Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA,
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 14 Mei 2011

PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA PENELUSURAN BANJIR GELOMBANG DIFUSI (*DIFFUSION WAVE FLOOD ROUTING*)

[1]M.Siing, [2]Basuki Widodo

[1]Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember,Surabaya
MA Rahmatul Asri Maroangin, Enrekang, Sul-sel
[2]Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya

Abstrak

Model penelusuran banjir gelombang difusi (diffusion wave flood routing) didasarkan pada persamaan differensial parsial yang memungkinkan untuk menghitung debit aliran dan kedalaman air sebagai fungsi dari ruang dan waktu. Pada makalah ini, ditunjukkan persamaan pembangun model matematika penelusuran banjir dengan pendekatan model gelombang difusi serta penyelesaian numeriknya menggunakan metode volume hingga (Metode Volume Hingga).Teknik diskretisasi yang digunakan adalah teknik diskritisasi Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics (QUICK) kemudian dilakukan simulasi dengan bantuan Program Matlab 7.8. Penyelesaian numerik dengan teknik diskritisasi QUICK merupakan penyelesaian yang stabil dan akurat, dengan tingkat akurasinya sampai orde ketiga. Simulasi terhadap parameter-parameter yang berpengaruh terhadap penelusuran banjir diperoleh hasil bahwa ketinggian muka air dipengaruhi oleh perubahan kecepatan dan dapat disimpulkan bahwa semakin besar kecepatan aliran rata-rata maka semakin kecil ketinggian muka air yang dihasilkan.

Kata kunci: Penelusuran banjir, model difusi, metode volume hingga, QUICK

PENDAHULUAN

Pada suatu aliran saluran terbuka/sungai ada beberapa model yang umum digunakan untuk menggambarkan aliran saluran tersebut seperti: model Saint Venant, model Shallow Water. Pola aliran banjir pada saluran terbuka dapat didekati dengan persamaan differensial parsial yang diturunkan dari persamaan Saint Venant. Model hidrolika ini didasarkan pada dua bentuk persamaan yaitu persamaan konservasi massa dan persamaan konservasi momentum (Chow, 1988).

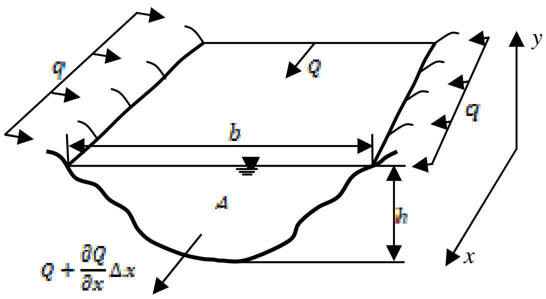
Ada beberapa pendekatan dalam model penelusuran banjir antara lain: pendekatan model gelombang difusi, model gelombang kinematik dan model gelombang dinamik atau yang dikenal sebagai pendekatan persamaan Saint Venant yang lengkap. Tujuan dari penulisan ini adalah menentukan penyelesaian model penelusuran banjir dengan pendekatan gelombang difusi menggunakan metode volume hingga dengan teknik diskritisasi QUICK.

Telah banyak penelitian yang dilakukan oleh para ahli mengenai model penelusuran banjir seperti Gosiorowski, D., Szymkiewicz, R., (2007) dalam penelitiannya membahas analisis bentuk konservatif persamaan massa dan momentum model penelusuran banjir (*flood routing*). Chagas, P.F., et.all. (2010) mengkaji tentang model matematika gelombang banjir pada saluran alam dengan menggunakan metode beda hingga, algoritma penyelesaian system persamaan aljabar nonlinearnya dengan iterasi Newton Raphson dan simulasinya dilakukan dengan program QUARIGUA (Riks Quantitative Analysis of Flooding in Urban Rivers). Tapi dalam penelitian-penelitian tersebut jarang ada yang menyelesaikan dengan menggunakan metode volume hingga. Oleh karena itu, dalam paper ini dikaji model matematika penelusuran banjir (*flood routing*) dengan pendekatan model gelombang difusi terhadap persamaan pembangun bentuk nonkonservatif dan menentukan penyelesaian numeriknya menggunakan Metode Volume Hingga dengan teknik diskritisasi QUICK kemudian disimulasikan dengan bantuan progam Matlab 7.8.

