
Erhaltung stetiger Symmetrien bei Gibbsschen Punktprozessen in zwei Dimensionen

Thomas Richthammer



Dissertation an der Fakultät für
Mathematik, Informatik und Statistik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt am 12.06.2006

Erstgutachter: Prof. Dr. H.-O. Georgii
Zweitgutachter: Prof. Dr. F. Merkl
Drittgutachter: Prof. Dr. H. Spohn

Termin des Rigorosums: 21.07.2006

Zusammenfassung

Gibbssche Punktprozesse dienen als Modell für die Gleichgewichtszustände thermodynamischer Teilchensysteme. Dabei wird die Wechselwirkung zwischen den Teilchen häufig durch ein Paarpotential beschrieben. Gibt es zu einem gegebenen Wechselwirkungspotential mehrere Gleichgewichtszustände, so liegt ein Phasenübergang vor. Bei der Untersuchung des Phasenporträts spielen Erhaltung und Brechung von Symmetrien eine Rolle. Hierbei spricht man von Symmetrienerhaltung, wenn für eine Gruppe von Transformationen, die das Potential unverändert lassen, auch sämtliche Gleichgewichtszustände unverändert bleiben. Wichtige Klassen von Symmetrien sind Spinsymmetrien, bei denen die Transformationen nur die inneren Eigenschaften der Teilchen betreffen, und räumliche Symmetrien, bei denen entsprechend nur der Ort der Teilchen transformiert wird. Des Weiteren unterscheidet man diskrete und stetige Symmetrien, wobei letztere dadurch charakterisiert sind, dass sie sich kontinuierlich in die Identität überführen lassen. Während in einer Dimension Symmetrien in der Regel erhalten bleiben und in drei und mehr Dimensionen Symmetrien leicht gebrochen werden können, kommt es in zwei Dimensionen auf den Symmetrietyp an: Diskrete Symmetrien können auch hier gebrochen werden, während stetige Symmetrien unter geeigneten Bedingungen erhalten bleiben. Das Ziel unserer Arbeit ist es, möglichst schwache Bedingungen zu finden, die die Erhaltung stetiger Spinsymmetrien bzw. die Erhaltung der Translationssymmetrie garantieren.

In der Regel beinhalten solche Bedingungen die Glattheit des Potentials. In Gittermodellen mit stetigen Spinsymmetrien konnte kürzlich gezeigt werden, dass diese Glattheitsannahmen stark abgeschwächt werden können. Unser erstes Ergebnis überträgt dieses Resultat auf das Punktteilchen-Modell.

In Gittermodellen sind die Translationen diskrete Transformationen; dagegen sind sie im Punktteilchen-Modell stetig. Bestehende Resultate für die Symmetrienerhaltung erforderten hier Potentiale, die bis auf eine mögliche Ausnahme im Ursprung glatt sind, im Ursprung selbst aber eine Singularität haben dürfen. Im Gegensatz dazu kommen wir mit deutlich schwächeren Regularitätsannahmen aus, und können außerdem auch Potentiale mit hartem Kern betrachten, beispielsweise also Systeme mit reiner Harter-Kugel-Wechselwirkung.

Abstract

Gibbsian point processes serve as a model for equilibrium states of thermodynamical systems of particles, where the interaction between particles often is given by a pair potential. If there is more than one equilibrium state for a given potential the system exhibits a phase transition. In this context conservation and breaking of symmetries play an important role. Conservation of symmetries means that a group of transformations preserving the potential also preserves every equilibrium state. Important classes of symmetries are spin symmetries, i.e. transformations acting on the inner properties of particles, and spatial symmetries, which only change the positions of particles. Furthermore discrete symmetries can be distinguished from continuous symmetries, which can be transferred into the identity transformation in a continuous way. In one dimension symmetries are usually conserved, whereas in three or more dimensions symmetries can be broken. In two dimensions the type of the symmetry plays a crucial role: Discrete symmetries can be broken, whilst continuous symmetries are conserved provided the potential satisfies suitable conditions. The aim of this work is to present fairly weak conditions which still guarantee the conservation of continuous spin symmetries or the conservation of translation as a symmetry.

Usually such conditions involve smoothness properties. For lattice models with continuous spin symmetries it has recently been shown that the smoothness assumption can be relaxed considerably. Our first result will transfer this to the particle model. While translations are discrete in lattice models, they are continuous in the particle model. Existing results on symmetry conservation required the potential to be smooth with a possible exception at the origin, where a singularity was allowed. Here we show how to treat potentials with weaker regularity assumptions and potentials with hard cores; in particular this includes systems of particles interacting by pure hard core repulsion.

