DIGRAF EKSENTRIK DARI GRAF BUKU

Sri Kuntari[1] NugrohoArif Sudibyo [2] dan Tri Atmojo Kusmayadi[3]

[1,2,3.]*Jurusan Matematika FMIPA UNS*

Abstrak

Diberikan G suatu graf dengan himpunan berhingga *vertex* $V(G)$ dan himpunan edge $E(G)$. Jarak dari *vertex* u ke *vertex* v di G, dinotasikan $d(u,v)$, adalah panjang dari *path* terpendek dari *vertex* u ke v. Eksentrisitas *vertex* u dalam graf G adalah jarak maksimum dari *vertex* u ke sebarang *vertex* yang lain di G, dinotasikan $e(u)$. *Vertex* v disebut *vertex* eksentrik dari u jika $d(u,v)=e(u)$. Digraf eksentrik $ED(G)$ dari suatu graf G adalah suatu graf yang mempunyai himpunan *vertex* yang sama dengan himpunan *vertex* G, dan terdapat suatu *arc* (*edge* berarah) yang menghubungkan *vertex* u ke v jika v adalah suatu *vertex* eksentrik dari u. Dalam makalah ini diselidiki digraf eksentrik pada graf buku yang merupakan salah satu kelas graf.

Kata kunci: eksentrisitas, digraf eksentrik, graf buku

PENDAHULUAN

Pengertian dan notasi yang berkaitan dalam makalah ini diambil dari Chartrand dan Lesniak [2] serta Harris *et al.* [8]. Diketahui graf G dengan himpunan vertex $V(G)$ dan himpunan edge $E(G)$. Jarak dua *vertex* u dan v dalam G, dinotasikan dengan $d(u,v)$, merupakan panjang *path* terpendek dari *vertex* u ke *vertex* v. Jika tidak ada *path* yang menghubungkan kedua *vertex*, $d(u,v) = \infty$. Eksentrisitas dari *vertex* u dalam graf G didefinisikan sebagai jarak maksimum dari *vertex* u ke sembarang *vertex* lainnya dalam G. eksentrisitas *vertex* u dinotasikan sebagai $e(u) = \max\{d(u, v) \mid v \in V(G)\}$. Sedangkan *vertex* v merupakan *vertex* eksentrik dari *vertex* u jika $d(u,v)=e(u)$. Digraf eksentik dari graf G yaitu $ED(G)$ adalah graf yang mempunyai himpunan *vertex* yang sama dengan G, $V(ED(G)) = V(G)$ dan terdapat *arc* (*edge* berarah) yang menghubungkan setiap *vertex* dalam G ke *vertex* eksentriknya. Suatu *arc* dalam digraf D dikatakan *arc* simetri jika *arc* tersebut menghubungkan *vertex* u dan v, demikian juga sebaliknya.

Penggunaan eksentrisitas di berbagai bidang telah dipelajari oleh banyak peneliti. Bidang tersebut antara lain menentukan batas jaringan struktur protein [12], jaringan ATM [1], dan jaringan radio [4]. Demikian juga perkembangannya di bidang Matematika, diantaranya dapat dilihat pada barisan eksentrik dan *cycle* dalam graf [9], karakterisasi dari digraf eksentrik [7] dan diameter determinasi pada keluarga graf tertentu [5]. Sedangkan penyelidikan digraf eksentrik dari beberapa kelas graf telah dipublikasikan oleh Kusmayadi dkk. [10, 11]. Dalam makalah ini diselidiki digraf eksentrik pada klas graf yang lain yaitu graf buku.