LANDASAN TEORI

Konsep Penelusuran Banjir

Penelusuran banjir (*flood routing*) bisa ditafsirkan sebagai suatu prosedur matematika untuk menentukan/memperkirakan waktu dan besaran aliran banjir disuatu titik berdasarkan data yang diamati pada satu atau beberapa titik dibagian hulu. Dalam praktek terdapat dua macam penelusuan yaitu *distribusi flood routing* yang biasa dikenal sebagai hirolika routing dan *lumped flood routing* yang biasa dikenal sebagai hidrologi routing. Perbedaannya adalah bahwa model *lumped flood routing,* aliran dihitung hanya sebagai fungsi terhadap waktu saja, sedangkan model *distribusi flood routing* merupakan fungsi terhadap ruang dan waktu. Model *distribusi flood routing* memungkinkan untuk menghitung debit aliran dan kedalaman sehingga model ini lebih mendekati pada kondisi nyata aliran tidak tunak dari luapan banjir pada suatu saluran (Chow, 1988). Gambar 2.1. berikut mengillustrasikan penelusuran banjir pada saluan terbuka/sungai :



Gambar.1. Sketsa penelusuran banjir pada saluran terbuka tampak penampang (Sivapalan, (1997)

Menurut Linsley JR, R.K et.al. (1982) Penelusuran banjir (*flood routing*) secara hidrolika bersandar pada tiga asumsi yakni : kerapatan airnya konstan, panjang sungai yang dipengaruhi oleh gelombang banjir lebih besar daripada kedalaman airnya, alirannya secara hakiki berdimensi satu. Gelombang banjir yang memenuhi asumsi ini disebut gelombang air dangkal (*shallow water wave*). Karena percepatan vertikal aliran diabaikan maka distribusi tekanan pada gelombang tersebut adalah hidrostatik.

Metode Volume Hingga

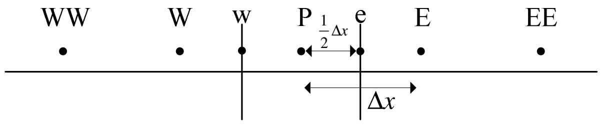
Metode Volume Hingga merupakan salah satu metode yang dapat digunakan dalam pemodelan matematika, sesuai diterapkan pada masalah aliran fluida dan aerodinamika. (Habibah, 2009). Prosedur dalam Metode Volume Hingga adalah:

1. Mendefinisikan bentuk geometri aliran.
2. Domain dari aliran diuraikan dalam mesh atau grid dari volume kontrol yang tidak tumpang tindih yang dapat membentuk persamaan yang dapat dibagankan.
3. Persamaan yang didiskretkan nilainya merupakan pendekatan dari nilai pada masing-masing titik.
4. Persamaan yang didiskretkan diselesaikan secara numerik.

Teknik Diskretisasi *Quadratic Upwind Interpolation Convective Kinematics* (QUICK)

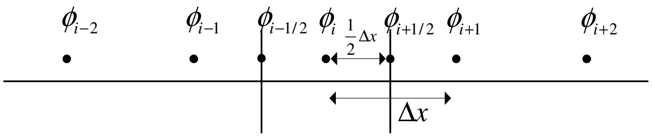
Menurut Apsley (2007) bentuk geometris dari aliran fluida pada masing-masing domain dibuat dalam bentuk grid. Grid dari domain dapat grid yang terstruktur atau yang tidak terstruktur, ataupun grid dalam koordinat kartesius atau grid yang non kartesius. Masing-masing grid memiliki kontrol *face* dan kontrol *node*. Model matematika satu dimensi dari arah memanjang penelusuran banjir (pada sumbu *x*) dan arah melebar dari penelusuran banjir (pada sumbu *y*) akan dimodelkan pada penelitian ini.

