Ruang Barisan Selisih $\ell_p(\Delta), 1 < p < \infty$ dan Beberapa Permasalahan Karakterisasi Produk Tensor $\ell_p(\Delta) \otimes \ell_q(\Delta)$

Muslim Ansori

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Lampung
Jln. Soemantri Brodjonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145
E-mail: ansomath@yahoo.com

ABSTRACT

In this paper we give the notion of difference sequence space $\ell_p(\Delta)$ and study some topological properties of this space. Some Characterization of tensor product $\ell_p(\Delta) \otimes \ell_q(\Delta), 1 < p, q < \infty$ are given.

Key Words : *difference sequence, tensor product*

ABSTRAK

Tulisan ini membahas pengertian suatu ruang barisan selisih $\ell_p(\Delta)$ dan dikaji beberapa sifat topologis ruang ini. Selanjutnya, disajikan beberapa permasalahan produk tensor $\ell_p(\Delta) \otimes \ell_q(\Delta), 1 < p, q < \infty$

Kata Kunci : *barisan selisih, produk tensor*

1. Pendahuluan

Kajian tentang ruang barisan selisih telah banyak dilakukan antara lain oleh Kizmaz [1], yang mendefinisikan ruang barisan selisih $\ell_\infty(\Delta), c(\Delta)$ dan $c_0(\Delta)$ sebagai berikut:

$$X(\Delta) = \{x = \{x_k\} \subset \Re / C : \{\Delta_k\} \in X\},$$

dengan $X = \ell_\infty, c, c_0$ berturut-turut merupakan barisan terbatas, barisan konvergen dan barisan konvergen ke nol dengan norm pada X, dengan $\|x\|_X = \sup_k \{|x_k|\}$ dan $\Delta x = \{\Delta x_k\} = \{x_k - x_{k+1}\}$ untuk semua $k \in N$. Ruang di atas merupakan ruang Banach terhadap norm $\|x\|_{X(\Delta)} = |x_1| + \sup_k \{|\Delta x_k|\}$.Perumuman ruang-ruang tersebut dikerjakan oleh Tripathy dan Esi [4].

Tulisan ini akan memodifikasi pengertian tersebut di atas dengan mengganti ruang ruang $X = \ell_\infty, c, c_0$ dengan ruang $\ell_p, 1 < p < \infty$, yaitu

$\Delta), 1 < p < \infty$

$$\ell_p = \left\{ x = \{x_k\} \subset \Re / C : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

dengan norm $\|.\|$,

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

Selanjutnya, disajikan beberapa permasalahan produk tensor $\ell_p(\Delta) \otimes \ell_q(\Delta), 1 < p, q < \infty$.

2. Pembahasan

Diberikan ruang barisan selisih $\ell_p(\Delta)$ dengan

$$\ell_p(\Delta) = \left\{ x = \{x_k\} \subset \Re / C : \{\Delta x_k\} \in \ell_p \right\},$$

dan $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$.

Proposisi 2.1 Ruang barisan $\ell_p(\Delta)$ dengan norm $\|.\|$,

$$\|x\| = |x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

merupakan ruang linear bernorma.

Bukti: Di ambil sebarang skalar α dan β dan $x = \{x_k\}, y = \{y_k\} \in \ell_p(\Delta)$. Maka berlaku

$$\|\alpha x + \beta y\| = \|\{\alpha x_k\} + \{\beta y_k\}\| = \|\{\alpha x_k + \beta y_k\}\|$$

$$= |\alpha x_1 + \beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(\alpha x_k + \beta y_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha x_1 + \beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\alpha x_k + \beta y_k) - (\alpha x_{k+1} + \beta y_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha x_1 + \beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\alpha x_k - \alpha x_{k+1}) + (\beta y_k - \beta y_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq |\alpha x_1 + \beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(|(\alpha x_k - \alpha x_{k+1})| + |(\beta y_k - \beta y_{k+1})| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

menggunakan ketidaksamaan Minkowski

$$\leq |\alpha x_1| + |\beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (\alpha x_k - \alpha x_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (\beta y_k - \beta y_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (\alpha x_k - \alpha x_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + |\beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (\beta y_k - \beta y_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq |\alpha||x_1| + |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (x_k - x_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + |\beta||y_1| + |\beta| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (y_k - y_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq |\alpha| \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (x_k - x_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) + |\beta| \left(|y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (y_k - y_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$\leq |\alpha| \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) + |\beta| \left(|y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$= |\alpha| \|x\| + \beta \|y\| .$$

Oleh karena itu, $\ell_p(\Delta)$ merupakan ruang linear.

