

## SKEMA AKAR KUADRAT DALAM UNSCENTED KALMAN FILTER UNTUK MENDETEKSI KERAK PADA ALAT PENUKAR PANAS

M. Tholib<sup>1</sup>, Erna Apriliani<sup>2</sup>

Jurusan Matematika FMIPA  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya  
Email: 101tholib@gmail.com

### Abstrak

*Filter Kalman* adalah suatu algoritma yang digunakan untuk mengestimasi variabel keadaan pada sistem linier. Sedangkan untuk sistem taklinier *Filter Kalman* tidak dapat digunakan secara langsung. Untuk beberapa tahun kemudian muncul metode baru yang dikenal dengan nama *Unscented Kalman Filter* (UKF) yang menggunakan teknik *transformasi unscented*. *Akar Kuadrat* merupakan suatu skema yang dapat diterapkan dalam UKF untuk mengestimasi suatu model dinamik taklinier. Dalam makalah ini dilakukan suatu kajian mengenai skema *Akar Kuadrat* yang diterapkan pada *Unscented Kalman Filter* (UKF) sehingga terbentuk suatu algoritma baru yang dinamakan dengan *Akar Kuadrat-Unscented Kalman Filter* (AK-UKF). Dan kemudian algoritma ini diimplementasikan pada model sistem deteksi kerak pada alat penukar panas.

**Kata kunci:** *Filter Kalman, Unscented Kalman Filter (UKF), Akar Kuadrat-Unscented Kalman Filter (AK-UKF), kerak, alat penukar panas.*

### PENDAHULUAN

*Filter Kalman* merupakan salah satu metode untuk menaksir variabel keadaan dari sebuah sistem linier dengan meminimumkan kovariansi kesalahan estimasi. Salah satu pendekatan *Filter Kalman* yang bisa digunakan untuk sistem taklinier, yaitu *Extended Kalman Filter* (EKF) dan *Unscented Kalman Filter* (UKF)[4]. Selama kurang lebih 20-30 tahun EKF diakui secara umum sebagai metode untuk menaksir variabel keadaan sistem taklinier, hingga ditemukan suatu pendekatan baru yang dikenal dengan *Unscented Kalman Filter* [4]. Perbedaan kedua metode ini yaitu pada metode pelinieran yang digunakan, pada EKF sistem dilinierkan dengan menggunakan pendekatan deret Taylor, sementara pada UKF menggunakan *Transformasi Unscented*. Metode dasar *Transformasi Unscented* pertama kali diperkenalkan Uhlman dan Julier [5], mereka membentuk sebuah kerangka yang mewakili variabel random yang dinamakan *Titik-Titik Sigma*.

Skema akar kuadrat merupakan salah satu skema yang dapat diimplementasikan pada UKF. Skema ini dapat mempengaruhi pada hasil estimasi menjadi lebih baik, baik dalam hal tingkat akurasi maupun waktu komputasi yang digunakan[6].

Dalam penelitian ini akan dilakukan suatu kajian mengenai implementasi skema akar kuadrat pada UKF, yang selanjutnya diterapkan untuk mengestimasi variabel keadaan pada sistem dengan model pengukuran taklinier yaitu sistem/model pada alat penukar panas. Hasil estimasi dengan metode *Akar Kuadrat Unscented Kalman Filter* (AK-UKF) selanjutnya akan dibandingkan metode UKF standar, sehingga diperoleh metode yang memiliki tingkat ketelitian yang lebih baik.

---

<sup>1</sup> Mahasiswa Pasca Sarjana Matematika FMIPA ITS Surabaya

<sup>2</sup> Staf Pengajar Jurusan Matematika ITS Surabaya

**UNSCENTED KALMAN FILTER (UKF)**

Proses estimasi pada metode *Filter Kalman* menyajikan bentuk umum dari sistem yang digunakan dan beberapa tahapan dari proses estimasinya. Lewis memberikan suatu sistem dinamik linear, secara umum berbentuk sebagai berikut[3]:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k \\
 z_k &= H_k x_k + v_k \\
 x_0 &\sim (\bar{x}_0, P_{x_0}); w_k \sim (0, Q_k); v_k \sim (0, R_k)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

dengan  $x_k$  variabel keadaan sistem pada waktu  $k$  yang nilai estimasi awalnya  $\bar{x}_0$  dan kovarian awal  $P_{x_0}$ ,  $x_k \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u_k$  variabel input deterministik pada waktu  $k$ ,  $u_k \in \mathfrak{R}^m$ .  $w_k$  gangguan (noise) pada sistem yang mempunyai mean  $\bar{w}_k = 0$  dan kovarian  $Q_k$ ,  $z_k$  variabel pengukuran,  $z_k \in \mathfrak{R}^p$ ,  $v_k$  gangguan (noise) pada pengukuran dengan mean  $\bar{v}_k = 0$  dan kovarian  $R_k$ .  $A_k, B_k, G_k, H_k$  adalah matriks-matrik dengan ukuran yang bersesuaian.