Pendiskritan dengan menggunakan metode QUICK untuk mengubah nilai pada *face* menjadi nilai pada *node*, diilustrasikan pada gambar 2.4 berikut:



Gambar 2.1. Kontrol *face* volume kendali satu dimensi

Selanjutnya kontrol *face* di atas dilakukan pendiskritan QUICK seperti pada Gambar 2.2 berikut:



Gambar 2.2. Kontrol *node* volume kendali satu dimensi

Diskritisasi QUICK dilakukan berdasarkan besarnya kecepatan V

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_i + g_1(\phi_{i+1} - \phi_i) + g_2(\phi_i - \phi_{i-1});\ V > 0 \\ \phi_{i+1} + g_3(\phi_i - \phi_{i+1}) + g_4(\phi_{i+1} - \phi_{i+2});\ V < 0 \end{cases}$$

Dengan:

$$g_1 = \frac{(x_e - x_P)(x_e - x_W)}{(x_E - x_P)(x_E - x_W)} \qquad g_2 = \frac{(x_e - x_P)(x_E - x_e)}{(x_P - x_W)(x_E - x_W)}$$

$$g_3 = \frac{(x_e - x_E)(x_e - x_{EE})}{(x_P - x_E)(x_P - x_{EE})} \qquad g_4 = \frac{(x_e - x_E)(x_P - x_e)}{(x_E - x_{EE})(x_P - x_{EE})}$$

Sehingga didapatkan Formulasi QUICK untuk menentukan nilai pada kontrol face dan adalah sebagai berikut:

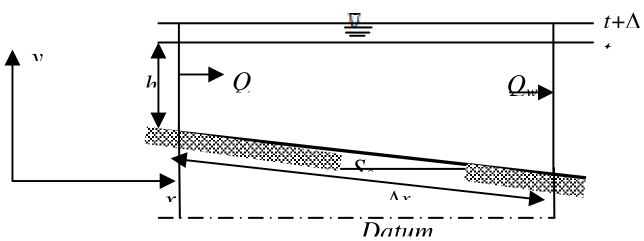
$$\phi_e = \frac{-\phi_{i-1} + 6\phi_i + 3\phi_{i+1}}{8} \text{ dan } \phi_w = \frac{-\phi_{i-2} + 6\phi_{i-1} + 3\phi_i}{8}, \text{untuk } V > 0$$

$$\phi_e = \frac{-\phi_{i+2} + 6\phi_{i+1} + 3\phi_i}{8} \text{ dan } \phi_w = \frac{3\phi_{i-1} + 6\phi_i + 3\phi_{i+1}}{8}, \text{untuk } V < 0$$

PEMBAHASAN

Persamaan Pembangun

Penelusuran banjir dapat dimodelkan berdasarkan aliran diatas saluran terbuka, aliran dalam saluran terbuka dapat dinyatakan dengan persamaan pembangun yang diperoleh dengan menerapkan persamaan konservasi massa dan momentum terhadap volume kendali. Model matematika penelusuran banjir dapat digambarkan dengan menggunakan volume kendali sebagaimana diillustrasikan pada Gambar 2. berikut ini:



Gambar 3.1. Sketsa Volume kendali Penelusuran banjir tampak potongan samping (Chow, 1988)

Persamaan matematika untuk permasalahan penelusuran banjir dibangun berdasarkan fenomena-fenomena alam yang memenuhi hukum fisika yang sesuai dengan permasalahan pada penelitian ini. Model matematika dari permasalahan ini memenuhi hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum yang dibangun berdasarkan oleh persamaan skalar transfort. Menurut Aspley (2007) persamaan transfort ini dirumuskan sebagai berikut:

Rate of change +net outward flux = source

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}(\rho V\phi)+\sum_{faces}\left(\rho u_n A\phi-\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial n}A\right)=SV$$

dengan:

ϕ = konsentrasi

Γ = difusivitas

A = luas volume kendali (m^2)

