Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA,
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 14 Mei 2011

MODEL BLACK LITTERMAN DENGAN PENDEKATAN TEORI SAMPLING

Retno Subekti

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Abstrak

Pada model Black Litterman (BL) terdapat parameter τ yang masih tidak jelas penetapannya, sehingga beberapa pengembangan model BL sangat beragam penentuan τ, tergantung peneliti/penulisnya sendiri. Selain dengan pendekatan Bayes, formula model BL dijelaskan oleh Mankert (2003) melalui pendekatan teori sampling sehingga dapat diperlihatkan awal perolehan penentuan. Oleh karena itu penelusuran formula BL pada makalah ini penulis mencoba melengkapi penjelasan yang ditunjukkan oleh Mankert tentang bagaimana penelusuran rumusan /formula model BL dengan pendekatan teori sampling. Paparan difokuskan pada saat menentukan estimasi untuk nilai return hasil kombinasi dari market return dengan view investor tentang return.

Kata kunci: Model Black Litterman, Teori Sampling

PENDAHULUAN

Model pembentukan portofolio semakin berkembang sejak muncul pertama kali di tahun 1952 oleh Harry Markowitz dalam *Journal of Finance*. Markowitz kala itu memanfaatkan data historis dari saham sebagai dasar pembentukan portofolio berdasarkan mean dan variansinya kemudian muncul teori CAPM yang memperhatikan adanya *riskless asset* (asset tak berisiko). Pada tahun 90 an muncul model yang dikenal sebagai model Black Litterman (model BL) oleh Robert Litterman dan Fisher Black. Model ini mengkombinasikan CAPM dengan intuisi/view investor. Model Bl sudah sangat beragam pengembangannya hingga saat ini. Baik dalam penelusuran formula maupun penerapannya. Karena dalam jurnal yang pertama kali memuat tulisan tentang model BL ini yaitu pada Journal of Fixed Income tahun 1991 Fischer Black dan Robert Litterman dari Goldman Sachs tidak mengemukakan penelusuran rumusannya secara detail. Demikian juga pada tulisan mereka yang juga dipublikasikan pada tahun 1992 dalam Financial Analysts Journal (FAJ). Model BL yang mengkombinasikan return equilibrium dari model CAPM dengan views pada jurnal aslinya dikemukakan menggunakan pendekatan bayes. Pada model terdapat parameter τ yang masih tidak jelas penetapannya sehingga terlihat pada beberapa referensi pengembangan model BL, penentuan parameter τ menjadi sangat beragam tergantung peneliti/penulisnya sendiri. Seperti He and Litterman (1999) menggunakan 0,025 untuk τ sedangkan Satchel dan Scowcroft (2000) menyatakan bahwa kebanyakan orang menyatakan τ lebih dekat dengan 1. Sedangkan Mankert (2003) menggunakan formula lain untuk penentuan τ.

Karena variatifnya penentuan τ, pada tulisan tentang model BL dengan pendekatan Bayes [Retno, 2008] penulis menggunakan acuan τ yang diperoleh dari teknik yang dipaparkan oleh Mankert (2006). Oleh karena itu penelusuran formula BL pada makalah ini penulis mencoba melengkapi paparan yang ditunjukkan oleh Mankert tentang bagaimana penelusuran rumusan /formula model BL dengan pendekatan teori sampling. Paparan yang difokuskan adalah pada saat menentukan estimasi untuk nilai return hasil kombinasi dari market return dengan view investor tentang return. Maka masalah optimisasi yang dihadapi kini adalah bagaimana mendapatkan return yang memaksimalkan return kombinasi data pasar ditambah return pandangan yang diamati oleh investor.

Tujuan

Dengan mengetahui bagaimana terbentuknya formula BL melalui sudut pandang yang berbeda yaitu dengan pendekatan teori sampling diharapkan dapat menambah wawasan tentang penelusuran rumusan formula BL selain dengan pendekatan bayes.

