Optimasi Bobot Portofolio dan Estimasi *VaR* *
(*Portfolio Weighted Optimization and VaR Estimation*)

Sukono[1], Subanar[2] & Dedi Rosadi[3]
[1] Jurusan Matematika FMIPA UNPAD Bandung, e-mail : fsukono@yahoo.com
[2] Jurusan Matematika FMIPA UGM Yogyakarta, e-mail : subanar@yahoo.com
[3] Jurusan Matematika FMIPA UGM Yogyakarta, e-mail : dedirosadi@ugm.ac.id

ABSTRAK

Penilaian harga saham, pemilihan kombinasi optimum, dan pengukuran risiko suatu portofolio investasi merupakan salah satu persoalan penting bagi investor. Dalam paper ini model indeks tunggal digunakan untuk penilaian harga saham, dan formulasi model optimasi dikembangkan dengan menggunakan teknik *Lagrangean Multiplier* untuk menentukan proporsi asset yang akan diinvestasikan. Sedangkan tingkat risiko yang dihadapi diestimasi menggunakan *Value at Risk*. Model-model ini digunakan untuk menganalisis data harga saham bank Lippo dan bank Bumi Putera.

Kata Kunci : Indeks tunggal, portofolio investasi, *Lagrangean Multiplier, Value at Risk.*

ABSTRACT

Stock price valuation, combination optimum selection, and risk measurement of the portfolio investment are the importance problems for investor. In this paper, the single index model used for stock price valuation, and the formulation of optimization model developed by using Lagrangean Multiplier for determine the proportion of asset that will be invested. While the risk level that faced will be estimated by using Value at Risk. This models are using to anilizing the stock price data of Lippo Bank and Bumi Putera Bank.

Keywords : *Single index, portfolio investment, Lagrangean Multiplier, Value at Risk.*

1. PENDAHULUAN

Dalam menghadapi kesempatan investasi berisiko, pilihan investasi tidak dapat hanya mengandalkan pada tingkat keuntungan yang diharapkan. Investor harus bersedia menaggung risiko yang tinggi apabila mengharapkan untuk memperoleh tingkat keuntungan yang tinggi (Bodi *et al.*, 1999). Oleh karena itu, analisis penilaian harga saham, pemilihan kombinasi saham dalam portofolio yang optimum, dan pengukuran

* Dipublikasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, tanggal 28 November 2008.

risiko dalam investasi di pasar modal adalah sangat diperlukan. Di sinilah model matematika mempunyai peranan yang sangat penting untuk melakukan analisis pembentukan portofolio tersebut.

Model matematika, khususnya model indeks tunggal berusaha memudahkan analisis investasi. Hal ini karena dalam model indeks tunggal diasumsikan bahwa korelasi *return* antara saham terjadi disebabkan adanya respon saham tersebut terhadap perubahan pada Indeks Harga Saham Gabungan (*general market index*). Pada saat pasar membaik (ditunjukkan oleh indeks pasar), harga saham-saham individual juga meningkat, demikian sebaliknya (Gruber *et al.*, 1991). Model indeks tunggal ini digunakan untuk penilaian saham dalam suatu investasi.

Menurut Kevin *et al.* (1997) dalam kondisi investasi yang berisiko, strategi yang dapat dilakukan untuk mengurangi besarnya risiko investasi adalah dengan membentuk portofolio. Untuk membentuk portofolio yang optimum salah satunya dapat dilakukan dengan bantuan optimasi menggunakan teknik *Lagrangean Multiplier*. Sedangkan untuk mengukur besarnya risiko dapat digunakan dengan mengestimasi *Value at Risk* (*VaR*). Perlu diketahui, bahwa *VaR* telah digunakan secara luas dan menjadi standar umum dalam penghitungan resiko pada investasi finansial.

Dalam paper ini bertujuan untuk melakukan analisis penilaian harga saham dengan model indeks tunggal, menentukan bobot kombinasi portofolio dengan teknik *Lagrangean Multiplier*, dan mengestimasi besarnya risiko dengan menggunakan ukuran *VaR* dalam portofolio yang yang dibentuk.

