PROSIDING ISBN : 978-979-16353-3-2

T-23

PENENTUAN BILANGAN KROMATIK FUZZY PADA GRAF FUZZY $G_F(V,E_F)$ MELALUI BILANGAN KROMATIK PADA *CUT* $G_\alpha(V,E_\alpha)$

Isnaini Rosyida
Jur. Matematika UNNES
isnainimat@staff.unnes.ac.id

Abstrak

Bilangan kromatik pada graf klasik G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian hingga titik-titik di G dapat diwarnai dengan k warna. Konsep graf telah digeneralisasi menjadi graf fuzzy. Terdapat beberapa tipe graf fuzzy, diantaranya graf fuzzy $G_F(V,E_F)$ dengan himpunan sisi fuzzy E_F dan fungsi keanggotaan μ: V x V $\rightarrow$ I. Konsep-konsep dasar pada graf klasik juga telah digeneralisasi untuk graf fuzzy, diantaranya konsep pewarnaan dan bilangan kromatik. Pada makalah ini akan dibahas penentuan bilangan kromatik fuzzy pada graf fuzzy $G_F(V,E_F)$. Penentuan bilangan kromatik ini dimulai dengan konstruksi *cut*-α dari graf G_F, yaitu graf klasik $G_\alpha=(V,E_\alpha)$ $\alpha\in I$, dengan E_α *cut* pada himpunan sisi E_F. Langkah berikutnya penentuan bilangan kromatik χ_α pada G_α. Bilangan kromatik pada $G_F(V,E_F)$ adalah bilangan fuzzy $\chi(G_F) = \{(x,v(x)) \mid x\in X\}$, dimana: $X=\{1,2,\ldots, |V|\}$, $v(x)$ = maks $\{\alpha\in I \mid x\in A^\alpha\}$ untuk setiap $x\in X$, dan $A^\alpha = \{1,2,\ldots, \chi_\alpha\}$ untuk setiap $\alpha\in I$.

Kata kunci: Bilangan kromatik, Graf Fuzzy $G_F(V,E_F)$, *cut*-$G_\alpha(V,E_\alpha)$, Bilangan Kromatik Fuzzy

1. PENDAHULUAN

Teori graf diperluas ke teori graf fuzzy dengan menggunakan konsep himpunan fuzzy. Teori graf fuzzy pertama kali dikenalkan oleh Rosenfeld pada tahun 1975 (Somasundaram,1998). Rosenfeld mendefinisikan sebuah graf fuzzy dengan himpunan titik dan himpunan sisi fuzzy. Akan tetapi, kekaburan dalam sebuah graf sebenarnya juga dapat terjadi hanya pada: himpunan titik saja, atau himpunan sisi, atau bobot sisinya. Sehingga Blue, Bush dan Pucket (2002) telah mengklasifikasikan graf fuzzy dalam empat tipe.

Salah satu tipe graf fuzzy adalah graf $G(V, E_F)$ yaitu graf fuzzy dengan himpunan sisi fuzzy E_F dan fungsi keanggotaan μ: V x V $\rightarrow$ I (Blue et al,2002). Banyak konsep-konsep dasar pada graf yang telah digeneralisasi untuk graf fuzzy, diantaranya konsep pewarnaan. Munoz dkk (2005) telah mengkonstruksi konsep pewarnaan pada graf fuzzy $G_F(V,E_F)$, sedangkan konsep pewarnaan pada graf fuzzy tipe lainnya telah dikonstruksi oleh Eslahchi dkk (2005) serta Sattanathan dan Lavanya (2009).

Pewarnaan pada graf fuzzy $G_F(V,E_F)$ dapat dilakukan dengan dua pendekatan. Pada paper sebelumnya (Isnaini, 2009), telah dikaji metode dari Munoz (2005) untuk penentuan bilangan kromatik pada graf fuzzy $G_F(V, E_F)$ melalui fungsi pewarnaan $C_{(d,f)}$, dimana d menyatakan ukuran perbedaan antara warna C(i) dan C(j) untuk setiap $i,j \in V$ dan fungsi skala $f: I \to [0,\infty)$.

