Menampilkan Penaksir Parameter pada Model Linear *

Mulyana **

Abstrak

Pada model linear $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$, jika $\hat{\underline{\beta}}$ penaksir untuk $\underline{\beta}$, maka $X\hat{\underline{\beta}}$ memiliki dua peran. Yaitu sebagai penaksir **faktual**, $\hat{\underline{Y}} = X\hat{\underline{\beta}}$, dan penaksir **rata-rata hitung**, $\hat{E}(\underline{Y}) = X\hat{\underline{\beta}}$. Untuk menampilkan peran mana yang diutamakan, maka dapat digunakan fungsi target dengan persamaan $\underline{T} = \lambda\underline{Y} + (1-\lambda)E(\underline{Y})$, $0 < \lambda < 1$. Dengan formulasi ini, $\underline{T}$ memiliki ciri seperti $\underline{Y}$.

Kata kunci : model linear, penaksir, fungsi target

Abstract

In linear models $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ *, if* $\hat{\underline{\beta}}$ *estimator for* $\underline{\beta}$ *, then* $X\hat{\underline{\beta}}$ *have two character. That is* ***factual*** *estimator* $\hat{\underline{Y}} = X\hat{\underline{\beta}}$*, and* ***mean*** *estimator* $\hat{E}(\underline{Y}) = X\hat{\underline{\beta}}$, $\hat{E}(\underline{Y}) = X\hat{\underline{\beta}}$. *For puts forward which main character, then use target function* $\underline{T} = \lambda\underline{Y} + (1-\lambda)E(\underline{Y})$, $0 < \lambda < 1$. *With this formulation* $\underline{T}$ *and* $\underline{Y}$*, have same characteristic.*

Keywords : *linear model, estimator, target function*

* : **Makalah hasil penelitian kepustakaan, disampaikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Yogjakarta tanggal 28 November 2008**

** : **Staf Pengajar Jurusan Statistika FMIPA Unpad**
Jl. Raya Bandung – Sumedang Km. 21, Jatinangor Sumedang
[Telp. : 022 779 6002 (Kantor) ; 022 7949 312 (Rumah) ; HP : 0815 622 1812]

Pendahuluan

Perhatikan model linear sampel dalam persamaan matriks

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

dengan, $\underline{Y}$, nx1 : vektor pengamatan ; X, nxp : matriks *explatory* dengan *rank* penuh; $\underline{\beta}$, px1 : vektor parameter model ; $\underline{\varepsilon}$, nx1 : vektor kekeliruan dengan asumsi $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I)$, I matriks identitas.

Berdasarkan metode kemungkinan maksimum, penaksir untuk $\underline{\beta}$ adalah

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y}$$

sehingga model ramalannya, $\underline{\hat{Y}} = X\underline{\hat{\beta}}$.

Dalam hal ini $\underline{\hat{Y}}$, dinamakan **taksiran nilai faktual**.

Karena $E(\underline{Y}) = E(X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}) = E(X\underline{\beta}) = X\underline{\beta}$, maka berdasarkan sifat linearitas model, taksiran $E(\underline{Y})$ sama dengan, $E(\underline{\hat{Y}}) = X\underline{\hat{\beta}}$.

Dalam hal ini $E(\underline{\hat{Y}})$ dinamakan **taksiran rata-rata hitung nilai faktual**.

Dari hasil paparan tersebut, jadi $X\underline{\hat{\beta}}$ memiliki dua peran, yaitu sebagai penaksir nilai faktual dan rata-rata hitung nilai faktual. Sehingga untuk keperluan analisis, perlu dipilih peran mana yang akan digunakan.

Fungsi Target

Graybill (1961) menunjukan bahwa $\underline{\hat{\beta}}$ merupakan statistik (1) tak bias, (2) bervarians minimum, (3) cukup, (4) lengkap, (5) konsisten, dan (6) efisien. Sehingga Zellner (1994), merekomendasikan fungsi kegagalan tertimbang (fungsi kegagalan diboboti, *balanced lost function*), dengan persamaan

$$\lambda\left(X\underline{\hat{\beta}} - \underline{Y}\right)'\left(X\underline{\hat{\beta}} - \underline{Y}\right) + (1-\lambda)\left(X\underline{\hat{\beta}} - X\underline{\beta}\right)'\left(X\underline{\hat{\beta}} - X\underline{\beta}\right)$$

λ : konstanta nonstokastik, $0 < \lambda < 1$,

jika $\underline{\hat{\beta}}$ digunakan sebagai penaksir untuk $\underline{\beta}$.

Pada formulasi yang diajukan Zellner tersurat, suku pertama merupakan jumlah kuadrat residu (deviasi), jika $\underline{\hat{\beta}}$ sebagai penaksir nilai faktual, sedangkan suku kedua jika sebagai penaksir rata-rata hitung nilai faktual. Sehingga Giles, Giles dan Ohtani (1996) dengan Wan (1994), berpendapat, formulasi fungsi kegagalan tersebut dapat digunakan sebagai acuan untuk menetapkan peran yang diutamakan untuk $X\underline{\hat{\beta}}$.