2. METODE PENELITIAN

Sejalan dengan tahapan analisis penilaian harga saham, optimasi bobot portofolio, dan estimasi besarnya risiko investasi, dengan demikian pertama yang dilakukan adalah menghitung *return* saham dan *return* pasar seperti berikut ini.

2.1 Menghitung *Return* Saham dan *Return* Pasar

Untuk menentukan ekspektasi *return* dan variansi saham diperlukan data *return* saham dan *return* pasar tiap periode penelitian. Menurut Gruber *et al.* (1991) *return* saham untuk tiap periode dapat dihitung dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$R_{it} = \ln\left(\frac{P_{it+1}}{P_{it}}\right) \tag{2.1}$$

di mana R_{it} adalah *return* saham i pada periode t, dan P_{it} adalah harga saham i pada periode t. Sedangkan indeks pasar diwakili oleh Indeks Harga saham Gabungan (IHSG). Dengan cara yang sama *return* pasar dihitung dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$R_{mt} = \ln\left(\frac{IHSG_{t+1}}{IHSG_t}\right) \tag{2.2}$$

di mana R_{mt} adalah *return* pasar pada periode t, dan $IHSG_t$ adalah $IHSG$ pada periode t. Data *return* ini selanjutnya akan dipergunakan untuk pembentukan model indeks tunggal berikut ini.

2.2 Membentuk Model Indeks Tunggal

Berdasarkan Gruber *et al.* (1991) ciri utama dari model indeks tunggal adalah bahwa model ini diterima jika dan hanya jika asumsi yang melandasinya dipenuhi. Model indeks tunggal mempunyai beberapa karakteristik sebagai berikut:

(1) Persamaan dasar $R_i = a_i + \beta_i R_m$ dan $a_i = \alpha_i + e_i$, sehingga model indeks tunggal berbentuk:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i \text{, dengan } i = 1,2,...,k \tag{2.3}$$

di mana k banyaknya saham yang dianalisis.

(2) Berdasarkan pembentukan persamaan, rata-rata e_i adalan nol, atau

$$E(e_i) = 0$$

(3) Berdasarkan asumsi:

a. Indeks tidak berhubungan (tidak berkorelasi) dengan *unique return.*

$$E[e_i(R_m - \overline{R}_m)] = 0$$

b. Saham berkorelasi hanya karena memberikan respon terhadap pasar.

$$E[e_i.e_j] = 0 \text{, untuk } i \neq j$$

(4) Berdasarkan definisi

a. Variansi e_i adalah $E[e_i^2] = \sigma_{ei}^2$

b. Variansi R_m adalah $E[(R_m - \overline{R}_m)^2] = \sigma_m^2$

Di mana a_i adalah *unique return* saham i, α_i adalah ekspektasi *unique return*, β_i adalah ukuran sensitivitas saham i terhadap pasar, dan e_i adalah *residual error* dari *unique return*. Data *return* tersebut di atas digunakan untuk mengestimasi α_i dan β_i berikut ini.

2.3 Mengestimasi α_i dan β_i

Dalam penilaian saham, risiko pasar yang layak dipertimbangkan adalah risiko sistematis. Oleh karena itu, investor perlu mengestimasi besarnya beta sebagai ukuran risiko pasar. Untuk menaksir beta dapat dilakukan dengan metode *least square*. Dari persamaan (2.3) dapat diperoleh jumlah kuadrat terkecil *residual error*:

$$\varepsilon_i = \sum_{t=1}^{n} e_{it}^2 = \sum_{t=1}^{n} (R_i - \alpha_i - \beta_i R_{mt})^2 \qquad (2.4)$$

Menurunkan (2.4) terhadap parameter α_i dan β_i serta menyamakan dengan nol diperoleh sistem persamaan:

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \alpha_i} = 0 \text{ dan } \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \beta_i} = 0 \qquad (2.5)$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan (2.5) untuk parameter β_i akan didapat:

$$\hat{\beta}_i = \frac{n\sum_{t=1}^{n} R_{mt}R_{it} - \sum_{t=1}^{n} R_{mt} \sum_{t=1}^{n} R_{it}}{n\sum_{t=1}^{n} R_{mt}^2 - (\sum_{t=1}^{n} R_{mt})^2} \qquad (2.6)$$

Sedangkan untuk parameter α_i dapat dihitung dengan menggunakan persamaan:

$$\hat{\alpha}_i = \overline{R}_i - \hat{\beta}_i \overline{R}_m \qquad (2.7)$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan ekspektasi *return* dan variansi saham sebagai berikut.

2.4 Mengestimasi Ekspektasi *Return* dan Variansi Saham

Berdasarkan karakteristik model indeks tunggal, ekspektasi *return* saham individual adalah:

$$E[R_i] = E[\alpha_i + \beta_i R_m + e_i]$$

$$= E[\alpha_i] + E[\beta_i R_m] + E[e_i]$$

$$\overline{R}_i = \alpha_i + \beta_i \overline{R}_m \qquad (2.8)$$

Persamaan (2.8) menunjukkan bahwa ekspektasi *return* saham individual terdiri dari *unique return* (tidak terpengaruh pasar) dan tingkat keuntungan yang berhubungan dengan pasar (*market related return*).

Variansi *return* saham individual dengan menggunakan indeks tunggal dapat dihitung melalui persamaan:

$$E[(R_i - \overline{R}_i)^2] = \beta_i^2 E[(R_m - \overline{R}_m)^2] + 2\beta_i E[e_i(R_m - \overline{R}_m)] + E[e_i^2] \qquad (2.9)$$

Karena karakteristik (3.a), (4.a) dan (4.b), maka persamaan (2.9) menjadi:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{ei}^2 \qquad (2.10)$$

Persamaan (2.10) terlihat bahwa variansi *return* saham individual terdiri dari dua bagian, yaitu *unique risk* (σ_{ei}^2) dan risiko yang berhubungan dengan pasar $(\beta_i^2 \sigma_m^2)$. Selanjutnya juga diestimasi kovariansi dan korelasi antar saham.

2.5 Mengestimasi Kovariansi dan Korelasi Antar Saham

Untuk menentukan besarnya kovariansi antar saham dengan model indeks tunggal dapat dilakukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Cov(R_i, R_j) &= E[(R_i - \overline{R}_i)(R_j - \overline{R}_j)] \\ &= \beta_i \beta_j E[(R_m - \overline{R}_m)] + \beta_j E[e_i(R_m + \overline{R}_m)] \\ &\quad + \beta_i E[e_j(R_m - \overline{R}_m)] + E[e_i . e_j] \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Berdasarkan karakteristik (3.a) dan (3.b), persamaan (2.11) ditulis sebagai:

$$Cov(R_i, R_j) = \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \qquad (2.12)$$

Dari persamaan (2.12) tampak bahwa kovariansi antar saham hanya dipengaruhi oleh *market risk* (ini sesuai dengan asumsi). Inilah yang dikenal dengan ***model indeks tunggal*** . Selanjutnya, berdasarkan persamaan (2.12), koefisien korelasi antar saham, ρ, dapat dinyatakan dengan:

$$Cov(R_i, R_j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$$

Atau, didapat

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\beta_i \beta_j \sigma_m^2}{\sigma_i \sigma_j} \qquad (2.13)$$

Setelah masing-masing secara individual dinilai dan dipilih, selanjutnya menentukan model ekspektasi dan variansi *return* portofolio berikut ini.

2.6 Membentuk Model Ekspektasi *Return* dan Variansi Portofolio

Misalkan w_i menyatakan proporsi (bobot) asset yang diinvestasikan pada saham i dalam pembentukan portofolio, dengan demikian *return* portofolio adalah:

Berdasarkan persamaan (2.14) ekspektasi *return* portofolio diperoleh sebagai berikut:

$$E[R_p] = E[\sum_{i=1}^{k} w_i R_i] = E[\sum_{i=1}^{k} w_i(\alpha_i + \beta_i R_m)]$$

atau diperoleh

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{k} w_i\alpha_i + \overline{R}_m \sum_{i=1}^{k} w_i\beta_i = \alpha_p + \beta_p \overline{R}_m \tag{2.15}$$

dengan $\alpha_p = \sum_{i=1}^{k} w_i\alpha_i$ dan $\beta_p = \sum_{i=1}^{k} w_i\beta_i$.