Pada Makalah ini akan dikaji metode dari Munoz (2005) untuk pewarnaan pada graf fuzzy $G(V, E_F)$ melaui pewarnaan pada *cut*-α ($\alpha \in I$) dari G_F, yang berupa graf klasik $G_\alpha=(V,E_\alpha)$, dengan E_α *cut* pada himpunan sisi E_F. Pewarnaan ini akan menghasilkan bilangan kromatik fuzzy pada graf fuzzy $G(V,E_F)$

2. KONSEP-KONSEP DASAR

2.1. Definisi Graf

Graf *G* adalah suatu pasangan himpunan (*V*, *E*) = *(V(G),E(G)* dengan *V* adalah himpunan tidak kosong dan *E* adalah himpunan pasangan tidak terurut dari unsur-unsur *V*. Unsur dari *V* disebut *titik* (*vertex*) dari *G* dan unsur-unsur dari *E* disebut *sisi* (*edge*) dari *G*.

Jika sisi $e=(u,v)=uv \in E(G)$ maka titik u disebut bertetangga dengan titik v atau sebaliknya.

2.2. Himpunan Fuzzy

Himpunan *fuzzy A* pada semesta *V* dinyatakan sebagai himpunan pasangan berurutan (*set of ordered pairs*) baik diskrit maupun kontinu : $A = \{\{v, \mu(v)\} | v \in V\}$.

Fungsi μ adalah fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy A*, dimana $\mu : V \to I$ untuk setiap $v \in V$. Nilai $\mu(v)$ disebut juga derajat keanggotaan (*membership value*) dari unsur v, atau ukuran yang menyatakan sejauh mana unsur v termasuk dalam himpunan A. Himpunan I dapat berupa:

a. selang [0,1], atau

b. himpunan titik diskrit I={0,1,2,…,k}, atau

c. himpunan dengan unsur-unsur yang terurut (bukan numerik), seperti I={*null, low, medium, high, total*}, dan sebagainya

Sedangkan bilangan fuzzy adalah himpunan fuzzy yang terdefinisi pada $V \subseteq R$

Misal *A* himpunan fuzzy pada *V* dengan fungsi keanggotaan $\mu: V \rightarrow [0,1]$ dan $\alpha \in (0,1]$. *Cut*- α dari A adalah himpunan $A\alpha = \{x \in V | \mu(x) \geq \alpha\}$.

Contoh 1:

1. E= { AB, AD, CB, CD, DB } himpunan sisi pada sebuah graf yang terdiri dari 5 sisi. Dalam teori himpunan fuzzy, dapat ditulis: E={(AB,n), (AD,l),(CB,m), (CD,h), (DB,t)}, artinya himpunan sisi (fuzzy) E terdiri dari 5 unsur yaitu sisi AB dengan derajat keanggotaan μ(AB)=n(*null*); sisi AD dengan derajat keanggotaan μ(AD)=l(*low*); sisi CB dengan derajat keanggotaan μ(CB)=m(*medium*); sisi CD dengan derajat keanggotaan μ(CD)=h(*high*); sisi DB dengan derajat keanggotaan μ(DB)=t(*total*).
   Salah satu *cut* dari E adalah *cut*-m=E_m={CD, DB}.

2. Himpunan sisi fuzzy E = {(AB, 0.1), (AC,0.5), (BC,0.8) } mempunyai 3 unsur, yaitu sisi AB dengan derajat keanggotaan μ(AB)=0.1, sisi BC dengan derajat keanggotaan μ(AB)=0.8 dan sisi AC dengan derajat keanggotaan μ(AC)=0.5.
   Salah satu *cut* dari E adalah *cut*-0.5=$E_{0.5}$={AC, BC}

2.3. Pewarnaan Pada Graf Klasik G

Diketahui graf klasik G=(V,E). Pewarnaan pada G adalah pemetaan $C:V \rightarrow N$ sedemikian hingga dua buah titik yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda atau $C(i) \neq C(j)$ jika $(i,j) \in E(G)$. Titik i dan j disebut tak kompatibel (*incompatible)*, jika $(i,j) \in E(G)$. Sebaliknya, titik i dan j disebut kompatibel (*compatible*) jika $(i,j) \notin E(G)$). Dengan demikian dua buah titik yang kompatibel dapat diwarnai dengan warna yang sama, sedangkan dua buah titik yang tak kompatibel diwarnai dengan warna yang berbeda.