PEMBAHASAN

Graf buku B_m, m≥3 adalah graf *cartesian product* $S_{m+1}\times P_2$, dengan S_m adalah graf bintang dan P_2 adalah lintasan dengan dua *vertex*, definisi ini diambil dari Gallian [6]. Diperlukan tiga langkah dalam menentukan digraf eksentrik dari graf tersebut. Langkah pertama adalah menentukan jarak dari *vertex* u ke *vertex* v dalam graf G yang merupakan panjang lintasan terpendek dari v*ertex* u ke *vertex* v. Tetapi, jika tidak ada lintasan yang menghubungkan kedua *vertex* tersebut, $d(u,v) = \infty$. Selanjutnya untuk menentukan jarak dari *vertex* u ke sembarang *vertex* v dalam graf G digunakan algoritma Breadth First Search (BFS) Moore yang diambil dari Chartrand and Oellermann [3] yaitu

1. diambil salah satu vertex dalam graf G, misal u dan dilabeli 0 yang menyatakan jarak u ke dirinya sendiri, sedangkan semua *vertex* u dilabeli ∞,
2. semua *vertex* berlabel ∞ yang *adjacen*t dengan u dilabeli 1,
3. semua *vertex* berlabel ∞ yang *adjacent* dengan *vertex* berlabel 1 dilabeli 2, dan seterusnya sampai *vertex* yang dimaksud misal v berjarak hingga. Label setiap *vertex* menyatakan jarak dari *vertex* u.

Langkah kedua menentukan *vertex* eksentrik dari *vertex* u, dinotasikan dengan $e(u)$, yaitu vertex dalam graf G yang memiliki jarak maksimum dari u. *Vertex* v adalanh suatu *vertex* eksentrik dari u jika $d(u,v)=e(u)$. Langkah ketiga, menghubungkan *vertex* u dangan *vertex* eksentriknya dengan suatu *arc d* diperoleh digraph eksentrik dari graf yang diberikan.

Diberikan graf buku B_n, n≥3 dengan $V(B_n)=\{v_1, v_2, u_1, u_2, \ldots, u_{2n}\}$ dan himpunan egde $E(B_n)=\{v_1v_2, v_1u_j, j=n+1, \ldots, 2n, v_2u_j, j=1, \ldots, n, u_ju_{n+j}, j=1, \ldots, n\}$. Ketiga langkah menentukan digraf eksentrik dari graf buku disajikan dalam lema dan teorema.

Lemma 1. Diberikan graf buku B_n, $n\geq 3$ maka eksentrisitas dari *vertex* v_i adalah 2, i =1, 2 sedangkan eksentrisitas *vertex* u_j adalah 3, $j=1, 2, \ldots, 2n$.

Bukti. Eksentrisitas dari masing-masing *vertex* dalam B_n, n≥3 dapat dengan mudah didapat menggunakan algoritma Breadth First Search (BFS) Moore. ∎

Lema 2. Diberikan graf buku B_n, $n\geq 3$ maka *vertex* eksentrik

$$\begin{cases} v_1 \ adalah\ u_j & j=1,2,\cdots,n \\ v_2 \ adalah\ u_j & j=n+1,n+2,\cdots,2n \\ u_i,\ i=1,\cdots,n \ adalah\ u_j & j=n+1,\cdots,n+j-1,n+j+1,\cdots,2n \\ u_i,\ i=n+1,\cdots,2n \ adalah\ u_j & j=1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n \end{cases}$$

Bukti. Bukti. Diperoleh vertex eksentrik dari suatu vertex menggunakan Lemma 1. ∎

Lema 3. Diberikan graf buku B_n, $n\geq 3$ maka digraph eksentrik dari B_n adalah digraph yang mempunyai himpunan *vertex* $V(ED(B_n))=\{v_1, v_2, u_1, \ldots, u_{2n}\}$ dan himpunan *arc*

$$A(ED(B_n))=\begin{cases} \overrightarrow{v_1u_j} & j=1,2,\cdots,n \\ \overleftrightarrow{u_iv_j} & i=1,2,\cdots,n \qquad j=n+1,...,2n;\ j\neq n+i \\ \overrightarrow{v_2u_j} & j=n+1,\cdots,2n \end{cases}$$

