 ISBN : 978-979-16353-3-2

An-1

RUANG LINEAR BERNORMA $C_{ESS}\left(H, L_2([a,b])\right)$

Muslim Ansori

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Alamat : Jln. Soematri Brodjonegoro No.1 Bandar Lampung
E-mail: ansomath@yahoo.com

ABSTRACT In this paper, we want to construct a new normed linear space from collection of all Carleman operators from Hilbert space into $L_2([a,b])$ space denoted by $C_{ESS}\left(H, L_2([a,b])\right)$, generated by essentially bounded kernels on $[a,b]$.

INTISARI Tulisan ini menyajikan pengkonstruksian suatu ruang linear bernorma baru yang merupakan koleksi semua operator Carleman dari ruang Hilbert ke ruang $L_2([a,b])$ dinotasikan dengan $C_{ESS}\left(H, L_2([a,b])\right)$ yang dibangkitkan oleh kernel yang terbatas essensial pada $[a,b]$.

Kata kunci : *Operator Carleman, kernel terbatas essensial.*

PENDAHULUAN

Seperti telah diketahui bahwa operator Carleman dikembangkan pada $L_2([a,b])$ yaitu koleksi semua fungsi $f:[a,b]\subset\Re\to\Re$ dengan $\int_a^b \left|f(y)\right|^2 dy<\infty$ dan pertama kali dilakukan oleh Carleman (1923). Untuk menghormati penemunya, operator tersebut dinamakan operator Carleman. Operator Carleman tersebut berbentuk

$$(Kf)(x)=\int_a^b k(x,y)f(y)\,dy$$

untuk setiap $f\in L_2([a,b])$, dengan

$$\int_a^b \left|k(x,y)\right|^2 dy<\infty$$

hampir untuk setiap $x\in[a,b]$. Dalam hal ini, fungsi k dinamakan kernel atau pembangkit operator K.

Penelitian-penelitian tentang operator Carleman selanjutnya banyak dilakukan antara lain oleh Korotkov (1970; 1971; 1972). Dalam karya-kayanya tersebut, Korotkov

 ISBN : 978-979-16353-3-2

banyak menjelaskan sifat-sifat kernel operator Carleman pada ruang Hilbert. Penelitian-penelitian terkini berkaitan dengan operator Carleman antara lain oleh (1994) memberikan representasi integral dari operator-operator linear menggunakan kernel mulus tipe Mercer ; Novitskii (2002) memberikan representasi integral operator-operator tak terbatas menggunakan kenel mulus; Novitskii (2003) memberikan representasi integral operator-operator tertutup menggunakan kenel mulus dan Novitskii (2003) memberikan Ekuivalensi Uniter Simultan terhadap operator Carleman dengan Kernel mulus sebarang.

Pada tulisan ini, akan dikaji syarat perlu dan cukup bagi kernel suatu operator linear dari ruang Hilbert H ke ruang $L_2([a,b])$ dan selanjutnya membentuk ruang operator Carleman yang terdiri dari seluruh operator Carleman yang dibangkitkan oleh kernel tersebut.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Kajian penelitian ini akan dimulai dengan menyajikan sifat-sifat dasar operator Carleman dari ruang Hilbert H ke ruang $L_2([a,b])$.

DEFINISI 1.1 (*Weidmann*,1980) *Diberikan ruang Hilbert* H. *Suatu operator linear* $K : H \to L_2([a,b])$ *dinamakan operator Carleman jika ada fungsi terukur* $k : [a,b] \to H$ *sehingga untuk setiap* $f \in H$

$$(Kf)(x) = \langle f, k(x) \rangle$$

hampir untuk setiap $x \in [a,b]$.