Sedangkan pewarnaan-k pada graf G adalah pemetaan $C^k: V \rightarrow \{1,2,…,k\}$. Jika G mempunyai pewarnaan-k, maka dikatakan titik-titik di G dapat diwarnai dengan k

 ISBN : 978-979-16353-3-2

warna (k-*colourable*). Bilangan kromatik pada graf G, yaitu bilangan asli terkecil k sedemikian hingga titik-titik di G dapat diwarnai dengan k warna. (Munoz et al, 2005).

3. PEMBAHASAN

Sebuah graf terdiri dari dua buah himpunan, yaitu himpunan titik dan himpunan sisi. Kekaburan dalam sebuah dapat terjadi pada himpunan titik, himpunan sisi, himpunan titik dan sisi atau pada bobot sisinya. Sehingga graf fuzzy dapat diklasifikasikan dalam empat tipe:

1. graf fuzzy dengan himpunan sisi fuzzy
2. graf fuzzy dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E (*crisp*) tetapi mempunyai keterhubungan sisi fuzzy
3. graf fuzzy dengan himpunan titik fuzzy
4. graf fuzzy dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E (*crisp*) tetapi bobot tiap sisinya fuzzy. (Blue et al :2002)

3.1. Graf Fuzzy dengan himpunan sisi fuzzy $G(V,E_F)$

Definisi 1:

Graf fuzzy $G(V, E_F)$ adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi fuzzy E_F dengan fungsi keanggotaan μ: $V \times V \rightarrow I$, dimana I berupa selang [0,1] atau himpunan dengan unsur-unsur terurut (bukan numerik): I={*null, low, medium, high, total*}. Graf fuzzy $G(V,E_F)$ juga dapat ditulis dengan $G(V, \mu)$. (Munoz et al, 2005)

Definisi 2:

Dua buah titik u dan v pada graf fuzzy $G(V, E_F)$ dikatakan bertetangga $\mu(u,v)>0$ atau $\mu(u,v)>n$

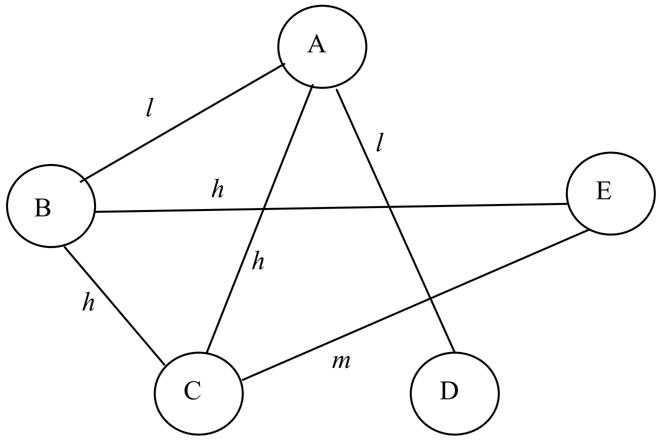
Graf klasik G(V,E) merupakan kasus khusus dari graf fuzzy $G_F(V,E_F)$, dengan himpunan derajat keanggotaan sisi I={0,1}, dimana $\mu(i,j)=0$ ekivalen dengan sisi $(i,j)\notin E(G)$ dan $\mu(i,j)=1$ ekivalen dengan sisi $(i,j)\in E(G)$. Dengan demikian konsep graf fuzzy $G_F(V,E_F)$ merupakan generalisasi dari konsep graf klasik G(V,E).

