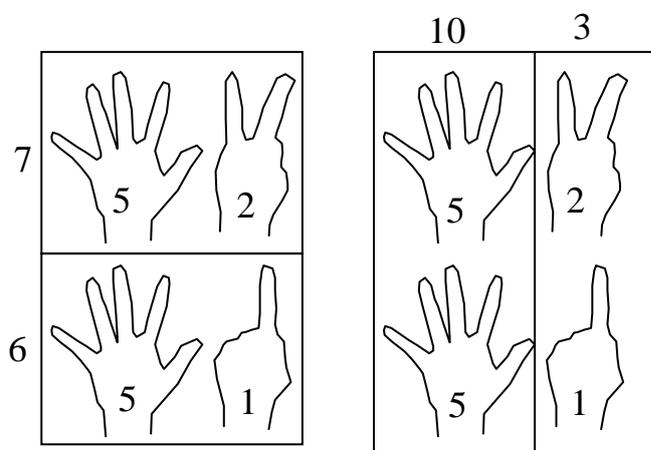
1. Siswa melakukan aktivitas enaktif yakni membilang “satu, dua, tiga, hingga tujuh” dengan menunjuk ketujuh benda satu-persatu dan kemudian dilanjutkannya dengan membilang “delapan, sembilan, sepuluh, sebelas, dua belas, tiga belas” sembari menunjuk keenam benda satu persatu-persatu. Perhatikan ilustrasinya pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Proses Penjumlahan dengan Cara Hitung Berkelanjutan dalam Prosep Jumlah

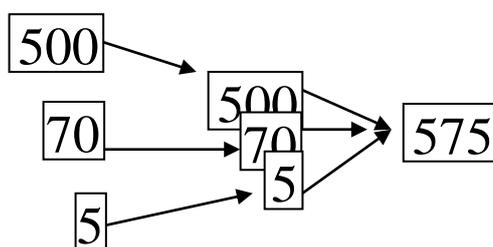
2. Siswa melakukan aktivitas enaktif dengan menggunakan jari-jari tangan miliknya dan milik temannya. Ia melakukan penggabungan dua telapak tangan sehingga jumlahnya  $5 + 5 = 10$  dan sisanya yang berjumlah  $2 + 1 = 3$ . Dengan demikian didapatkan bahwa  $7 + 6 = 10 + 3$ , penjumlahan setelah tanda sama dengan ini lebih familiar bagi siswa. Perhatikan proses yang dikerjakan siswa pada Gambar 2. Secara matematik yang dilakukan siswa adalah  $7 + 6 = (5 + 2) + (5 + 1) = 5 + 2 + 5 + 1 = 5 + 5 + 2 + 1 = (5 + 5) + (2 + 1) = 10 + 3 = 13$ . Siswa tersebut secara tidak sadar telah menggunakan sifat komutatif dan asosiatif dari operasi penjumlahan.
3. Kedua proses enaktif pada prosep jumlah di atas bisa juga dengan menggunakan aktivitas ikonik dengan menggunakan gambar piktorial atau goresan batang lidi; misalnya  $\text{|||||}$  dan  $\text{|||||}$ .

4. Siswa juga dapat melakukan proses dalam prosep jumlah secara simbolik dengan menggunakan notasi-notasi matematika atau hanya dengan menggunakan pikirannya saja.



Gambar 2. Proses Penjumlahan dengan Cara Pengelompokan Lima-Lima dalam Prosep Jumlah

Nilai tempat menggunakan notasi yang sangat kuat (*powerful*). Dalam bilangan 575 memuat dua angka lima yang benar-benar berbeda maknanya, angka lima yang pertama menyatakan 5 ratusan sedangkan angka lima kedua menyatakan 5 satuan. Dengan menggunakan nilai tempat bilangan 575 dapat dijabarkan menjadi  $500 + 70 + 5$ . Peluruhan dua angka nol pada 500 dan satu angka nol pada 70, serta struktur penulisannya menjadi 575 merupakan hal yang rumit. Beberapa guru memandang peluruhan angka nol tersebut sebagai suatu kesepakatan belaka sehingga menjadi kurang bermakna bagi siswa. Proses peluruhan tiga angka nol dalam penulisan bilangan 575 dapat diperjelas dengan menggunakan media kartu yang digunakan secara dinamis sebagaimana diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 3. Proses Dinamis atas Prosep Nilai Tempat

Gambar 3 terdiri dari tiga bagian. Bagian paling kiri menggambarkan tiga kartu bilangan yang berturut-turut bertuliskan lambang bilangan 500, 70, dan 5. Gambar bagian tengah adalah gambar tumpukan ketiga kartu tersebut manakala kartu diurutkan dari paling bawah dengan urutan kartu 500, 70, dan 5. Gambar paling kanan diperoleh setelah ketiga kartu ditumpuk sehingga diperoleh bilangan 575. Proses pembentukan prosep seperti ini dilakukan melalui aktivitas *hand-on* yakni dengan memakai kartu-kartu secara dinamis dan aktivitas *mind-on* dengan memaknai penggabungan ketiga kartu yang menandai  $500 + 70 + 5$ .

Gray dan Tall (1992-a) menguraikan contoh-contoh prosep pada materi pelajaran

matematika di sekolah dasar. Prosep-prosep yang dimaksud di atas diantaranya adalah:

1. Simbol +3 merupakan representasi dari proses “menambah tiga” atau geser ke arah kanan sejauh “tiga langkah” pada garis bilangan dan konsep bilangan bulat positif +3.
2. Simbol -4 merupakan representasi dari suatu proses “mengurangi empat” atau geser ke arah kiri sejauh “empat langkah” pada garis bilangan dan konsep bilangan bulat negatif -4.

