

*Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA,  
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 14 Mei 2011*

## ENUMERASI DIGRAF TIDAK ISOMORFIK

Mulyono

*Jurusan Matematika FMIPA UNNES*

*Email: arifahsaptari@yahoo.co.id*

### Abstrak

Digraf tidak isomorfik yang dimaksud pada tulisan ini adalah digraf sederhana yang tidak isomorfik yang dibentuk dari  $n$  titik. Kajian ini merupakan penggabungan antara aljabar abstrak dengan teori graf. Aljabar abstrak dengan teorema Polya-nya digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi digraf sederhana. Tulisan ini memaparkan teknik menghitung banyaknya digraf yang tidak isomorfik dengan teorema Polya. Berdasarkan kajian pada digraf sederhana ini diperoleh hasil: ada 3 digraf yang tidak isomorfik untuk 2 titik, ada 16 digraf yang tidak isomorfik untuk 3 titik, dan ada 218 digraf yang tidak isomorfik untuk 4 titik.

**Kata kunci:** enumerasi, digraf sederhana, teorema Polya, digraf tidak isomorfik

### PENDAHULUAN

Masalah enumerasi yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah masalah enumerasi yang berhubungan dengan perhitungan banyaknya digraf sederhana yang tidak isomorfis antara digraf sederhana satu dengan yang lainnya. Digraf sederhana di sini adalah digraf yang tidak mempunyai sisi paralel dan loop.

Pada dasarnya tulisan ini merupakan penggabungan dua bidang ilmu yaitu antara bidang aljabar (abstrak) dan bidang teori graf, artinya aljabar abstrak melalui teorema Polya akan digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi pada digraf sederhana. Teorema Polya ditemukan oleh George Polya (1887-1985), seorang ahli berkebangsaan Hungaria yang bermigrasi ke Amerika Serikat pada tahun 1940. Teorema Polya dibagi menjadi dua yaitu: Teorema Polya I dan II. Teorema Polya I menjelaskan tentang banyaknya orbit yang berbeda dari himpunan berhingga  $X$  terhadap grup yang beraksi. Grup yang beraksi/bertindak pada himpunan  $X$  memiliki pengertian suatu grup yang dapat diterapkan pada himpunan  $X$  dengan dikenai suatu aksi tertentu. Teorema Polya II selain menjelaskan banyaknya orbit yang berbeda juga menjelaskan bentuk/jenis orbit yang berbeda tersebut. Permasalahan enumerasi yang akan dibahas pada tulisan ini adalah: bagaimana enumerasi digraf tak isomorfik dari digraf sederhana dengan menggunakan Teorema Polya.

### PEMBAHASAN

#### Definisi dan Teorema pada Aljabar yang Mendukung Teorema Polya

Berikut beberapa definisi dan teorema yang terkait dengan teorema Polya.

#### Definisi 1 Grup

Himpunan  $G \neq \emptyset$  dengan operasi  $*$  yang didefinisikan padanya disebut Grup  $\langle G, * \rangle$ , bila memenuhi syarat:

1.  $\forall x, y \in G, x * y \in G$  (sifat tertutup terhadap operasi  $*$ )
2.  $\exists e \in G$ , sehingga  $x * e = e * x = x, \forall x \in G$  (ada elemen identitas  $e$ ).
3.  $\forall x \in G \exists x^{-1} \in G$  sehingga  $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$  (setiap elemen di  $G$  mempunyai invers).
4.  $\forall x, y, z \in G, x * (y * z) = (x * y) * z$  (sifat asosiatif)

**Definisi 2 Permutasi**

Permutasi pada himpunan  $A$  adalah fungsi  $\theta: A \rightarrow A$  yang bijektif.

**Definisi 3 Grup Simetri**

Jika  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  maka grup yang memuat semua permutasi dari  $A$  dinamakan grup simetri pada  $n$  unsur dan simbolkan dengan  $S_n$ . Grup simetri  $S_n$  memuat elemen sebanyak  $n!$ .