PEMBAHASAN

Dalam menanamkan modal seorang investor akan mendiversifikasikan modalnya ke berbagai asset guna menghindari kerugian yang besar jika hanya dialokasikan pada sebuah asset saja. Sekumpulan asset ini dinamakan portofolio. Sehingga bagaimana seorang investor menjatuhkan pilihan asset yang akan dimasukkan ke dalam portofolionya merupakan hal yang sangat penting. Karena pastinya seorang investor menginginkan keuntungan yang maksimal dan jika merugi seminimal mungkin. Oleh karena itu bagaimana si investor akan membentuk sebuah portofolio yang dapat dikatakan optimal menjadi sebuah tujuan pembentukan sebuah model. Munculnya model BL dengan mengkombinasikan data historis dengan data view dari investor dapat ditelusur dengan pendekatan Bayes. Karena menggunakan asumsi prior dan informasi baru sehingga akan memberikan informasi yang lebih ter-update. Pada Mankert (2003) dipaparkan cara mengkombinasikan data historis return dengan views yang ditelusur melalui pendekatan teori sampling.

Model Black Litterman

Dari FAJ Sept/Oct 1992 dalam Global Portfolio Optimization oleh Black dan Litterman menyatakan mean dari distribusi hasil kombinasi return dan views adalah

$$\overline{E(R)} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q\right] \qquad (1)$$

Dengan,

$\overline{E(R)}$ = vector expected return sebagai vector return kombinasi
τ = konstanta
π = return market
Σ = matriks kovariansi returns
P = matriks yang mengidentifikasi bobot views untuk asset yang dinyatakan oleh investor
q = return yang dinyatakan oleh investor

Pendekatan Teori Sampling untuk model BL

Untuk membedakan notasi dengan penelusuran formula model BL dengan pendekatan Bayes maka notasi pada pendekatan teori sampling ini ditulis berbeda untuk π dan q. Pendekatan ini dimulai dengan market return yang ditunjukkan sebagai Π dan dikombinasikan dengan return yang dinyatakan oleh investor sebagai Q.

Market return

Misal terdapat *m* sampel return sejumlah *d* aset. Matriks return sebagai berikut

$$r_i = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ \vdots \\ r_{1d} \end{bmatrix}, \dots, r_m = \begin{bmatrix} r_{m1} \\ r_{m2} \\ \vdots \\ r_{md} \end{bmatrix}$$

Sampling Theory :

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$$

Maka market return Π

$$\Pi = \bar{r}^{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} \bar{r}^1 \\ \bar{r}^2 \\ \vdots \\ \bar{r}^d \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i$$

Dengan metode maximum likelihood akan dibuktikan rumus penghitungan *market return*. Diasumsikan sampel berdistribusi normal dengan vektor *expected return* μ dan matriks kovariansi Σ.

$$r_i \sim N(\mu, \Sigma), i = 1, 2, \dots, m$$

Vektor mean dari sampel juga berdistribusi normal yaitu

$$\bar{r}^{\mathrm{M}} \sim N\left(\mu, \frac{\Sigma}{m}\right)$$

Fungsi probabilitas return adalah

$$Pdf\,(r_i) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\,|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(r_i - \mu)'\,\Sigma^{-1}(r_i - \mu)\right\}$$

akan dicari nilai μ, konstanta dalam fungsi di atas diabaikan

$$\varphi(r_i) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(r_i - \mu)'\,\Sigma^{-1}(r_i - \mu)\right\}$$

Dengan menggunakan metode maksimum likelihood, fungsi likelihoodnya adalah

$$L = e^{-\frac{1}{2}(r_1-\mu)'\Sigma^{-1}(r_1-\mu)} \cdot e^{-\frac{1}{2}(r_2-\mu)'\Sigma^{-1}(r_2-\mu)} \cdot \dots \cdot e^{-\frac{1}{2}(r_m-\mu)'\Sigma^{-1}(r_m-\mu)}$$

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{m} -\frac{1}{2}(r_i - \mu)'\,\Sigma^{-1}(r_i - \mu)\right\}$$

Fungsi log-likelihood, l, ln L adalah

$$l = \ln\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{m} -\frac{1}{2}(r_i - \mu)'\,\Sigma^{-1}(r_i - \mu)\right\}\right] = \sum_{i=1}^{m} -\frac{1}{2}(r_i - \mu)'\,\Sigma^{-1}(r_i - \mu)$$