Selanjutnya, jika $x = \theta = \{0, 0, ...\}$ maka $\|\theta\| = 0$. Sebaliknya, jika $\|x\| = 0$, maka

$$\|x\| = |x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ dan } |\Delta x_k| = 0 \text{ untuk setiap } k \in N .$$

Misal $k = 1$, yaitu $|\Delta x_1| = 0 \Rightarrow |x_1 - x_2| = 0$. Karena $x_1 = 0$ maka $x_2 = 0$. Proses ini diteruskan untuk $k = 2, 3, ...$ sehingga diperoleh $x_k = 0, k = 1, 2, ...$ atau $x = (x_k) = \theta$.

Untuk $\alpha = \beta = 1$, jelas berlaku

$$\|x + y\| \leq \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) + \left(|y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) = \|x\| + \|y\|$$

untuk setiap $x, y \in \ell_p(\Delta)$.

Terakhir, untuk sebarang skalar α dan $x \in \ell_p(\Delta)$ berlaku

$$\|\alpha x\| = |\alpha x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(\alpha x_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k - \alpha x_{k+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha||x_1| + |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\Delta), 1 < p < \infty$

$$= |\alpha| \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) = |\alpha| \|x\| .$$

Oleh karena itu, $(\ell_p(\Delta), \|.\|)$ merupakan ruang linear bernorma.■

Teorema 2.2 $(\ell_p(\Delta), \|.\|)$ merupakan ruang Banach.

Bukti : Di ambil sebarang barisan Cauchy $\{x^n\} \subset \ell_p(\Delta)$ dengan $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(\Delta)$ untuk setiap $n \in N$. Maka untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positip n_0 sehingga untuk setiap bilangan bulat positip $m, n \ge n_0$ berlaku

$$\|x^n - x^m\| < \varepsilon .$$

Oleh karena itu,

$$\|x^n - x^m\| = |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \Delta\left(x_k^n - x_k^m\right)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(x_k^n - x_k^m\right) - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(x_k^n - x_{k+1}^n\right) - \left(x_k^m - x_{k+1}^m\right)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2a}$$

$$= |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left|\left(x_k^n - x_k^m\right)\right| + \left|\left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right)\right| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(x_k^n - x_k^m\right)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

sehingga

$$\left|\left(x_k^n - x_k^m\right)\right| < \varepsilon$$

untuk setiap bilangan bulat positip $m, n \ge n_0$ dan $k = 1, 2, \ldots$. Oleh karena itu $\{x_k^n\}$ merupakan barisan Cauchy di $\Re / C$. Karena $\Re / C$ lengkap, maka terdapat $x_k \in \Re / C$ sehingga

$$\left|\left(x_k^n - x_k\right)\right| < \varepsilon \tag{2.2b}$$

untuk setiap $n \ge n_0$ dan $k = 1, 2, \ldots$.

Berdasarkan (2.2a) diperoleh $\{\Delta x_k^n\}$ merupakan barisan Cauchy di $\Re/C$ untuk $k=1,2,\ldots$. Oleh karena itu terdapat $\Delta x_k \in \Re/C$ sehingga

$$\left|\Delta x_k^n - \Delta x_k\right| < \frac{\varepsilon}{2^{(k+1)}}. \tag{2.2c}$$

Berdasarkan (2.2a), (2.2b) dan (2.2c) diperoleh

$$\left|\left(x_1^n - x_1\right)\right| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\Delta x_k^n - \Delta x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < 3\varepsilon .$$

untuk setiap $n \geq n_0$ dan $k=1,2,\ldots$.

Namakan $(x_k)=x$, berakibat $\lim_{m\to}\left\|x^n - x^m\right\| = \left\|x^n - x\right\| < 3\varepsilon$. Terbukti $\left(\ell_p(\Delta), \|.\|\right)$ merupakan ruang Banach.■

Sebagai motivasi untuk menyuguhkan permasalahan produk tensor $\ell_p(\Delta)\times\ell_q(\Delta)$, terlebih dahulu dibahas produk tensor $\ell_p \times \ell_q, 1<p,q<\infty$.