Danksagung

Ganz besonders herzlich danke ich an dieser Stelle meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. H.-O. Georgii, der das Thema dieser Dissertation angeregt hat, sich immer die Zeit genommen hat, um über Fragen und Probleme zu diskutieren und so ganz wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat. Er war mir nicht nur in fachlicher Hinsicht immer ein Vorbild. Ebenso möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. F. Merkl für Diskussionen und Gespräche bedanken, aus denen sich interessante Anregungen ergeben haben. Schließlich möchte ich mich bei allen meinen Freunden und ganz besonders bei meiner Familie und meiner Freundin bedanken, ohne deren Unterstützung diese Arbeit sicher nicht möglich gewesen wäre.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Vorbereitungen | 5 |
| 2.1 | Grundräume | 5 |
| 2.1.1 | Zustandsraum | 5 |
| 2.1.2 | Kantenraum | 6 |
| 2.2 | Konfigurationsräume | 6 |
| 2.2.1 | Konfigurationen von Teilchen | 6 |
| 2.2.2 | Konfigurationen von Positionen und von Kanten | 7 |
| 2.3 | Potentiale und Transformationen | 8 |
| 2.3.1 | Potentiale | 8 |
| 2.3.2 | Transformationen | 9 |
| 2.3.3 | Regularitätseigenschaften | 10 |
| 2.3.4 | Translationsinvariante Potentiale | 11 |
| 2.4 | Gibbsmaße | 12 |
| 2.4.1 | Konstruktion und Definition | 12 |
| 2.4.2 | Superstabilität und Temperiertheit | 14 |
| 2.4.3 | Symmetrieerhaltung | 15 |
| 2.5 | Messbarkeitsfragen | 16 |
| 2.5.1 | Vererbung der Messbarkeit | 16 |
| 2.5.2 | Erweiterungen des harten Kerns | 16 |
| 2.6 | Beweis der Lemmata und Propositionen | 18 |
| 2.6.1 | Zusammenhängende Liegruppen: Lemma 1 | 18 |
| 2.6.2 | Eigenschaft der Ruelle-Schranke: Lemma 2 | 18 |
| 2.6.3 | Zulässigkeit und Korrelationen: Propositionen 1 und 2 | 19 |
| 2.6.4 | Messbarkeit: Lemma 3 | 24 |
| 2.6.5 | Messbare Erweiterungen: Lemma 4 | 25 |
| 3 | Spintransformationen | 27 |
| 3.1 | Resultat | 27 |
| 3.1.1 | G-glatt approximierbare Potentiale | 27 |
| 3.1.2 | Vergleich mit dem Resultat von Shlosman | 29 |
| 3.2 | Beweis von Satz 1 | 30 |
| 3.2.1 | Konstanten | 30 |
| 3.2.2 | Zerlegung von μ und Kantenprozess | 31 |
| 3.2.3 | Verallgemeinerte Transformation | 32 |
| 3.2.4 | Gute Konfigurationen | 33 |
| 3.2.5 | Modifikation der verallgemeinerten Transformation | 34 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.2.6 | Schlussargument des Beweises | 35 |
| 3.3 | Beweis der Lemmata | 37 |
| 3.3.1 | Konvergenz des Hamiltonians: Lemma 10 | 37 |
| 3.3.2 | Beschränkte Cluster-Reichweite: Lemma 11 | 37 |
| 3.3.3 | Deformierte Transformation: Lemma 12 | 38 |
| 3.3.4 | Bijektivität der Transformation: Lemma 13 | 38 |
| 3.3.5 | Invarianz des Referenzmaßes: Lemma 14 | 39 |
| 3.3.6 | Abschätzung der Energie: Lemma 15 | 40 |
| 3.3.7 | Gute Konfigurationen: Lemma 16 | 41 |
| 3.4 | Approximierbarkeit: Proposition 4 | 43 |
| 4 | Translation | 45 |
| 4.1 | Das Resultat | 45 |
| 4.1.1 | Der markierte Fall | 45 |
| 4.1.2 | Der unmarkierte Fall | 47 |
| 4.1.3 | Vergleich mit dem Resultat von Fröhlich und Pfister | 49 |
| 4.2 | Beweis des markierten Falles: Satz 4 | 49 |
| 4.2.1 | Konstanten | 49 |
| 4.2.2 | Zerlegung von μ und Kantenprozess | 51 |
| 4.2.3 | Verallgemeinerte Translation | 52 |
| 4.2.4 | Gute Konfigurationen | 53 |
| 4.2.5 | Modifikation der verallgemeinerten Translation | 54 |
| 4.2.6 | Schlussargument des Beweises | 57 |
| 4.3 | Beweis der Lemmata | 59 |
| 4.3.1 | Konvergenz des Hamiltonians: Lemma 17 | 59 |
| 4.3.2 | Beschränkte Cluster-Reichweite: Lemma 18 | 59 |
| 4.3.3 | Eigenschaften der Hilfsfunktion | 60 |
| 4.3.4 | Eigenschaften der Konstruktion: Lemma 19 | 62 |
| 4.3.5 | Deformierte Verschiebung: Lemma 20 | 64 |
| 4.3.6 | Bijektivität der Transformation: Lemma 21 | 65 |
| 4.3.7 | Dichte des transformierten Prozesses: Lemma 22 | 68 |
| 4.3.8 | Wichtige Abschätzungen: Lemma 23 | 71 |
| 4.3.9 | Gute Konfigurationen: Lemma 24 | 73 |
| 4.4 | Approximierbarkeit: Propositionen 5 und 6 | 75 |
| 4.5 | Beweise im unmarkierten Fall | 77 |
| 4.5.1 | Beweis von Proposition 7 | 77 |
| 4.5.2 | Beweis von Satz 5 | 78 |
| | Symbolverzeichnis | 81 |

Kapitel 1

Einleitung

Die statistische Physik ist der Zweig der Physik, in dem typischerweise das makroskopische Verhalten großer Teilchensysteme untersucht wird. Dabei kann ein Teilchen neben seiner Position im Raum auch zahlreiche weitere quantitative Eigenschaften haben. Diese inneren Freiheitsgrade des Teilchens werden üblicherweise zum so genannten Spin des Teilchens zusammengefasst. Zwischen je zwei Teilchen besteht eine Wechselwirkung, die von den Positionen und den Spins der beiden Teilchen abhängt. Diese Wechselwirkung kann durch eine Potentialfunktion beschrieben werden, die sich aus den physikalischen Gesetzmäßigkeiten der Situation ergibt. Das Teilchensystem wird sich nun aufgrund der durch das Potential induzierten Kräfte zeitlich entwickeln, und gemäß der Voraussagen der statistischen Physik erwartet man, dass sich das System einem Gleichgewichtszustand annähern wird; in diesem können dann keine deterministischen Aussagen über einzelne Teilchen getroffen werden, wohl aber Aussagen über die Bevorzugung gewisser Teilchenkonfigurationen vor anderen, also Aussagen probabilistischer Natur. Es liegt daher nahe, den Gleichgewichtszustand als Verteilung, das heißt als Maß, auf dem Raum aller möglichen Teilchenkonfigurationen zu beschreiben, so dass der ganze Apparat der Wahrscheinlichkeitstheorie als Untersuchungswerkzeug zur Verfügung steht.

Für diese Art von Gleichgewichtszustand eines thermodynamischen Systems wurde Ende der sechziger Jahre das Modell des Gibbsmaßes von R. L. Dobrushin (vgl. [D1] oder [D2]), O. E. Lanford und D. Ruelle (vgl. [LR]) unabhängig voneinander eingeführt und untersucht. Hierbei werden statt sehr vieler Teilchen unendlich viele Teilchen betrachtet; der dabei auftretenden Schwierigkeit der Divergenz von Energietermen begegnet man dadurch, dass man zunächst feste Randbedingungen vorgibt. Zu einem vorgegebenen endlichen Beobachtungsfeld und einer vorgegebenen Teilchenkonfiguration außerhalb des Beobachtungsfeldes lässt sich die Verteilung der Teilchen innerhalb des Feldes explizit angeben, und zwar ergibt sich nach den Gesetzen der Thermodynamik eine Boltzmannverteilung, bei der Konfigurationen um so wahrscheinlicher sind, je weniger Energie es erfordert, diese im Beobachtungsfeld zu realisieren. Die Konstruktion von Verteilungen zu festen Randbedingungen entspricht einer Modellierung durch bedingte Wahrscheinlichkeiten. Die Gibbsmaße sind dann solche Verteilungen der Gesamtkonfiguration, die mit allen Verteilungen zu festen Randbedingungen verträglich sind.

