

---

## Hypothetical Learning Trajectory dan Peningkatan Pemahaman Konsep Pengukuran Panjang

Ariyadi Wijaya  
Jurusan Pendidikan Matematika  
FMIPA – Universitas Negeri Yogyakarta

### Abstrak

Suatu kegiatan pembelajaran tidak terlepas dari proses perencanaan dan desain. Rencana Pelaksanaan Pembelajaran atau *lesson plan* merupakan salah satu bentuk nyata proses perencanaan pembelajaran. Rencana Pelaksanaan Pembelajaran sangat bermanfaat sebagai panduan guru dalam melaksanakan kegiatan pembelajaran. Pendidikan Matematika Realistik memberikan perhatian pada perumusan *hypothetical learning trajectory* sebagai pedoman pelaksanaan pembelajaran sekaligus sebagai suatu tindakan antisipatif terhadap kemungkinan masalah yang dihadapi siswa dalam proses pembelajaran. Artikel ini menyajikan contoh perumusan *hypothetical learning trajectory* untuk pembelajaran pengukuran panjang.

**Kata kunci:** *hypothetical learning trajectory*, pengukuran panjang

### I. Pendahuluan

Suatu proses pembelajaran yang ideal tidak bisa dipisahkan dengan proses perencanaan dan desain pembelajaran. Rencana Pelaksanaan Pembelajaran atau *lesson plan* merupakan salah satu bentuk nyata proses perencanaan dan desain pembelajaran. Akan tetapi, pada kenyataannya suatu Rencana Pelaksanaan Pembelajaran hanya memuat hal-hal yang bersifat formalitas dalam bentuk “paket standar” pembelajaran, yaitu gambaran singkat tentang kegiatan pembukaan, kegiatan inti dan kegiatan penutup. Informasi selain ketiga tahap pembelajaran tersebut hanyalah sekedar ringkasan materi yang akan disampaikan. Sangat jarang guru menyiapkan hipotesis alternatif strategi pemecahan masalah yang digunakan siswa sehingga proses pembelajaran cenderung kurang bersifat *open ended*. Adanya hipotesis alternatif strategi pemecahan masalah yang digunakan siswa

akan membantu guru dalam menentukan strategi penanganan terhadap kemungkinan kesulitan yang dihadapi siswa.

Pendekatan Pendidikan Matematika Realistik menekankan pada dua hal penting yang perlu diperhatikan dalam perencanaan pembelajaran, yaitu *hypothetical learning trajectory* (rute belajar) siswa dan pengembangan model. Pentingnya *hypothetical learning trajectory* bisa dianalogikan dengan perencanaan rute perjalanan. Jika kita memahami rute-rute yang mungkin untuk menuju tujuan kita maka kita bisa memilih rute yang baik. Selain itu, kita juga bisa menyelesaikan permasalahan yang kita hadapi dalam perjalanan jika kita paham rute tersebut. Sebagai contoh adalah kita bisa mengantisipasi kehabisan bahan bakar jika kita tahu posisi pom bensin. Sedangkan pengembangan model sangat penting untuk membawa pengetahuan informal siswa (modal awal siswa yang terbentuk melalui kegiatan berbasis pengalaman) menuju konsep matematika formal (sebagai tujuan akhir pembelajaran matematika). Namun, dalam artikel ini hanya akan dibahas peran perumusan *hypothetical learning trajectory* dalam peningkatan pemahaman konsep pengukuran panjang.

Pada umumnya, pembelajaran tentang Pengukuran dilakukan secara langsung pada tahap formal (Castle & Needham, 2007; Kamii & Clark, 1997 and Van de Walle & Folk, 2005). Pembelajaran tentang Pengukuran langsung terpusat pada penggunaan penggaris sebagai suatu bentuk prosedur yang instrumental. Salah satu akibat dari pendekatan tersebut adalah siswa kurang memahami konsep pengukuran dan mereka akan cenderung melakukan pengukuran sebagai suatu bentuk prosedur instrumental. Kurangnya pemahaman konsep pengukuran menjadi salah satu penyebab ketidakmampuan siswa dalam mengukur panjang suatu benda yang tidak diletakkan pada posisi "0" di penggaris (Kamii & Clark, 1997; Kenney & Kouba in Van de Walle, 2005 and Lehrer et al, 2003). Sebagai contoh, lihat ilustrasi berikut:



---

Siswa yang kurang memahami konsep pengukuran akan menjawab bahwa panjang pensil adalah 9 (cm) karena pangkal pensil terletak pada posisi "9".