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Contoh 2:

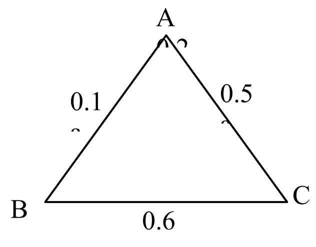
Graf fuzzy $G(V,E_F)$ dengan V={A, B, C, D, E}, E_F = {(AB,l), (AC,h), (AD,l), (BC,h), (BE,h), (CE,m),(AE,n),(BD,n),(CD,n),(DE,n)}, dengan derajat keanggotaan tiap sisinya adalah I = {n,l,m,h}, dimana

- n = *null* (titik u dan v tidak bertetangga).
- l =*low* (hubungan ketetanggaan titik u dan v rendah)
- m = *medium* (hubungan ketetanggaan titik u dan v sedang).
- h = *high* (hubungan ketetanggaan titik u dan v tinggi)



Gambar 1. Graf fuzzy $G(V,E_F)$ dengan I = {n,l,m,h}

Contoh 3: Graf fuzzy $G(V,E_F)$ dengan V={A,B,C}, E = {(AB,0.1), (AC,0.5), (BC,0.6) }, dengan derajat keanggotaan tiap sisinya adalah I = {0.1, 0.5, 0.6}



Gambar 2. Graf Fuzzy $G(V,E_F)$ dengan I = {0.1, 0.5, 0.6}

Pada Gambar 2 di atas, titik A,B dan C saling bertetangga

3.2. Bilangan Kromatik pada Graf Fuzzy $G(V, E_F)$

Dalam sebuah himpunan fuzzy terdapat konsep *cut*-α , demikian pula pada graf fuzzy $G(V,E_F)$. Konsep *cut*-α dari graf $G_F(V,E_F)$ dikonstruksi melalui konsep *cut* pada

 ISBN : 978-979-16353-3-2

himpunan sisi fuzzy E_F. Analisis struktur dari graf fuzzy $G(V,E_F)$ dapat dilakukan dengan menganalisis keluarga himpunan *cut*-α dari graf G_F tersebut. Adapun konsep *cut*-α dari sebuah graf fuzzy akan disajikan pada definisi berikut.

Definisi 3:

Diketahui graf fuzzy $G(V, E_F)$ dengan himpunan sisi fuzzy E_F beserta fungsi keanggotaan $\mu: V \times V \rightarrow I$. Untuk setiap $\alpha \in I$, *cut*-α dari graf G_F adalah graf klasik $G_\alpha(V,E_\alpha)$ dimana $E_\alpha=\{(i,j)|\ i,j \in V,\ \mu(i,j) \geq \alpha\}$. Sedangkan $\{ G_\alpha(V,E_\alpha)|\ \alpha \in I\}$ adalah keluarga himpunan *cut*-α dari G_F.

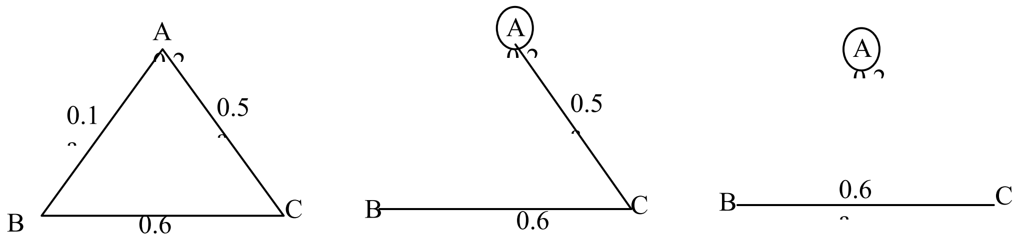
Contoh 4:

Cut-α dari graf fuzzy G_F pada gambar 2 di atas adalah:

$G_{0.1}=(V,E_{0.1})$, dengan $E_{0.1}=\{AB,AC,BC\}$

$G_{0.5}=(V,E_{0.5})$, dengan $E_{0.5}=\{AC,BC\}$

$G_{0.5}=(V,E_{0.6})$, dengan $E_{0.5}=\{BC\}$



Gambar 3.*Cut*-0.1, Keluarga himpunan *Cut*-α dari graf fuzzy G_F

Pewarnaan pada graf fuzzy $G(V,E_F)$ dapat dilakukan melalui pewarnaan-k pada graf klasik $G_\alpha(V,E_\alpha)$ yang merupakan *Cut*-α dari graf G_F. Bilangan kromatik dari graf fuzzy G_F akan ditentukan melalui bilangan kromatik dari *cut* G_α (untuk setiap $\alpha \in I$) yang dinotasikan dengan χ_α. yang akan disajikan pada definisi berikut ini.