Proses estimasinya ada dua tahap, yaitu tahap prediksi (*time update*) dipengaruhi oleh dinamika sistem, dan tahap koreksi (*measurement update*) dipengaruhi oleh informasi dari pengukuran. Kedua tahap ini akan berulang terus-menerus sampai pada waktu  $k$  yang ditentukan.

*Unscented Kalman Filter* adalah pengembangan dari *Filter Kalman* untuk sistem yang non-linear dengan menggunakan teknik *Transformasi Unscented*. Misalkan diberikan suatu fungsi kepadatan peluang diskrit  $y_k=f(x_k,k)$  mempunyai variabel random  $x$  dari sebuah model taklinear dengan dimensi  $L$  mempunyai *mean*  $\hat{x}$  dan *kovarian*  $P_x$ . Fungsi  $y_k=f(x_k,k)$  didekati dengan *transformasi unscented*. *Mean* dan *kovarian* tersebut digunakan untuk menentukan penyebaran  $2L+1$  titik-titik *sigma* disekitar  $\hat{x}$ . Titik-titik *sigma* dalam bentuk vektor *sigma*  $\chi_i$  diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut [4]:

$$\begin{aligned}
 \chi_0 &= \hat{x} \\
 \chi_i &= \hat{x} + (\sqrt{(L + \lambda)P_x})_i, & i = 1, \dots, L \\
 \chi_i &= \hat{x} - (\sqrt{(L + \lambda)P_x})_{i-L}, & i = L + 1, \dots, 2L
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

dengan:  $\lambda = \alpha^2(n + k) - L$  adalah parameter penskalaan,  $\alpha$  adalah sebuah konstanta yang digunakan untuk menentukan sebaran dari titik *sigma* di sekeliling  $\hat{x}$ , dimana  $\alpha$  selalu bernilai positif kecil dan  $k$  adalah skala penskalaan tambahan, dimana nilai  $k \geq 0$ . Nilai yang paling sering digunakan yaitu  $k = 0$ .

Misalkan diberikan variabel keadaan:

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_L]^T
 \tag{3}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk matriks *sigma points* bisa dituliskan menjadi:

$$\chi_i = [\chi_0 \quad \chi_1 \quad \dots \quad \chi_L \quad \chi_{L+1} \quad \chi_{L+2} \quad \dots \quad \chi_{2L}]^T
 \tag{4}$$

Karena  $y_k = f(x_k)$ , maka penyebaran vektor *sigma*  $y_k$  adalah:

$$y_i = f(\chi_i), \quad i = 0, \dots, 2L,$$

Pembobot *mean* dan *kovarian* dihitung berdasarkan persamaan [6]:

$$\begin{aligned}
 W_0^{(m)} &= \frac{\lambda}{L + \lambda} \\
 W_0^{(c)} &= \frac{\lambda}{L + \lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta \\
 W_i^{(m)} &= W_i^{(c)} = \frac{1}{2(L + \lambda)}, & i = 1, \dots, 2L
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Dengan menggunakan titik-titik *sigma* persamaan (2) dan persamaan pembobot mean-kovarians pada persamaan (5), maka diperoleh mean:

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^{2L+1} [W_i^{(m)} f(\chi_i)] \quad (6)$$

Sedangkan untuk menghitung kovarians dari  $y$  menggunakan persamaan:

$$P_y = \sum_0^{2L} [W_i^{(c)} (f(\chi_i) - \hat{y})(f(\chi_i) - \hat{y})^T] \quad (7)$$

Secara ringkas algoritma *Unscented Kalman Filter* dapat dituliskan sebagai berikut[5]:

#### **Inisialisasi**

Pada saat  $k=0$

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= E[x_0] \\ P_{x_0} &= E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \\ \hat{x}_0^a &= E[x^a] = E[\hat{x}_0^T \ 0 \ 0]^T \\ P_0^a &= E[(x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T] = \begin{bmatrix} P_x & 0 & 0 \\ 0 & P_w & 0 \\ 0 & 0 & P_v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Untuk  $k=1,2,3,\dots,N$ :