Diberikan ruang barisan $\ell_p, \ell_q, 1<p,q<\infty$. Produk tensor $\ell_p\times\ell_q$ dari ℓ_p dan ℓ_q didefinisikan sebagai penutup dari ruang linear yang dibangun oleh $\{x\otimes y : x\in\ell_p, y\in\ell_q\}$

dengan

$$x\otimes y = x.y^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}\left(y_1, y_2, \ldots\right) = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Diberikan matriks takhingga (a_{ij}). Ruang matriks Lebesgue $\ell_q(N\times N)$, didefinisikan sebagai berikut: $\ell_q(N\times N) = \left\{(a_{ij}) : \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^q < \infty\right\}$. Kaitan antara produk tensor $\ell_p\times\ell_q$ dan ruang matriks Lebesgue $\ell_r(N\times N)$ disajikan dalam Lemma berikut.

Lemma 2.3

(i)$\Rightarrow$(ii) $\Rightarrow$(iii) $\Rightarrow$(iv) dengan

(i) $r = maks(p,q)$

(ii) $(uv)^r \leq u^p v^q$ untuk setiap $u,v\in[0,1]$

$\Delta), 1 < p < \infty$

(iii) $\|x \otimes y\| \leq \|x\|\|y\|$ untuk setiap $x \in \ell_p, y \in \ell_q$

(iv) $\ell_p \otimes \ell_q \subset \ell_r(N \times N)$

Bukti:(i)$\Rightarrow$(ii):(i) $\Rightarrow u^{r-p}v^{r-q} \leq 1$ untuk setiap $u, v \in [0,1]$ yang berakibat (ii).

(ii) $\Rightarrow$(iii) :untuk sebarang

$$0 \neq x = (x_1, x_2, \ldots)^T \in \ell_p(\Delta) \text{ dan } 0 \neq y = (y_1, y_2, \ldots)^T \in \ell_q(\Delta)$$

berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{|x_i|}{\|x\|}\right)^p = 1 \text{ dan } \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{|y_j|}{\|y\|}\right)^q = 1.$$

Karena

$$\left\|\frac{x \otimes y}{\|x\|\,\|y\|}\right\|^r = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{|x_i y_j|}{\|x\|\,\|y\|}\right)^r \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{|x_i|}{\|x\|}\right)^p\left(\frac{|y_j|}{\|y\|}\right)^q \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{|x_i|}{\|x\|}\right)^p \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{|y_j|}{\|y\|}\right)^q = 1. \blacksquare$$

(iii) $\Rightarrow$(iv) Di ambil sebarang $x \otimes y \in \ell_p \times \ell_q$ dengan $x \in \ell_p, y \in \ell_q$. Oleh karena itu, terdapat matriks (a_{ij}) dengan $x \otimes y = (a_{ij}) = (x_i y_j)$ dan karena $\|x \otimes y\| \leq \|x\|\|y\|$ untuk setiap $x \in \ell_p, y \in \ell_q$, maka

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^r &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|x_i y_j|^r \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|x_i|^r |y_j|^r \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^r \sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^r = \|x\|^r \|y\|^r < \infty \blacksquare\end{aligned}$$

3. Simpulan Dan Saran

Berdasarkan uraian di atas dapat dikemukakan beberapa hal sebagai berikut:

1. Ruang barisan $(\ell_p(\Delta), \|.\|)$ dengan norm $\|x\| = |x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ merupakan ruang linear bernorma yang lengkap.
2. Berdasarkan Lemma 2.3 dan Kesimpulan 1, Permasalahan baru berkaitan dengan sifat-sifat produk tensor $\ell_p(\Delta) \times \ell_q(\Delta)$ dengan definisi norm tertentu.

3. Aplikasi ruang-ruang tersebut pada teori operator matriks takhingga dari ruang barisan selisih $\ell_p(\Delta)$ ke ruang barisan selisih $\ell_q(\Delta)$.

4. Daftar Pustaka

[1] Kizmaz,H. (1981), *On Certain Sequence Spaces*, Canad. Math. Bull.,24,169-176.

[2] Kamthan,P.K and Gupta,M. (1981), Sequence Spaces and Series, *Marcel Dekker Inc. New York.*

[3] Maddox, I.J, (1970), Elements of Functional Analysis, *Cambridge Univ. Press*.

[4] Tripathy, B.C and Esi H. (2006), *A new type of Difference Sequence Spaces*, Intl. Journal of Science and Tech., 1, 1, 11-14.