**Definisi 4 Orbit, Penstabil, dan Karakter Permutasi**

Apabila  $G$  adalah subgrup dari grup simetri  $S_n$  dan untuk  $x \in X$ , maka:

1.  $Gx = \{g(x) : g \in G\}$  yaitu himpunan semua bayangan elemen  $x \in X$  oleh permutasi  $g$  di  $G$ .  $Gx$  disebut orbit  $x$  terhadap  $G$ .
2.  $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$  adalah himpunan semua permutasi di  $G$  yang mengakibatkan  $x$  sebagai titik tetap. Himpunan  $G_x$  disebut penstabil  $x$  di  $G$ .
3.  $F(g) = \{z \in X : g(z) = z\}$  adalah himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi  $g \in G$ . Himpunan  $F(g)$  disebut karakter permutasi  $g$  di himpunan  $X$ .

**Definisi 5 Grup Berhingga**

Grup  $G$  disebut grup berhingga jika memiliki sejumlah berhingga anggota. Banyaknya anggota dalam grup  $G$  disebut order  $G$  dan disimbolkan dengan  $|G|$ .

**Definisi 6 Koset**

Jika  $H$  adalah subgrup dari grup  $G$  dan  $g$  adalah anggota  $G$  maka:

$gH = \{gh : h \in H\}$  disebut koset kiri dari  $H$  yang memuat  $g$  dan  $Hg = \{hg : h \in H\}$  disebut koset kanan dari  $H$  yang memuat  $g$ .

**Definisi 7 Kelas**

Kumpulan dari himpunan koset kiri (kanan)  $H$  yang berbeda dari grup  $G$  akan membentuk partisi grup  $G$ , yaitu:

1. Setiap anggota  $G$  akan berada paling sedikit pada satu koset kiri (kanan)  $H$
2. Dua koset kiri (kanan) yang berbeda tidak memiliki anggota yang sama.

Partisi yang mempunyai sifat seperti ini disebut *kelas*.

**Teorema 1 Kardinalitas**

Jika  $H$  adalah subgrup dari grup  $G$  dan  $|H| = k$  maka setiap koset kiri (kanan)  $H$  memiliki kardinalitas  $k$ .

**Teorema 2 Lagrange**

Order grup berhingga dapat dibagi oleh order sembarang grup bagiannya.

**Teorema 3 Orbit-Penstabil**

Jika  $X$  adalah  $G$ -Set dan  $x \in X$  maka :

1.  $\forall x \in X, |Gx| \cdot |G_x| = |G|$   
 $\Leftrightarrow |Gx| = \frac{|G|}{|G_x|}$
2.  $\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |F(g)|$

**Teorema 4 Teorema Burnside - Frobenius**

Misal  $G$  adalah grup permutasi yang beraksi pada  $X$  dengan  $G$  dan  $X$  adalah hingga. Jika  $k$  adalah banyaknya orbit di  $X$  pada  $G$ , maka:

$$k \cdot |G| = \sum_{g \in G} |F(g)|$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

**Definisi 8 Cycle**

Suatu permutasi  $\sigma \in S_n$  dinamakan cycle apabila  $\sigma$  paling banyak mempunyai 1 orbit yang memuat elemen lebih dari 1. Panjang cycle didefinisikan sebagai banyaknya elemen dalam orbit terbesar.

**Definisi 9 Indeks Siklik**

Diberikan  $G$  adalah grup permutasi dengan order  $m$  dari suatu himpunan yang banyak anggotanya  $n$  dan  $g \in G$  bertipe cycle  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ . Indeks siklik  $g$  didefinisikan sebagai:  $Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots x_n^{a_n}$  dan indeks siklik grup  $G$  didefinisikan:

$$Z(G; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} Z(g; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

**Definisi 10 Pewarnaan**

Fungsi  $f$  dari himpunan berhingga  $X$  ke himpunan  $Y$  disebut pewarnaan  $X$ . Himpunan berhingga  $Y$  disebut warna, sedangkan himpunan semua jenis pewarnaan  $X$  terhadap warna  $Y$  disebut himpunan  $C$ . Dua pewarnaan  $f, g \in C$  disebut ekuivalen (tak dapat dibedakan) terhadap grup  $G$ , grup permutasi di  $X$  jika  $\exists \pi \in G$  sehingga  $f(x) = g(\pi(x))$  untuk  $\forall x \in X$ .

**Definisi 11 Pola**

Kelas-kelas ekuivalen yang mempartisi himpunan  $C$  dengan relasi tak dapat dibedakan disebut pola-pola di  $C$  terhadap grup  $G$ .

**Definisi 12 Persediaan Pola (Pattern Inventory/PI)**

Misalkan fungsi bobot  $w$  memetakan himpunan  $Y$  ke sebuah himpunan  $r = \{w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r)\}$ .

