EKSISTENSI DAN KESTABILAN SOLUSI GELOMBANG JALAN MODEL KUASILINER DISSIPATIF DUA KANAL

SUMARDI
Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada
mas_mardi@yahoo.com

SOEPARNA DARMAWIJAYA
Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada

LINA ARYATI
Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada
lina@ugm.ac.id

Abstract

Pada paper ini akan dibahas solusi gelombang jalan model kuasilinear dissipatif dua kanal. Kecepatan gelombang ditentukan dengan syarat Rankine-Hugoniot. Solusi gelombang jalan heteroklinik dapat disajikan secara eksplisit dalam fungsi parameter. Dari penelitian diperoleh solusi gelombang jalan yang berupa gelombang kejut atau penyelesaian bernilai banyak (*multivalued solution*) yang mempunyai titik singular. Selanjutnya kestabilan solusi gelombang jalan dianalisa dengan metode energi.
Keyword: solusi gelombang jalan, kestabilan, sistem hiperbolik tak linier

1. PENDAHULUAN

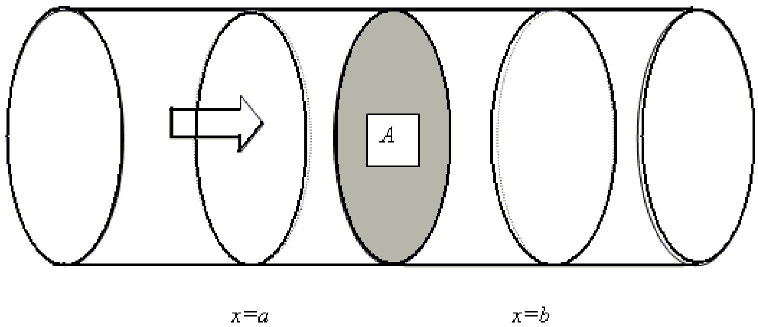
Banyak persamaan-persamaan penting yang muncul dalam masalah fisika, kimia, biologi dan ekonomi diperoleh dari hukum konservasi. Hukum konservasi merupakan hukum kesetimbangan dalam suatu proses alam. Sebagai contoh dalam biologi bahwa laju perubahan suatu populasi dalam suatu daerah akan setimbang dengan laju kelahiran dikurangi laju kematian ditambah laju migrasi yang masuk daerah dikurangi laju migrasi yang keluar dari suatu daerah. Secara matematika hukum konservasi diterjemahkan dalam persamaan diferensial yang melibatkan variabel waktu sebagai variabel bebas. Karena juga melibatkan dimensi ruang, sehingga diperoleh model berupa persamaan diferensial parsial baik yang linear maupun nonlinear. Pada tulisan ini hanya dibahas model variabel ruang dimensi satu.

Misalkan suatu besaran $u(x,t)$ yang bergantung variabel ruang $x \in R$ dan waktu $t > 0$. Besaran u suatu kosentrasi atau kepadatan yang diukur per satuan volume yang dikenakan pada besaran massa, populasi, energi atau besaran lainnya. Kemudian besaran tersebut mengalir dalam suatu tabung (lihat gambar 1) dan homogen pada setiap penampang tabung yang luasnya A, sehingga diasumsikan hanya bergantung varibel x saja. Pandang potongan tabung yang dibatasi di sebelah kiri $x = a$ dan di sebelah kanan $x = b$ dan dinotasikan interval $I = [a,b]$. Total besaran u di dalam interval I pada saat t adalah

$$\int_a^b u(x,t)Adx \qquad (1)$$

Diasumsikan besaran $u(x,t)$ bergerak ke kanan searah perubahan variable x. Didefinisikan flux besaran u pada posisi x pada waktu t sebagai fungsi skalar $\phi(x,t)$, yaitu besaran u yang mengalir di x pada saat t per satuan luas per satuan waktu. Jika besaran mengalir ke kanan maka ϕ bernilai positif dan sebaliknya apabila mengalir ke kiri, maka ϕ bernilai negatif. Selanjutnya pada saat t laju besaran yang mengalir pada interval I adalah laju yang masuk pada interval I di $x = a$ dikurangi laju yang keluar dari interval I di $x = b$, yaitu

$$A\phi(a,t) - A\phi(b,t) \qquad (2)$$



Gambar 1. Model hukum konservasi

Diasumsikan pula tidak ada besaran yang hilang dan berkembang pada interval I dan jika besarannya adalah populasi suatu spesies, maka tidak ada kelahiran dan kematian pada interval tersebut. Kalau besaran tersebut senyawa kimia maka tidak terjadi reaksi kimia pada interval tersebut. Dengan menggunakan hukum kesetimbangan besaran u pada interval I akan memenuhi rumus berikut:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = A\phi(a,t) - A\phi(b,t) \qquad (3)$$