Definisi 4:

Bilangan kromatik dari graf fuzzy $G(V, E_F)$, dinotasikan $\chi(G_F)$, adalah bilangan fuzzy $\chi(G_F) = \{(x,v(x))\ |\ x \in X\}$, dimana: $X=\{1,2,\ldots, |V|\}$, $v(x) = \text{maks}\ \{\alpha \in I\ |\ x \in A^\alpha \}$ untuk setiap $x \in X$, dan $A^\alpha = \{1,2,\ldots, \chi_\alpha\}$ untuk setiap $\alpha \in I$.

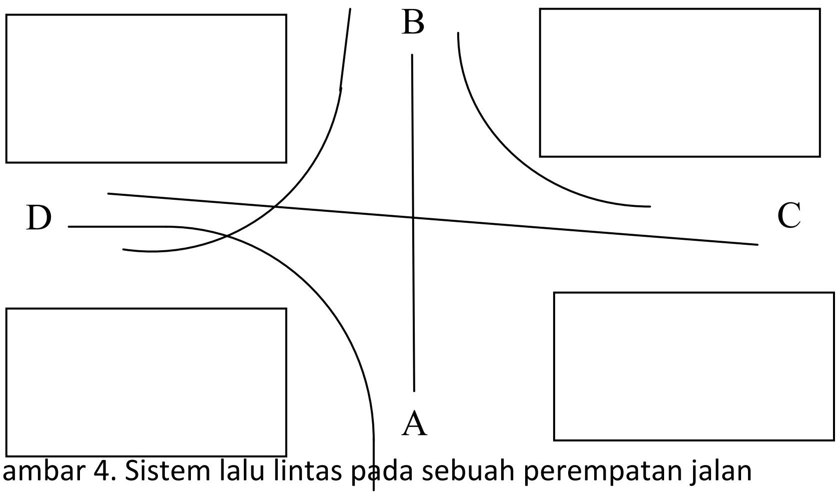
 ISBN : 978-979-16353-3-2

Menurut definisi di atas, proses pewarnaan dan penentuan bilangan kromatik pada graf fuzzy $G(V,E_F)$ hanya menggunakan konsep pewarnaan pada graf klasik G_α, dengan tidak mengeneralisasi konsep pewarnaan untuk graf fuzzy G_F.

Bilangan kromatik dari graf fuzzy G_F dapat diinterpretasi sebagai berikut: jika derajat keanggotaan α rendah maka semakin banyak titik yang tak kompatibel, sehingga lebih banyak warna yang digunakan untuk mewarnai G_F. Sebaliknya semakin tinggi derajat keanggotaan α maka semakin sedikit titik yang tak kompatibel, sehingga lebih sedikit warna yang digunakan untuk mewarnai G_F.

Contoh 5:

Berikut ini diberikan contoh salah satu aplikasi graf fuzzy $G(V,E_F)$ untuk pengaturan lalu lintas di perempatan jalan. Misalkan terdapat suatu sistem lalu lintas pada perempatan jalan seperti gambar di bawah ini.



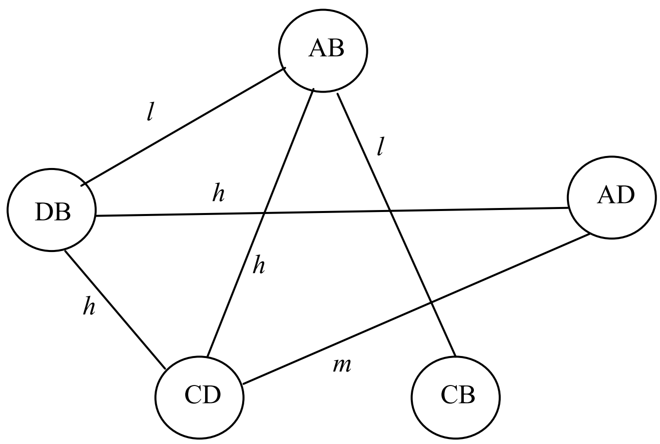
Gambar 4. Sistem lalu lintas pada sebuah perempatan jalan