Persediaan pola  $C$  terhadap grup  $G$  adalah:

$$PI(G; w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r)) = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_r = n} K(n_1, n_2, \dots, n_r) [w(y_1)]^{n_1} [w(y_2)]^{n_2} \dots [w(y_r)]^{n_r}$$

$K(n_1, n_2, n_3, \dots, n_r)$  adalah koefisien yang menyatakan banyaknya pewarnaan yang dapat dibedakan (banyak pola) sehingga warna  $w(y_1)$  bersesuaian dengan  $n_1$  anggota,  $w(y_2)$  bersesuaian dengan  $n_2$  anggota, ..., dan  $w(y_r)$  bersesuaian dengan  $n_r$  anggota.

**Teorema 5  $\pi'$  Permutasi dan  $G'$  Grup**

Diberikan  $C = \{f | f: X \rightarrow Y\}$  dan  $X, Y$  adalah himpunan berhingga, juga diketahui bahwa  $G$  adalah grup permutasi yang beraksi pada  $X$ . Untuk tiap  $\pi \in G$  didefinisikan pemetaan  $\pi'$  dari  $C$  ke  $C$  dengan sifat:

$\pi'(f(x)) = f(\pi(x))$  untuk  $\forall x \in X$  dan  $\forall f \in C$ , maka berlaku bahwa:

1.  $\pi'$  adalah permutasi di  $C$ .
2.  $G' = \{\pi' : \pi \in G\}$  adalah grup

**Teorema 6 (Teorema Polya I)**

Diberikan  $C = \{f | f: X \rightarrow Y\}$  dengan  $|X| = n \geq 2$  dan  $|Y| = r$ . Jika  $G$  merupakan grup permutasi yang beraksi pada  $X$  dengan indeks siklik  $Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  maka banyaknya pola di  $C$  terhadap  $G$  adalah  $Z(G; r, r, r, \dots, r)$ .

**Teorema 7 (Teorema Polya II)**

Persediaan pola warna,  $PI(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r))$  adalah merupakan indeks siklik dari  $Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  pada  $x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \dots + [w(y_r)]^i$  dengan  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Penerapan Teorema Polya pada Digraf Sederhana**

Apabila  $n$  titik pada digraf sederhana  $G$  dikenai permutasi, maka  $n(n - 1)$  pasangan titik terurut (artinya  $ij \neq ji$ ) dari himpunan titik tersebut juga mengalami permutasi. Dalam hal ini pasangan terurut pada suatu himpunan dapat dipandang sebagai sisi, yang ujung-ujungnya adalah pasangan titik tersebut.

Jika himpunan permutasi pada titik-titik suatu digraf sederhana membentuk grup simetri yaitu  $S_n$ , maka permutasi dari pasangan titik-titik (sisi) juga membentuk grup simetri yaitu  $E_n$ . Jadi grup  $S_n$  (permutasi titik pada digraf) akan membangkitkan grup  $E_n$  (permutasi sisi pada digraf). Berdasarkan Teorema Polya ini dibuat digraf sederhana yang tidak isomorfik. Berikut akan dibahas bagaimana menentukan banyak digraf sederhana yang tidak isomorfik untuk 2 titik, 3 titik, dan 4 titik.

**1. Digraf sederhana dengan  $n = 2$  titik**

Diketahui digraf sederhana  $G$  dengan himpunan titik  $V = \{1, 2\}$ . Misal  $S_2$  adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan  $V$ , maka banyaknya anggota dari  $S_2$  adalah  $2! = 1.2 = 2$ . Seluruh bentuk hasil perkalian cycle yang saling asing dari grup  $S_2$  yaitu:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2)$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12)$$

Permutasi pada dua titik suatu digraf sederhana membentuk grup simetri yaitu  $S_2$ , maka permutasi dari pasangan titik-titik (sisi) juga membentuk grup simetri yaitu  $E_2$ . Jadi grup  $S_2$  (permutasi titik pada digraf) dengan  $g \in S_2$  akan membangkitkan grup  $E_2$  (permutasi sisi pada digraf) dengan  $g' \in E_2$ . Pasangan titik-titik (sisi) yang mungkin terbentuk dari dua titik adalah  $n(n - 1) = 2(2 - 1) = 2$  buah, yaitu 12 dan 21 (12 artinya sisi berarah dari titik 1 ke titik 2 dan 21 artinya sisi berarah dari titik 2 ke titik 1).