Selanjutnya l akan diturunkan terhadap masing-masing μ_j dengan $j = 1,2,\dots,d$ dan disamadengankan nol

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_j} = \frac{\partial}{\partial \mu_j}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(r_i - \mu)'\,\Sigma^{-1}(r_i - \mu)\right] = \mathbf{0}$$

dengan $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_d \end{bmatrix}$ dan $e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \to j$

$$= \frac{\partial}{\partial \mu_j}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\begin{pmatrix} r_{i1} - \mu_1 \\ r_{i2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{id} - \mu_d \end{pmatrix}'\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} r_{i1} - \mu_1 \\ r_{i2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{id} - \mu_d \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mu_j}\left[-\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1d} - \mu_d \end{bmatrix}'\Sigma^{-1}\begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1d} - \mu_d \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} r_{m1} - \mu_1 \\ r_{m2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{md} - \mu_d \end{bmatrix}'\Sigma^{-1}\begin{bmatrix} r_{m1} - \mu_1 \\ r_{m2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{md} - \mu_d \end{bmatrix}\right)\right]$$

Untuk j = 1

$$= -\frac{1}{2}\left[-\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}r_{11}-\mu_1\\r_{12}-\mu_2\\\vdots\\r_{1d}-\mu_d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}r_{11}-\mu_1\\r_{12}-\mu_2\\\vdots\\r_{1d}-\mu_d\end{bmatrix}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+(-)\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}r_{m1}-\mu_1\\r_{m2}-\mu_2\\\vdots\\r_{md}-\mu_d\end{bmatrix}\right.$$
$$\left.-\begin{bmatrix}r_{m1}-\mu_1\\r_{m2}-\mu_2\\\vdots\\r_{md}-\mu_d\end{bmatrix}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right]=\mathbf{0}$$

Untuk j = 2

$$= -\frac{1}{2}\left[-\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}r_{11}-\mu_1\\r_{12}-\mu_2\\\vdots\\r_{1d}-\mu_d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}r_{11}-\mu_1\\r_{12}-\mu_2\\\vdots\\r_{1d}-\mu_d\end{bmatrix}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+(-)\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}r_{m1}-\mu_1\\r_{m2}-\mu_2\\\vdots\\r_{md}-\mu_d\end{bmatrix}\right.$$
$$\left.-\begin{bmatrix}r_{m1}-\mu_1\\r_{m2}-\mu_2\\\vdots\\r_{md}-\mu_d\end{bmatrix}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right]=\mathbf{0}$$

Dan seterusnya hingga,
Untuk j = d

$$= -\frac{1}{2}\left[-\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}r_{11}-\mu_1\\r_{12}-\mu_2\\\vdots\\r_{1d}-\mu_d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}r_{11}-\mu_1\\r_{12}-\mu_2\\\vdots\\r_{1d}-\mu_d\end{bmatrix}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}+\cdots+(-)\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}r_{m1}-\mu_1\\r_{m2}-\mu_2\\\vdots\\r_{md}-\mu_d\end{bmatrix}\right.$$
$$\left.-\begin{bmatrix}r_{m1}-\mu_1\\r_{m2}-\mu_2\\\vdots\\r_{md}-\mu_d\end{bmatrix}\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right]=\mathbf{0}$$

Maka dapat disimpulkan

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_j} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(-\Sigma^{-1}e_j'(r_i-\mu^{*M})-(r_i-\mu^{*M})'e_j\Sigma^{-1}\right)=\mathbf{0}$$

Karena

$$(r_i-\mu^{*M})'e_j\,\Sigma^{-1}=\left((r_i-\mu^{*M})'e_j\,\Sigma^{-1}\right)=\Sigma^{-1}\,e_j'(r_i-\mu^{*M})$$

maka

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(-\Sigma^{-1}e_j'(r_i-\mu^{*M})-\Sigma^{-1}\,e_j'(r_i-\mu^{*M})\right)=0$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}2\left(-\Sigma^{-1}e_j'(r_i-\mu^{*M})\right)=0$$
$$-\Sigma^{-1}e_j'\sum_{i=1}^{m}(r_i-\mu^{*M})=0$$
$$-m\Sigma^{-1}e_j'(r_i-\mu^{*M})=0$$
$$\bar{r}^{\mathrm{M}}-\mu^{*M}=0$$
$$\bar{r}^{\mathrm{M}}=\mu^{*M}$$