Buyss & de Moor (2005) dan Castle & Needham (2007) berpendapat bahwa pembelajaran tentang pengukuran bagi siswa sekolah dasar sebaiknya diawali dengan kegiatan mengukur yang bermakna. Hal ini menunjukkan betapa pentingnya penggunaan kegiatan berbasis pengalaman (*experience-based activities*) yang memuat konsep dasar pengukuran. Dalam kegiatan berbasis pengalaman, pengetahuan informal tentang pengukuran digunakan sebagai jembatan untuk penggunaan penggaris sebagai alat ukur baku. Prinsip dasar pembelajaran berbasis pengalaman sejalan dengan prinsip Pendidikan Matematika Realistik yang menekankan matematika bukanlah suatu obyek yang harus ditransfer kepada siswa, melainkan matematika merupakan suatu bentuk kegiatan manusia (Freudenthal, 1991). Oleh karena itu, Freudenthal menekankan pada pentingnya koneksi antara matematika dengan realitas melalui situasi permasalahan yang berkontribusi pada pembentukan konsep matematika.

## II. *Hypothetical Learning Trajectory*

Menurut Simon (1995), ada tiga komponen utama dari *learning trajectory*, yaitu: tujuan pembelajaran (*learning goals*), kegiatan pembelajaran (*learning activities*) dan hipotesis proses belajar siswa (*hypothetical learning process*). Tujuan pembelajaran sebagai komponen pertama mengindikasikan perlunya perumusan tujuan pembelajaran sebagai bentuk hasil yang akan kita tuju atau capai setelah proses pembelajaran. Penentuan tujuan pembelajaran sangat bermanfaat dalam penentuan arah dan strategi pembelajaran yang akan digunakan. Berdasarkan tujuan pembelajaran yang telah dirumuskan maka kegiatan pembelajaran (*learning activities*) sebagai "jalan" untuk mencapai tujuan pembelajaran bisa dirancang. Kegiatan pembelajaran disusun menjadi beberapa sub-sub kegiatan dengan sub-sub tujuan pembelajaran. Komponen terakhir adalah hipotesis proses belajar siswa yang berguna untuk merancang tindakan ataupun strategi alternatif untuk mengatasi berbagai masalah yang mungkin dihadapi siswa dalam proses pembelajaran.

---

Artikel ini akan menyajikan contoh *Hypothetical Learning Trajectory* untuk pembelajaran pengukuran panjang, yaitu:

#### A. Tujuan pembelajaran

Jika mengacu pada kurikulum, maka tujuan pembelajaran pengukuran panjang adalah:

- Mengenal panjang suatu benda melalui kalimat sehari-hari (pendek, panjang) dan membandingkannya
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan waktu dan panjang
- Menggunakan alat ukur panjang tidak baku dan baku yang sering digunakan
- Menggunakan satuan panjang tidak baku dan baku yang sering digunakan
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan panjang benda

#### B. Kegiatan pembelajaran

Berdasarkan tujuan pembelajaran yang telah dirumuskan maka kegiatan pembelajaran bisa dirancang. Namun, hal yang harus dilakukan sebelum merancang kegiatan pembelajaran adalah memahami kesatuan konsep pengukuran panjang secara utuh sehingga urutan atau tahapan kegiatan pembelajaran sesuai dengan konsep dasar pengukuran panjang.

Van De Walle dan Folk (2005) mendefinisikan pengukuran sebagai suatu proses perbandingan atribut suatu benda dengan atribut yang sama dari suatu alat ukur. Ada beberapa tahapan untuk mencapai kegiatan pengukuran, yaitu tahap perbandingan, tahap estimasi atau perkiraan dan tahap pengukuran. Prosedur berikut menggambarkan tahapan dari pengukuran panjang:

##### a. Perbandingan panjang (*comparing length*)

Perbandingan merupakan suatu bentuk paling sederhana dari pengukuran yang dapat dilakukan dengan cara "*covering*" (memadukan/menempelkan benda-benda yang akan dibandingkan) ataupun "*matching*" (memadankan benda-benda yang akan dibandingkan). Cara sederhana untuk mengekspresikan hasil

perbandingan panjang adalah dengan kata “lebih panjang” atau “lebih pendek”.