Diperoleh hasil kali cycle di  $E_2$  adalah sebagai berikut:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2) \rightarrow g'_1 = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 12 & 21 \end{pmatrix} = (12)(21)$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12) \rightarrow g'_2 = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 21 & 12 \end{pmatrix} = (12 \ 21)$$

Tipe cycle dan indeks siklik dari anggota-anggota  $E_2$  yaitu:

- (1). Untuk  $g'_1 \in E_2$  tipe cyclenya yaitu  $[2, 0]$  dan indeks sikliknya  $y_1^2 y_2^0 = y_1^2$ .
- (2). Untuk  $g'_2 \in E_2$  tipe cyclenya yaitu  $[0, 1]$  dan indeks sikliknya  $y_1^0 y_2^1 = y_2$ .

Sehingga indeks siklik dari  $E_2$  adalah

$$\begin{aligned} Z(E_2; y_1, y_2) &= \frac{1}{m} \sum_{g' \in G} Z(g'; y_1, y_2) \\ &= \frac{1}{2} [Z(g'_1; y_1, y_2) + Z(g'_2; y_1, y_2)] \\ &= \frac{1}{2} [y_1^2 + y_2^2] \quad \dots\dots (1) \end{aligned}$$

Ada dua keadaan yang mungkin terjadi di antara dua titik. Keadaan tersebut adalah

- (1). Keadaan tidak ada sisi berarah antara dua titik
- (2). Keadaan ada sisi berarah antara dua titik

Jika  $r$  adalah keadaan yang mungkin terjadi di antara dua titik maka,  $r = 2$ . Dari persamaan (1) diperoleh  $y_1 = y_2 = 2$ , dan berdasarkan Teorema Polya I diperoleh

$$\begin{aligned} Z(E_2; 2,2) &= \frac{1}{2} [2^2 + 2] \\ &= 3 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya digraf tak isomorfik yang terbentuk dari dua titik ada sebanyak 3 graf.

Jika keadaan-keadaan di antara dua titik diberi bobot  $w$ , maka

- (1).  $w(z_1)$  = keadaan tidak ada sisi berarah antara dua titik.
- (2).  $w(z_2)$  = keadaan ada sisi berarah antara dua titik.

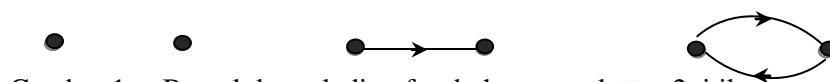
Misal  $w(z_1) = T$  dan  $w(z_2) = A$ .

Berdasarkan Teorema Polya II, indeks siklik dari  $E_2$  dengan mensubstitusikan

$y_1 = [w(z_1)] + [w(z_2)] = [T + A]$ , dan  $y_2 = [w(z_1)]^2 + [w(z_2)]^2 = [T^2 + A^2]$  menjadi

$$\begin{aligned} Z(E_2; y_1, y_2) &= \frac{1}{2} [y_1^2 + y_2] \\ &= \frac{1}{2} [[T + A]^2 + [T^2 + A^2]] \\ &= [T^2 + TA + A^2]. \end{aligned}$$

Artinya dari  $n = 2$  titik akan dihasilkan 1 digraf tanpa sisi, 1 digraf dengan 1 sisi, dan 1 digraf dengan 2 sisi.



Gambar 1. Bentuk-bentuk digraf sederhana untuk  $n = 2$  titik yang tak isomorfik

## 2. Digraf sederhana dengan $n = 3$ titik

Diketahui digraf sederhana  $G$  dengan himpunan titik  $V = \{1,2,3\}$ . Misal  $S_3$  adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan  $V$ , maka banyaknya anggota dari  $S_3$  adalah  $3! = 1.2.3 = 6$ . Seluruh bentuk hasil perkalian cycle yang saling asing dari grup  $S_3$  yaitu:

$$\begin{aligned} g_1 &= (1)(2)(3) & g_2 &= (1)(23) \\ g_3 &= (13)(2) & g_4 &= (12)(3) \\ g_5 &= (123) & g_6 &= (132) \end{aligned}$$

Permutasi pada tiga titik suatu digraf sederhana membentuk grup simetri yaitu  $S_3$ , maka permutasi dari pasangan titik-titik (sisi) juga membentuk grup simetri yaitu  $E_3$ . Jadi grup  $S_3$  (permutasi titik pada digraf) dengan  $g \in S_3$  akan membangkitkan grup  $E_3$  (permutasi sisi pada digraf) dengan  $g' \in E_3$ . Pasangan titik-titik (sisi) yang mungkin terbentuk dari tiga titik adalah