berlaku untuk j = 1, 2, ..., d

Jadi

$$\mu^{*M} = \bar{r}^{M} = \begin{bmatrix} \bar{r}^1 \\ \bar{r}^2 \\ \vdots \\ \bar{r}^d \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_i = \Pi$$

$$\mu^{*M} = \Pi \tag{2}$$

Selanjutnya untuk menyatakan view, diasumsikan bahwa investor mengamati n sampel *return*. Investor dapat memiliki pandangan hanya untuk sejumlah k aset dari d aset yang terdapat dalam portofolio. Atau dengan kata lain investor tidak perlu menyatakan pandangannya (*view*) pada tiap-tiap aset pada semua portofolio namun cukup pada sejumlah asset pada portofolio yang menjadi perhatian investor.

P dinyatakan dalam bentuk matriks dimana tiap posisinya menyatakan bobot pada aset tertentu dan portofolio tertentu. Tiap baris matriks mewakili satu *view* pada suatu portofolio dan untuk masing-masing *view*,

$$P = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{k1} & \cdots & w_{kd} \end{bmatrix}$$

w_{ij} menyatakan bobot pada aset i dan *view* pada portofolio j.

Return yang dinyatakan investor dalam tiap pandangan (*view*) dinyatakan dalam bentuk k matriks kolom Q,

$$Q = P\bar{r}_l \tag{3}$$

Dengan $Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$

Dan Ω merupakan matriks diagonal yang mengekspresikan tingkat kepercayaan investor (*level of confidence*) terhadap tiap – tiap pandangan (*view*).

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_k^2 \end{bmatrix}, \omega_i^2 = p_i \Sigma p_i{}' \tau$$

$r_j \sim N(\mu, \Sigma)$ merupakan sampel *return* yang menjadi pengamatan investor dan return saham j dari investor adalah $q_j = Pr_j$ dengan $q_j \sim N(P\mu, \Omega)$

Fungsi probabilitas return menurut *view* investor adalah sebagai berikut

$$p(q_j) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(q_j - P\mu)' \, \Omega^{-1}(q_j - P\mu)\right\}$$

Karena akan dicari nilai maksimum dari μ, maka dalam penyelesaian menggunakan fungsi likelihood, konstanta atau yang tidak memuat μ diabaikan.

$$\varphi(q_j) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(q_j - P\mu)' \, \Omega^{-1}(q_j - P\mu)\right\}$$

Fungsi likelihoodnya adalah sebagai berikut

$$L = \varphi(q_1)\varphi(q_2)\ldots\varphi(q_n)$$

$$L = \exp\left\{-\frac{1}{2}(q_1 - P\mu)' \, \Omega^{-1}(q_1 - P\mu)\right\} + \ldots + \left\{-\frac{1}{2}(q_n - P\mu)' \, \Omega^{-1}(q_n - P\mu)\right\}$$

$$= \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} -\frac{1}{2}(q_j - P\mu)' \, \Omega^{-1}(q_j - P\mu)\right\}$$

Dan fungsi log-likelihoodnya adalah

$$l = \ln L = \ln\left[\exp\left\{\sum_{j=1}^{n} -\frac{1}{2}\left(q_j - P\mu\right)' \Omega^{-1}(q_j - P\mu)\right\}\right]$$
$$= \sum_{j=1}^{n} -\frac{1}{2}\left(q_j - P\mu\right)' \Omega^{-1}(q_j - P\mu)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(q_j - P\mu\right)' \Omega^{-1}(q_j - P\mu)$$

Akan dilakukan penurunan fungsi l terhadap μ_i dengan i = 1, 2, ⋯, k

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_i} = \frac{\partial}{\partial \mu_i}\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(q_j - P\mu\right)' \Omega^{-1}(q_j - P\mu)\right] = 0$$