SV = gaya-gaya yang bekerja dalam sistem

V = volume air

Persamaan Konservasi massa

Pada paper ini persamaan konservasi massa dapat dijelaskan dengan menggunakan prinsip kontinum yaitu :"*Laju massa air yang masuk volume kendali dikurangi laju massa air yang keluar volume kendali sama dengan laju akumulasi massa air di dalam volume kendali*". Selanjutnya dikenal hukum kekekalan massa yaitu : "*massa tidak dapat diciptakan dan tidak dapat dimusnahkan*", maka sumber (*source*) untuk konservasi massa adalah nol. Sehingga pernyataan di atas dapat dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt}(mass)+net\ outward\ mass\ flux=0$$

Oleh karena, $\rho=\frac{massa}{volume}=\frac{m}{\forall}$ maka massa dapat dinyatakan sebagai $m = \rho\forall$, sehingga dengan menggunakan Teorema Pengangkutan Reynold, maka persamaan diatas dapat yang dinyatakan dengan persamaan matematika sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall)+\sum_{face}(\rho VA)=0 \quad (1)$$

dengan :

$\forall$ = volume fluida

ρ = massa jenis fluida

A = luas permukaan

V = kecepatan aliran rata-rata

Dari Persamaan (9) untuk permasalahan penelusuran banjir dalam paper ini akan dimodelkan secara satu dimensi sehingga nilai $V = A\Delta x$ dan permukaan (*faces*) kendali dikomposisi menjadi dua bagian yaitu permukaan kendali dimana aliran masuk dalam volume kendali (*PK.mas*) dan aliran keluar dari volume kendali (*PK.mas*). Sehingga Persamaan (9) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{VK}\rho d\forall-\iint_{PKmas}\rho V.dA+\iint_{PKkel}\rho V.dA=0 \quad (2)$$

dengan:

VK = Volume kendali.

PK = Permukaan kendali.

Persamaan (2) diturunkan, sehingga diperoleh persamaan untuk aliran air pada saluran terbuka berikut:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

Persamaan (3) selanjutnya dikenal sebagai persamaan konservasi massa dalam bentuk non-konservatif (*non-conservatif form*)

Persamaan Konservasi Momentum

Persamaan konservasi momentum ini dapat dirumuskan dengan menggunakan prinsip kontimun, yaitu : "*Laju perubahan fisis yang ditinjau dalam volume kendali ditambah laju perubahan fisis yang masuk dan keluar melalui permukaan kendali sama dengan jumlah yang dihasilkan oleh sumber*". Selanjutnya dengan menggunakan hukum konservasi momentum yaitu "*laju perubahan momentum sama dengan gaya luar yang bekerja*". Sehingga persamaan konservasi momentum untuk suatu volume kendali dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \forall V) + \sum_{face}(\rho VA)V = \sum F \tag{4}$$

Dari Persamaan (5) diatas dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt}\iiint_{VK}(\rho V d\forall) + \iint_{PK}(\rho V.dA) = \sum F \tag{5}$$

Untuk gaya-gaya eksternal F adalah sebagai berikut:

$$\sum F = F_g + F_p + F_w \tag{6}$$

Dengan: $F_g = \rho g h S_0 \Delta x$, $F_P = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial x}\Delta x$ dan $F_f = -\rho g A S_f$

Dengan mensubstitusi Persamaan (6) ke Persamaan (5) Dan dengan menggunakan aturan rantai suku-suku sehingga diperoleh persamaan berikut ini:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} = gS_0 - gS_f \tag{7}$$

Selanjutnya Persamaan (7) merupakan persamaan momentum penelusuran banjir dalam bentuk nonkonservatif.

Penyelesaian Numerik

Penyelesaian numerik dari model penelusuran banjir dilakukan dengan pendiskritan persamaan pembangun (*governing equation*) menggunakan Metode Volume Hingga dengan teknik diskritisasi QUICK. Penyelesaian model penelusuran banjir bentuk nonkonservatif dilakukan untuk mendapatkan ketinggian muka air banjir sebagai variable yang terikat. Dalam paper ini, model fisis penelusuran banjir dibagi menjadi 5 volume kendali dengan jumlah *node* sebanyak 5 pada masing-masing volume kendalinya. Nilai pada tiap-tiap *node* inilah yang akan dicari sebagai variasi ketinggian air pada ruas saluran. Persamaan pembangun diselesaikan secara simultan sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk persamaan konveksi-difusi sebagai berikut:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c\frac{\partial h}{\partial x} - S\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \tag{8}$$

Dengan $S = \frac{AV}{2bS_f}$ (koefisien difusi) dan $c = \frac{3}{2}V$.