Sedangkan variansi *return* portofolio dapat ditentukan dengan cara seperti di bawah ini.

$$\sigma_p^2 = E[(R_p - \overline{R}_p)^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} w_i w_j Cov(R_i, R_j); i \neq j$$

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2\sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{k} w_i^2\sigma_{ei}^2 \tag{2.16}$$

Untuk mendapatkan proporsi asset yang tepat, dilakukan optimasi portofolio sebagai berikut ini.

2.7 Melakukan Optimasi Bobot Kombinasi Portofolio

Misalkan seorang investor memiliki faktor keengganan (*risk aversion*) θ, ini dapat diestimasi dengan cara perbandingan dua portofolio. Jika seorang investor dengan *risk aversion* θ, dengan dua portofolio yang mempunyai *average rate of return* $\overline{R}_p$ dan $\tilde{R}_p$, serta dengan variansi σ_p^2 dan $\tilde{\sigma}_p^2$, perbandingan antara dua portofolio tersebut adalah dengan menyamaan:

$$\overline{R}_p - \theta\sigma_p^2 = \tilde{R}_p^2 - \theta\tilde{\sigma}_p^2 \tag{2.17}$$

Menyelesaikan persamaan (2.17) untuk θ akan diperoleh:

$$\hat{\theta} = \frac{\overline{R}_p - \tilde{R}_p}{\sigma_p^2 - \tilde{\sigma}_p^2} \tag{2.18}$$

Optimasi bertujuan memaksimumkan $\overline{R}_p - \theta\sigma_p^2$, sehingga masalah optimasi portofolio dapat dirumuskan sebagai berikut:

Fungsi tujuan:

$$f(w_1, w_2, ..., w_k) = (\sum_{i=1}^{k} w_i\alpha_i + \overline{R}_m \sum_{i=1}^{k} w_i\beta_i)$$

$$- \theta(\beta_p^2\sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{k} w_i^2\sigma_{ei}^2) \tag{2.19}$$

Fungsi kendala:

$$g(w_1, w_2, ..., w_k) = 1 - \sum_{i=1}^{k} w_i = 0 \tag{2.20}$$

Dari persamaan (2.19) dan (2.20) selanjutnya fungsi *Lagrangean* dibentuk sebagai penjumlahan fungsi tujuan dan fungsi kendala, dengan faktor *multiplier Lagrange* λ sebagai berikut:

$$L(w_1, w_2, ..., w_k; \lambda) = f(w_1, w_2, ..., w_k) + \lambda g(w_1, w_2, ..., w_k) \tag{2.21}$$

Menurunkan secara parsial terhadap $w_1, w_2, ..., w_k$ dan λ, serta menyamakan dengan nol akan diperoleh persamaan-persamaan:

$$\partial L / \partial w_1 = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha_1 + (\overline{R}_m - \theta\sigma_m^2)\beta_1 + 2w_1\sigma_{e1}^2 \tag{2.22}$$

$$\partial L / \partial w_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha_2 + (\overline{R}_m - \theta\sigma_m^2)\beta_2 + 2w_2\sigma_{e2}^2 \tag{2.23}$$

Dan seterusnya hingga:

$$\partial L / \partial w_k = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha_k + (\overline{R}_m - \theta\sigma_m^2)\beta_k + 2w_k\sigma_{ek}^2 \tag{2.24}$$

$$\partial L / \partial \lambda = 0 \Rightarrow 1 - \sum_{i=1}^{k} w_i = 0$$

(2.25)