Hitung titik *sigma*

$$\chi_{k-1}^a = [\hat{x}_{k-1}^a \ \hat{x}_{k-1}^a + \gamma\sqrt{P_{k-1}} \ \hat{x}_{k-1}^a - \gamma\sqrt{P_{k-1}}]$$

dengan:  $\gamma = \sqrt{L + \lambda}$  dan  $\lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L$

**Tahap prediksi (time update)**

$$\begin{aligned} \chi_{k|k-1}^x &= f(\chi_{k-1}^x, \chi_{k-1}^w) \\ \hat{x}_k^- &= \sum_{i=0}^{2L} [W_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1}^x] \\ P_{x_k}^- &= \sum_{i=0}^{2L} [W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_k^-)(\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_k^-)^T + Q_k] \\ Z_{k|k-1} &= H(\chi_{k|k-1}^x, \chi_{k-1}^v) \\ \hat{z}_k^- &= \sum_{i=0}^{2L} [W_i^{(m)} Z_{i,k|k-1}] \end{aligned}$$

**Tahap koreksi (measurement update)**

$$\begin{aligned} P_{\hat{x}_k, \hat{z}_k} &= \sum_{i=0}^{2L} [W_i^{(c)} (Z_{i,k|k-1} - \hat{z}_k^-)(Z_{i,k|k-1} - \hat{z}_k^-)^T + R_k] \\ P_{x_k, \hat{z}_k} &= \sum_{i=0}^{2L} [W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_k^-)(Z_{i,k|k-1} - \hat{z}_k^-)^T] \\ K_k &= P_{x_k, \hat{z}_k} P_{\hat{z}_k, \hat{z}_k}^{-1} \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k (z_k - \hat{z}_k^-) \\ P_{x_k} &= P_{x_k}^- - K_k P_{\hat{z}_k, \hat{z}_k} K_k^T \end{aligned}$$

Dengan  $Q_k$  = kov. error proses dan  $R_k$  = kov. error pengukuran

#### **AKAR KUADRAT UNSCENTED KALMAN FILTER (AK-UKF)**

Algoritma UKF standar dapat dimodifikasi dengan cara menyebarkan matriks akar kuadrat/faktor *Cholesky*  $S_k$  secara langsung, untuk menghindari kebutuhan pemfaktoran ulang pada setiap time step sehingga bisa mengurangi beban komputasi.

Untuk memperoleh nilai estimasi, kovarian error dan penghitungan faktor Cholesky tahap prediksi dan koreksi adalah dengan menggunakan teknik *Transformasi Unscented*. Secara urut algoritma akar kuadrat pada UKF dapat disusun sebagai berikut:

**Inisialisasi**

Pada saat  $k = 0$

$$\hat{x}_0 = E[x_0]$$

$$P_{x_0} = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$$

Faktor Cholesky  $S_0$ :  $S_0 = chol(P_{x_0})$

$$\hat{x}_0^a = E[x^a] = E[\hat{x}_0^T \ 0 \ 0]^T$$

$$P_0^a = E[(x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T] = \begin{bmatrix} P_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & P_w & 0 \\ 0 & 0 & P_v \end{bmatrix}$$

Faktor Cholesky tambahan  $S_0^a$ :  $S_0^a = chol(P_0^a)$

Misal diberikan variabel keadaan:

$$x_k = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_L]^T \tag{8}$$

Dengan kovarian awal:

$$P_k = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1L} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2L} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{L1} & P_{L2} & \dots & P_{LL} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Berdasarkan model yang diberikan variabel random  $x_k$  dengan dimensi  $L$  mempunyai mean  $\hat{x}_k$ , kovarian  $P_k$  dan juga faktor Cholesky  $S_k$  yang diperoleh dari persamaan  $P_k = S_k S_k^T$ , atau bisa ditulis:  $S_k = chol(P_k)$ .

Kemudian didefinisikan variabel keadaan tambahan:

$$x_k^a = [x_k \ w_k]^T \tag{10}$$

Sedangkan kovarian awal tambahan:

$$P_k^a = \begin{bmatrix} P_k & P_k^{xw} \\ P_k^{xw} & Q_k \end{bmatrix} \tag{11}$$

Dan faktor Cholesky awal tambahan adalah:

$$S_k^a = chol(P_k^a) = chol \begin{bmatrix} P_k & P_k^{xw} \\ P_k^{xw} & Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & T_k \end{bmatrix} \tag{12}$$

$T_k$  adalah faktor Cholesky dari  $Q_k$ .