Selanjutnya dilakukan diskritisasi QUICK terhadap Persamaan (8) untuk menentukan nilai ketinggian muka air untuk arah kecepatan aliran $V > 0$, dengan diintegralkan terhadap volume kendali dan pada selang waktu antara t dan $t+\Delta t$ sebagai berikut:

$$\int_{VK}\int_{t}^{t+\Delta t}\frac{\partial h}{\partial t}dt\,d\forall + \int_{VK}\int_{t}^{t+\Delta t} c\frac{\partial h}{\partial x}dt\,d\forall = \int_{VK}\int_{t}^{t+\Delta t} S\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}dt\,d\forall \tag{9}$$

Hasil integral dari Persamaan (9), didapatkan persamaan berikut:

$$\left(h_P - h_0\right)\frac{\Delta x}{\Delta t} + c\left(h_e - h_w\right) = S\left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_e - \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_w\right] \tag{10}$$

Selanjutnya persamaan (11) berikut disubtitusi ke Persamaan (10) :

$$h_w = -\frac{1}{8}h_{WW} + \frac{6}{8}h_W + \frac{3}{8}h_P \quad h_e = -\frac{1}{8}h_W + \frac{6}{8}h_P + \frac{3}{8}h_E$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_e = \frac{h_E - h_P}{\Delta x} \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_w = \frac{h_P - h_W}{\Delta x} \tag{11}$$

Dengan menerapkan kondisi awal dan kondisi batas sehingga diperoleh penyelesaian dalam bentuk sebagai berikut :

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{7c}{8} + \frac{4S}{\Delta x}\right)h_P + \left(\frac{3c}{8} - \frac{4S}{3\Delta x}\right)h_E = \left(\frac{10c}{8} - \frac{8S}{3\Delta x}\right)h_A + \frac{\Delta x}{\Delta t}h_0 \qquad \text{: node 1}$$

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{c}{8} + \frac{2S}{\Delta x}\right)h_P - \left(\frac{c}{8} + \frac{S}{\Delta x}\right)h_W - \frac{S}{\Delta x}h_E = -\frac{2c}{8}h_A + \frac{\Delta x}{\Delta t}h_0 \qquad \text{: node 2}$$

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{3c}{8} + \frac{2S}{\Delta x}\right)h_P + \frac{c}{8}h_{WW} - \left(\frac{7c}{8} + \frac{S}{\Delta x}\right)h_W + \left(\frac{3c}{8} - \frac{S}{\Delta x}\right)h_E = \frac{\Delta x}{\Delta t}h_0 \qquad \text{: node 3,4}$$

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{3c}{8} + \frac{4S}{\Delta x}\right)h_P + \frac{c}{8}h_{WW} - \left(\frac{6c}{8} + \frac{4S}{3\Delta x}\right)h_W = \frac{\Delta x}{\Delta t}h_0 - ch_B \qquad \text{: node 5}$$

(12)