Selanjutnya, k disebut pembangkit (kernel) operator Carleman $K : H \to L_2([a,b])$. Operator K yang dibangkitkan oleh kernel k tersebut bersifat tunggal, sebab jika K_1 dan K_2 masing-masing meruapakan operator Carleman yang dibangkitkan oleh suatu fungsi terukur $k : [a,b] \to H$, maka untuk setiap $f \in H$ berlaku

$$(K_1 f)(x) = \langle f, k(x) \rangle \text{ dan } (K_2 f)(x) = \langle f, k(x) \rangle.$$

Selanjutnya, diperoleh

$$0 = (K_1 f)(x) - (K_2 f)(x) = ((K_1 - K_2) f)(x)$$

hampir untuk setiap $x \in [a,b]$ dan $f \in H$. Oleh karena itu,

$$\left(K_1 - K_2\right) f = K_1 f - K_2 f = \theta_{L_2[a,b]} \Leftrightarrow K_1 f = K_2 f$$

untuk setiap $f \in [a,b]$, yaitu $K_1 = K_2$.

CONTOH 1.2 Diberikan fungsi terukur $k \in L_2\left(\left[a,b\right]\times[a,b]\right)$. Oleh karena itu, $k\left(x\right) = k\left(x,.\right) \in L_2\left([a,b]\right)$ hampir untuk setiap $x \in [a,b]$. Operator linear $K : L_2\left([a,b]\right) \to L_2\left([a,b]\right)$ dengan rumus, untuk setiap $f \in H$

$$\left(Kf\right)\left(x\right) = \left\langle f\left(.\right), k\left(x,.\right)\right\rangle = \int_a^b k\left(x,y\right) f\left(y\right) dy$$

hampir untuk setiap $x \in [a,b]$, merupakan operator Carleman yang dibangkitkan oleh k.

Selanjutnya, notasi $C\left(H, L_2\left([a,b]\right)\right)$ menyatakan koleksi semua operator Carleman dari H ke $L_2\left([a,b]\right)$.

TEOREMA 1.3 (*Weidmann*,1980) *Jika* $K \in C\left(H, L_2\left([a,b]\right)\right)$ *maka* K *tertutup.*

BUKTI : Karena $K \in C\left(H, L_2\left([a,b]\right)\right)$, maka terdapat fungsi terukur $k : [a,b] \to H$ sehingga untuk setiap $f \in H$

$$\left(Kf\right)\left(x\right) = \left\langle f, k\left(x\right)\right\rangle$$

hampir untuk setiap $x \in [a,b]$. Diambil sebarang barisan $\{f_n\} \subset H$ yang konvergen ke suatu $f \in H$ dan barisan $\{Kf_n\}$ konvergen ke suatu $g \in L_2\left([a,b]\right)$. Karena $k\left(x\right) \in H = H^*$, hampir untuk setiap $x \in [a,b]$ maka barisan $\left\{Kf_n\left(x\right)\right\} = \left\{\left\langle f, k_n\left(x\right)\right\rangle\right\}$ konvergen ke $\left\{\left\langle f, k\left(x\right)\right\rangle\right\} = \left\{Kf\left(x\right)\right\}$ hampir untuk setiap $x \in [a,b]$. Oleh karena itu, dengan ketunggalan limit diperoleh

$$g = \left\langle f, k\left(x\right)\right\rangle$$

hampir untuk setiap $f \in H$ atau terbukti bahwa K tertutup. □

TEOREMA 1.4 (*Weidmann*,1980) *Himpunan* $C\left(H, L_2([a,b])\right)$ *merupakan ruang linear.*

BUKTI : Diambil dua operator $K_1, K_2 \in C\left(H, L_2([a,b])\right)$ sebarang. Oleh karena itu, terdapat fungsi terukur $k_1 : [a,b] \to H$ dan $k_2 : [a,b] \to H$ sehingga untuk setiap $f \in H$ berlaku

$$(K_1 f)(x) = \langle f, k_1(x) \rangle \text{ dan } (K_2 f)(x) = \langle f, k_2(x) \rangle$$

hampir untuk setiap $x \in [a,b]$. Karena $k_1 : [a,b] \to H$ dan $k_2 : [a,b] \to H$ terukur maka $\alpha k_1 : [a,b] \to H$, $\beta k_2 : [a,b] \to H$ $(\alpha + \beta) k_1 : [a,b] \to H$ dan terukur untuk setiap skalar α, β . Selanjutnya, diperoleh

$$\begin{aligned}\left((\alpha K_1 + \beta K_2) f\right)(x) &= (\alpha K_1 f)(x) + (\beta K_2 f)(x) \\ &= \left(f, \alpha k_1(x)\right) + \left(f, \beta k_2(x)\right) \\ &= \left(f, \alpha k_1(x) + \beta k_2(x)\right) \\ &= \left(f, (\alpha k_1 + \beta k_2)(x)\right).\end{aligned}$$