Bei der Modellierung der Situation bleiben noch verschiedene Freiheiten. Beispielsweise kann man die Anzahl der räumlichen Dimensionen der Situation anpassen, je nachdem, ob man beispielsweise an dem Geschehen auf einer Oberfläche oder im dreidimensionalen Raum interessiert ist. Man kann sich Gittermodelle vorstellen, in denen wie im Metallgitter jedes Teilchen einen festen Platz hat und nur die Spins veränderlich sind, oder kontinuierliche Modelle, in denen sich die Teilchen frei bewegen können, wie in einem Gas. Solche kontinuierlichen Modelle werden auch als Punktteilchen-Modelle bezeichnet. Es ist nicht überraschend, dass zunächst eher Gittermodelle untersucht wurden; sie sind nämlich zum einen technisch leichter zu behandeln, zum anderen treten aber schon hier interessante Phänomene auf. Eine Einführung in die vielfältigen Fragestellungen und Ergebnisse für Gibbsmaße in Gittermodellen findet man beispielsweise in den ausführlichen Büchern von H.-O. Georgii [G1], B. Simon [Sim] und Y. G. Sinai [Sin].

Schon in den oben zitierten ersten Veröffentlichungen von R. L. Dobrushin, O. E. Lanford und D. Ruelle konnten erste Antworten gegeben werden auf die nahe liegenden Fragen, wann Gibbsmaße überhaupt existieren (vgl. dazu auch [G1], Kap. 4), welche Struktur die Menge aller Gibbsmaße hat (vgl. [G1], Kap. 7) oder wann es überhaupt nur ein einziges Gibbsmaß gibt (vgl. [G1], Kap. 8); der letzte Punkt ist nicht zuletzt deshalb von Interesse, weil die Mehrdeutigkeit von Gibbsmaßen das Auftreten eines bestimmten Typs von Phasenübergängen beschreibt.

Des Weiteren ist es interessant zu untersuchen, unter welchen Umständen Eigenschaften des Potentials entsprechende Eigenschaften der Gibbsmaße nach sich ziehen. Von besonderer Bedeutung ist die Frage, wie es sich mit Symmetrien verhält. Hierbei versteht man unter einer Symmetrie eines Potentials eine Gruppe von Transformationen mit der Eigenschaft, dass sich das Potential zwischen zwei Teilchen nicht verändert, wann immer eine dieser Transformationen auf beide Teilchen angewendet wird. Analog wird eine Transformationsgruppe als Symmetrie einer Verteilung bezeichnet, falls die Verteilung unter allen Transformationen invariant ist. Hat nun das Potential eine bestimmte Symmetrie, trifft das dann auch auf die zu diesem Potential gehörigen Gibbsmaße zu? Ist dies tatsächlich der Fall, so spricht man von Symmetriehaltung, anderenfalls von Symmetriebrechung, und man kann zeigen, dass es in letzterem Fall mehr als ein Gibbsmaß geben muss, dass also ein Phasenübergang vorliegt. Auch daran kann man erkennen, dass Symmetriebrechung ein Phänomen ist, das einer näheren Untersuchung wert ist.

Zwei wichtige Typen von Transformationsgruppen, die häufig als Symmetrien von Potentialen auftreten, sind reine Spintransformationen wie die Drehungen des magnetischen Spins und reine Ortstransformationen wie Verschiebungen oder Drehungen im Raum. Außerdem unterscheidet man noch diskrete und stetige (oder kontinuierliche) Symmetrien: Im Gegensatz zum Falle einer diskreten Symmetrie lassen sich bei einer kontinuierlichen Symmetrie die Symmetrietransformationen stetig ineinander überführen.

Ob Symmetriebrechung oder -erhaltung vorliegt, hängt ganz entscheidend von mehreren Faktoren ab: Man erhält unterschiedliche Ergebnisse je nach der Anzahl der räumlichen Dimensionen und je nachdem, ob die betrachtete Symmetriegruppe

diskret oder kontinuierlich ist. Wichtige Bedingungen können außerdem sein, wie schnell die Stärke des Potentials bei wachsenden Entfernungen abnimmt oder wie glatt das Potential bzw. die Wirkung der Symmetrietransformationen auf das Potential ist. Während in einer Dimension schon unter relativ schwachen Bedingungen Gibbsmaße eindeutig sind, und daher Symmetrien erhalten bleiben (vgl. etwa [G1], Kap. 8), stellt man fest, dass in mehr als zwei Dimensionen Symmetriebrechungen auch bei einfachen Systemen vorkommen können (vgl. etwa [G1], Kap. 20). Auch in zwei Dimensionen kann dies zumindest bei diskreten Symmetrien leicht geschehen (z. B. in [G1] Kap. 6.2). Wie aber verhält es sich mit kontinuierlichen Symmetrien in zwei Dimensionen?

Diese Frage wurde zunächst in einem Gittermodell für Symmetrien im Spinraum untersucht. M. D. Mermin und H. Wagner waren die ersten, die in einem quantenmechanischen System Symmetrienerhaltung zeigen konnten ([MW]), und M. D. Mermin übertrug dieses Ergebnis auf ein klassisches Teilchensystem ([M]). In [DS] verallgemeinerten R. L. Dobrushin und S. B. Shlosman dieses Resultat auf eine Klasse von glatten Potentialen mit endlicher Reichweite. Die Bedingung endlicher Reichweite konnte C.-E. Pfister in [P] weiter abschwächen. Unter Verwendung des Konzeptes der Superstabilität (vgl. [R]) übertrug S. B. Shlosman in [Sh] dieses Ergebnis auf ein kontinuierliches Modell. In [G2] findet man ein entsprechendes Resultat von H.-O. Georgii, das sogar ohne Superstabilität auskommt. Alle diese Resultate greifen auf eine (physikalisch nicht ganz plausible) Glattheitsbedingung zurück, und erst kürzlich konnten D. Ioffe, S. Shlosman und Y. Velenik im Falle des Gittermodells diese Bedingung zu einer Stetigkeitsbedingung abschwächen ([ISV]). Entscheidende Hilfsmittel dabei waren Konzepte und Ergebnisse der Perkolations- theorie, die zur Erforschung der Gibbsmaße schon an ganz anderen Stellen erhebliche Beiträge liefern konnten (vgl. etwa die Darstellung in [GHM]). In [Ri1] haben wir gezeigt, wie man auch im kontinuierlichen Modell ohne Glattheitsbedingung zurechtkommt.

Bei der Betrachtung kontinuierlicher Symmetrien im Ortsraum ist man von vornherein auf ein kontinuierliches Modell festgelegt, da im Gittermodell Orts- transformationen automatisch diskret sind. Während man hier bei den Drehungen bisher Symmetrienerhaltung nur unter sehr starken Voraussetzungen zeigen konnte ([FP1]), bewiesen J. Fröhlich und C.-E. Pfister in [FP1] und [FP2] mittels Superstabilität und eines Entropiearguments, dass Translationssymmetrie erhalten bleibt, falls das Potential schnell genug abfällt und glatt ist. Ist eine gewisse Integrierbarkeitsbedingung erfüllt, wird hier sogar eine Singularität des Potentials im Ursprung zugelassen. Wir haben dieses Ergebnis in [Ri2] verallgemeinert, so dass wir nun auch Potentiale mit beliebigen Singularitäten, hartem Kern und Unstetigkeitsstellen betrachten können.