Persamaan (3) disebut hukum konservasi dalam bentuk integral. Diasumsikan fungsi u dan ϕ merupakan fungsi kontinu diferensiabel, maka dengan menggunakan Teorema pada Kalkulus diperoleh

$$\int_a^b \phi_x(x,t)dx = A\phi(a,t) - A\phi(b,t) \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = \int_a^b u_t(x,t)dx \tag{5}$$

Dengan sifat kekontinuan maka hukum konservasi dapat ditulis sebagai berikut:

$$u_t + \phi_x = 0 \tag{6}$$

Di dalam realitas flux dapat bergantung linear dengan jumlah besaran $u(x,t)$ yang dapat dituliskan hubungan sebagai berikut:

$$\phi = cu \tag{7}$$

dengan c suatu konstan, sehingga persamaan (6) menjadi

$$u_t + cu_x = 0 \tag{8}$$

Persamaan (8) disebut persamaan advection atau persamaan transport. Dalam kenyataan suatu besaran bergerak dari kosentrasi yang lebih tinggi ke kosentrasi yang lebih rendah yang sebanding dengan gradien kosentrasi tersebut terhadap variabel x atau dapat ditulis

$$\phi = -Du_x \tag{9}$$

dengan D suatu koefisien diffusi dan dikenal dengan hukum Fick. Persamaan konservasi (6) dapat ditulis menjadi persamaan diferensial parsial berikut:

$$u_t - Du_{xx} = 0 \tag{10}$$

yang dikenal dengan persamaan difusi atau persamaan panas. Kalau flux ϕ bergantung dengan kuadrat variabel u katakanlah sebagai berikut:

$$\phi = \tfrac{1}{2}u^2 \tag{11}$$

dan selanjutnya persamaan konservasi (6) menjadi sebagai berikut:

$$u_t + uu_x = 0 \tag{12}$$

yang disebut dengan persamaan Burger. Kemudian apabila flux ϕ dirumuskan

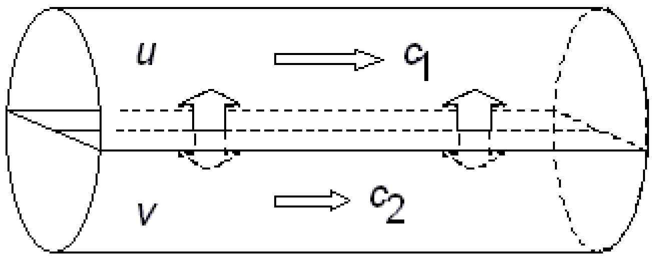
$$\phi = \tfrac{1}{2}u^2 + u_{xx} \tag{13}$$

maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{14}$$

yang dikenal dengan persamaan Korteweg de Vries (KdV).

Pada pembicaraan sebelumnya hanya memiliki satu jenis besaran *u* yang mengalir melewati potongan tabung yang dipandang sebagai ruang dimensi satu. Sekarang misalkan besaran tersebut ada dua jenis besaran yaitu *u* dan *v*. Namun besaran *u* dapat berubah menjadi besaran *v* begitu pula besaran *v* bisa berubah menjadi *u* dan jumlah dua besaran tersebut masih tetap pada saat *t* dan interval *I*. Perubahan besaran dapat dijelaskan sebagai akibat proses reaksi kimia. Di samping itu perubahan besaran juga dapat dijelaskan sebagai perubahan posisi seperti pada gambar (2).