Jadi, $\alpha K_1 + \beta K_2$ merupakan operator Carleman yang dibangkitkan oleh fungsi terukur $\alpha k_1 + \beta k_2$.□

Berikut ini akan diberikan salah satu syarat bagi kernel $k : [a,b] \to H$ untuk menjadi pembangkit operator Carleman $K : H \to L_2([a,b])$ sebagai bagian dari hasil utama penelitian ini. Perlu diingat kembali, suatu fungsi $k : [a,b] \to H$ dikatakan terbatas essensial pada $[a,b]$ jika terdapat himpunan $E \subset [a,b]$ dengan $|E| = 0$ sehingga $k : [a,b] \setminus E \to H$ terbatas. Dengan kata lain, jika $k : [a,b] \to H$ terbatas essensial maka terdapat bilangan real positip M sehingga

$$\sup_{x \in [a,b] \setminus E} \|k(x)\| = ess.\sup_{x \in [a,b]} \|k(x)\| \leq M$$

TEOREMA 1.5 *Diberikan ruang Hilbert* H *. Operator linear* $K : H \to L_2([a,b])$ *merupakan operator Carleman jika dan hanya jika terdapat fungsi terukur dan terbatas essensial* $k : [a,b] \to H$ *sehingga*

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$$\left|(Kf)(x)\right| \le \|f\|_H \left\|k(x)\right\|_H$$

hampir untuk setiap $x \in [a,b]$.

BUKTI : Karena $K \in C\left(H, L_2([a,b])\right)$ maka terdapat fungsi terukur $k:[a,b] \to H$ sehingga untuk setiap $f \in H$ berlaku

$$(Kf)(x) = \langle f, k(x) \rangle$$

hampir untuk setiap $x \in [a,b]$. Oleh karena itu,

$$\left|(Kf)(x)\right| = \left|\langle f, k(x) \rangle\right| \le \|f\|_H \left\|k(x)\right\|_H$$

hampir untuk setiap $x \in [a,b]$. Sebaliknya, karena $k:[a,b] \to H$ fungsi terukur dan terbatas essensial pada $[a,b]$ sehingga

$$\left|(Kf)(x)\right| \le \|f\|_H \left\|k(x)\right\|_H$$

hampir untuk setiap $x \in [a,b]$, maka

$$\left|(Kf)(x)\right| \le \|f\|_H \operatorname*{ess.sup}_{x \in [a,b]} \left\|k(x)\right\|_H .$$

Dengan kata lain $Kf \in L_2([a,b])$ untuk setiap $f \in H$. Selanjutnya, untuk setiap $f \in H$, operator linear $K: H \to L_2([a,b])$ dapat dirumuskan dengan

$$(Kf)(x) = \langle f, k(x) \rangle$$

hampir untuk setiap $x \in [a,b]$. Terbukti, $K \in C\left(H, L_2([a,b])\right)$.□

Selanjutnya, notasi $C_{ESS}\left(H, L_2([a,b])\right)$ menyatakan koleksi semua operator Carleman dari H ke $L_2([a,b])$ yang dibangkitkan oleh fungsi terukur dan terbatas essensial $k:[a,b] \to H$. Didefinisikan fungsi norma pada $C_{ESS}\left(H, L_2([a,b])\right)$, $\|.\|: C_{ESS}\left(H, L_2([a,b])\right) \to \Re$ dengan rumus

$$\|K\|_{C_{ESS}} = \operatorname*{ess.sup}_{x \in [a,b]} \left\|k(x)\right\|_H .$$

<u>TEOREMA 1.6</u> *Himpunan* $C_{ESS}\left(H, L_2([a,b])\right)$ *merupakan ruang linear bernorma terhadap norma* $\|.\|_{C_{ESS}}$.