Selanjutnya mean, kovarian dan faktor Cholesky tersebut digunakan untuk menentukan penyebaran  $2L+1$  titik-titik sigma disekitar  $\hat{x}_k^a$ . Titik-titik sigma dalam bentuk vektor sigma  $\chi_{i,k}^a$  diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut[7]:

$$\begin{aligned} \chi_{i,k}^a &= \hat{x}_k^a, \quad i = 0 \\ \chi_{i,k}^a &= \hat{x}_k^a + \gamma S_i^a, \quad i = 1, 2, \dots, L \\ \chi_{i,k}^a &= \hat{x}_k^a - \gamma S_i^a, \quad i = L+1, \dots, 2L \end{aligned} \tag{13}$$

Dengan  $\gamma$  adalah skala parameter  $\gamma = \sqrt{L + \lambda}$  dan  $\lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L$ ,  $S_i^a$  adalah elemen baris ke- $i$  dari  $S_k^a$ , sedangkan  $L$  adalah dimensi variabel tambahan.

Berdasarkan variabel keadaan diatas persamaan matriks sigma poin bisa dituliskan menjadi:

$$\chi_{i,k}^a = [\hat{x}_k^a \ \hat{x}_k^a + \gamma S_i^a \ \hat{x}_k^a - \gamma S_i^a] \tag{14}$$

Sedangkan titik-titik sigma untuk  $x_{k+1}$  diperoleh dari:

$$\chi_{i,k+1}^x = F(\chi_{i,k}^x, \chi_{i,k}^w) \tag{15}$$

**Tahap Prediksi:**

Dengan menggunakan titik-titik sigma persamaan (15) dan pembobot mean dan kovarian persamaan (5) diperoleh hasil estimasi:

$$\hat{x}_{k+1}^- = \sum_{i=0}^{2L} [W_i^m \chi_{i,k+1}^x] \tag{16}$$

Langkah berikutnya adalah menentukan faktor Cholesky prediksi ( $S_{\hat{x}_{k+1}}^-$ ) dengan cara melakukan faktorisasi QR terlebih dulu dari persamaan:

$$S_{\hat{x}_{k+1}}^- = qr([\sqrt{W_1^e}(X_{1:2L,k+1}^x - \hat{x}_{k+1}^-) \quad \sqrt{Q_{k+1}}]) \quad (17)$$

Lalu menghitung Update Faktor Cholesky dari  $S_{\hat{x}_{k+1}}^-$  dengan persamaan:

$$S_{\hat{x}_{k+1}}^- = cholupdate [S_{\hat{x}_{k+1}}^-, (X_{0,k+1}^x - \hat{x}_{k+1}^-), W_0^e] \quad (18)$$

Sigma poin dari model pengukuran, yaitu:

$$Z_{i,k+1} = H(X_{i,k+1}^x, X_{i,k+1}^v) \quad (19)$$

Dengan menggunakan persamaan bobot (5) dan persamaan (19) diperoleh persamaan estimasi dari model pengukuran:

$$\hat{z}_{k+1,k} = \sum_{i=0}^{2L} [W_i^m Z_{i,k+1}] \quad (20)$$

### Tahap Koreksi

Menghitung faktor Cholesky  $S_{\hat{z}_{k+1}}$  dengan melakukan faktorisasi QR dari persamaan:

$$S_{\hat{z}_{k+1}} = qr([\sqrt{W_1^e}(Z_{1:2L,k+1} - \hat{z}_{k+1}) \quad \sqrt{Q_k}]) \quad (21)$$

Lalu menghitung Update Faktor Cholesky  $S_{\hat{z}_k}$  dari:

$$S_{\hat{z}_{k+1}} = cholupdate (S_{\hat{z}_{k+1}}, (Z_{0,k+1} - \hat{z}_{k+1}), W_0^e) \quad (22)$$

Kovarian error model proses dan pengukuran (cross covarian) diperoleh dari persamaan:

$$P_{x_{k+1}z_{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} [W_i^e [X_{i,k+1} - \hat{x}_{k+1}^-] [Z_{i,k+1} - \hat{z}_{k+1}^-]^T] \quad (23)$$

Kalman Gain diperoleh dari persamaan:

$$K_{k+1} = (P_{x_{k+1}z_{k+1}} / S_{\hat{z}_{k+1}}^T) / S_{\hat{x}_{k+1}} \quad (24)$$

Persamaan estimasi tahap koreksi adalah:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (Z_{k+1} - \hat{z}_{k+1}^-) \quad (25)$$