Menyelesaikan sistem persamaan tersebut, akan diperoleh $w_1, w_2, ..., w_k$. Penyamaan persamaan (2.24) dengan persamaan (2.22) dan menyelesaikannya akan diperoleh:

$$w_k = \frac{(\alpha_k - \alpha_1) + (\beta_k - \beta_1)(\overline{R}_m - \theta\sigma_m^2) + 2w_1\sigma_{e1}^2}{2e_{e1}^2} \qquad (2.26)$$

Dan sterusnya hingga penyamaan persamaan (2.23) dengan persamaan (2.22) dan menyelesaikannya diperoleh:

$$w_2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1)(\overline{R}_m - \theta\sigma_m^2) + 2w_1\sigma_{e1}^2}{2e_{e1}^2} \qquad (2.27)$$

dan

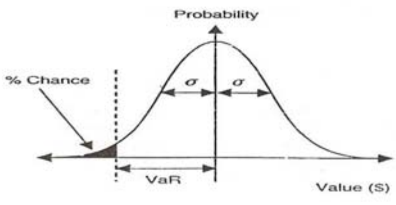
$$w_1 = 1 - \sum_{i=2}^{k} w_i \qquad (2.28)$$

Nilai-nilai proporsi $w_1, w_2, ..., w_k$ ini adalah menunjukkan komposisi alokasi asset (dana) yang akan diinvestasikan pada masing-masing saham dalam pembentukan portofolio, agar *rate of return on portfolio investment* maksimum (Tadelin *et al.*, 2001). Akhirnya, estimasi *VaR* akan dilakukan berikut ini.

2.8 Mengestimasi *VaR*

Estimasi *VaR* secara parametrik adalah mengasumsikan bahwa *return* saham berdistribusi normal, dan *VaR* diestimasi dengan menggunakan parameter-parameter *mean* dan deviasi standar (Rupert,2004:348). Perlu diketahui bahwa *quantile* ke-α dari distribusi $N(\mu, \sigma^2)$ adalah $\mu + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma$, oleh karena itu etimasi *VaR* (α) adalah:

$$VaR(\alpha) = -S \times \{\mu + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma\} \qquad (2.29)$$



Gambar 3.1 Hubungan antara *VaR* dengan Deviasi Standar

Di mana S adalah besarnya asset yang diinvestasikan. Estimasi *VaR* dengan metode ini sangat dipengaruhi oleh deviasi standar.

3. ANALISIS KASUS

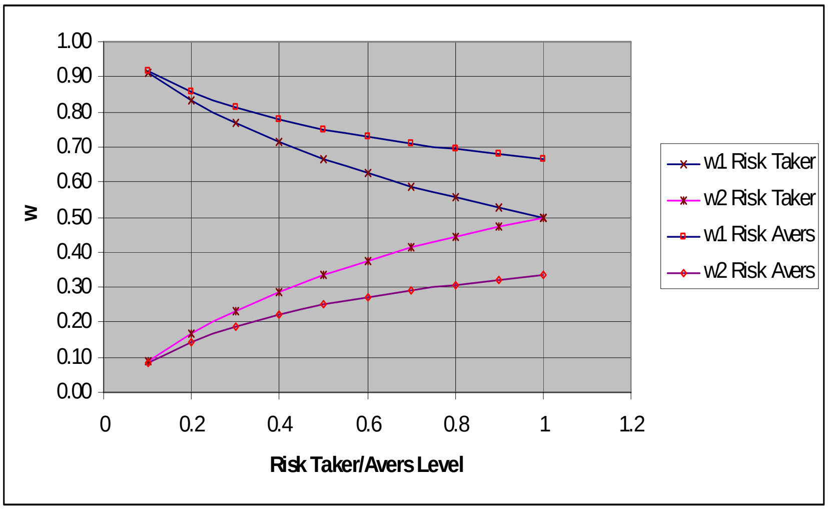
Data yang dianalisis adalah harga saham harian Bank Lippo dan Bumi Putera serta Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) kinerja 129 hari kerja terakhir tahun 2007. Kemudian data ini masing-masing ditentukan besarnya nilai *log return* dengan menggunakan persamaan (2.1) dan (2.2). Berdasarkan statistik deskriptif, masing-masing data *log return* tersebut memiliki nilai *mean* dan variansi seperti diberikan dalam Tabel 3.1 berikut ini.