Mengingat $q_j = Pr_j$ dan

$$q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ \vdots \\ q_{1d} \end{bmatrix}, \dots, q_n = \begin{bmatrix} q_{n1} \\ q_{n2} \\ \vdots \\ q_{nd} \end{bmatrix} \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k1} & \cdots & w_{kd} \end{bmatrix} \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_k^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i}\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(Pr_j - P\mu\right)' \Omega^{-1}(Pr_j - P\mu)\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i}\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(P(r_j - \mu)\right)' \Omega^{-1}(P(r_j - \mu))\right] = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mu_i}\left[-\frac{1}{2}\left(\left(P\begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix}\right)' \Omega^{-1}\left(P\begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix}\right) + \cdots \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(P\begin{bmatrix} r_{n1}-\mu_1 \\ r_{n2}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{nk}-\mu_k \end{bmatrix}\right)' \Omega^{-1}\left(P\begin{bmatrix} r_{n1}-\mu_1 \\ r_{n2}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{nk}-\mu_k \end{bmatrix}\right)\right)\right] = 0$$

Untuk i =1

$$= -\frac{1}{2}\left(-\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} P'\Omega^{-1}P\begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix}' P'\Omega^{-1}P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots \right.$$
$$\left. + (-)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} P'\Omega^{-1}P\begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix}' P'\Omega^{-1}P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

i = 2

$$= -\frac{1}{2}\left(- \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} P'\Omega^{-1}P \begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix}' P'\Omega^{-1}P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots \right.$$
$$\left. + (-) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} P'\Omega^{-1}P \begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix}' P'\Omega^{-1}P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

dan seterusnya hingga
i = k

$$= -\frac{1}{2}\left(- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} P'\Omega^{-1}P \begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix}' P'\Omega^{-1}P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} + \cdots \right.$$
$$\left. + (-) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} P'\Omega^{-1}P \begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11}-\mu_1 \\ r_{12}-\mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k}-\mu_k \end{bmatrix}' P'\Omega^{-1}P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} \right) = 0$$

berlaku untuk i = 1, 2, …, k.
Sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_i} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(-e_j' P'\Omega^{-1}(r_j - \mu_I{}^*) - (r_j - \mu_I{}^*)' P'\Omega^{-1} P e_j\right) = 0$$

Karena $\left(r_j - \mu_I{}^*\right)' P'\Omega^{-1} P e_j = e_j' P'\Omega^{-1}(r_j - \mu_I{}^*)$ maka

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_i} = \sum_{j=1}^{n}\left(e_j' P'\Omega^{-1} P (r_j - \mu_I{}^*)\right) = 0$$

Dan $\quad e_j' \sum_{j=1}^{n} P'\Omega^{-1} P\left(r_j - \mu_I{}^*\right) = e_j' P'\Omega^{-1} \sum_{j=1}^{n} P\left(r_j - \mu_I{}^*\right) = 0$

$$\sum_{j=1}^{n} P\left(r_j - \mu_I{}^*\right) = \sum_{j=1}^{n} P r_j - nP\mu_I{}^* = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} P r_j = nP\mu_I{}^*$$

$P\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_j = P\mu_I{}^*$ maka $\quad P\bar{r}_I = \quad P\mu_I{}^*$

$$Q = \quad \mu^* \qquad (4)$$

Kombinasi Market return dan Pandangan (*view*) Investor

Dengan menggunakan pendekatan teori sampling, selanjutnya akan dicari estimasi untuk nilai return hasil kombinasi dari market return dengan view investor tentang return. Maka masalah optimisasi yang dihadapi kini adalah bagaimana mendapatkan return yang memaksimalkan return kombinasi data pasar ditambah return pandangan yang diamati oleh si investor

$$\max_{\mu} \sum_{i=1}^{m} -\frac{1}{2}(r_i - \mu)' \Sigma^{-1}(r_i - \mu) + \sum_{j=m+1}^{m+n} -\frac{1}{2}\left(q_j - P\mu\right)' \Omega^{-1}(q_j - P\mu)$$