Menghitung matrik U dengan persamaan:

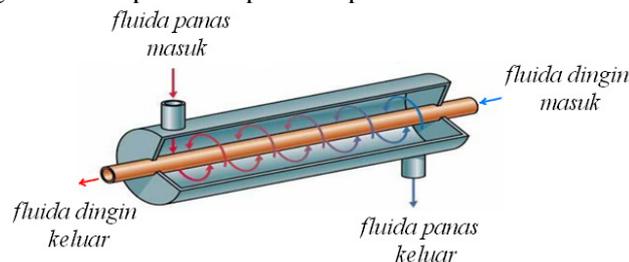
$$U = K_{k+1} S_{\hat{z}_{k+1}} \quad (21)$$

Menghitung faktor Cholesky tahap koreksi  $S_{k+1}$  dari persamaan:

$$S_{k+1} = cholupdate ([S_{k+1}^-, U, -1]) \quad (22)$$

### MODEL / SISTEM PADA ALAT PENUKAR PANAS

Alat penukar panas atau dalam industri kimia populer dengan istilah *Heat Exchanger* (HE), merupakan suatu alat yang berfungsi untuk memindahkan panas antara dua fluida yang berbeda temperatur dan dipisahkan oleh suatu sekat pemisah. Perpindahan panas antara dua fluida dapat dipastikan mengakibatkan kerak[2]. Cukup banyak kerugian yang dapat ditimbulkan oleh kerak tersebut. Sehingga apabila terjadi perpindahan panas yang besar maka penting untuk dapat mendeteksi kerak yang terbentuk pada alat penukar panas.



Gambar 1. Alat Penukar Panas Tipe counter-flow

Dari gambar diatas persamaan / model yang mewakili alat penukar panas adalah[2]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_{h,1} \\ T_{h,2} \\ T_{c,1} \\ T_{c,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_h} & 0 & \frac{\alpha}{2\tau_h} & \frac{\alpha}{2\tau_h} \\ \left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_h} & -\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_h} & \frac{\alpha}{2\tau_h} & 0 \\ \frac{\beta}{2\tau_c} & \frac{\beta}{2\tau_c} & -\left(1+\frac{\beta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_c} & 0 \\ \frac{\beta}{2\tau_c} & 0 & \left(1-\frac{\beta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_c} & -\left(1+\frac{\beta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{h,1} \\ T_{h,2} \\ T_{c,1} \\ T_{c,2} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} \left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_h} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2\tau_h} \\ 0 & \left(1-\frac{\beta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_c} \\ \frac{\beta}{2\tau_c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{h,in} \\ T_{c,in} \end{bmatrix} & \quad (23)
 \end{aligned}$$

dengan  $T_{h,1}$  adalah temperatur pada bagian panas 1( $^{\circ}C$ ),  $T_{h,2}$  adalah temperatur pada bagian panas 2 = temperatur keluar (outlet) dari fluida panas( $^{\circ}C$ ),  $T_{c,1}$  adalah temperatur pada bagian dingin 1( $^{\circ}C$ ),  $T_{c,2}$  adalah temperatur pada bagian dingin 2 = temperature keluar (outlet) dari fluida dingin( $^{\circ}C$ ),  $T_{h,in}$  adalah temperatur inlet (masuk) pada bagian panas( $^{\circ}C$ ),  $T_{c,in}$  adalah temperatur inlet (masuk) pada bagian dingin( $^{\circ}C$ ).

Model tersebut memiliki 4 parameter yang dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\alpha(t) = \frac{A_h U}{\dot{m}_h(t) c_h}, \tau_h(t) = \frac{M_h}{\dot{m}_h(t)}, \beta(t) = \frac{A_c U}{\dot{m}_c(t) c_c}, \tau_c(t) = \frac{M_c}{\dot{m}_c(t)},$$

dengan:

$\alpha$  dan  $\beta$  adalah jumlah unit perpindahan panas pada fluida panas dan dingin,

$\tau_h$  dan  $\tau_c$  adalah waktu yang dibutuhkan perpindahan panas fluida panas dan dingin,

$A_h$  dan  $A_c$  adalah area perpindahan panas pada fluida panas dan dingin ( $m^2$ ),

$U$  adalah koefisien perpindahan panas menyeluruh, diasumsikan  $U$  konstan,  $M$  adalah massa fluida,

$c_h$  dan  $c_c$  adalah konstanta pada bagian panas dan bagian dingin.