Beberapa ruas jalan saling bersimpangan, misal AB dengan CD, AD dengan BD, BD dengan CD dan sebagainya. Tingkat persimpangan beberapa ruas jalan tersebut dapat dikategorikan pada beberapa tingkatan, seperti rendah, medium, tinggi, dan sebagainya. Jika ruas jalan pengubung dua tempat dinyatakan dengan titik dan dua titik dihubungkan dengan sisi jika ruas jalan yang bersesuaian saling bersimpangan, maka himpunan sisi tersebut merupakan himpunan fuzzy. Sehingga pengaturan lalu lintas pada perempatan jalan tersebut dapat dimodelkan dengan graf fuzzy $G(V,E_F)$

(gambar 1), dengan V={AB, AD, CB, CD, DB}, E={(AB,DB),(AB,CB),(AB,CD),(DB,CD),(DB,AD),(CD,AD)} dan derajat keanggotaan tiap sisinya adalah I = {n,l,m,h,t} dimana

- n = null (suatu ruas jalan dengan ruas jalan lainnya memiliki tingkat persimpangan yang sangat rendah).
- l =low (satu ruas jalan dengan ruas jalan lainnya memiliki tingkat persimpangan yang rendah)
- m = medium (satu ruas jalan dengan ruas jalan yang lainnya memiliki tingkat persimpangan yang sedang).
- h = high (satu ruas jalan dengan ruas jalan lainnya memiliki tingkat persimpangan yang tinggi)
- t = total (satu ruas jalan bersimpangan dengan semua ruas jalan yang lain)

Brikut ini adalah model graf fuzzy dari permasalahan di atas:



Gambar 5. Graf fuzzy $G(V,E_F)$

Proses pewarnaan titik pada graf fuzzy $G_F = (V,E_F)$ di atas dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

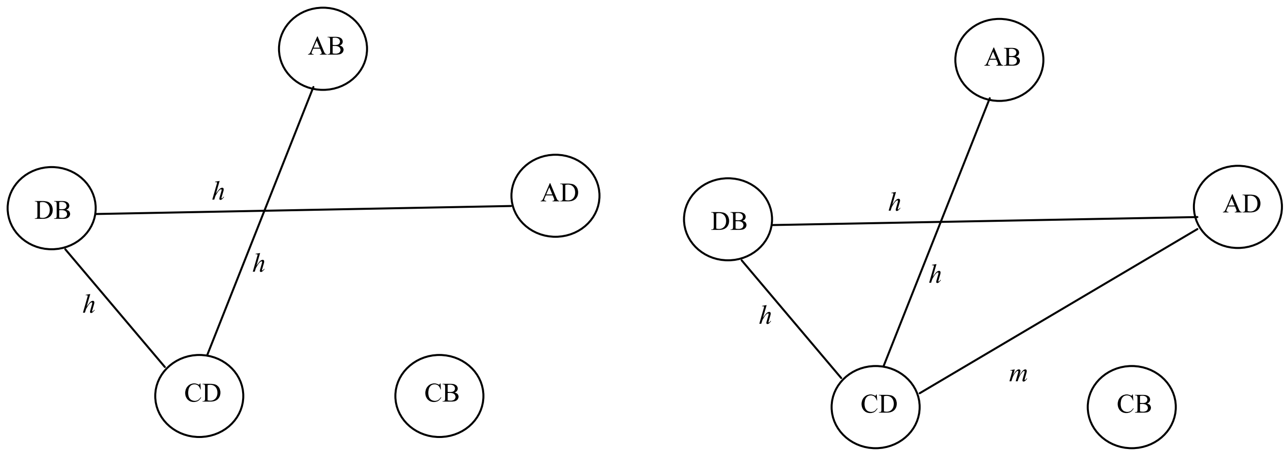
1. Menentukan keluarga himpunan *cut*-α dari G_F: $\{G_\alpha=(V,E_\alpha), \alpha \in I\}$
2. Melakukan proses pewarnaan titik dan menentukan bilangan kromatik χ_α pada graf klasik G_α