dilakukan penurunan terhadap μ_j dan hasilnya disamakan dengan 0

$$\frac{\partial}{\partial \mu^k}\left[\sum_{i=1}^{m} -\frac{1}{2}(r_i-\mu)'\Sigma^{-1}(r_i-\mu) + \sum_{j=m+1}^{m+n} -\frac{1}{2}(q_j-P\mu)'\,\Omega^{-1}(q_j-P\mu)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(-e_k'\Sigma^{-1}(r_i-\mu^*)'-(r_i-\mu^*)\Sigma^{-1}e_k\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=m+1}^{m+n}\left(-e_j'P'\Omega^{-1}(q_j-P\mu^*)'-(q_j-P\mu^*)'P'\Omega^{-1}Pe_j\right)=0$$

$$\Leftrightarrow e_k'\left(m\Sigma^{-1}(\Pi-\mu^*)+nP'\Omega^{-1}(Q-P\mu^*)\right)=0$$

Berlaku untuk k = 1, 2, ⋯, n+m, selanjutnya diperoleh

$$\frac{m}{n}\Sigma^{-1}(\Pi-\mu^*)+P'\Omega^{-1}(Q-P\mu^*)=0$$

Ditentukan bahwa $\tau=\frac{n}{m}$

$$\left(\tau^{-1}\Sigma^{-1}\Pi-\tau^{-1}\Sigma^{-1}\mu^*\right)+\left(P'\Omega^{-1}Q-P'\Omega^{-1}P\mu^*\right)=0$$

$$\mu^*(P'\Omega^{-1}P+(\tau\Sigma)^{-1})=P'\Omega^{-1}Q+(\tau\Sigma)^{-1}\Pi$$

Maka diperoleh μ^* sebagai expected return baru yang sama dengan $\overline{E(R)}$ yaitu

$$\mu^* = \left[P'\Omega^{-1}P+(\tau\Sigma)^{-1}\right]^{-1}\left[P'\Omega^{-1}Q+(\tau\Sigma)^{-1}\Pi\right]$$

$$=\left[(\tau\Sigma)^{-1}+P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi+P'\Omega^{-1}Q\right]$$

DAFTAR PUSTAKA

Black, Fischer and Litterman, Robert. (1992). *Global Portfolio Optimization*, Financial Analysts Journal ;Sep/Oct 1992 ;48.

Becker**.** (2007). *The Mathematics of the Black-Litterman Model, An Introduction for the Practitioner*. Zephyr Associates, Inc.

Härdle, Wolfgang dan Léopold Simar. (2003). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. New York : Spinger.

He, Guangliang dan Robert Litterman. (1999). *The Intuition Behind Black Litterman Model Portofolios*. London : Goldman Sachs & Co Husnan.

Suad. (2005). *Dasar-dasar Teori Portofolio dan Analisis Sekuritas*. Yogyakarta : UPP AMP YKPN.

Luenberger, David G,.(1998). *Investment Science*. New York:Oxford University Press.

Mankert, Charlotta. (2003). *The Black Litterman Model-Matematical and Behavioral Finance Approaches Toward Its Use in Practice*. Stockholm: Royal Institute of Technology.

Meucci. (2005). *Risk and Aset Allocation*. Springer.

Meuci and Litterman (2006). Beyond Black-Litterman: views on non-normal markets . www.risk.net diakses tanggal 28 Maret 2011.

Retno, S. (2008) Aplikasi Model Black Litterman dengan Pendekatan Bayes (Studi Kasus : Portofolio dengan 4 saham dari S&P500). Prosiding Seminar Nasional Matematika Jurusan Pendidikan Matematika UNY: 2008.

Retno, S.(2009). Keunikan Model Black Litterman Dalam Pembentukan Portofolio Prosiding Seminar Nasional Matematika Jurusan Pendidikan Matematika UNY: 2009.

Rosella Giacometti, et all (2005) Stable distributions in the Black-Litterman approach to asset allocation. http://www.pstat.ucsb.edu/research/papers/BLapproach2005.pdf diakses pada tanggal 28 Maret 2010.

Satchell and Scowcroft. (2000). A Demystification Of The Black–Litterman Model:Anaging Quantitative And Traditional Portfolio Construction. Vol. 1, 2, 138–150 *Journal of Asset Management*.