Tabel 3.1 *Mean* dan Variansi Data *Log Retrurn*

Data *Log Return*	*Mean*	Variansi
Log Return Lippo	0,000718	0,00010588
Log Return Bumi Putera	0,001261	0,01575025
Log Return IHSG	0,017440	0,05112120

Regresi antara log return saham Lippo dan IHSG mengsilkan persamaan LIPPO = 0.000664 + 0.00310 IHSG, Sedangkan regresi antara log return saham Bumi Puteri menghasilkan persamaan BUMPU = 0.0019 + 0.0378 IHSG. Residual kuadrat dari regresi LIPPO adalah $\sigma_{eL}^2 = 0{,}0001063$ dan residual kuadrat dari regresi Bumi Puteri adalah $\sigma_{eB}^2 = 0{,}0158000$. Seringkali untuk menentukan bobot portofolio investasi ditentukan berdasarkan perbandingan nilai data log return saham terakhir, yang mana nilai data log return saham Lippo terakhir adalah 0,0057907 dan nilai data log return saham Bumi Putera terakhir adalah 0,028029; dengan demikian bobot portofolio untul saham Lippo adalah 0,17 dan bobot portofolio untuk saham Bumi Putera adalah 0,83. Menggunakan nilai-nilai bobot ini variansi portofolio dihitung dengan menggunakan rumus (2.16), hasilnya adalah $\sigma_p^2 = 0.104$. Dengan asumsi *mean log return* portofolio adalah nol, dan dengan tingkat signifikasi 5%, serta dengan investasi awal adalah satu satuan, *Value at Risk* yang dihitung dengan menggunakan persamaan (2.19) didapat $VaR(5\%) = 0{,}172$.

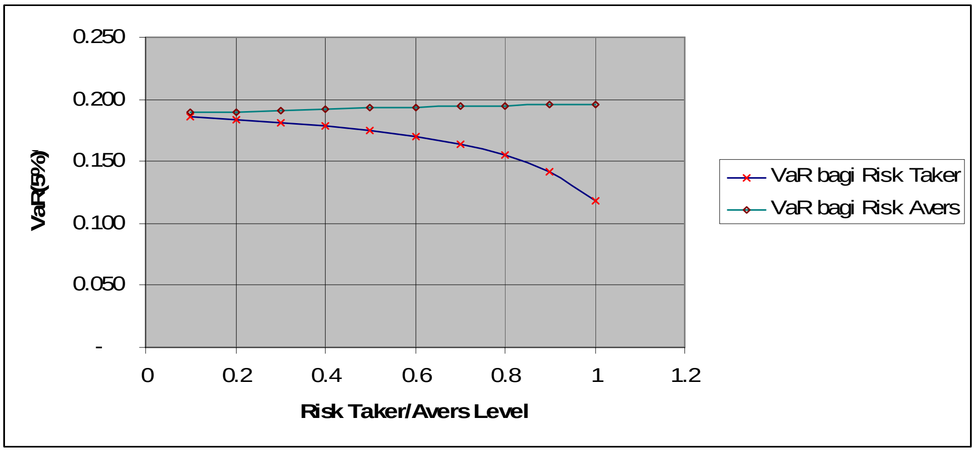
Akan berbeda hasilnya jika digunakan pendekatan optimasi Lagrangean Multiplier. Apabila pada persamaan (2.18) didekati dengan beberapa tingkatan penantang risiko (*risk taker*) : $0 < a \le 1$ dan beberapa tingkatan penghindar risiko (*risk avers*) : $-1 \le a < 0$; maka bobot portofolio bagi investor *risk taker* dan bagi investor *risk avers* dapat ditunjukkan dalam Gambar 3.1 berikut ini.



