Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA,
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 14 Mei 2011

DIGRAF EKSENTRIK DARI GRAF *COCKTAIL PARTY*

Nugroho Arif Sudibyo[1], Sri Kuntari[2], dan Tri Atmojo Kusmayadi[3]

[1,2,3.] *Jurusan Matematika FMIPA UNS*
Email: nugroho_sudibyo@yahoo.com

Abstrak

Misal G adalah suatu graf dengan himpunan *vertex* $V(G)$ dan himpunan vertex $E(G)$. Jarak dari *vertex u* ke *vertex v* di *G*, dinotasikan $d(u,v)$, adalah panjang dari path terpendek dari *vertex u* ke *v*. Eksentrisitas *vertex u* dalam graf *G* adalah jarak maksimum dari *vertex u* ke sebarang *vertex* yang lain di *G*, dinotasikan $e(u)$. *Vertex v* adalah suatu *vertex* eksentrik dari *u* jika $d(u,v)=e(u)$. Digraf eksentrik $ED(G)$ dari suatu graf *G* adalah suatu graf yang mempunyai himpunan *vertex* yang sama dengan himpunan *vertex G*, dan terdapat suatu *arc* (*edge* berarah) yang menghubungkan *vertex u* ke *v* jika *v* adalah suatu *vertex* eksentrik dari *u*. Dalam makalah ini diselidiki digraf eksentrik dari suatu kelas graf yaitu graf *cocktail party* $H_{m,n}$, untuk $m = 2$.

Kata kunci : eksentrisitas, digraf eksentrik, graf cocktail party

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang menarik dan banyak dikembangkan (lihat [3]). Teori graf dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, seperti masalah transportasi, masalah lalu lintas, dan lain sebagainya. Sebagai contoh teori graf dapat diaplikasikan untuk menentukan kota terjauh dengan lintasan terpendek dari suatu kota ke kota lain di suatu daerah. Untuk menyelesaikan penentuan lintasan terpendek dapat digunakan suatu konsep digraf eksentrik, dengan *vertex* adalah kota dan jalan yang menghubungkan dua kota adalah *edge*.

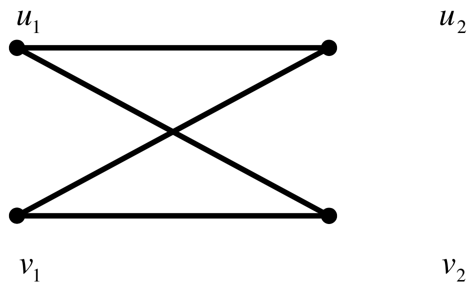
Misalkan *G* adalah graf yang memiliki himpunan *vertex* $V(G)$ dan himpunan *edge* $E(G)$. Jarak (*distance*) dari *vertex u* ke *v* di *G* adalah panjang lintasan (*path*) terpendek dari *vertex u* ke *v*, dinotasikan dengan $d(u,v)$. Jika tidak ada lintasan yang menghubungkan *vertex u* dan *v*, maka $d(u,v) = \infty$. Eksentrisitas (*eccentricity*) *vertex u* pada graf *G*, dinotasikan $e(u)$, adalah jarak terjauh (lintasan terpendek maksimum) dari *vertex u* ke setiap *vertex* di *G*. Untuk pengertian di atas, dapat dituliskan $e(u) = \max\{d(u,v) \mid v \in V(G)\}$. *Vertex v* adalah *vertex* eksentrik (*eccentric vertex*) dari *u* jika $d(u,v) = e(u)$.

Digraf eksentrik dari graf *G*, dinotasikan $ED(G)$, adalah graf yang memiliki himpunan *vertex* yang sama dengan himpunan *vertex* di *G*, $V(ED(G)) = V(G)$, dan *arc* (*edge* yang berarah) menghubungkan *vertex u* ke *v* jika *v* adalah *vertex* eksentrik dari *u*. Boland dan Miller [1] menjelaskan kesimpulan dari penelitian Fred Buckley bahwa hampir setiap graf *G*, digraf eksentriknya adalah $ED(G) = \overline{G}^*$, dimana $\overline{G}^*$ adalah komplemen dari *G* yang setiap *edge*-nya diganti dengan *arc* simetrik. Selanjutnya eksentrik digraf diteliti dan dikembangkan oleh Gimbert *et. al.* [4] kemudian Wang, dan Sun [6] pada tahun 2008. Pada makalah ini akan dibahas digraph eksentrik pada graf *cocktail party* $H_{2,n}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sutton dan Miller [5] mendefinisikan graf *cocktail party* $H_{2,n}$, $n \geq 2$, sebagai graf dengan himpunan *vertex* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2n}\}$ dipartisi menjadi *n* himpunan saling asing $V = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ untuk setiap *size 2* sedemikian sehingga $v_i v_j \in E$ untuk semua

$i, j \in \{1,2,\ldots,2n\}$ dengan $i \in I_p, j \in I_q, p \neq q$. Graf *cocktail party* $H_{2,n}$ disebut juga sebagai disjoint complement dari n copy graf lengkap K_2. Berikut adalah contoh graf *cocktail party* $H_{2,2}$, dengan himpunan *vertex* $V(H_{2,2}) = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$.