Ada dua macam perbandingan, yaitu:

- Perbandingan langsung

Perbandingan langsung dilakukan jika benda-benda yang akan dibandingkan bisa diletakkan berdekatan sehingga bisa dibandingkan secara langsung.

- Perbandingan tidak langsung

Ketika benda yang akan dibandingkan tidak bisa diletakkan secara berdampingan maka kita membutuhkan “pihak ketiga” untuk membandingkan benda tersebut. Pada perbandingan tidak langsung, “pihak ketiga” digunakan sebagai referensi atau acuan. Pada perkembangan tahap pengukuran maka “pihak ketiga” tersebut akan dikembangkan sebagai unit pengukuran.

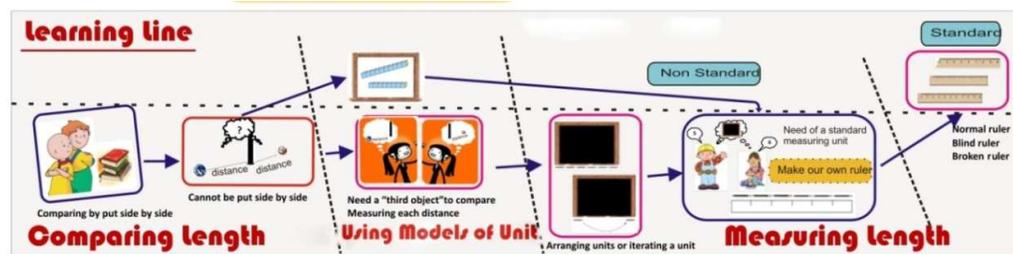
- Perkiraan panjang (*estimating length*)

Perkiraan panjang merupakan bentuk perbandingan panjang yang dilakukan secara mental. Mental *benchmarks* sangat dibutuhkan untuk melakukan estimasi panjang.

- Pengukuran panjang (*measuring length*)

Perbandingan tidak langsung merupakan awal munculnya pengukuran. “Pihak ketiga” yang digunakan pada perbandingan tidak langsung dikembangkan menjadi unit pengukuran.

Prosedur atau tahapan pengukuran tersebut dapat digambarkan dalam skema alur belajar siswa sebagai berikut:



Prosedur atau tahapan pengukuran tersebut dibentuk berdasarkan konsep dasar pengukuran. Lehrer (2003) membagi konsep dasar pengukuran panjang menjadi dua ide utama, yaitu: konsepsi unit (*conceptions of unit*) dan konsepsi skala (*conceptions of scale*).

Kedua konsep utama tersebut digambarkan dalam table berikut:

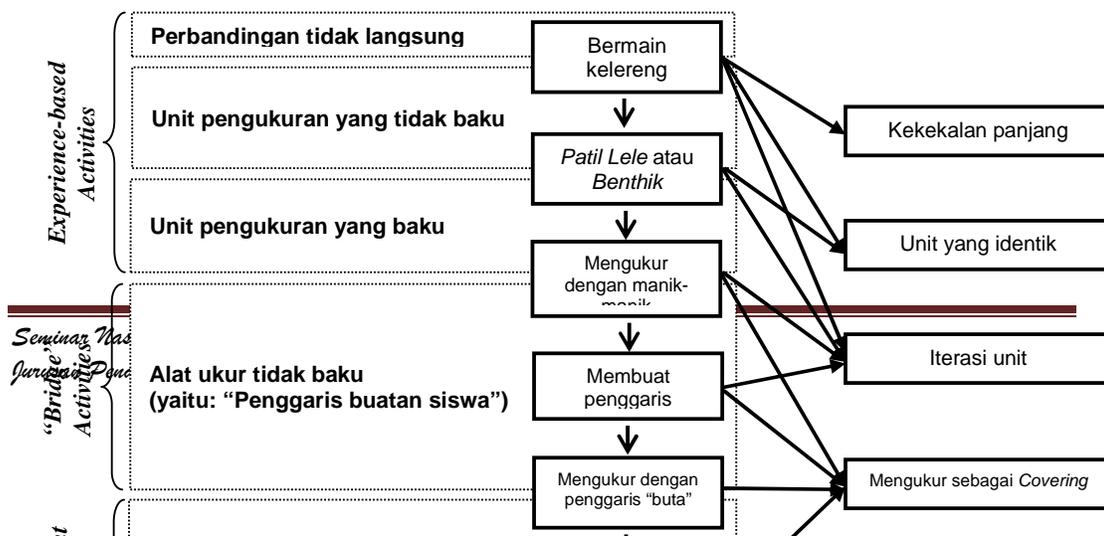
	Konsep Dasar	Deskripsi
<b>Konsepsi Unit</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Iterasi unit</li> <li>• Unit yang identik</li> <li>• <i>Tiling</i></li> <li>• Partisi</li> </ul>	Unit pengukuran perlu diulang untuk mendapatkan hasil pengukuran Suatu panjang bisa dibagi menjadi sub-sub yang identik Unit pengukuran harus "memenuhi" benda yang diukur Suatu unit bisa dibuat menjadi unit yang lebih kecil
<b>Konsepsi Skala</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Titik NOL</li> <li>• Presisi</li> </ul>	Setiap titik atau posisi (pada alat ukur) bisa digunakan sebagai titik awal pengukuran Pemilihan unit pengukuran sangat berpengaruh pada tingkat presisi pengukuran. Semakin kecil unit pengukuran maka akan menghasilkan pengukuran yang lebih presisi

Kombinasi antara prosedur dan konsep dasar pengukuran panjang menghasilkan rumusan kegiatan instruksional untuk pembelajaran pengukuran panjang. Tabel berikut menggambarkan satu set kegiatan instruksional untuk pembelajaran pengukuran yang dirumuskan oleh Van de Walle dan Folk (2005):

Pengetahuan konseptual yang harus dikembangkan	Jenis aktivitas yang digunakan
1. Memahami jenis atribut	1. Kegiatan perbandingan berdasarkan atribut (misal: membandingkan panjang,

atau dimensi yang akan diukur	membandingkan berat dll)
2. Memahami bagaimana cara melakukan <i>covering</i> ataupun <i>matching</i> untuk membandingkan atribut benda yang akan diukur	2. Penggunaan model unit pengukuran berbentuk fisik (jengkal, kaki, langkah, dll) untuk memadukan ( <i>cover</i> ) atau memadankan ( <i>match</i> )
3. Memahami cara kerja alat ukur	3. Memadukan alat ukur baku (misal penggaris) dengan alat ukur yang tidak baku (misal rangkaian manik-manik) untuk memahami bagaimana cara kerja alat ukur baku.

Skema berikut menggambarkan contoh rangkaian kegiatan pembelajaran pengukuran panjang yang disusun berdasarkan alur belajar siswa.



**Catatan:**

- Penggaris buta : penggaris yang hanya terdiri dari garis-garis tanpa bilangan ukuran
- Penggaris normal: penggaris biasa yang dimulai dari angka NOL
- Penggaris patah: penggaris yang tidak dimulai dari NOL, melainkan sebarang bilangan

**C. Hipotesis proses belajar siswa**

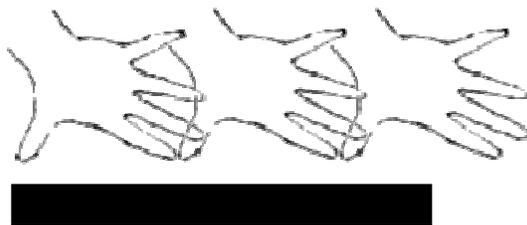
Salah satu unsure yang sangat penting dari *Hypothetical Learning Trajectory* adalah hipotesis proses belajar siswa. Ketika mendesain kegiatan pembelajaran, guru sebaiknya menyusun hipotesis tindakan atau reaksi siswa pada setiap tahap pembelajaran. Pada tahap awal perencanaan pembelajaran, hipotesis tersebut didasarkan pada perkiraan pengetahuan awal (*pre knowledge*) yang sudah dimiliki siswa serta berdasarkan pengalaman atau praktik pembelajaran topik tersebut pada tahun sebelumnya. Pada tahap selanjutnya, hipotesis dielaborasi pada

perencanaan harian serta disebut sebagai *hypothetical learning trajectory* (Gravemeijer, 2004).