Gambar 3.1 Grafik bobot portofolio bagi investor *risk taker* dan *risk avers*

Tampak bahwa bagi investor yang memiliki tingkat *risk taker* satu cenderung membagi dua alokasi modalnya dengan bobot yang sama, yaitu 0,5 untuk saham Lippo dan 0,5 untuk saham Bumi Putera. Sedangkan bagi investor yang memiliki tingkat *risk avers* satu akan membagi dua alokasi modalnya dengan bobot 0,67 untuk saham Lippo dan 0,33 untuk saham Bumi Putera.

Dengan asumsi yang sama, yakni *mean log return* portofolio adalah nol, dan dengan tingkat signifikasi 5%, serta dengan investasi awal adalah satu satuan, *Value at Risk* yang dihitung dengan menggunakan persamaan (2.19) bagi investor dengan beberapa tingkatan *risk taker* maupun *risk avers* seperti Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3.2 Value at Risk untuk beberapa tingkatan *risk taker/avers*

Tampak bahwa baik bagi investor dengan tingkatan *risk taker* maupun *risk avers* rendah 0,1 *Value at Risk* hampir sama, yakni 0,186 bagi investor *risk taker* dan 0,189 bagi investor *risk avers*. Tetapi, untuk tingkatan *risk taker*/*avers* yang semakin besar, *Value at Risk* bagi investor *risk taker* menurun cepat, sedangkan bagi investor *risk avers* meningkat perlahan. Tampak bahwa pada tingkatan *risk taker/avers* 1, *Value at Risk* bagi investor *risk taker* hanya 0,118 dan bagi investor *risk avers* 0,196. Jelaslah bahwa di sini bagi investor yang sangat berhati-hati tidak selalu menghasilkan *Value at Risk* yang rendah atau sebaliknya.

4. SIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil penelitian dan pembahasan di atas akhirnya dapat diambil kesimpulan dan saran-saran bagi peneliti lain yang berminat meneliti lebih lanjut penelitian ini.

4.1 Simpulan

Hasil optimasi bobot portofolio bagi investor *risk taker* dengan tingkat *risk taker/avers* tinggi cenderaung membagi dua sama besar alokasi dananya pada investasi saham-saham dalam portofolionya. Sedangkan bagi investor dengan tingkatan *risk taker/avers* semakin tinggi tetap menjaga secara proporsional yang berbeda bobot alokasi dananya pada investasi saham-saham dalam portofolionya. *Value at Risk* yang dihasilkan oleh investor dengan tingkatan *risk taker/avers* yang semakin tinggi justeru semakin menurun. Sedangkan *Value at Risk* yang dihasilkan oleh investor *risk avers* semakin meningkat seiring dengan semakin tingginya tingkatan *risk taker/avers*.

4.2 Saran

Untuk estimasi *VaR* dalam paper ini *return* saham diasumsikan berdistribusi normal. Sedangkan untuk penelitian lain masih dapat dikembangkan bagi data *return* saham yang tidak berdistribusi normal, dan juga dengan menggunakan pendekatan *time series*.

DAFTAR PUSTAKA

Alexader, C. (Editor). (1999). *Risk Management and Analysis*. Volume 1 : Measuring and Modelling Financial Risk. New York : John Wiley & Sons Inc.

Dowd, K. (2002). *An Introduction to Market Risk Measurement*. United State American : John Wiley & Sons Inc.

Bodie *et al.* (1999). *Investment*. Fourth Edition. Singapore : Irwin / McGraw-Hill.

Gruber *et al.* (1991). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Singapore : John Wiley & Sons, Inc.

Jorion, P. (2004). Bank Trading Risk and Systemic Risk. Third draft : December 2004.

Ruppert, David. 2004. *Statistics and Finanace an Introduction*. New York: Springer.

Sukono. (2002). Model Matematika Pembentukan Portofolio Investasi Optimum Dengan Menggunakan Indeks Tunggal. *Jurnal Matematika Integratif.* Vol. 1, No. 1, April 2002.

Tadelilin, E. (2001). *Analisis Investasi.* Yogyakarta : BPFE.