Gambar 2. Model dua kanal dengan interaksi

Flux untuk masing-masing besaran $u(x,t)$ dan $v(x,t)$ adalah $\phi_1(x,t)$ dan $\phi_2(x,t)$. Kemudian besarnya interaksi ditentukan oleh besaran tersebut yaitu $f(u,v)$, dengan menggunakan sifat kekontinuan fungsi besaran dan fungsi flux, diperoleh model sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_t + (\phi_1)_x &= f(u,v) \\ v_t + (\phi_2)_x &= -f(u,v)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Apabila diberikan fungsi flux sebanding dengan jumlah besaran *u* dan *v* yaitu

$$\begin{aligned} \phi_1(x,t) &= c_1(x)u(x,t) \\ \phi_1(x,t) &= c_2(x)v(x,t) \end{aligned} \tag{16}$$

dengan $c_1(x)$ dan $c_2(x)$ suatu fungsi konstan sepotong-sepotong, kemudian besarnya interaksi adalah linear yaitu $f(u,v) = \alpha(v-u)$, sehingga diperoleh model dissipatif dua kanal linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c_1(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= \alpha\, v(x,t) - \alpha\, u(x,t) \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + c_2(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= \alpha\, u(x,t) - \alpha\, v(x,t) \end{aligned}\,. \tag{17}$$

Sumardi (2005) telah mencari solusi numerik linier dissipatif dua kanal persamaan (17) untuk kasus $c_1(x) = -c_2(x) = c$ dengan metode beda hingga, kemudian Sumardi (2006) mencari solusi eksaknya dengan menggunakan metode Fourier. Sumardi (2007) telah melakukan perhitungan numerik untuk khasus $c_1(x)$ dan $c_2(x)$ konstan sepotong-sepotong dengan menggunakan metode Immersed Interface. Sumardi(2008) juga mencari solusi gelombang jalan, penyelesaian khusus dan solusi eksaks masalah nilai awal persamaan (17) dengan $c_1(x)$ dan $c_2(x)$ konstan.

Selanjutnya diberikan fungsi flux sebanding dengan kuadrat jumlah besaran u dan v yaitu

$$\phi_1(x,t) = \tfrac{1}{2}u(x,t)^2$$
$$\phi_2(x,t) = \tfrac{1}{2}v(x,t)^2 \tag{18}$$

dan besarnya interaksi adalah linear $f(u,v) = \alpha(v-u)$ diperoleh model dissipatif dua kanal tak linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= \alpha\, v(x,t) - \alpha\, u(x,t)\\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + v(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= \alpha\, u(x,t) - \alpha\, v(x,t)\end{aligned}. \tag{19}$$

Dua model di atas juga diturunkan oleh van Beckum (2003) dan kemudian dicari solusi gelombang jalannya untuk persamaan (19). Model di atas ketakliniearannya masih teratur sehingga disebut juga model kuasilinear dissipatif dua kanal. Pada paper ini akan dibahas eksistensi dan kestabilan solusi gelombang jalan yang memberikan hasil yang lebih baik dari pada paper yang ditulis van Beckum(2003).

2. METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan dengan metode literatur yang berupa buku-buku dan jurnal-jurnal yang terkait dengan model nonlinier. Tahap pertama adalah mempelajari metode untuk mencari eksistensi solusi gelombang jalan model model sistem nonlinier dan membuktikan kestabilan solusi gelombang jalan yang diperoleh. Setelah diperoleh pemahaman baru diterapkan ke model nonlinier dissipatif dua kanal. Dockery dan Lui (1994) telah meneliti eksistensi dan kestabilan model genetik suatu populasi. Mascia dan Natalini (1996) juga meneliti eksistensi dan kestabilan gelombang jalan untuk sistem hiperbolik dengan relaksasi. Kemudian Brazhnik dan Tyson (2000) mencari solusi gelombang jalan untuk persamaan Fisher. Liu (2003) menggunakan metode energi untuk membuktikan kestabilan gelombang jalan pada persamaan hiperbolik, Li dan Liu(2005) menggunakan metode energi untuk membuktikan kestabilan solusi gelombang jalan pada model arus lalulintas.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Solusi gelombang jalan adalah solusi yang tidak berubah bentuknya oleh perubahan waktu dan bergerak dengan kecepatan konstan**.** Untuk mencari solusi gelombang jalan dengan kecepatan konstan s persamaan (19) diberikan

$$u(x,t) = U(z), \quad v(x,t) = V(z), \; z = \alpha(x - st) \tag{20}$$

dan mempunyai syarat batas pada $x = \pm\infty$ sebagai berikut:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\pm \\ v_\pm \end{pmatrix} \in R^2, \text{ dengan } u_- \neq u_+ . \tag{21}$$