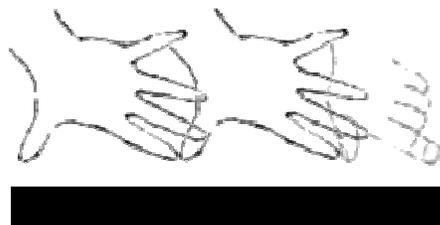
Contoh hipotesis proses belajar siswa dalam pembelajaran tentang pengukuran panjang adalah sebagai berikut:

1. Dalam kegiatan mengukur panjang benda dengan jengkal

Ketika siswa mengukur panjang suatu benda yang panjang seharusnya adalah dua setengah jengkal, maka siswa menekuk jengkal terakhir supaya mendapatkan bilangan bulat untuk banyak jengkal (yaitu: mereka mendapatkan hasil tiga jengkal). Untuk lebih jelasnya lihat gambar berikut:



Panjang seharusnya adalah tiga setengah jengkal



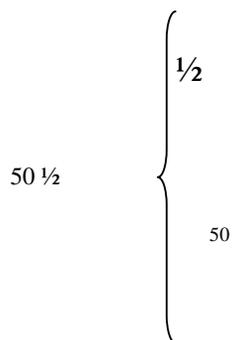
Siswa menekuk jengkal terakhir sehingga diperoleh tiga jengkal

Pada kejadian ini siswa masih belum memahami konsep pecahan dan siswa juga belum memahami konsep *identical unit* atau unit yang identik, yaitu bahwa panjang unit ukuran adalah tetap. Untuk mengatasi hal ini, guru bisa mengajak siswa untuk mengukur benda tersebut dengan menggunakan unit ukuran yang tidak fleksibel, misalkan pensil.

2. Dalam kegiatan mengukur panjang benda dengan kalung manik-manik

Karakteristik kalung manik-manik adalah konkret dan mudah dioperasikan sehingga siswa tidak mengalami masalah berarti dalam mengukur benda dengan

menggunakan kalung manik-manik. Tapi sangat mungkin ada siswa yang mengalami kesulitan, contoh adalah seperti diilustrasikan pada gambar berikut:



Kejadian tersebut menunjukkan kalau siswa masih bingung membedakan unit ukuran apa yang digunakan untuk mengukur, yaitu antara panjang satu utas kalung atau banyak manik-manik dalam satu kalung. “Lima puluh” menunjukkan kalau siswa menggunakan manik-manik pada kalung sebagai unit ukuran. Tetapi ketika siswa menjawab  $\frac{1}{2}$ , hal ini menunjukkan kalau siswa menggunakan panjang satu utas kalung sebagai unit ukuran.

Untuk mengatasi hal ini, guru bisa mengajukan pertanyaan: “*Apa yang kamu gunakan untuk mengukur sehingga kamu peroleh hasil 50? Bagaimana kamu bisa mendapatkan hasil  $\frac{1}{2}$  ?*”

Selanjutnya guru bisa mengajak siswa untuk mengukur panjang benda yang lebih pendek dari satu utas kalung.

3. Dalam keegiatan membuat penggaris berdasarkan panjang kalung manik-manik Gambar berikut menunjukkan contoh kemungkinan bentuk penggaris buatan siswa:



Gambar 1. Siswa menuliskan bilangan “1” pada strip pertama



Gambar 2. Siswa menuliskan bilangan “1” pada ruas pertama



Gambar 3. Siswa menuliskan bilangan “0” pada strip pertama

- Gambar 1 menunjukkan kalau siswa masih belum memahami konsep mengukur sebagai *covering space*. Siswa mengukur dengan menghitung **banyaknya strip/garis** pada penggaris.