ISBN : 978-979-16353-3-2

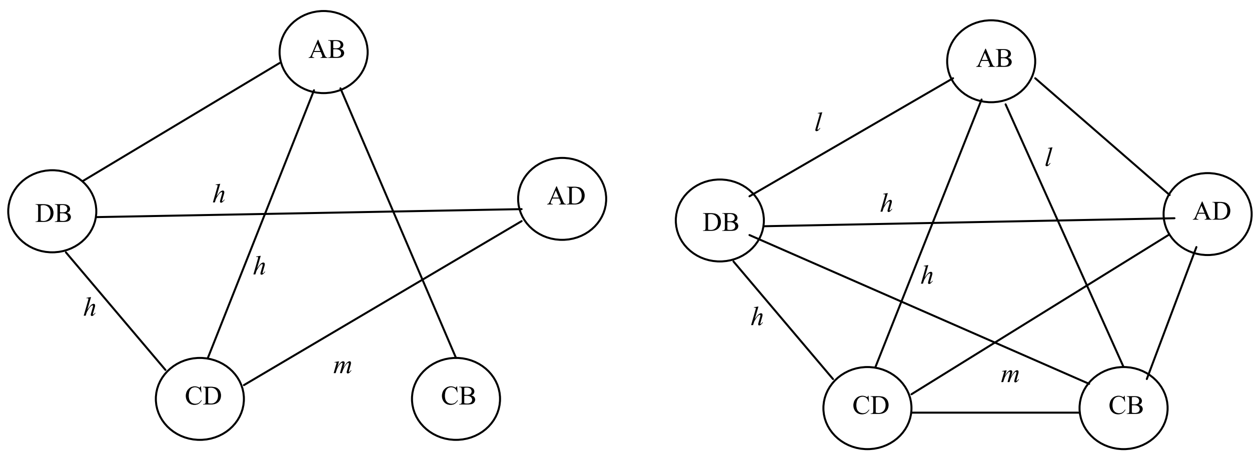
Tabel 1. Keluarga himpunan *cut*-α dari G_F dan penentuan bilangan kromatik χ_α pada G_α.

α	E_α	χ_α	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(AB)$	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(AD)$	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(CB)$	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(CD)$	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(DB)$
n	$\{AB,AD\};\{AB,CB\};\{AB,CD\};\{AB,DB\};$ $\{AD,CB\};\{AD,CD\};\{AD,DB\};\{CB,CD\};$ $\{CB,DB\};\{CD,DB\}$	5	1	2	3	4	5
l	$\{AB,CB\};\{AB,CD\};\{AB,DB\};\{AD,CD\};$ $\{AD,DB\};\{CD,DB\}$	3	1	1	2	2	3
m	$\{AB,CD\};\{AD,CD\};\{AD,DB\};\{CD,DB\}$	3	1	3	1	2	1
h	$\{AB,CD\};\{AD,DB\};\{CD,DB\}$	2	1	2	1	2	1
t	$\emptyset$	1	1	1	1	1	1

Cut-t berupa graf kosong, sedangkan *cut*-α yang lain dari graf fuzzy G_F disajikan pada gambar di bawah ini.



Gambar 6. *Cut* G_h dan G_m



Gambar 7. *Cut* G_l dan G_n

3. Menentukan bilangan kromatik dari graf fuzzy G_F, yaitu

   $\chi(G_F) = \{(1,t),(2,h),(3,m),(4,n),(5,n)\}$.