Bukti. Menggunakan Lema 2, dengan menghubungkan suatu vertex dengan vertex eksentriknya diperoleh *arc* $\overrightarrow{v_1u_j}$, $j=1, \ldots n$, *arc* $\overrightarrow{v_2u_j}$, j= n+1, …, 2n dan *arc* $\overleftrightarrow{u_iu_j}$, $i=1, \ldots, n$; $j = n+1, \ldots, 2n$; $j\neq n+i$. ∎

Teorema 4. Diberikan graf buku B_n, n≥3 maka digraph eksentrik dari B_n adalah digraf $S_n\cup (K_{n,n} - M) \cup S_n$ dengan S_n graf bintang, $K_{n,n}$ graf bipartit lengkap dan *matching* dari $K_{n,n}$ yaitu $M=\left\{\overleftrightarrow{u_iu_j},\ i=1,\cdots,n;\ j=n+1,\cdots,2n;\ j=n+i\right\}$ dengan himpunan *vertex*

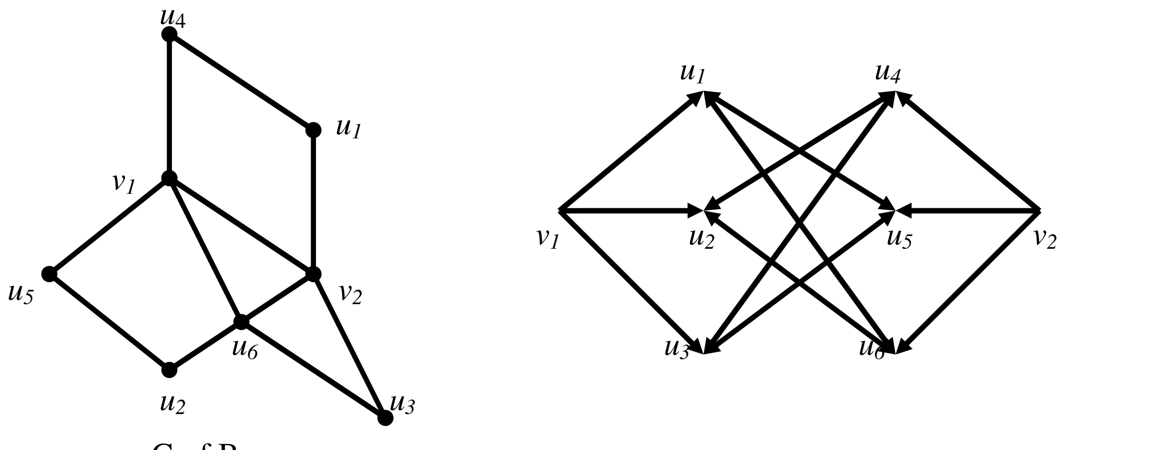
$$V(ED(B_n)) = \begin{cases} V(S_n) = \{v_1, u_1, \cdots, u_n\} \\ V(K_{n,n} - M) = \{u_1, u_2, \cdots, u_{2n}\} \\ V(S_n) = \{v_2, u_{n+1}, \cdots, u_{2n}\} \end{cases}$$

dan himpunan *arc*

$$A(ED(B_n)) = \begin{cases} A(S_n) = \{\overrightarrow{v_1 u_j},\ j = 1, 2, \cdots, n\} \\ A(K_{n,n} - M) = \{\overleftrightarrow{u_i u_j}, i = 1, \cdots, n; j = n+1, \cdots, 2n; j \neq n+i\} \\ A(S_n) = \{\overrightarrow{v_2 u_j}, j = n+1, \cdots, 2n\} \end{cases}$$