Wir werden in dieser Arbeit unsere beiden Resultate zur Erhaltung stetiger Symmetrien bei Gibbschen Punktprozessen in zwei Dimensionen präsentieren. Anders als in [Ri1] und [Ri2] versuchen wir hier, die Aussagen und Beweise in den beiden Fällen von Spinsymmetrien und Translationen in möglichst einheitlicher Weise darzustellen, um Analogien und Unterschiede besser aufzeigen zu können. Die Beweise stützen sich im Wesentlichen auf ein allgemeines Kriterium zur Symmetrienerhaltung (siehe [G1], Prop. 9.1), das beispielsweise auch in [G2] angewandt wird.

Dieses hat im Vergleich zu dem in [ISV] oder [FP1] verwendeten Entropieargument den Vorteil, dass sich Ausnahmesituationen, wie wir sie betrachten müssen, leichter behandeln lassen. Wie fast alle Arbeiten zur Symmetriehaltung verwenden auch wir als Werkzeug eine deformierte Transformation, bei der die Transformation ortsabhängig nach außen hin abgeschwächt wird, die Teilchen aber nach wie vor unabhängig voneinander transformiert werden. Die Störung eines glatten Potentials wird in [ISV] in einem Kantenprozess kodiert, der durch eine erneute Modifikation der Transformation behandelt werden kann, wobei allerdings die eben angesprochene Unabhängigkeit verloren geht. Die Situation in [ISV] ist aber insofern einfacher als die Situation bei uns, als dort reine Spintransformationen betrachtet werden. Daher ist es dort möglich, zu festen Teilchenorten und Kanten jeweils eine modifizierte Transformation auf den Spinkonfigurationen zu definieren. Wir wollen dagegen auch Transformationen betrachten, die gerade die Teilchenorte verändern; daher liegt im Kern unseres Argumentes die Konstruktion einer deformierten Transformation auf den Teilchen- und Kantenkonfigurationen, bei der einerseits die Abhängigkeiten stark genug sind, dass gewisse Beziehungen zwischen den Teilchen bei der Transformation erhalten bleiben, und andererseits diese Abhängigkeiten kontrollierbar sind, in dem Sinn, dass das Transformationsverhalten des Referenzmaßes auf dem Teilchen- und Kantenkonfigurationsraum kontrollierbar ist. In diesem Punkt besteht auch der wesentliche Unterschied unserer Behandlung von Spintransformationen und Translationen: Bei den Translationen haben wir mit dem Lebesgueschen Transformationssatz ein geeignetes Werkzeug, um zu untersuchen, wie sich das Referenzmaß unter räumlichen Transformationen verhält, während wir bei den reinen Spintransformationen ein nicht weiter spezifiziertes Maß auf einem abstrakten Spinraum betrachten müssen. In diesem Fall besteht die einzige Möglichkeit zur Kontrolle darin, die Invarianz des Referenzmaßes auf den Konfigurationsräumen unter der modifizierten Transformation sicherzustellen. Bei den Translationen ergibt sich noch eine weitere Komplikation, die dadurch entsteht, dass wir insbesondere auch harte Kerne betrachten wollen. Harte Kerne dienen zur Modellierung von Teilchen, die nicht als punktförmig vorausgesetzt werden, sondern eine gewisse räumliche Ausdehnung haben, in die die anderen Teilchen nicht eindringen können. Die deformierte Translation muss dieses Durchdringungsverbot berücksichtigen, so dass hier die Transformationsabhängigkeiten komplizierter werden und sich die Konstruktion einer geeigneten deformierten Transformation entsprechend schwieriger gestaltet. Wir werden daher den einfacheren Fall der reinen Spintransformationen zuerst präsentieren.

Die Arbeit ist so aufgebaut, dass nach der Einleitung in Kapitel 1 die für die Formulierung unserer Ergebnisse wichtigen Konzepte und Objekte in Kapitel 2 eingeführt werden. Wir stellen wesentliche Eigenschaften der Objekte vor und diskutieren in einem gesonderten Unterabschnitt Messbarkeitsfragen. In den Kapiteln 3 und 4 bringen wir dann unsere Resultate zur Symmetriehaltung bei reinen Spintransformationen bzw. Translationen. Hierfür definieren wir jeweils eine Eigenschaft von Potentialen, die Symmetriehaltung garantiert, und geben hinreichende Kriterien für diese Eigenschaft an. Dann vergleichen wir unser Resultat mit bereits vorhandenen Ergebnissen und stellen den Beweis unseres Resultats vor. Nichttriviale Lemmata und Propositionen beweisen wir jeweils am Ende des Kapitels, in dem sie formuliert werden, oder wir verweisen auf vorhandene Beweise in der Literatur.

Kapitel 2

Vorbereitungen

Gebräuchliche Bezeichnungen für mathematische Objekte werden wir im Text nicht extra einführen. Bei Unklarheiten sei auf das Symbolverzeichnis am Ende der Arbeit hingewiesen. Dort haben wir neben gängigen Symbolen auch eine Auswahl von speziell in der Arbeit eingeführten Bezeichnungen aufgelistet.

2.1 Grundräume

2.1.1 Zustandsraum

Ein Teilchen wird beschrieben durch die Angabe seiner Position in der Ebene und seiner inneren Eigenschaften, die man zum so genannten Spin (bzw. der Markierung) des Teilchens zusammenfasst. Neben quantitativen Eigenschaften wie dem magnetischen Spin des Teilchens kann hier beispielsweise auch der Typ des Teilchens kodiert werden, wenn man an Systemen interessiert ist, in denen verschiedenartige Teilchen miteinander wechselwirken. Aus dem Positionsraum \mathbb{R}^2 und dem Spinraum S ergibt sich der Ein-Teilchen-Zustandsraum $\mathbb{R}^2 \times S$. Wir werden die Symbole x , σ und $y = (x, \sigma)$ (bzw. Abwandlungen davon) konsequent als Variablen für Position, Spin und Gesamtzustand von Teilchen verwenden. Bisweilen ist man auch an Modellen interessiert, bei denen innere Freiheitsgrade vernachlässigt werden. Dieser so genannte unmarkierte Fall ist im eben beschriebenen markierten Fall als Spezialfall $S = \{0\}$ enthalten.