Model kuasilinear dissipatif dua kanal (19) tereduksi menjadi sistem persamaan diferensial biasa:

$$\begin{aligned} (-s+U)\frac{dU}{dz} &= V - U \\ (-s+V)\frac{dV}{dz} &= U - V \end{aligned} \tag{22}$$

dengan syarat batas:

$$\lim_{z \to \pm\infty} \begin{pmatrix} U(z) \\ V(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\pm \\ v_\pm \end{pmatrix} \in R^2 . \tag{23}$$

Kedua persamaan (22) dijumlahkan dan kemudian diintegralkan diperoleh

$$(-s+U)^2 + (-s+V)^2 = A^2 . \tag{24}$$

Kemudian substitusi persamaan (24) ke persamaan (22) yang pertama diperoleh persamaan diferensial biasa dalam bentuk:

$$(-s+U)\frac{dU}{dz} = \pm\sqrt{A^2 - (-s+U)^2} - (-s+U) \tag{25}$$

atau

$$z = \int \frac{-s+U}{\pm\sqrt{A^2-(-s+U)^2} - (-s+U)} dU \,. \tag{26}$$

Selanjutnya untuk mencari anti derivatif ruas kanan dari persamaan (26), substitusi $-s+U = A\cos\theta$, sehingga diperoleh

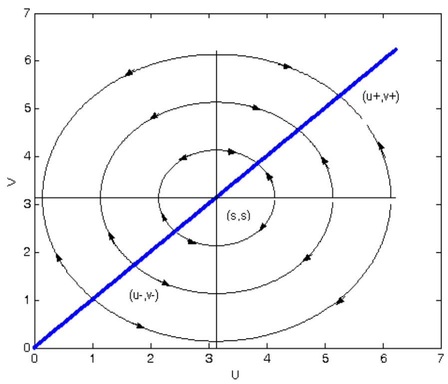
$$\begin{aligned} z &= A\int \frac{-\cos\theta\sin\theta}{\pm\sin\theta - \cos\theta} d\theta \\ &= \frac{\pm A}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctan h}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\tan(\theta/2)\pm 1\right)\right) - A\frac{\tan(\theta/2)\pm 1}{\tan^2(\theta/2)+1}. \end{aligned} \tag{27}$$

Jika persamaan (25) disubsitusi $-s+U = A\cos\theta$, maka diperoleh $V = s + A\sin\theta$.

Jadi diperoleh solusi gelombang jalan dalam bentuk fungsi parameter θ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} U &= s + A\cos\theta \\ V &= s + A\sin\theta \\ z &= \frac{\pm A}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctan h}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\tan(\theta/2)\pm 1\right)\right) - A\frac{\tan(\theta/2)\pm 1}{\tan^2(\theta/2)+1} \end{aligned} \quad . \tag{28}$$

Selanjutnya akan dianalisa solusi gelombang jalan persamaan (19) melalui dinamik persamaan (22). Adapun bidang fase sistem dinamik (22) dengan kecepatan gelombang s seperti pada gambar 3.



Gambar 3. Bidang phase solusi gelombang jalan model kuasilinear dissipatif dua kanal.

Dari bidang phase di atas diperoleh tak berhingga titik tetap pada garis $U = V$, hal ini merepresentasikan penyelesaian konstan atau solusi homoklinik dari persamaan (19). Dari gambar 3. juga diperoleh

$$z \to \infty \;\Rightarrow\; u_+ = v_+ \tag{29}$$

$$z \to -\infty \;\Rightarrow\; u_- = v_- \tag{30}$$

yang juga dapat diperoleh dari persamaan (22) dan (23).

Selanjutnya agar diperoleh solusi gelombang jalan yang heteroklinik diberikan

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(u(x,t), v(x,t)\right) = \left(u_\pm, v_\pm\right) \in R^2 \text{ dan } \left(u_-, v_-\right) \neq \left(u_+, v_+\right) \in R^2 .$$

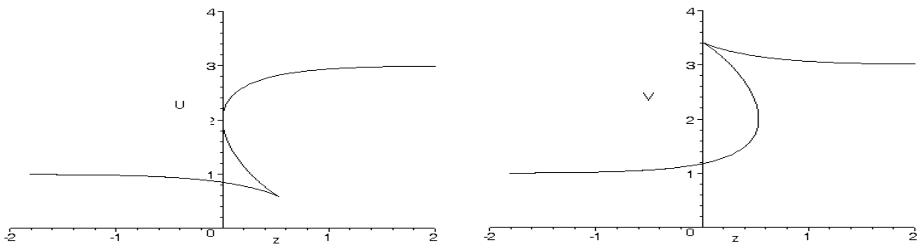
Kecepatan gelombang *s* harus memenuhi syarat Rankine-Hugoniot:

$$s = \frac{F(U_+) - F(U_-)}{U_+ - U_-} = \frac{u_+ + u_-}{2} = \frac{v_+ + v_-}{2} . \tag{31}$$