Berikut ini langkah-langkah mencari digraf eksentrik dari $H_{2,n}$. Langkah pertama, ditentukan jarak *d*(*u*,*v*) dari *vertex u* ke setiap *vertex v* dalam graf dengan menggunakan algoritma *Breadth First Search* (BFS) *Moore* menurut Chartrand dan Oelermann [2] sebagai berikut.

1. Diambil salah satu *vertex*, misal *u*, dan dilabeli 0 yang menyatakan jarak dari *u* ke dirinya sendiri, sedangkan semua *vertex* selain *u* dilabeli ∞.
2. Semua *vertex* berlabel ∞ yang *adjacent* dengan *u* dilabeli 1.
3. Semua *vertex* berlabel ∞ yang *adjacent* dengan *vertex* berlabel 1 dilabeli 2 dan demikian seterusnya sampai *vertex* yang dimaksud, misal *v*, sudah berlabel hingga. Dalam hal ini, label dari setiap *vertex* menyatakan jarak dari *vertex u*.

Langkah kedua ditentukan eksentrisitas dari *vertex u* dengan memilih maksimal jarak dari *vertex u* tersebut, sehingga diperoleh *vertex* eksentrik *v* dari *u* *d*(*u*,*v*) = *e*(*u*). Langkah terakhir, dari *vertex u* ke *vertex* eksentriknya dihubungkan oleh *arc*, sehingga diperoleh digraf eksentrik dari graf-graf tersebut. Berikut ini adalah hasil dari digraf eksentrik graf *cocktail party* $H_{2,n}$.

Lema 1. *Misalkan* $H_{2,n}$ *suatu graf cocktail party dengan* $n \geq 2$*, maka eksentrisitas vertex* u_i *adalah* $e(u_i) = 2$*, untuk* $i = 1,2\ldots,n$ *dan eksentrisitas vertex* v_i *adalah* $e(v_i) = 2$*, untuk* $i = 1,2\ldots,n$.

Bukti. Dengan menggunakan Algoritma BFS Moore dapat diketahui jarak terjauh dari *vertex* u_i ke *vertex* v_i adalah 2, jadi eksentrisitas *vertex* u_i adalah 2. Jarak terjauh dari *vertex* v_i ke *vertex* u_i adalah 2 jadi eksentrisitas *vertex* v_i adalah 2.

Lemma 2. *Misalkan* $H_{2,n}$ *suatu graf cocktail party dengan* $n \geq 2$*, maka vertex eksentrik dari vertex* u_i *adalah* v_i*, untuk* $i = 1,2\ldots,n$ *dan vertex eksentrik dari vertex* v_i *adalah* u_i*, untuk* $i = 1,2\ldots,n$.

Bukti. *Vertex* eksentrik dapat dicari dengan melihat eksentrisitas yang diperoleh dari semua *vertex*. Dari Lema 1. eksentrisitas *vertex* u_i adalah 2, maka *vertex* eksentriknya adalah v_i. Selanjutnya eksentrisitas *vertex* v_i adalah 2, maka *vertex* eksentriknya adalah u_i.

Lema 3. *Misalkan* $H_{2,n}$ *suatu graf cocktail party dengan* $n \geq 2$, *maka digraph eksentriknya adalah digraph dengan himpunan vertex*

$$V(ED(H_{2,n})) = \{u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2, ..., v_n,\}$$

dan himpunan arc

$$A(ED(H_{2,n})) = \{\overleftrightarrow{u_i v_i} \,/\, i = 1,2,\ldots,n\}.$$

Bukti. *Arc* dapat diperoleh dengan menggabungkan setiap vertex dengan vertex eksentriknya dari graf *cocktail party* $H_{2,n}$. Dari Lema 2, eksentrisitas *vertex* u_i adalah v_i dan eksentrisitas *vertex* v_i adalah u_i, jadi u_i *adjacent* ke v_i dan v_i *adjacent* ke u_i, sehingga membentuk *arc* $\overleftrightarrow{u_i v_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Teorema 4. *Misalkan* $H_{2,n}$ *suatu graf cocktail party dengan* $n \geq 2$, *maka digraph eksentrik* $H_{2,n}$ *adalah digraf* nK_2 *dengan karakteristik himpunan vertex*