BUKTI : (i) Untuk setiap operator $K \in C_{ESS}\left(H, L_2\left([a,b]\right)\right)$, dengan pembangkit fungsi terbatas essensial $k:[a,b] \to H$ diperoleh

$$\|K\|_{C_{ESS}} = \underset{x\in[a,b]}{ess.\sup}\left\|k\left(x\right)\right\| \geq 0$$

dan

$$\|K\|_{C_{ESS}} = 0 \Leftrightarrow \underset{x\in[a,b]}{ess.\sup}\left\|k\left(x\right)\right\| = 0 \Leftrightarrow \left\|k\left(x\right)\right\| = 0 \Leftrightarrow k = \theta \Leftrightarrow K = O$$

(O operator nol) hampir di mana-mana pada $[a,b]$.

(ii) Untuk setiap $K \in C_{ESS}\left(H, L_2\left([a,b]\right)\right)$ dengan fungsi pembangkit terbatas essensial $k:[a,b] \to H$ dan skalar α, diperoleh

$$\|\alpha K\|_{C_{ESS}} = \underset{x\in[a,b]}{ess.\sup}\left\|\alpha k\left(x\right)\right\| = |\alpha|\underset{x\in[a,b]}{ess.\sup}\left\|k\left(x\right)\right\| = |\alpha|\|K\|_{C_{ESS}}.$$

(iii) Untuk setiap $K, L \in C_{ESS}\left(H, L_2\left([a,b]\right)\right)$ dengan fungsi pembangkit terbatas essensial $k:[a,b] \to H$ dan $l:[a,b] \to H$, diperoleh

$$\begin{aligned}\|K+L\|_{C_{ESS}} &= \underset{x\in[a,b]}{ess.\sup}\left\|k\left(x\right)+l\left(x\right)\right\|_H \\ &\leq \underset{x\in[a,b]}{ess.\sup}\left(\left\|k\left(x\right)\right\|_H + \left\|l\left(x\right)\right\|_H\right) \\ &\leq \underset{x\in[a,b]}{ess.\sup}\left\|k\left(x\right)\right\|_H + \underset{x\in[a,b]}{ess.\sup}\left\|l\left(x\right)\right\|_H \\ &\leq \|K\|_{C_{ESS}} + \|L\|_{C_{ESS}}\end{aligned}$$

Jadi,

$$\|K+L\|_{C_{ESS}} \leq \|K\|_{C_{ESS}} + \|L\|_{C_{ESS}}$$

Berdasarkan (i),(ii),(iii) dan Teorema 1.4, terbukti bahwa $C_{ESS}\left(H, L_2\left([a,b]\right)\right)$ merupakan ruang linear bernorma.□

KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian lanjutan dalam tahap penyelesaian yaitu menunjukkan bahwa $C_{ESS}\left(H, L_2\left([a,b]\right)\right)$ terhadap norma $\|.\|_{C_{ESS}}$ merupakan ruang Banach.

DAFTAR PUSTAKA

Korotkov, V.B., 1970, Characteristic Properties of Integral Operators with Kernels of Carleman Type,*Siberian Math. Journal, 11,1,84-104.*

Korotkov, V.B., 1971, Carleman Operators in Spaces of Abstrac Functions I, *Siberian Math. Journal, 12,4,516-522.*

Korotkov, V.B., 1971, Carleman Operators in Spaces of Abstrac Functions II, *Siberian Math. Journal,* 12,4,523-530.

Novitskii,I.M., 1994, Integral Representation of Linear Operators by Smooth Carleman Kernels of Mercer Type, *Proc. London Math. Soc*., 3,161-177.

Novitskii,I.M., 2002, Integral Representation of unbounded Operators by Smooth Carleman Kernels , *Preprint*.

Novitskii,I.M., 2003, Integral Representation of Closed Operators as Bi-Carleman Operators with arbitrarily Smooth , *Research Report*, *Far Eastern Branch of The Russian Academy of Science*.

Novitskii,I.M., 2003, Simultaneous Unitary equivalence to Carleman Operators with Arbitrarily Smooth Kernels , *Research Report*, *Far Eastern Branch of The Russian Academy of Science*.

Weidmann, J., 1980, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer Verlag, New York.