Selain pada level sekolah dasar, Gray dan Tall (2002-b) juga memberikan contoh-contoh prosep yang terkait dengan materi matematika di sekolah menengah. Prosep-prosep tersebut antara lain:

1. Gagasan pecahan, misalkan  $\frac{19}{3}$  yang merepresentasikan proses pembagian 19 oleh 3 dan hasil dari proses pembagiannya yang berupa konsep pecahan campuran  $6\frac{1}{3}$ .
2. Simbol aljabar dengan memakai variabel, seperti  $2x + 1$  yang menyatakan proses “menambahkan dua kali  $x$  dan satu” dan sekaligus menyatakan hasil dari proses tersebut yakni “ $2x + 1$ ”. Misalkan makala  $x = 3$  maka melalui proses algoritma  $2 \times 3 + 1$  diperoleh hasil 7. Dengan demikian “ $2 \times 3 + 1$ ” merupakan suatu contoh proses sekaligus konsep dari bentuk aljabar tersebut.
3. Perbandingan trigonometri, misalnya sinus = oposit : hipotenusa, merepresentasikan baik proses kalkulasi sinus suatu besar sudut tertentu dan hasil dari perhitungan tersebut. Misalkan pada segitiga ABC yang siku-siku di C dengan BC = 3 cm dan BA = 6 cm, diperoleh  $\sin A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ . Dalam hal ini siswa melakukan proses perbandingan sinus dan mendapatkan konsep nilai dari sinus itu sendiri.
4. Limit fungsi yang dinotasikan dengan  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  juga merupakan suatu prosep. Dalam prosep ini ada proses nilai  $x$  mendekati 2 yang menghasilkan nilai  $f(x)$  yang menuju suatu nilai tertentu. Jadi dalam dalam prosep limit terdapat proses “mendekati” dan konsep nilai dari limit itu sendiri. Misalkan bila  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  dengan  $x \rightarrow 1$ , maka proses pencarian nilai  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$  dapat dilakukan dengan beberapa cara, misalnya cara pola intuitif, cara grafik, cara substitusi, dan yang paling sulit adalah dengan memakai definisi limit secara formal. Cara pola intuitif disajikan pada tabel berikut.

$x$	0,9	0,99	0,999	→	1	←	1,001	1,01	1,1
$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$	1,8	1,98	1,998	→	2	←	2,002	2,02	2,2

Pada tabel di atas, tampak adanya hubungan bila nilai  $x$  menuju 1 maka dan nilai  $\frac{x^2-1}{x-1}$  menuju 2.

5. Turunan dari fungsi  $f$  di  $a$  yang dinotasikan dengan  $f'(a)$  adalah prosep turunan fungsi  $f$  di  $x = a$ . Prosep tersebut memuat konsep nilai turunan fungsi dan proses menurunkannya. Misalkan  $f(x) = x^2$ . Proses yang terjadi pada prosep  $f'(3)$  adalah menurunkan turunan dengan menggunakan rumus seperti berikut.

$$\begin{aligned}
 f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^2 + 6h - 3^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 6 \\
 &= 6.
 \end{aligned}$$

Dengan demikian dalam prosep  $f'(3)$  memuat proses pencarian limit dan konsep nilai limit yang diperolehnya.

## KESIMPULAN

Setiap prosep matematika dinotasikan dengan memakai satu simbol yang mana simbol tunggal tersebut sekaligus merepresentasikan suatu konsep dan proses. Proses yang terjadi pada suatu prosep dapat memunculkan konsep yang termuat dan dalam kasus ini dapat dikatakan “konsep diperoleh melalui proses”. Terkadang proses yang dilalui itu sendiri yang menjadi konsep yang dimaksud.

Prosep-prosep matematika muncul dalam pelajaran matematika di semua level sekolah mulai dari SD hingga SMA. Contoh dari prosep adalah penjumlahan, nilai tempat, bilangan positif, bilangan negatif, perbandingan trigonometri, bentuk aljabar, fungsi, limit fungsi, dan turunan fungsi. Bahkan Kidron (2008) mengemukakan bahwa prosep matematika juga diajarkan kepada mahasiswa di level perguruan tinggi.

## DAFTAR PUSTAKA

- Bell, F.H. 1978. *Teaching and Learning Mathematics in Secondary Schools*. Second Printing. Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown. Company.
- Chin, Erh-Tsung. 2003. *Mathematical Proof as Formal Procept in Advanced Mathematical Thinking*. Taipei: Departement of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Gravemeijer, Koeno. 1994. *Developing Realistics Mathematics Education*. Utrecht: CD  $\beta$  Press.
- Gray, E and Tall, D. 1992-a. *Success and Failure in Mathematics: Procept and Prosedur in Primary Mathematics*. Paper in Workshop on Mathematics Education and Computer, Taipei National University, April 1992.
- Gray, E and Tall, D. 1992-b. *Success and Failure in Mathematics: Procept and Prosedur in Secondary Mathematics*. Paper in Workshop on Mathematics Education and Computer, Taipei National University, April 1992.
- Gray, E. and Tall, D. 1994. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetics. *The Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 26(2) page 115-141.
- Kidron, Ivy. 2008. Abstraction and Consolidation of The Limit Procept by Means of Instrumented Schemes: The Complementary Role of Three Different Frameworks. *Educational Study in Mathematics*, 69, 197-216. DOI: 10.1007/s10649-008-9132-6.
- Ruseffendi, E.T. 2006. *Pengantar Kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.
- Tall, D. 2004. *Introducing Three Worlds of Mathematics*. Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, UK. Downloaded on 1 February 2011 at <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/>