Auf \mathbb{R}^2 betrachten wir neben der Maximumsnorm $|\cdot|$ auch die euklidische Norm $|\cdot|_2$. Die Standard-Topologie auf \mathbb{R}^2 wird von jeder dieser Normen erzeugt. Mit \mathcal{B}^2 bezeichnen wir die Borelsche σ -Algebra bezüglich dieser Topologie. Ferner sei $\mathcal{B}_b^2 \subset \mathcal{B}^2$ die Menge der beschränkten Borelmengen. Auf dem Ereignisraum $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$ betrachten wir das zweidimensionale Lebesgue-Maß λ^2 ; Integrale bezüglich dieses Maßes kürzen wir durch $dx := d\lambda^2(x)$ ab. Oft betrachten wir Rechteckmengen der Form

$$\Lambda_r := [-r, r]^2 \subset \mathbb{R}^2 \quad (r \in \mathbb{R}_+).$$

Der Spinraum sei ein Standard-Borel-Raum (S, \mathcal{F}_S) , auf dem ein Wahrscheinlichkeitsmaß λ_S als Referenzmaß vorgegeben ist. Betrachten wir auf S auch eine topologische Struktur, dann soll \mathcal{F}_S die zugehörige Borelsche σ -Algebra auf S sein. Integration bezüglich λ_S wollen wir durch $d\sigma := d\lambda_S(\sigma)$ abkürzen.

Der Zustandsraum $\mathbb{R}^2 \times S$ ist als Produktraum mit der Produkt- σ -Algebra $\mathcal{B}^2 \otimes \mathcal{F}_S$ und dem Produktmaß $\lambda^2 \otimes \lambda_S$ ausgestattet. Wieder verwenden wir die Kurzschreibweise $dy := d(\lambda^2 \otimes \lambda_S)(y)$. Um von der Position und dem Spin eines Teilchens sprechen zu können, führen wir die beiden Projektionen $p : \mathbb{R}^2 \times S \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $s : \mathbb{R}^2 \times S \rightarrow S$ ein. Zur Vereinfachung von Formulierungen verwenden wir die folgenden Konventionen: Bisweilen wenden wir Funktionen von Positionen auf Teilchen an. Dies sei so zu verstehen, dass die Teilchen stillschweigend mittels p auf ihre Positionen projiziert werden, bevor die Funktion angewendet wird. Beispielsweise sei

$$|y_1 - y_2| := |p(y_1) - p(y_2)|$$

der räumliche $|\cdot|$ -Abstand zweier Teilchen $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2 \times S$. Analog identifizieren wir eine Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ bisweilen mit der entsprechenden Menge $\Lambda \times S \subset \mathbb{R}^2 \times S$.

2.1.2 Kantenraum

Für eine beliebige Menge X bezeichnen wir die Menge aller (ungerichteten) Kanten auf X mit

$$E(X) := \{A \subset X : \#A = 2\}.$$

Für Kanten verwenden wir die Abkürzung $xx' := \{x, x'\}$, wobei $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ sein soll. Jede Funktion u auf $X \times X$, die symmetrisch ist, d.h. für die $u(x, x') = u(x', x)$ für alle $x, x' \in X$ ist, kann vermöge $u(xx') := u(x, x')$ auch als Funktion auf $E(X)$ aufgefasst werden. Für eine feste Kantenmenge $B \subset E(X)$ bildet das Tupel (X, B) einen (ungerichteten) Graphen. Für $x, x' \in X$ definieren wir

$$x \xleftrightarrow{X, B} x' \quad :\Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N}, x_0, \dots, x_m \in X : x = x_0, x' = x_m, \\ x_{i-1}x_i \in B \text{ für alle } 1 \leq i \leq m.$$

$x \xleftrightarrow{X, B} x'$ besagt also genau, dass x und x' in (X, B) über Kanten miteinander verbunden sind. Hierdurch wird offenbar eine Äquivalenzrelation auf X definiert, deren Äquivalenzklassen als B -Cluster bezeichnet werden. Die B -Cluster eines Punktes x und einer Menge M seien definiert durch

$$C_{X, B}(x) := \{x' \in X : x \xleftrightarrow{X, B} x'\} \quad \text{und} \quad C_{X, B}(M) := \bigcup_{x' \in X \cap M} C_{X, B}(x').$$

Im Wesentlichen interessiert uns der Fall $X = \mathbb{R}^2 \times S$. Auf der entsprechenden Kantenmenge $E(\mathbb{R}^2 \times S)$ betrachten wir die σ -Algebra

$$\mathcal{F}_{E(\mathbb{R}^2 \times S)} := \{\{y_1 y_2 \in E(\mathbb{R}^2 \times S) : (y_1, y_2) \in M\} : M \in (\mathcal{B}^2 \otimes \mathcal{F}_S)^2\}.$$

2.2 Konfigurationsräume

2.2.1 Konfigurationen von Teilchen

Eine Menge von Teilchen $Y \subset \mathbb{R}^2 \times S$ heißt

$$\begin{array}{lll} \text{endlich,} & \text{falls } \#Y < \infty, & \text{und} \\ \text{lokal endlich,} & \text{falls } \#(Y \cap \Lambda) < \infty \text{ für alle } \Lambda \in \mathcal{B}_b^2. \end{array}$$

Der Konfigurationsraum \mathcal{Y} sei definiert als Menge aller lokal endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}^2 \times S$, und die Elemente Y von \mathcal{Y} bezeichnen wir als Teilchen-Konfigurationen. Für $Y \in \mathcal{Y}$ und $A \in \mathcal{B}^2 \otimes \mathcal{F}_S$ sei

$$\begin{aligned} Y_A &:= Y \cap A && \text{die Einschränkung von } Y \text{ auf } A, \\ \mathcal{Y}_A &:= \{Y \in \mathcal{Y} : Y \subset A\} && \text{die Menge aller Konfigurationen in } A \text{ und} \\ N_A(Y) &:= \#Y_A && \text{die Anzahl der Teilchen von } Y \text{ in } A. \end{aligned}$$

Die Familie der Zählvariablen $(N_A)_{A \in \mathcal{B}^2 \otimes \mathcal{F}_S}$ erzeugt eine σ -Algebra auf \mathcal{Y} , die wir mit $\mathcal{F}_\mathcal{Y}$ bezeichnen wollen. Für $\Lambda \in \mathcal{B}^2$ sei $\mathcal{F}'_{\mathcal{Y},\Lambda}$ die σ -Algebra auf \mathcal{Y}_Λ , die man durch die Einschränkung von $\mathcal{F}_\mathcal{Y}$ auf \mathcal{Y}_Λ erhält, und $\mathcal{F}_{\mathcal{Y},\Lambda} := e_\Lambda^{-1} \mathcal{F}'_{\mathcal{Y},\Lambda}$ die Urbild- σ -Algebra auf \mathcal{Y} , die man aus $\mathcal{F}'_{\mathcal{Y},\Lambda}$ mittels der Einschränkungsabbildung $e_\Lambda : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}_\Lambda, Y \mapsto Y_\Lambda$ gewinnen kann. Die Tail- σ -Algebra oder die σ -Algebra der Ereignisse im unendlich weit entfernten Außenbereich sei definiert durch

$$\mathcal{F}_{\mathcal{Y},\infty} := \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{\mathcal{Y},\Lambda_n^c}.$$