Mengacu pada formulasi fungsi kegagalan dan pendapat-pendapat tersebut, untuk menentukan peran mana yang akan diutamakan dari $X\hat{\underline{\beta}}$, dapat digunakan fungsi target dengan persamaan

$$\underline{T} = \tau\underline{Y} + (1-\tau)E(\underline{Y})$$

τ : $0 < \tau < 1$, konstanta nonstokastik.
Berdasarkan sifat linearitas model, maka

1. $\hat{\underline{T}} = \tau\hat{\underline{Y}} + (1-\tau)\,E(\hat{\underline{Y}}) = \tau X\hat{\underline{\beta}} + (1-\tau)X\hat{\underline{\beta}} = X\hat{\underline{\beta}}$
2. $E(\underline{T}) = E(\underline{\tau Y}) + E(\underline{(1-\tau)E(\underline{Y})}) = \tau E(\underline{Y}) + (1-\lambda)E(\underline{Y}) = E(\underline{Y})$

   Sehingga $E(\hat{\underline{T}}) = E(\hat{\underline{Y}}) = X\hat{\underline{\beta}}$

Hal ini menyimpulkan bahwa, fungsi target $\underline{T}$ memiliki ciri seperti $\underline{Y}$. Sehingga jika $X\hat{\underline{\beta}}$ ingin digunakan sebagai penaksir faktual ($\hat{\underline{Y}}$), maka $\tau \to 1$, sedangkan sebagai penaksir rata-rata hitung nilai faktual ($X\hat{\underline{\beta}}$), $\tau \to 0$.

Fungsi kegagalan jika $\underline{T}$ digunakan sebagai target penaksiran parameter model ($X\hat{\underline{\beta}}$), sama dengan

$$\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{T}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{T}\right) = \left(X\hat{\underline{\beta}} - \{\tau\underline{Y} + (1-\tau)E(\underline{Y})\}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - \{\tau\underline{Y} + (1-\tau)E(\underline{Y})\}\right)$$

yang jika dijabarkan, akan diperoleh persamaan

$$g(\tau) = (1-\tau)^2\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right) + \tau^2\left(X\hat{\underline{\beta}} - X\underline{\beta}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - X\underline{\beta}\right) + 2\tau(1-\tau)\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - X\underline{\beta}\right)$$

Kesimpulan

Pada formulasi fungsi kegagalan $g(\tau)$, dua suku pertamanya identik dengan fungsi kegagalan tertimbang, seperti yang dikemukakan Zellner (1994), sedangkan suku ketiganya merupakan kovarians tertimbang antara kedua simpangan dari peran $X\hat{\underline{\beta}}$. Hal ini menyimpulkan, jika ingin menampilkan sasaran dari analisis regresi biasa, yaitu menentukan apakah $X\hat{\underline{\beta}}$, sebagai penaksir nilai aktual ($\hat{\underline{Y}} = X\hat{\underline{\beta}}$), atau rata-rata nilai aktual ($E(\hat{\underline{Y}}) = X\hat{\underline{\beta}}$), maka ada dua besaran yang harus disyaratkan, yaitu **pembobot** (τ) dan **simpangan** ($\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}$).

Fungsi resikonya (*risk function*) dari fungsi target $\underline{T}$, sama dengan R(τ) = E{g(τ)}, yang jika dijabarkan sama dengan $\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right)$. Hal ini menunjukan bahwa fungsi resiko bersifat konstan, sama dengan jumlah kuadrat total residu (*total predictive means squared error*, **MSE**). Sehingga untuk menampilkan peran dari $X\hat{\underline{\beta}}$, harus dilakukan klasifikasi model dengan MSE minimal.

Terapan

Teori ini dapat digunakan untuk membandingkan dua kelompok yang berbeda dalam menampilkan peran dari penaksir parameter regresi linear. Misal antara pengguna obat dengan pabrik pembuat obat tersebut. Berdasarkan teori Farmakologi, tingkat penyembuhan obat (Y) bergantung pada beberapa faktor, diantaranya umur (X_1), asupan gizi (X_2) dan kedisiplinan meminum obat (X_3). Dengan model regresinya linear,

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

Taksiran untuk β_1, β_2 dan β_3, bagi pengguna obat adalah taksiran faktual, sedangkan pabrik, taksiran rata-rata hitung nilai faktual. Sehingga dalam membangun fungsi target $\underline{T}$, untuk pengguna obat, $\tau \to 1$, sedangkan untuk pabrik $\tau \to 0$. Dengan deviasi bisa digunakan sama.

Berdasarkan sampel yang diambil untuk masing-masing kelompok pengamatan (pengguna obat dan pabrik obatny), lakukan identifikasi model dengan MSE minimal. Selanjutnya lakukan telaah perbandingan model, untuk menentukan peran mana yang akan dipilih.

Kepustakaan

de Jonge, H. ; 1961 ; ***Quantitative Methods in Pharma cology*** ; Proceeding of A Symposium Held inLeyden, on May 10 – 13.

Giles, J. A. , Giles, D. E. A. , Ohtani, K. ; 1996 ; ***The Exact Risk of Some Pre-Test and Stein-Type Regression Estimators Under Balanced Loss*** ; Communications in Statistics-Theory Math. vol. 25.

Graybill, F. A. ; 1961 ; ***An Introduction to Linear Statistical Models*** ; McGraw-Hill ; New York.

Hogg, R. V. , Craig A. T. ; 1978 ; ***Introduction to Mathematical Statistics, 4th ed.*** ; Macmillan Publishing Co. Inc. ; New York.

Shalabi ; 1999 ; ***Improving The Prediction in Linear Regression Models*** ; Journal of Statistical Research vol. 33 ; Bangladesh.

Steel, R. G. D. , Torrie, J. H. ; 1981 ; ***Principle and Procedures of Statistics, a Biometrical Approach*** ; McGraw-Hill Int. Book Co. ; Auckland

Zellner, A. ; 1994 ; ***Bayesian and Non-Bayesian Estimation Using Balanced loss Functions, Statistical Decision Theory and Related Topics V*** ; Springer-Verlag, Eds. S. S. Gupta and J. O. Berger ; New York.