Untuk mengatasi hal ini, siswa bisa meminta siswa mengukur suatu benda dengan kalung manik-manik dan penggaris buatan mereka. Ketika siswa menemukan kalau hasil pengukuran dengan penggaris selalu satu lebih banyak dari hasil mengukur dengan kalung, maka siswa diminta mendiskusikan hal tersebut dengan teman mereka.

- Gambar 2 menunjukkan kalau siswa sudah memahami kalau mengukur sebagai *covering space*, yaitu mengukur adalah banyaknya ruas (daerah antara dua garis) yang sesuai dengan panjang benda. Namun, siswa tersebut belum memahami penulisan bilangan pada penggaris sebagai upaya memudahkan pembacaan hasil pengukuran.

- Gambar 3 menunjukkan kalau siswa sudah memahami konsep mengukur sebagai *covering space* dan juga tujuan penulisan bilangan ukuran.

#### 4. Dalam kegiatan mengukur dengan penggaris “buta”

Beberapa kemungkinan aktivitas atau jawaban siswa ketika mengukur dengan penggaris “buta” adalah sebagai berikut:



- Siswa menghitung banyaknya strip/garis pada penggaris.

Siswa yang menggunakan strategi ini belum memahami konsep mengukur sebagai *covering space* karena mereka tidak menghitung banyaknya ruas.

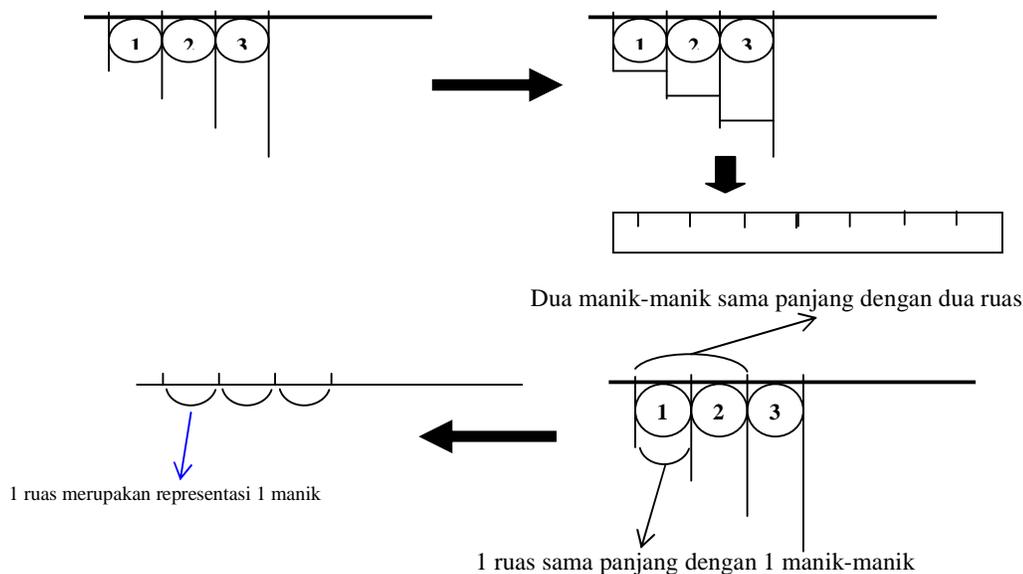
- Siswa menghitung banyaknya ruas

Siswa yang menggunakan strategi ini sudah memahami bahwa mengukur adalah *covering space*.

Untuk siswa yang belum memahami bahwa mengukur adalah *covering space*, maka guru dapat melakukan kegiatan berikut:

Guru dapat kembali menggunakan kalung manik-manik untuk memberikan pemahaman tentang konsep mengukur sebagai *covering space*.

Guru meminta siswa mengukur panjang suatu benda dengan penggaris buta dan kalung manik-manik. Ketika siswa mengukur dengan manik-manik, siswa menghitung banyaknya manik-manik. Guru mengajak siswa untuk membandingkan kalung dengan penggaris untuk mengamati diwakili oleh apakah manik-manik pada penggaris (lebih jelas lihat ilustrasi berikut).