Bukti. Dari Lema 3, *vertex* v_1 adjacent dengan *vertex* u_j, j=1,..., n. *Vertex* u_i saling a*djacent* dengan *vertex* u_j untuk i=1,...,n; j= n+1, ..., 2n dan $j \neq n+i$. *Arc* yang menghubungkan *vertex* u_i dengan *vertex* u_j tersebut merupakan *arc* simetrik. Selanjutnya *vertex* v_2 *adjacent* dengan *vertex* u_j, j=n+1, ..., 2n. Berdasar *arc* yang terbentuk, digraf eksentrik graf B_n, $n \geq 3$ dapat dikelompokkan menjadi graf bintang S_n mempunyai himpunan *vertex* $V(S_n)=\{v_1, u_1, \ldots, u_n\}$ dan himpunan *arc* $A(S_n)=\{\overrightarrow{v_1 u_j},\ j = 1, 2, \cdots, n\}$, graf $K_{n,n} - M$ mempunyai himpunan *vertex* $V(K_{n,n} - M) = \{u_1, \cdots, u_{2n}\}$ dan $A(K_{n,n} - M) = \{\overleftrightarrow{u_i u_j}, i = 1, \cdots, n; j = n+1, \cdots, 2n; j \neq n+i\}$ sebagai himpunan *arc* dengan *matching* dari $K_{n,n}$ adalah $M=\{\overleftrightarrow{u_i u_j}, i = 1, \cdots, n; j = n+1, \ldots, 2n; j = n+i\}$. Serta graf bintang S_n dengan himpunan vert*ex* $V(S_n)=\{v_2, u_1, \ldots, u_n\}$ dan himpunan *arc* $A(S_n)=\{\overrightarrow{v_2 u_j}, j = n+1, \cdots, 2n\}$. ■

Selanjutnya diberikan contoh graf buku B_3 beserta digraf eksentriknya yang disajikan dalam Gambar 1.



Graf B_3

Gambar 1. Graf B_3 dan Digraf Eksentriknya

KESIMPULAN

Digraf eksentrik dari graf buku adalah digraf $S_n \cup (K_{n,n}-M) \cup S_n$, dengan S_n graf bintang, $K_{n,n}$ graf bipartit lengkap dan M *matching* dari $K_{n,n}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bermond, J. E., N. Marlin, D Peleg and S. Perennes, Directed Virtual Path Layouts in ATM Networks, *Theoretical Computer Science* 291: 3-28, 2003.

[2] Cartrand, G. And L. Lesniak, *Graphs and Digraphs* 3rd ed., Chapman and Hall/RCR, New York, 1996.

[3] Chartrand, G. and O. R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc, California, 1993.

[4] Clementi, A. E. F., A. Monti and R. Silvestri, Distributed Broadcast in Radio Networks of Unknown Topology, *Theoretical Computer Science* 302: 337-364, 2003.

[5] Corneil, D. G., F.F. Dragan, M. Habib and I. Paul, Diameter Determination on Restricted Graph Families, *Discrete Applied Mathematics* 113:143-166, 2001.

[6] Galian, J. A., A Dynamic Survey of Graph Labeling, The Electronic Journal of Combinatorics 17: 1-246, 2010.

[7] Gimbert, J., N. lopez, M. Miller and J. Ryan, Characterization of Eccentric Digraphs, *Discrete Mathematics* 306:210-219, 2006.

[8] Harris, J. M., J. L. Hirst and M. J. Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory* 2nd ed.. Springer, New York, 2000.

[9] Haviar, A., P. Hrnciar and G. Monoszava, Eccentric Sequence and Cycles in Graphs, *Acta Univ. M. Belii Math* no 11:7-25, 2004.

[10] Kusmayadi, T. A. and M. A. Rivai, The Eccentric Digraph of Ladder Graph, Prosiding Seminar Nasional Matenatika 2010 " Matematika dalam Riset Teknologi dan Pendidikan " :16-26, 2010.

[11] Kusmayadi, T. A. dan F. Fathmawatie**,** The Eccentric Digraph of a Lintang Graph, Math-Info vol 1 no 12: 8-12 Juli 2008.

[12] Vishveshwara, S., K. V Brinda and N. Kannan, Protein Structure: Insights from Graph Theory, *Journal of Theoretical and Computational Chemistry* vol 1 no1:1-25, 2002.