Misalkan model state:

$$\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{f}(\underline{\dot{m}}, \underline{x}, \underline{T}_{in}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}(t) = [\alpha \quad \beta \quad T_{h,1} \quad T_{h,2} \quad T_{c,1} \quad T_{c,2}]^T, \underline{\dot{m}} = [\dot{m}_h \quad \dot{m}_c]^T, \underline{T}_{in} = [T_{h,in} \quad T_{c,in}]^T$$

$\dot{m}_h$  adalah laju alir massa pada bagian panas ( $kg/s$ ),  $\dot{m}_c$  adalah laju alir massa pada bagian dingin ( $kg/s$ ). Didapatkan persamaan model state sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ T_{h,1} \\ T_{h,2} \\ T_{c,1} \\ T_{c,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1+\alpha/2}{\tau_h}T_{h,1} + \frac{\alpha}{2\tau_h}T_{c,1} + \frac{\alpha}{2\tau_h}T_{c,2} + \frac{1-\alpha/2}{\tau_h}T_{h,in} \\ \frac{1-\alpha/2}{\tau_h}T_{h,1} - \frac{1+\alpha/2}{\tau_h}T_{h,2} + \frac{\alpha}{2\tau_h}T_{c,1} + \frac{\alpha}{2\tau_h}T_{c,in} \\ \frac{\beta}{2\tau_c}T_{h,1} + \frac{\beta}{2\tau_c}T_{h,2} - \frac{1+\beta/2}{\tau_c}T_{c,1} + \frac{1-\beta/2}{\tau_c}T_{c,in} \\ \frac{\beta}{2\tau_c}T_{h,1} + \frac{1-\beta/2}{\tau_c}T_{c,1} - \frac{1+\beta/2}{\tau_c}T_{c,2} + \frac{\beta}{2\tau_c}T_{h,in} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dari 6 parameter pada model di atas, variabel yang akan diestimasi pada makalah ini adalah  $\alpha$  dan  $\beta$ , dengan tujuan untuk mengetahui jumlah unit perpindahan panas pada fluida panas dan dingin sebagai dasar deteksi adanya kerak. Dan dengan cara yang sama, dapat diestimasi pula nilai dari 4 parameter yang lain yaitu  $T_{h,1}$ ,  $T_{h,2}$ ,  $T_{c,1}$  dan  $T_{c,2}$  untuk mengetahui pola distribusi temperatur pada masing-masing bagian.

Model diatas disimulasikan dengan nilai awal yang definisikan sebagai berikut[2]:

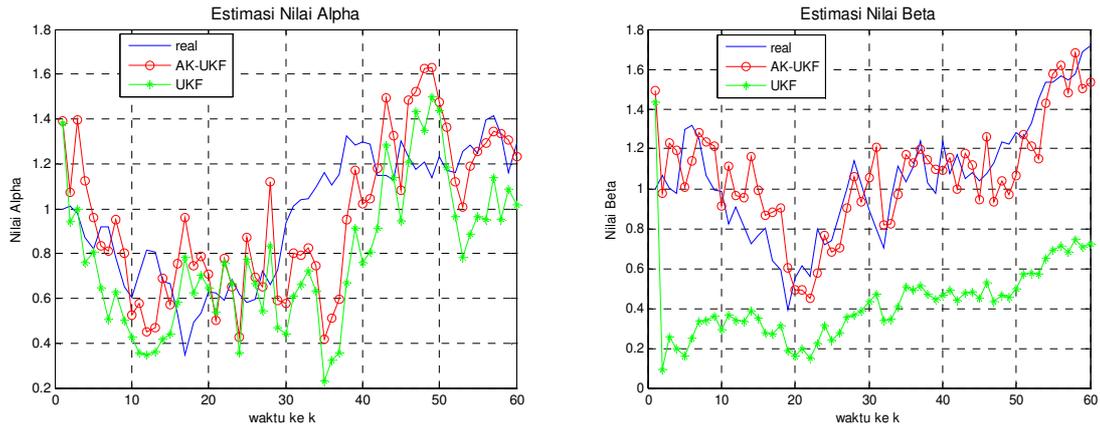
$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 70 \\ 60 \\ 35 \\ 70 \end{bmatrix}; \quad P(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Kemudian  $Q$  (kovarian noise pada sistem) dan  $R$  (kovarian noise pada pengukuran) dapat didefinisikan sebagai matriks diagonal berikut:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