5. Dalam kegiatan mengukur dengan penggaris “patah”

Pada kegiatan mengukur dengan penggaris patah, siswa diminta untuk mengukur panjang benda dengan menggunakan penggaris yang tidak dimulai dari “0”.



---

Kemungkinan strategi siswa adalah sebagai berikut:

- Siswa akan menjawab kalau panjang pensil adalah 10 karena pangkal pensil terletak pada garis dengan nomor “10”.

Siswa yang melakukan strategi ini belum memahami konsep *zero point*, yaitu bahwa sembarang bilangan/posisi bisa digunakan sebagai titik awal pengukuran. Siswa tersebut hanya membaca (*read out*) penggaris.

Strategi yang bisa dilakukan oleh guru adalah dengan memberikan penggaris patah yang “ekstrim”, misal yang diawali pada posisi/nomor “25”. Jika siswa masih menggunakan strategi *read out* maka siswa akan memperoleh hasil bahwa panjang pensil adalah 33. Diharapkan siswa memiliki kepekaan panjang (*sense of length*) bahwa pensil yang pendek tidak mungkin memiliki panjang 33 sehingga siswa bisa diajak untuk memberi perhatian pada titik awal pengukuran (yaitu 25).

- Siswa tidak mepedulikan bilangan-bilangan pada penggaris dan langsung menghitung banyak garis.

Guru dapat melakukan kegiatan atau strategi yang sama dengan strategi yang digunakan pada kegiatan mengukur dengan penggaris “buta”.

- Siswa tidak mepedulikan bilangan-bilangan pada penggaris dan mereka menghitung banyak ruas.

Untuk membantu siswa memahami cara menggunakan penggaris, maka guru dapat memberi tugas untuk mengukur panjang benda **secepat mungkin**. Dengan diminta supaya cepat dalam mengukur maka siswa diharapkan tidak lagi melakukan penghitungan ruas tetapi mulai memperhatikan bilangan-bilangan pada penggaris.

### III. Kesimpulan

Berdasarkan uraian contoh penerapan *hypothetical learning trajectory*, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. *Hypothetical learning trajectory* memberikan pemahaman pada guru tentang betapa pentingnya memperhatikan pengetahuan awal siswa dan juga perbedaan kemampuan siswa dalam menyusun desain pembelajaran.
2. *Hypothetical learning trajectory* dapat digunakan sebagai petunjuk guru dalam membagi tahapan pembelajaran, yaitu dengan membuat beberapa sub tujuan pembelajaran untuk mencapai tujuan pembelajaran yang utama.
3. *Hypothetical learning trajectory* bermanfaat sebagai panduan pelaksanaan pembelajaran sekaligus memberikan berbagai alternatif strategi ataupun *scaffolding* untuk membantu siswa mengatasi kesulitan dalam memahami konsep yang dipelajari.

**Daftar Pustaka:**

- Castle, K. & Needham, J. (2007). First Graders' Understanding of Measurement. *Early Childhood Education Journal* 35, 215 – 221.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academics Publisher.
- Gravemeijer, K. (2004). "Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education". *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-128.
- Henshaw, J.M. (2006). *Does Measurement Measure up? How Numbers Reveal & Conceal the Truth*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press.
- Kamii, C., & Clark, F. B. (1997). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics*, 97(3), 116–121.
- Lehrer, R.; Jaslow, L. & Curtis, C. (2003). "Developing an Understanding of Measurement in the Elementary Grades". In Clement, H.D. & Bright, G. (Eds.), *Learning and Teaching Measurement* (pp. 57 – 67). Reston: NCTM.
- Simon, M. A. & Tzur, Ron. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking & Learning* 6 (2), 91-104.
- Stephen, M & Clements, H. D. (2003). Linear and Area Measurement in Prekindergarten to Grade 2. In Clement, H.D. & Bright, G. (Eds.), *Learning and Teaching Measurement* (pp. 100 – 121). Reston: NCTM.

Van de Wall, J. & Folk, S. (2005). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally*. Toronto: Pearson Education Canada Inc

Zack, V. & Graves, B. (2001). Making mathematical meaning through dialogues: "Once you think of it the Z minus three seems pretty weird". *Educational studies in mathematics* 46, 229-271.