$n(n - 1) = 3(3 - 1) = 6$  buah, yaitu 12, 13, 23, 21, 31, dan 32. Diperoleh hasil kali cycle di  $E_3$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g'_1 &= (12)(13)(23)(21)(31)(32) & g'_4 &= (12\ 21)(13\ 23)(31\ 32) \\ g'_2 &= (12\ 13)(23\ 32)(21\ 31) & g'_5 &= (12\ 23\ 31)(13\ 21\ 32) \\ g'_3 &= (12\ 32)(13\ 31)(23\ 21) & g'_6 &= (12\ 31\ 23)(13\ 32\ 21) \end{aligned}$$

Tipe cycle dan indeks siklik dari anggota-anggota  $E_3$  yaitu

- (1). Untuk  $g'_1 \in E_3$  mempunyai tipe cycle  $[6,0,0,0,0,0]$  dengan indeks sikliknya adalah  $y_1^6 y_2^0 y_3^0 y_4^0 y_5^0 y_6^0 = y_1^6$ .
- (2). Untuk  $g'_2 \in E_3$  mempunyai tipe cycle  $[0,3,0,0,0,0]$  dengan indeks sikliknya adalah  $y_1^0 y_2^3 y_3^0 y_4^0 y_5^0 y_6^0 = y_2^3$ .
- (3). Untuk  $g'_3 \in E_3$  mempunyai tipe cycle  $[0,3,0,0,0,0]$  dengan indeks sikliknya adalah  $y_1^0 y_2^3 y_3^0 y_4^0 y_5^0 y_6^0 = y_2^3$ .
- (4). Untuk  $g'_4 \in E_3$  mempunyai tipe cycle  $[0,3,0,0,0,0]$  dengan indeks sikliknya adalah  $y_1^0 y_2^3 y_3^0 y_4^0 y_5^0 y_6^0 = y_2^3$ .
- (5). Untuk  $g'_5 \in E_3$  mempunyai tipe cycle  $[0,0,2,0,0,0]$  dengan indeks sikliknya adalah  $y_1^0 y_2^0 y_3^2 y_4^0 y_5^0 y_6^0 = y_3^2$ .
- (6). Untuk  $g'_6 \in E_3$  mempunyai tipe cycle  $[0,0,2,0,0,0]$  dengan indeks sikliknya adalah  $y_1^0 y_2^0 y_3^2 y_4^0 y_5^0 y_6^0 = y_3^2$ .

Tampak bahwa anggota-anggota  $S_3$  yang mempunyai tipe cycle dan indeks siklik yang sama akan diubah ke anggota-anggota  $E_3$  yang mempunyai tipe cycle dan indeks siklik yang sama pula, sehingga indeks siklik dari  $E_3$  adalah

$$\begin{aligned} Z(E_3; y_1, y_2, \dots, y_6) &= \frac{1}{m} \sum_{g' \in G} Z(g'; y_1, y_2, \dots, y_6) \\ &= \frac{1}{6} [y_1^6 + y_2^3 + y_2^3 + y_2^3 + y_3^2 + y_3^2] \\ &= \frac{1}{6} [y_1^6 + 3y_2^3 + 2y_3^2] \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

Ada dua keadaan yang mungkin terjadi di antara dua titik. Keadaan tersebut adalah

- (1) keadaan tidak ada sisi berarah antara dua titik
- (2) keadaan ada sisi berarah antara dua titik

Jika  $r$  adalah keadaan yang mungkin terjadi di antara dua titik maka,  $r = 2$ . Dari persamaan (2) diperoleh  $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 2$ , dan berdasarkan Teorema Polya I diperoleh

$$\begin{aligned} Z(E_3; y_1, y_2, y_3, \dots, y_6) &= \frac{1}{6} [y_1^6 + 3y_2^3 + 2y_3^2] \\ Z(E_3; 2, 2, 2, 2, 2, 2) &= \frac{1}{6} [2^6 + 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2] \\ &= \frac{1}{6} [96] = 16 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya digraf sederhana tak isomorfik yang terbentuk dari tiga titik ada sebanyak 16 buah.