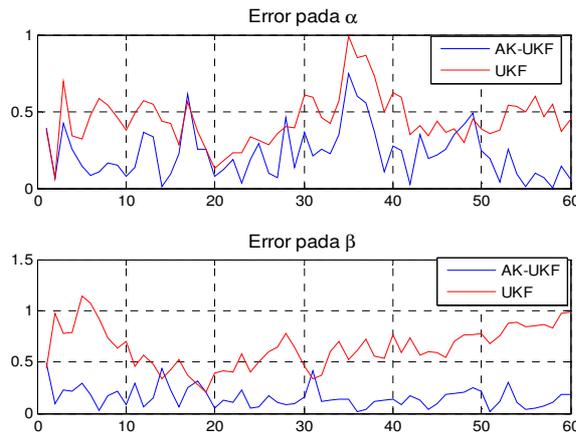
## HASIL SIMULASI

Pada gambar 2 terlihat bahwa dengan 60 iterasi grafik estimasi  $\alpha$  dengan metode AK-UKF relatif lebih mendekati grafik realnya dibandingkan dengan grafik dengan metode UKF standar. Kemudian grafik estimasi  $\beta$  dengan metode AK-UKF juga jauh lebih mendekati grafik realnya dibandingkan dengan grafik dengan metode UKF. Hal menunjukkan bahwa dari 60 kali iterasi estimasi  $\alpha$  dan  $\beta$  dengan metode AK-UKF lebih akurat daripada metode UKF standar.



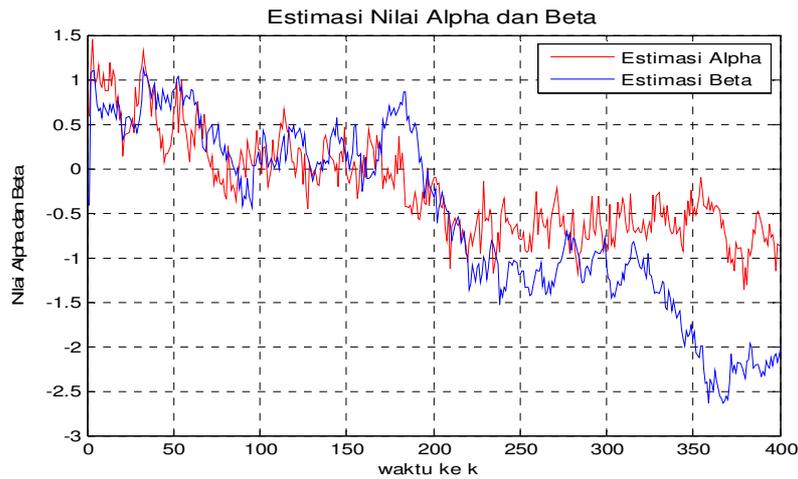
Gambar 2. Hasil Estimasi  $\alpha$  dan  $\beta$  menggunakan UKF dan AK-UKF

Perbandingan nilai error kedua metode pada estimasi  $\alpha$  dan  $\beta$  terlihat pada gambar 3, dapat dikatakan bahwa untuk waktu sampai ke-60 satuan waktu, nilai error estimasi  $\alpha$  dan  $\beta$  dengan menggunakan metode AK-UKF cenderung stabil pada kisaran 0.01–0.75 relatif lebih kecil daripada dengan menggunakan metode UKF yang berada pada kisaran 0.25-1.00. Dapat dikatakan pula bahwa nilai estimasi  $\alpha$  dan  $\beta$  dengan AK-UKF memiliki error maksimal kurang dari 0.75, yang relatif kecil dibanding dengan metode UKF standar yang mencapai 1.00. Artinya pada estimasi  $\alpha$  dan  $\beta$  nilai error dengan metode UKF standar, jauh lebih besar dibandingkan dengan metode AK-UKF. Jadi, dapat disimpulkan bahwa metode AK-UKF lebih akurat daripada metode UKF standar.



Gambar 3. Error Estimasi  $\alpha$  dan  $\beta$  dengan Metode UKF dan AK-UKF

Selanjutnya akan dilakukan estimasi sampai dengan 400 satuan waktu. Dengan waktu yang lebih lama, diprediksikan kerak telah timbul atau terakumulasi. Gambar 4 menunjukkan bahwa ketika memasuki waktu ke-200 telah terjadi penurunan drastis nilai estimasi dari  $\alpha$  dan  $\beta$  yaitu dari kisaran  $(-0.5)^{\circ}\text{C}-(1.5)^{\circ}\text{C}$  sampai pada kisaran  $(-1.3)^{\circ}\text{C} - (-2.6)^{\circ}\text{C}$ . Maka secara teoritis ataupun fisis dapat dikatakan telah terdeteksi adanya kerak pada alat penukar panas.