Für Konfigurationen $Y, \bar{Y} \in \mathcal{Y}$ definieren wir die Zusammensetzung dieser Konfigurationen durch $Y\bar{Y} := Y \cup \bar{Y}$. Als Referenzmaß auf dem Konfigurationsraum verwenden wir die Verteilung ν des Poissonschen Punktprozesses auf $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_\mathcal{Y})$ bezüglich der Markenverteilung λ_S . Es gilt

$$\int \nu(dY) f(Y) = e^{-\lambda^2(\Lambda)} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \int_{\Lambda^k} dy_1 \dots dy_k f(\{y_i : 1 \leq i \leq k\}),$$

für jede $\mathcal{F}_{\mathcal{Y},\Lambda}$ -messbare Funktion $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+$ und jedes $\Lambda \in \mathcal{B}_b^2$. Für $\Lambda \in \mathcal{B}_b^2$ und $\bar{Y} \in \mathcal{Y}$ sei ferner $\nu_\Lambda(\cdot | \bar{Y})$ die Verteilung des Poissonschen Punktprozesses in Λ mit Randbedingung \bar{Y} , d.h. es gilt

$$\int \nu_\Lambda(dY | \bar{Y}) f(Y) = \int \nu(dY) f(Y_\Lambda \bar{Y}_{\Lambda^c})$$

für jede $\mathcal{F}_\mathcal{Y}$ -messbare Funktion $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Man sieht leicht, dass ν_Λ ein stochastischer Kern von $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_{\mathcal{Y},\Lambda^c})$ nach $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_\mathcal{Y})$ ist.

2.2.2 Konfigurationen von Positionen und von Kanten

Nun können wir auch analoge Objekte für unmarkierte Teilchen, beziehungsweise Positionen von Teilchen, definieren. Sei

$$\mathcal{X} := \{X \subset \mathbb{R}^2 : \#(X \cap \Lambda) < \infty \text{ für alle } \Lambda \in \mathcal{B}_b^2\}$$

der entsprechende Konfigurationsraum. Die σ -Algebren $\mathcal{F}_\mathcal{X}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{X},\Lambda}$ und $\mathcal{F}_{\mathcal{X},\infty}$ seien analog zu den entsprechenden σ -Algebren aus dem vorhergehenden Abschnitt definiert. Die Projektion auf die Position p kann auch als Abbildung

$$p : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, \quad Y \mapsto \{p(y) : y \in Y\}$$

aufgefasst werden. Als solche ist sie $\mathcal{F}_\mathcal{Y}$ - $\mathcal{F}_\mathcal{X}$ -messbar.

Der zum Kantenraum $E(\mathbb{R}^2 \times S)$ gehörige Konfigurationsraum \mathcal{E} sei als Raum aller lokal endlichen Kantenmengen definiert, d.h. es sei

$$\mathcal{E} := \{B \subset E(\mathbb{R}^2 \times S) : \#\{yy' \in B : yy' \subset \Lambda \times S\} < \infty \text{ für alle } \Lambda \in \mathcal{B}_b^2\}.$$

Die von den Zählvariablen $N_E : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}, B \mapsto \#(E \cap B)$ ($E \in \mathcal{F}_{E(\mathbb{R}^2 \times S)}$) erzeugte σ -Algebra auf \mathcal{E} bezeichnen wir mit \mathcal{F}_E .

Für eine abzählbare Kantenmenge $E \in \mathcal{E}$ kann man auch die Bernoulli- σ -Algebra \mathcal{B}_E auf $\mathcal{E}_E := \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{E}$ betrachten, die von der Familie $(\{B \subset E : e \in B\})_{e \in E}$ erzeugt wird. Für eine Familie $(p_e)_{e \in E}$ von reellen Zahlen in $[0, 1]$ ist das Bernoullimaß auf $(\mathcal{E}_E, \mathcal{B}_E)$ als das eindeutige Wahrscheinlichkeitsmaß definiert, für das die Ereignisse $(\{B \subset E : e \in B\})_{e \in E}$ unabhängig sind und Wahrscheinlichkeiten $(p_e)_{e \in E}$ haben. Da die Inklusion $(\mathcal{E}_E, \mathcal{B}_E) \rightarrow (\mathcal{E}, \mathcal{F}_E)$ messbar ist, kann jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{E}_E, \mathcal{B}_E)$ kanonisch zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_E)$ erweitert werden.

2.3 Potentiale und Transformationen

2.3.1 Potentiale

Für einen gegebenen Aktivitätsparameter $z > 0$ sei das chemische Potential der Teilchen gegeben durch $-\log z$. Die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen beschreiben wir durch ein Paarpotential U . U sei eine messbare Funktion

$$U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

die symmetrisch ist in dem Sinn, dass

$$U(y_1, y_2) = U(y_2, y_1) \quad \text{für alle } y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2 \times S.$$

Das Potential soll also nicht von der Reihenfolge der Teilchen abhängen, und es kann somit als Funktion der Kante zwischen den Teilchen aufgefasst werden. Der harte Kern eines Potentials U sei die Menge

$$K^U := \{U = +\infty\}.$$

Wir betrachten später nur Potentiale, bei denen der harte Kern endliche Reichweite hat:

Definition 1 Eine Menge $A \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$ heißt Standard-Menge, falls sie messbar und symmetrisch ist und endliche Reichweite hat, was bedeuten soll, dass

$$\{|y - y'| : (y, y') \in A\} \quad \text{beschränkt ist.}$$

Ein Potential $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt Standard-Potential, falls es messbar und symmetrisch ist und sein harter Kern K^U eine Standard-Menge ist.

Die häufigsten Fälle sind wohl, dass der x, σ, σ' -Schnitt des harten Kerns K^U

$$K^U(x, \sigma, \sigma') = \{x' \in \mathbb{R}^2 : (x, \sigma, x', \sigma') \in K^U\}$$

leer ist, nur aus x besteht oder eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt x bezüglich irgendeiner Norm ist.

2.3.2 Transformationen

Sei (M, \mathcal{F}_M) ein Ereignisraum. Unter einer Transformation g auf M verstehen wir eine messbare Abbildung

$$g : M \rightarrow M.$$

Definition 2 Sei G eine Gruppe von Transformationen auf M , wobei die Gruppenverknüpfung die Hintereinanderausführung \circ von Transformationen ist und die Identität $id \in G$ das neutrale Element. Wir nennen G eine (einparametrische) Transformationsgruppe auf M , falls gilt:

Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ und $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$, $(t, m) \mapsto \gamma(t)(m)$ ist eine messbare Operation.