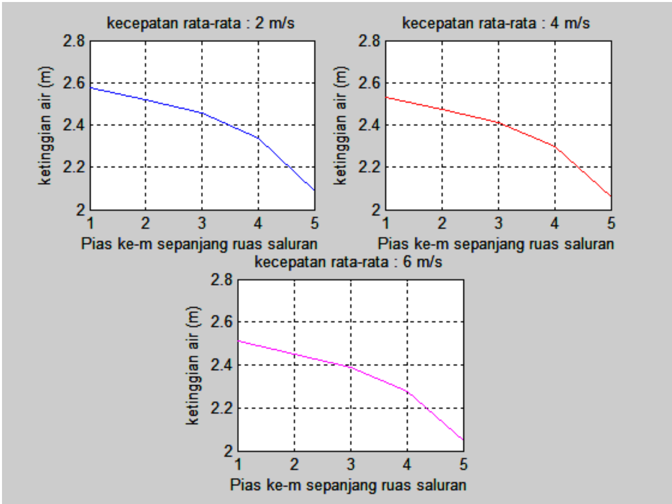
Persamaan (12) merupakan penyelesaian persamaan pembangun (*governing equation*) untuk menentukan ketinggian muka air banjir dengan teknik diskrtitisasi QUICK untuk $V > 0$. Selanjutnya dengan mengganti masing-masing *face WW, W, P,* dan *E* menjadi *node* i - 2, i - 1, i, i + 1 sehingga diperoleh bentuk persamaan diskritisasi dalam bentuk persamaan Matriks. Kemudian persamaan tersebut diselesaikan secara numerik dengan bantuan Program Matlab 7.8

Simulasi Model

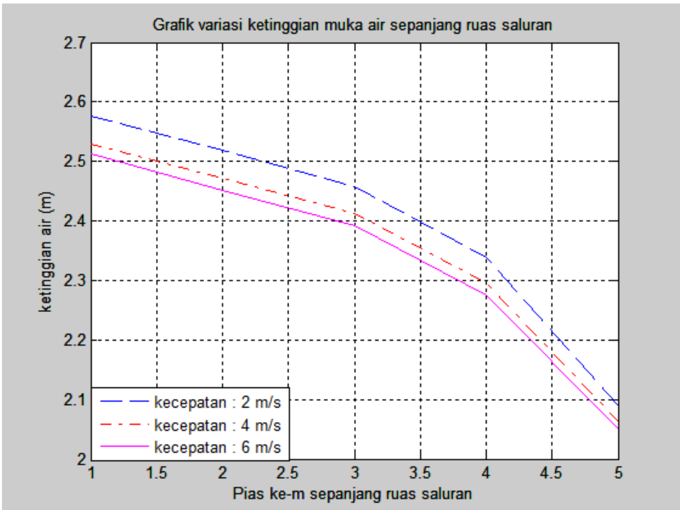
Pengaruh Perubahan Kecepatan Aliran Terhadap ketinggian muka air Penelusuran Banjir

Untuk mengetahui pengaruh perubahan kecepatan terhadap ketinggian muka air sepanjang ruas saluran maka diberikan parameter-parameter yang ditetapkan sebagai berikut panjang ruas saluran (L) = 15000 meter, saluran berpenampang segiempat dengan lebar saluran (b) = 50 m, Dalam kasus ini setiap kecepatan yang berbeda memberikan nilai ketinggian muka air yang berbeda terhadap titik node sepanjang ruas dengan kemiringan dasar saluran (S_0) = 0.0002, 0.0003 dan 0.0004. ketinggian muka air rata-rata (h) = 2 meter, sebagai syarat awal diberikan kedalaman tetap yaitu (h_0) = 2 m sedangkan syarat batas hulu ditetapkan kedalaman tetap (h_a) sebesar 2.5 m dan disebelah hilir ditetapkan (h_b) sebesar 0.2 m. simulasi dilakukan dengan jumlah total diskritisasi sebanyak 5 pias, sehingga saluran terbagi dalam beberapa ruas dengan panjang ruas Δx = 3000 m dan selang waktu Δt = 60 menit dengan memberikan input kecepatan yang berbeda.

Dalam kasus ini setiap kecepatan yang diberikan menghasilkan nilai ketinggian muka air yang berbeda terhadap titik node sepanjang ruas saluran.