Selanjutnya dari persamaan (31) dan (24) konstanta *A* diperoleh:

$$A^2 = 2\left(\frac{u_- - u_+}{2}\right)^2 . \tag{32}$$

Dari gambar 3. ketika $U = s$ atau $V = s$ maka *z* berganti arah hal ini merepresentasikan terjadinya solusi bernilai banyak. Garis $U = s$ dan $V = s$ merupakan daerah singular yang maksudnya di titik tersebut *U* dan *V* tidak terdeferensial terhadap variabel *z*. Adapun grafik solusi gelombang jalan untuk orbit heteroklinik di atas garis $U = V$ sebagai berikut:



Gambar 4. Solusi gelombang jalan model kuasilinear dissipatif dua kanal

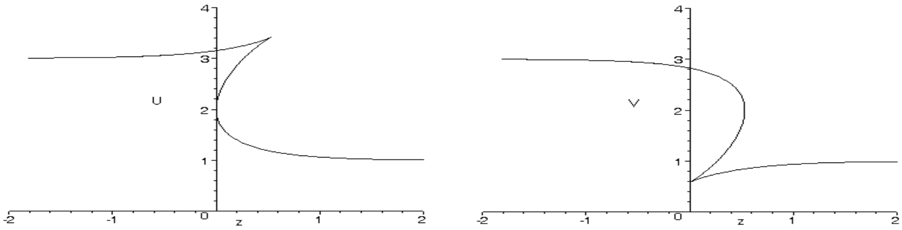
Pada Gambar 4. terlihat bahwa $u_- < u_+$ dan $v_- < v_+$, sedangkan untuk memperoleh hasil $u_- > u_+$ dan $v_- > v_+$ dengan cara memodifikasi persamaan (20) menjadi

$$u(x,t) = U(z), \quad v(x,t) = V(z), \; z = -\alpha(x - st)$$

sehingga diperoleh persamaan diferensial biasa menjadi

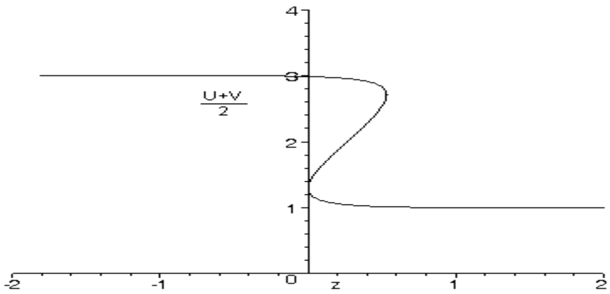
$$\begin{aligned} (s-U)\frac{dU}{dz} &= V - U \\ (s-V)\frac{dV}{dz} &= U - V \end{aligned} . \tag{33}$$

Dengan menganalisis persamaan (33) seperti pada persamaan (22) diperoleh solusi gelombang jalan untuk orbit heteroklinik di bawah garis $U = V$ sebagai berikut:



Gambar 5. Solusi gelombang jalan model kuasilinear dissipatif dua kanal dengan $u_- > u_+$ dan $v_- > v_+$

Kemudian hasil ini lebih menarik dibandingkan yang diperoleh van Beckum (2003) yang tidak memberikan hasil *U* dan *V* secara terpisah, tetapi hanya rerata dari *U* dan *V*. Grafik rerata dari *U* dan *V* pada gambar 6. di bawah sama dengan yang diperoleh van Beckum.



Gambar 6. Solusi gelombang jalan model kuasilinear dissipatif dua kanal untuk rerata *U* dan *V*.

Untuk menentukan kestabilan gelombang jalan di paper ini dengan cara memberikan gangguan yang cukup kecil dari solusi gelombang jalan yang sudah diperoleh. Selanjutnya gangguan tersebut dianalisa dalam waktu tak hingga apakah hilang atau tidak, kalau hilang berarti solusi gelombang jalan tersebut stabil. Untuk menganalisa gangguan dmendekati waktu tak hinga di sini digunakan metode energi.