Der fest gewählte Homomorphismus γ liefert eine eindimensionale Parametrisierung von G . Die zum Parameter t gehörige Transformation bezeichnen wir meist mit $g_t := \gamma(t)$. Mit dieser Schreibweise gilt also

$$G = \{g_t : t \in \mathbb{R}\}, \quad \forall t, t' \in \mathbb{R} : g_t \circ g_{t'} = g_{t+t'} \quad \text{und} \quad g_0 = id.$$

Da wir nicht vorausgesetzt haben, dass γ injektiv ist, kann die Gruppe durchaus periodisch sein, d.h. es kann ein $p > 0$ geben mit $g_p = id$. Insofern sind hier nicht nur Symmetriegruppen vom Typ \mathbb{R} , sondern auch solche vom Typ $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ berücksichtigt.

Wir betrachten im Wesentlichen Transformationen und Transformationsgruppen auf dem Ein-Teilchen-Zustandsraum $\mathbb{R}^2 \times S$. Für jede bijektive Transformation g auf $\mathbb{R}^2 \times S$ haben wir eine entsprechende Transformation g_E auf dem Kantenraum $E(\mathbb{R}^2 \times S)$

$$g_E(yy') := g(y)g(y') \quad \text{für } y, y' \in \mathbb{R}^2 \times S,$$

eine entsprechende Transformation $g_{\mathcal{Y}}$ auf dem Teilchenkonfigurationsraum \mathcal{Y}

$$g_{\mathcal{Y}}(Y) := \{g(y) : y \in Y\} \quad \text{für } Y \in \mathcal{Y}$$

und eine entsprechende Transformation $g_{\mathcal{E}}$ auf dem Kantenkonfigurationsraum \mathcal{E}

$$g_{\mathcal{E}}(B) := \{g_E(b) : b \in B\} \quad \text{für } B \in \mathcal{E}.$$

Gibt es keine Verwechslungsgefahr, so bezeichnen wir diese Transformationen wieder mit g .

Definition 3 Seien g eine Transformation auf $\mathbb{R}^2 \times S$ und G eine Transformationsgruppe auf $\mathbb{R}^2 \times S$. Ein Potential $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, eine Menge $A \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$ bzw. ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_{\mathcal{Y}})$ heißen g -invariant, falls gilt:

$$\begin{aligned} \forall y, y' \in \mathbb{R}^2 \times S : U(g(y), g(y')) &= U(y, y'), \\ \forall y, y' \in \mathbb{R}^2 \times S : (y, y') \in A &\Rightarrow (g(y), g(y')) \in A, \\ \mu &= \mu \circ g^{-1}. \end{aligned}$$

Obige Objekte heißen G -invariant, falls sie g -invariant für alle $g \in G$ sind.

Eine Transformation auf $\mathbb{R}^2 \times S$ heißt räumliche Transformation bzw. Spintransformation, falls sie nur den räumlichen Anteil bzw. den Spinanteil betrifft. Im ersten Fall kann man sie als Transformation auf \mathbb{R}^2 , im zweiten Fall als Transformation auf S auffassen.

Ist U ein G -invariantes Potential, so bezeichnet man auch G als eine Symmetriegruppe von U . Betrachtet man nun ein thermodynamisches System, das durch die Aktivität z und das Wechselwirkungspotential U beschrieben wird, und eine Symmetriegruppe G von U , so spricht man von Symmetrieerhaltung, falls jedes Gibbsmaß $\mu \in \mathcal{G}(U, z)$ auch wieder G -invariant ist. Die Menge der Gibbsmaße $\mathcal{G}(U, z)$ wird formal in Abschnitt 2.4 definiert.

Dass wir nur einparametrische Transformationsgruppen betrachten, ist keine wesentliche Einschränkung. Tatsächlich ist auch der Fall beliebiger zusammenhängender Liegruppen kaum allgemeiner:

Lemma 1 *Jede zusammenhängende Liegruppe wird (als algebraische Gruppe) von ihren einparametrischen Untergruppen erzeugt.*

Will man Symmetrieerhaltung für eine zusammenhängende Liegruppe \tilde{G} zeigen, genügt es daher, Symmetrieerhaltung für alle einparametrischen Untergruppen zu zeigen.

2.3.3 Regularitätseigenschaften

Regularitätseigenschaften einer Transformationsgruppe bezüglich eines Potentials werden eine wichtige Rolle spielen. Wir werden die Stetigkeit, die gleichgradige Stetigkeit oder die Glattheit der Operation von G auf U benötigen:

Definition 4 *Seien $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein Potential, $G = \{g_t : t \in \mathbb{R}\}$ eine Transformationsgruppe auf $\mathbb{R}^2 \times S$ und $A \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$. Die Operation von G bezüglich U heißt stetig, gleichgradig stetig bzw. glatt auf A , falls die Abbildungen*

$$\varphi_{y_1, y_2}^U(t) : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad t \mapsto U(y_1, g_t(y_2)) \quad ((y_1, y_2) \in A)$$

in $t = 0$ stetig, gleichgradig stetig bzw. zweimal stetig differenzierbar sind. Wir nennen U dann auch G -stetig, gleichgradig G -stetig bzw. G -glatt. In letzterem Fall definieren wir in A die G -Ableitung von U durch

$$\partial_G^2 U(y_1, y_2) := \frac{d^2}{dt^2} \varphi_{y_1, y_2}^U(0).$$

Außerdem sagen wir, dass in A die G -Ableitung von U durch eine Funktion ψ dominiert wird, falls

$$\partial_G^2 U(y_1, g_t y_2) \leq \psi(y_1, y_2) \quad \text{für alle } (y_1, y_2) \in A, t \in [-1, 1] \text{ mit } (y_1, g_t y_2) \in A.$$

Die obigen Regularitätseigenschaften betreffen zwar jeweils nur die Stelle $t = 0$, beinhalten aber auch Information über Stellen $t \neq 0$ mittels der Identität

$$\varphi_{y_1, g_t y_2}^U(t') = \varphi_{y_1, y_2}^U(t + t') \quad \text{für alle } y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2 \times S, t, t' \in \mathbb{R}.$$

Zur Kontrolle der Ableitungen $\partial_G^2 U$ führen wir noch einen bestimmten Typ von Funktionen ein:

Definition 5 Eine beschränkte partiell-quadrat-integrierbare Funktion (abgekürzt: bpqi-Funktion) ist eine messbare, symmetrische Funktion $\psi : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$\|\psi\| < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int \psi(y_1, y_2) |y_1 - y_2|^2 dy_2 < \infty.$$