Jika keadaan-keadaan di antara dua titik diberi bobot  $w$ , maka

- (1)  $w(z_1) =$  keadaan tidak ada sisi berarah antara dua titik.
- (2)  $w(z_2) =$  keadaan ada sisi berarah antara dua titik

Misal  $w(z_1) = T$  dan  $w(z_2) = A$ .

Berdasarkan Teorema Polya II, indeks siklik dari  $E_3$  dengan mensubsitusikan  $y_1 = [w(z_1)] + [w(z_2)] = [T + A]$ ,  $y_2 = [[w(z_1)]^2 + [w(z_2)]^2] = [[T^2 + A^2]]$ ,

dan  $y_3 = [[w(z_1)]^3 + [w(z_2)]^3] = [[T^3 + A^3]]$  diperoleh indeks siklik  $E_3$  yaitu



$$\begin{aligned}Z(E_3; y_1, y_2, y_3, \dots, y_6) &= \frac{1}{6} [y_1^6 + 3y_2^3 + 2y_3^2] \\Z(E_3; y_1, y_2, y_3, \dots, y_6) &= \frac{1}{6} [(T + A)^6 + 3 \cdot [T^2 + A^2]^3 + 2 \cdot [T^3 + A^3]^2] \\&= [T^6 + T^5A + 4T^4A^2 + 4T^3A^3 + 4T^2A^4 + TA^5 + 6A^6]\end{aligned}$$

Artinya dari  $n = 3$  titik akan diperoleh: 1 digraf tanpa sisi, 1 digraf dengan 1 sisi, 4 digraf dengan 2 sisi, 4 digraf dengan 3 sisi, 4 digraf dengan 4 sisi, 1 digraf dengan 5 sisi, dan 1 digraf dengan 6 sisi.

### 3. Digraf sederhana dengan $n = 4$ titik

Diketahui digraf sederhana  $G$  dengan himpunan titik  $V = \{1, 2, 3, 4\}$ . Misal  $S_4$  adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan  $V$ , maka banyaknya anggota dari  $S_4$  adalah  $4! = 1.2.3.4 = 24$ . Dengan cara yang sama seperti pada digraf sederhana yang terdiri dari 2 titik dan 3 titik di atas, untuk digraf sederhana yang terdiri 4 titik ini diperoleh 218 digraf sederhana tak isomorfik yang terdiri atas: 1 digraf tanpa sisi, 1 digraf dengan 1 sisi, 5 digraf dengan 2 sisi, 13 digraf dengan 3 sisi, 27 digraf dengan 4 sisi, 38 digraf dengan 5 sisi, 48 digraf dengan 6 sisi, 38 digraf dengan 7 sisi, 27 digraf dengan 8 sisi, 13 digraf dengan 9 sisi, 5 digraf dengan 10 sisi, 1 digraf dengan 11 sisi, dan 1 digraf dengan 12 sisi.

## PENUTUP

Dari pembahasan di atas, diperoleh simpulan bahwa Teorema Polya I berkaitan dengan banyaknya digraf sederhana yang terdiri dari  $n$  titik antara satu digraf dengan digraf lainnya. Teorema Polya II berkaitan dengan banyaknya digraf sederhana yang tidak isomorfik yang terdiri dari  $n$  titik dan  $k$  garis antara digraf satu dengan digraf yang lainnya. Saran dari penulis, penelitian ini dapat dikembangkan pada pewarnaan graf.

## DAFTAR PUSTAKA

- Gunawan, S. 2002. Aplikasi Teorema Polya pada Enumerasi Graf Sederhana. *Integral* Vol. 8 No. 1 Hal: 1-10. Tersedia di: <http://santosa.ukdw.ac.id>. [20 April 2011].
- Tomakin, F. Y. 2009. The Polya Theory and Permutation Groups. *Chamcuri Journal of Mathematics*. Vol. 1 No.2. Hal: 1-23. Tersedia di: <http://www.math.sc.chula.ac.th/cjm> [20 April 2011].
- Vasudev, C. 2007. *Combinatorics and Graph Theory*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.
- Wihikanwijna. 2006. *Burnside Lemma Introduksi Enumerasi Polya*. Tersedia di: <http://himatika.mipa.ugm.ac.id/down/kul/BurnsidePolya.pdf>. [20 April 2011].
- Wilson, Robin J. & Watkins, John J. 1990. *Graphs: An Introductory Approach*. New York: John Wiley & Sons. Inc.