Diberikan nilai awal persamaan (19) pada saat t sebagai jumlahan solusi gelombang jalan dan besarnya gangguan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(z,t) = U(z) + P(z,t) \\ v(x,t) &= v(z,t) = V(z) + Q(z,t), \quad z = x - st \end{aligned} \tag{34}$$

disini fungsi $P(z,t)$ dan $Q(z,t)$ mempunyai support yang kompak, artinya $P(z,t) = Q(z,t) = 0,\ z \notin I$ dengan I adalah interval terbatas. Solusi persamaan (19) dilihat dengan cara bergerak sesuai dengan kecepatan gelombang jalan, maka persamaan (19) dilakukan transformasi $t = t,\ z = x - st$, sehingga sistem kuasilinier (19) menjadi

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}-s\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}+u(z,t)\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}=\alpha\, v(z,t)-\alpha\, u(z,t)\\&\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}-s\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}+v(z,t)\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}=\alpha\, u(z,t)-\alpha\, v(z,t)\end{aligned}\tag{35}$$

Persamaan (34) disubstitusi ke persamaan (35) diperoleh:

$$\begin{aligned}&U_t+P_t-sU_z-sP_z+(U+P)(U_z+P_z)=\alpha(V+Q-(U+P))\\&V_t+Q_t-sV_z-sQ_z+(V+P)(V_z+Q_z)=\alpha(U+P-(V+Q))\end{aligned},\tag{36}$$

dengan menggunakan sifat solusi gelombang jalan *U* dan *V*:

$$\begin{aligned}&P_t-sP_z+(U+P)P_z+UP_z=\alpha(Q-P)\\&Q_t-sQ_z+(V+Q)Q_z+VQ_z=\alpha(P-Q)\end{aligned}\tag{37}$$

atau

$$\begin{aligned}&P_t=sP_z-(UP)_z-PP_z+\alpha(Q-P)\\&Q_t=sQ_z-(VQ)_z-QQ_z+\alpha(P-Q)\end{aligned}.\tag{38}$$

Sekarang andaikan $P(z,t)=Q(z,t)$ kemudian disubstitusi ke (37) diperoleh

$$\begin{aligned}&P_t-sP_z+UP_z+P(U_z+P_z)=0\\&P_t-sP_z+VP_z+P(V_z+P_z)=0\end{aligned}.\tag{39}$$

Persamaan pertama (39) dikurangi persamaan kedua (39) diperoleh:

$$\begin{aligned}&(U-V)P_z+(U-V)_zP=0\\&\Leftrightarrow\big((U-V)P\big)_z=0\\&\Leftrightarrow(U-V)P=K\end{aligned}.$$

Jika diberikan $z\notin I$ berarti $P=0$ dan karena U dan V solusi gelombang heteroklinik yang berarti $U\neq V$, maka $K=0$. Dengan demikian $P(z,t)=0,\ \forall z\in R$ yang kontradiksi P sebagai gangguan, jadi $P\neq Q$.

Selanjutnya untuk mencari hilangnya gangguan pada waktu tak berhingga didefinisikan energi yang merupakan fungsi *t* sebagai berikut:

$$E(t)=\int_{-\infty}^{\infty}P(z,t)^2+Q(z,t)^2\,dz.\tag{40}$$

Kemudian $E(t)$ diturunkan terhadap variabel t dan menggunakan persamaan (38) diperoleh

$$
\begin{aligned}
E'(t) &= 2\int_{-\infty}^{\infty} PP_t + QQ_t dz \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} P(sP_z - (UP)_z - PP_z + \alpha(Q-P)) + Q(sQ_z - (VQ)_z - QQ_z + \alpha(P-Q))dz \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} (2\alpha PQ - \alpha P^2 - \alpha Q^2) + sP_z + sQ_z - P^2P_z - Q^2Q_z - P(UP)_z - Q(VQ)_z dz \\
&= -2\alpha\int_{-\infty}^{\infty} (P-Q)^2 dz + \int_{-\infty}^{\infty} sP_z + sQ_z - P^2P_z - Q^2Q_z dz - \int_{-\infty}^{\infty} P(UP)_z + Q(VQ)_z dz
\end{aligned}
\quad (41)
$$