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Interpretasi dari hasil pewarnaan tersebut sebagai berikut.

a. Bilangan kromatik 1 dengan derajat keanggotaan t diperoleh dari *cut*- G_t , artinya arus lalu lintas dari setiap jalur dapat berjalan bersama dengan aman (tingkat pengamanan minimum)

b. Bilangan kromatik 2 dengan derajat keanggotaan h diperoleh dari *cut*- G_h.

c. Bilangan kromatik 3 dengan derajat keanggotaan m diperoleh dari *cut*- G_m

d. Bilangan kromatik 4 mempunyai derajat keanggotaan n, karena tidak ada *cut*- G_α yang mempunyai bilangan kromatik 4.

e. Bilangan kromatik 5 mempunyai derajat keanggotaan n, dihasilkan dari *cut*- G_n. Dapat diartikan arus lalu lintas dari setiap jalur tidak dapat berjalan bersama dengan aman (tingkat pengamanan tinggi)

f. Jadi semakin rendah derajat keanggotaan α maka semakin banyak titik yang tak kompatibel pada *cut* G_α , sehingga diperlukan tingkat pengamanan yang tinggi. Sebaliknya semakin tinggi derajat keanggotaan α maka semakin sedikit titik yang tak kompatibel, sehingga tingkat pengamanan minimum

g. Pemodelan dengan menggunakan pewarnaan pada graf fuzzy ini dapat menghasilkan pengaturanlampu lalu lintas pada perempatan dengan periode yang tidak konstan. Pengaturan ini disesuaikan dengan tingkat persimpangan antar dua buah ruas jalan. Jika terdapat detektor yang memberikan informasi banyak kendaraan di sekitar lampu lalu lintas setiap saat secara langsung, maka pengaturan ini dapat memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan pengaturan lampu lalu lintas dengan periode konstan seperti kebanyakan yang digunakan saat ini.

4. Kesimpulan dan Saran

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas dapat disimpulkan:

1. Konsep *cut*-α dari graf $G_F(V,E_F)$ dikonstruksi melalui konsep *cut* pada sebuah himpunan fuzzy

 ISBN : 978-979-16353-3-2

2. *Cut*-α ($\alpha \in I$) dari graf $G_F(V,E_F)$ adalah graf klasik $G_\alpha=(V,E_\alpha)$, dengan E_α *cut* pada himpunan sisi E_F
3. Penentuan bilangan kromatik pada graf fuzzy $G_F(V,E_F)$ dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menentukan keluarga himpunan cut-α dari G_F: $\{G_\alpha=(V,E_\alpha), \alpha \in I\}$
   b. Menentukan bilangan kromatik χ_α pada semua G_α
   c. Menentukan bilangan kromatik dari graf fuzzy G_F, yaitu $\chi(G_F)=\{(x,v(x)) \mid x \in X\}$, dimana: $X=\{1,2,\ldots,|V|\}$, $v(x)$ = maks $\{\alpha \in I \mid x \in A^\alpha\}$ untuk setiap $x \in X$, dan $A^\alpha = \{1,2,\ldots,\chi_\alpha\}$ untuk setiap $\alpha \in I$.

4.2. Saran

- Perlu dikaji lebih lanjut tentang algoritma untuk penentuan bilangan kromatik fuzzy dari graf fuzzy $G_F(V,E_F)$
- Perlu dilakukan penelitian tentang aplikasi pengaturan lalu lintas di persimpangan jalan menggunakan pewarnaan pada graf fuzzy $G_F(V,E_F)$

5. DAFTAR PUSTAKA

Blue M, Bush B, Puckett J. *2002.* Unified Approach to Fuzzy Graph Problems. *Journal of Fuzzy Sets and Systems 125: 355-368.*

Eslahchi C, Onagh B.N. 2005. *Vertex Strength of Fuzzy Graphs*. International Journal of mathematics and Mathematical Sciences 436: 1-9

Isnaini Rosyida. 2009. *Bilangan Kromatik Pada Graf Fuzzy $G_F(V,E_F)$*. Makalah pada Seminar Nasional Matematika V Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang.

Munoz S, Ortuno M.T, Javier R, Yanez J. 2005. *Colouring Fuzzy Graph*. Omega: The Journal of Management Science 33: 211-221

Sattanathan R, Lavanya S.2009. *Complementary Fuzzy Graphs and Fuzzy Chromatic Number.* International Journal of Algorithms, Computing and Mathematics: number 3.

Somasundaram A, Somasundaram S. 1998. *Domination in Fuzzy Graphs*. Pattern Recognition Letters 19: 787-791