Gambar 3.2. Perubahan Ketinggian muka air sepanjang ruas saluran/sungai

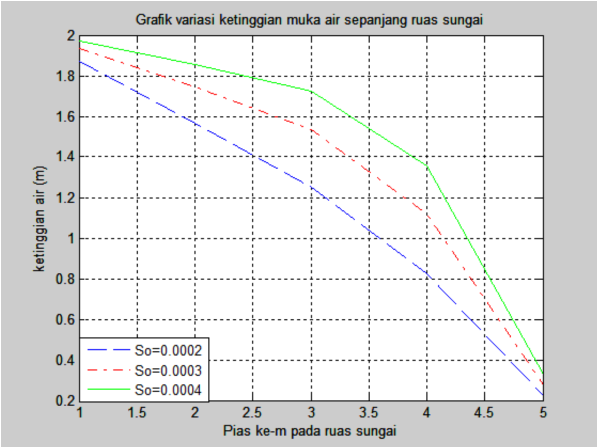


Gambar 3.3. Perbandingan ketinggian muka air dengan kecepatan berbeda

Pengaruh Perubahan Kemiringan Dasar Saluran Terhadap Ketinggian muka air Penelusuran Banjir.

Untuk mengetahui pengaruh perubahan kecepatan terhadap debit aliran sepanjang ruas saluran maka diberikan input panjang ruas saluran (L) = 15000 meter, saluran berpenampang segiempat dengan lebar saluran saluran (b) = 50 m, kedalaman rata-rata air (h) = 2 meter, sebagai syarat awal diberikan debit aliran tetap yaitu (h_0) = 2 meter sedangkan syarat batas hulu ditetapkan debit tetap (h_a) sebesar 2 meter dan disebelah hilir ditetapkan (h_b) sebesar 0.2 meter. simulasi dilakukan jumlah total diskritisasi sebanyak 5 pias, sehingga saluran terbagi dalam beberapa ruas dengan panjang ruas Δx = 3000 m dan selang waktu Δt = 60 menit dengan memberikan input

kecepatan yang berbeda. Dalam kasus ini setiap kecepatan yang diberikan menghasilkan nilai debit aliran yang berbeda terhadap titik node, sepanjang ruas saluran.



Gambar 3.4. Perbandingan ketinggian muka air dengan kemiringan dasar saluran berbeda

KESIMPULAN

Dari hasil simulasi model penelusuran banjir gelombang difusi menunjukkan bahwa kemiringan dasar saluran dan kecepatan rata-rata aliran berpengaruh terhadap perilaku aliran gelombang banjir dengan kesimpulan:

a. Semakin besar kecepatan aliran rata-rata pada saluran/sungai maka semakin kecil ketinggian muka air yang dihasilkan sepanjang ruas saluran/sungai dan semakin kecil kecepatan aliran rata-rata pada saluran/sungai maka semakin besar ketinggian muka air.

b. Semakin besar kemiringan dasar saluran maka semakin besar ketinggian muka air yang dihasilkan sepanjang ruas saluran/sungai dan semakin kecil kemiringan dasar saluran maka semakin kecil ketinggian muka air.

DAFTAR PUSTAKA

Apsley, David, (2007), *Computational Fluid Dynamic*, Lecture Handout, University of Manchester, Manchester.

Chagas, P.F., et al, (2010), "Application of Mathematical Modeling to Study Flood Wave Behavior in Natural Rivers as Function of Hydraulic and Hydrological Parameters of the Basin", *Hydrology Day*.

Chow, T.V., Maidment, D.R., Mays, L.M., (1988), *Applied Hydrology*, McGraw-Hill International Edition, New York.

Gosiorowski, D., Szymkiewicz, R., (2007), "Mass And Momentum Conservation In The Simplified Flood Routing Models", *Jurnal of Hydrology*, vol. 346, hal. 51-58.

Habibah, U., (2009), *Penyelesaian Numerik Model Aliran Air di atas Permukaan Tanah (Overland Flow)*, Tesis, Jurusan Matematika ITS, Surabaya.

Sivapalan, M., Bates, B.C., Larsen, J.E., (1997), "A generalized non-linear diffusion wave equation : theoretical development and application", *Jurnal of Hydrology*, vol.192 , hal. 1-16.

Versteeg, H.K. and Malalasekera, M. (1995), *An Introduction Computational Fluid Dynamics*, Longman Scientific & Technical, Harlow, England.