Gambar 4. Estimasi dari  $\alpha$  dan  $\beta$  sampai waktu ke -400

Untuk  $\alpha$  pada waktu ke-75 satuan waktu, nilai dari estimasinya sudah terlihat mulai mengalami penurunan dibawah  $0^{\circ}\text{C}$ , dan secara terus menerus menurun. Mulai terjadi penurunan drastis setelah waktu ke-200 sampai pada suhu  $(-1.4)^{\circ}\text{C}$ . Sedangkan untuk  $\beta$  sampai pada waktu ke-75 satuan waktu nilai estimasinya terus mengalami penurunan sampai mendekati suhu  $(-0.5)^{\circ}\text{C}$ , meskipun kemudian sempat mengalami kenaikan suhu pada waktu ke-180, namun berikutnya setelah waktu ke-200 mengalami penurunan drastis sampai pada titik  $(-2.6)^{\circ}\text{C}$ . Hal ini menunjukkan adanya kerak pada alat tersebut ketika memasuki waktu ke-200.

Perbandingan waktu komputasi algoritma UKF dan AK-UKF pada masing-masing iterasi dapat dilihat pada Tabel 1 berikut:

Tabel.1 Perbandingan waktu komputasi algoritma UKF dan AK-UKF

| Jumlah iterasi | Waktu Komputasi (detik) |               |
|----------------|-------------------------|---------------|
|                | Metode UKF              | Metode AK-UKF |
| $k=60$         | 2.3879                  | 1.5740        |
| $k=100$        | 4.7372                  | 2.9715        |
| $k=600$        | 10.5155                 | 5.8328        |
| $k=1000$       | 35.4859                 | 14.6148       |

Nilai Root Mean Square Error (RMSE) dari tiap-tiap variabel pada iterasi  $k=60$ ,  $k=100$  dan  $k=400$  ditunjukkan pada Tabel 2.

Tabel 2 Perbandingan RMSE Algoritma UKF dan AK-UKF tiap variabel.

| Variabel keadaan | Root Mean Square Error (RMSE) |        |         |        |         |        |
|------------------|-------------------------------|--------|---------|--------|---------|--------|
|                  | $k=60$                        |        | $k=100$ |        | $k=400$ |        |
|                  | UKF                           | AK-UKF | UKF     | AK-UKF | UKF     | AK-UKF |
| $\alpha$         | 2.5646                        | 1.8775 | 3.5354  | 2.1375 | 10.4661 | 2.4596 |
| $\beta$          | 3.7862                        | 1.1688 | 4.9112  | 1.4220 | 37.4690 | 1.9113 |

## KESIMPULAN DAN SARAN

Dari tabel perbandingan rata-rata error antara UKF standar dan AK-UKF dapat disimpulkan bahwa metode AK-UKF jauh lebih baik dan akurat daripada UKF standar. Sedangkan dari tabel perbandingan waktu komputasi yang digunakan dari kedua algoritma tersebut dapat disimpulkan pula bahwa metode AK-UKF membutuhkan waktu yang lebih sedikit daripada UKF standar. Jadi

secara keseluruhan dapat disimpulkan berarti metode AK-UKF lebih akurat dan efisien dibanding dengan metode UKF standar. Penulis menyarankan untuk mengkaji lebih lanjut penerapan metode AK-UKF pada model sistem yang taklinier dan berorde yang lebih tinggi.

#### **DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Golub, H. G. dan Loan, V. F. Charles. (1996), "*Matrix Computations (Third Edition)*", The John Hopkins University Press, Baltimore and London.
- [2] Jonsson, G.R., Lalot, S., Palsson, O.P., dan Desmet, B. (2007). "*Use of Extended Kalman Filtering in Detecting Fouling in Heat Exchangers*". University of Iceland, France.
- [3] Lewis, L Frank. (1986), "*Optimal Estimation, With An Introduction To Stochastic Control Theory*", John Wiley and Sons, New York.
- [4] Rudi. (2006), "*Penerapan Extended Kalman Filter dan Unscented Kalman Filter pada Estimasi Variabel Keadaan Sistem dengan Model Pengukuran Taklinier*", Tesis Magister Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [5] Terejanu, Gabriel.A.(2003), "*Unscented Kalman Filter Tutorial*", Departement of Computer and Engineering University at Buffalo.
- [6] Wan, Eric dan Merwe, Rudolph V.D. (2001), "*The Square Root Unscented Kalman Filter For State and Parameter Estimation*". Oregon Graduate Institute of Science and Technology USA.