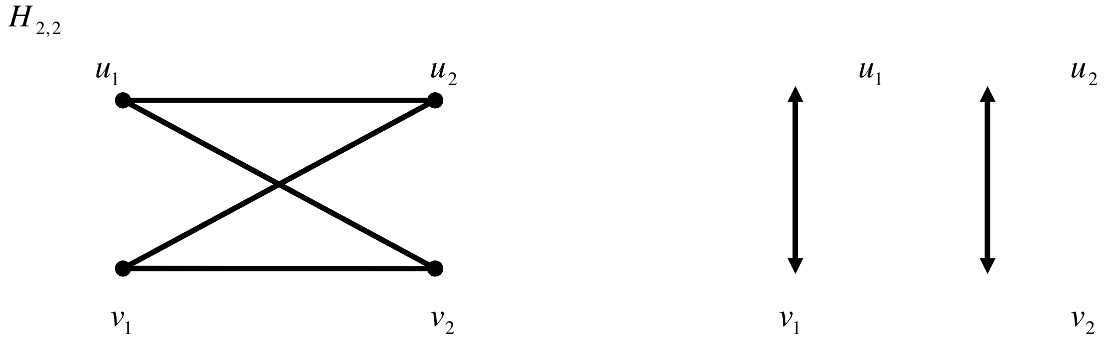
$$V(ED(H_{2,n})) = \{u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2, ..., v_n,\}$$

dan himpunan arc

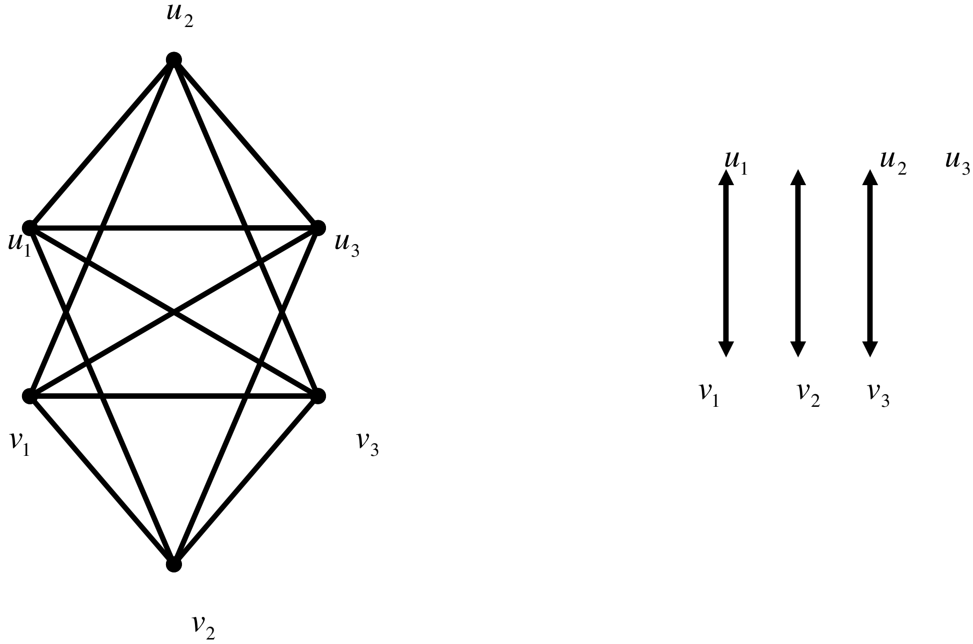
$$A(ED(H_{2,n})) = \{\overleftrightarrow{u_i v_i} \,/\, i = 1,2,\ldots,n\}.$$

Bukti. Dari Lema 3, eksentrisitas *vertex* u_i adalah v_i dan eksentrisitas *vertex* v_i adalah u_i, jadi u_i *adjacent* ke v_i dan v_i *adjacent* ke u_i, sehingga membentuk suatu *arc* $\overleftrightarrow{u_i v_i}$ yang simetris. Berdasarkan himpunan *arc*, maka himpunan *vertex* $V(ED(H_{2,n}))$ dapat dibentuk suatu digraf yang lain. Dengan observasi diperoleh bahwa $ED(H_{2,2})$ adalah $2K_2$, $ED(H_{2,3})$ adalah $3K_2$, $ED(H_{2,4})$ adalah $4K_2$, sehingga jelas bahwa $ED(H_{2,n})$ adalah nK_2 dengan himpunan *vertex* dan *edge* seperti dikatakan dalam Lema 3.

Berikut ini suatu graf *cocktail party* $H_{2,2}$ dan $H_{2,3}$ beserta masing-masing digraph eksentriknya disajikan pada Gambar 1.



$H_{2,3}$



Gambar 1. Graf *cocktail party* $H_{2,2}$ dan $H_{2,3}$ berserta eksentrik digrafnya.

KESIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan, digraf eksentrik dari graf *cocktail party* $H_{2,n}$ adalah *n* copy dari graf lengkap K_2, nK_2.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Boland, J. and M. Miller, The Eccentric Digraph of a Digraph, *Proceeding of AWOCA'01*, Lembang-Bandung, Indonesia, 2001.

[2] Chartrand, G. and O. R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc, California, 1993.

[3] Gallian, J. A. Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 17, pp 1-246, 2010.

[4] Gimbert, J, N. Lopez, M. Miller, and J. Ryan, Characterization of eccentric digraphs, *Discrete Mathematics*, Vol. 306, Issue 2, pp.210 - 219, 2006.

[5] M. Sutton and M. Miller, Mod sum graph labelling of $H_{n,n}$ and K_n, *Australas. J Combin.*, 20, pp 233-240, 1999.

[6] Wang, H and L. Sun, New results on the eccentric digraphs of the digraphs, *Ars Comb*. 89, 2008.