Suku kedua dari persamaan (41) terakhir dengan menggunakan sifat fungsi $P(z,t)$ dan $Q(z,t)$ mempunyai support yang kompak, maka diperoleh nilai integralnya nol. Karena $\alpha > 0$ dan $U \neq V$, $\forall z \in \Re$, sehingga akan diperoleh nilai integral negatif dan tidak pernah mencapai nol, sehingga persamaan (41) menjadi

$$E'(t) < -\int_{-\infty}^{\infty} P(UP)_z + Q(VQ)_z dz \,. \quad (42)$$

Kemudian dengan integral bagaian, maka diperoleh

$$E'(t) < \int_{-\infty}^{\infty} UPP_z + VQQ_z dz \,. \quad (43)$$

Dengan memanfaatkan bahwa $s - A \leq U, V \leq s + A$, sehingga diperoleh

$$E'(t) < (s+A)\int_{-\infty}^{\infty} PP_z + QQ_z dz \,. \quad (44)$$

Karena sifat fungsi $P(z,t)$ dan $Q(z,t)$ mempunyai support yang kompak, maka diperoleh

$$E'(t) < 0 \quad (45)$$

yang berarti $E(t)$ monoton turun dengan batas bawah nol, maka diperoleh

$$\lim_{t \to \infty} E(t) = 0 \quad (46)$$

sehingga

$$\lim_{t \to \infty} (P(t), Q(t)) = (0,0)\,. \quad (47)$$

Terbukti bahwa solusi gelombang jalan (28) stabil.

4. KESIMPULAN

Dengan memanfaatkan teori sistem dinamik, maka dapat ditunjukkan eksistensi solusi gelombang jalan model kuasilinear dissipatif dua kanal. Di samping itu terlihat bahwa solusi gelombang jalan homoklinik berupa fungsi konstan. Sedangkan solusi gelombang heteroklinik berupa fungsi bernilai banyak (*multivalued solution*) yang berupa fungsi parameter. Kemudian untuk menentukan kecepatan gelombang digunakan syarat Rankine-Hugoniot. Kestabilan solusi gelombang jalan yang diperoleh dibuktikan dengan metode energi.

Ucapan Terima kasih

Dalam menulis paper ini kami ingin mengucapkan terima kasih dengan dr. Frits van Beckum, ketika memberikan masalah di atas ketika berkunjung di Jurusan matematika UGM. Kami juga mengucapkan terima kasih kepada Beliau atas komunikasi yang indah dan menarik dalam penulisan paper ini.

DAFTAR PUSTAKA

van Beckum F.P.H., Travelling wave solution of a coastal zone non-Fourier dissipation model, *Proceedings of the Symposium on Coastal Zone Management*, 2003.

Brazhnik P.K., Tyson J.J., *On traveling wave solutions of Fisher's Equation in Two Dimensions*, SIAM J. Appl. Math, Vol 60, 2000

Dockery J.D., Lui R., *Existence and Stability of traveling wave solutions for a population genetic model via singular perturbations*, SIAM J. Appl. Math., Vol 54 , 1994

Li T., Liu H., *Stability of a Traffic Flow Model with Noncovex Relaxation*, Comm. Math. Sci. Vol. 3 No. 2, 2005

Liu H., *Asymptotic of relaxation shock profiles for hyperbolic conservation laws*, Journal of Differential Equation 192, 2003

Mascia C., Natalini R. L^1 *Nonlinear Stability of Traveling waves for a hyperbolic System with Relaxation*, J. of Diff. Eq. 132, 1996.

Sumardi, Soeparna D. Lina Aryati, Convergence of finite difference approximation for two channel dissipation model, *Proceedings International Conference on Applied Mathematic (ICAMO5)*, 2005

Sumardi, Soeparna D. Lina Aryati, *Fourier Method for two channel dissipation model*, paper disajikan pada Workshop Geophysical Fluid Dynamics and Scalar Transport in the Tropics, IMS, NUS, Singapore,13 Nov - 08 Dec 2006

Sumardi, Soeparna D. Lina Aryati, The immersed interface method for two channels dissipation model with discontinue constants velocity, *Proceeding of SEAMS-GMU Conference,* 2007.

Sumardi, Soeparna D, Lina Aryati, *The Exact solution for Two Channel Dissipation Model*, IMS preprint, 2008, http://www.ims.nus.edu.sg/publications-pp08.htm