Für eine solche Funktion gilt dann automatisch auch

$$\sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int \psi(y_1, y_2) dy_2 < \infty.$$

2.3.4 Translationsinvariante Potentiale

Häufig sind Potentiale invariant unter allen Translationen, d.h. unter den Transformationen

$$g_{\vec{a}} : \mathbb{R}^2 \times S \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S, \quad g_{\vec{a}}(x, \sigma) := (x, \sigma) + \vec{a} := (x + \vec{a}, \sigma)$$

für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Für solche Potentiale gilt dann

$$U(x_1, \sigma_1, x_2, \sigma_2) = U(0, \sigma_1, x_2 - x_1, \sigma_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2, \sigma_1, \sigma_2 \in S,$$

daher wollen wir unter einem translationsinvarianten Potential gleich eine Funktion $U : \mathbb{R}^2 \times S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ verstehen, die symmetrisch ist, was in diesem Zusammenhang bedeuten soll, dass

$$U(x, \sigma_1, \sigma_2) = U(-x, \sigma_2, \sigma_1) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2, \sigma_1, \sigma_2 \in S.$$

Das zu einem translationsinvarianten Potential U gehörige Potential \tilde{U} im Sinne der vorhergehenden Abschnitte ist dann

$$\tilde{U}(x_1, \sigma_1, x_2, \sigma_2) := U(x_2 - x_1, \sigma_1, \sigma_2) \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2, \sigma_1, \sigma_2 \in S).$$

Analog betrachtet man zu einer Menge $A \subset \mathbb{R}^2 \times S^2$ eine entsprechende Menge

$$\tilde{A} := \{(x_1, \sigma_1, x_2, \sigma_2) \in (\mathbb{R}^2 \times S)^2 : (x_2 - x_1, \sigma_1, \sigma_2) \in A\}.$$

Die Definitionen aus den vorhergehenden Abschnitten lassen sich leicht auf den Zusammenhang von translationsinvarianten Potentialen übertragen:

Definition 6 Seien G eine Transformationsgruppe auf $\mathbb{R}^2 \times S$, $U : \mathbb{R}^2 \times S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein translationsinvariantes Potential und $A \subset \mathbb{R}^2 \times S^2$. A ist eine Standard-Menge, U ist ein Standard-Potential, U ist G -invariant, G -stetig, gleichgradig G -stetig bzw. G -glatt in A , falls das zugehörige Potential $\tilde{U} : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und die zugehörige Menge $\tilde{A} \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$ die entsprechenden Eigenschaften haben.

2.4 Gibbsmaße

2.4.1 Konstruktion und Definition

Seien $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein Potential und $z > 0$ ein Aktivitätsparameter. Wir wollen in diesem Abschnitt die Menge der zugehörigen Gleichgewichtszustände, d.h. die Menge der zugehörigen Gibbsmaße, definieren. Für zwei endliche Konfigurationen $Y, Y' \in \mathcal{Y}$ seien die Energie von Y und die Wechselwirkungsenergie von Y und Y' definiert durch

$$H^U(Y) := \sum_{y_1 y_2 \in E(Y)} U(y_1, y_2) \quad \text{und} \quad W^U(Y, Y') := \sum_{y_1 \in Y} \sum_{y_2 \in Y'} U(y_1, y_2).$$

Letztere Definition kann auf unendliche Konfigurationen Y' ausgedehnt werden, falls $W^U(Y, Y'_\Lambda)$ für $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^2$ im Sinne der Netzkonvergenz (bezüglich des Netzes \mathcal{B}_b^2) konvergiert. Existiert $W^U(Y_\Lambda, Y_{\Lambda^c}) \in \overline{\mathbb{R}}$, so kann man den Hamiltonian von $Y \in \mathcal{Y}$ in $\Lambda \in \mathcal{B}_b^2$ durch

$$H_\Lambda^U(Y) := H^U(Y_\Lambda) + W^U(Y_\Lambda, Y_{\Lambda^c}) = \sum_{y_1 y_2 \in E_\Lambda(Y)} U(y_1, y_2)$$

definieren, wobei

$$E_\Lambda(Y) := \{y_1 y_2 \in E(Y) : y_1 y_2 \cap \Lambda \neq \emptyset\}$$

die Menge aller Kanten in Y ist, die Λ treffen. Das Integral

$$Z_\Lambda^{U,z}(\bar{Y}) := \int \nu_\Lambda(dY | \bar{Y}) e^{-H_\Lambda^U(Y)} z^{\#Y_\Lambda}$$

wird dann als Zustandssumme in $\Lambda \in \mathcal{B}_b^2$ zur Randkonfiguration $\bar{Y}_{\Lambda^c} \in \mathcal{Y}$ bezeichnet. Um die Zustandssumme für eine feste Randkonfiguration \bar{Y} definieren zu können, benötigen wir die Existenz von $W^U(Y_\Lambda, \bar{Y}_{\Lambda^c}) \in \overline{\mathbb{R}}$ für alle $Y \in \mathcal{Y}$. Betrachtet man die leere Konfiguration $Y = \emptyset$, so sieht man sofort, dass die Zustandssumme positiv ist:

$$Z_\Lambda^{U,z}(\bar{Y}) \geq e^{-\lambda^2(\Lambda)} > 0. \quad (2.1)$$

Daneben benötigen wir aber auch noch die Endlichkeit der Zustandssumme, was zusammen mit obiger Forderung zu folgender Definition führt:

Definition 7 Ein Tripel (U, z, \mathcal{Y}_0) , bestehend aus einem Potential $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, einer Aktivität $z > 0$ und einer Menge von Randkonfigurationen $\mathcal{Y}_0 \in \mathcal{F}_{\mathbb{y}, \infty}$, heißt zulässig, falls für jede Randkonfiguration $\bar{Y} \in \mathcal{Y}_0$ und jedes $\Lambda \in \mathcal{B}_b^2$ die Wechselwirkungsenergie $W^U(\bar{Y}_\Lambda, \bar{Y}_{\Lambda^c})$ einen wohldefinierten Wert in $\overline{\mathbb{R}}$ hat, und die zugehörige Zustandssumme $Z_\Lambda^{U,z}(\bar{Y})$ endlich ist.

Ist (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel, $\Lambda \in \mathcal{B}_b^2$, $\bar{Y} \in \mathcal{Y}_0$ und $Y \in \mathcal{Y}$, so ist wegen $Y_\Lambda \bar{Y}_{\Lambda^c} \in \mathcal{Y}_0$ auch die Wechselwirkungsenergie $W^U(Y_\Lambda, \bar{Y}_{\Lambda^c}) \in \overline{\mathbb{R}}$ wohldefiniert.

Wir betrachten im Folgenden ein fest vorgegebenes zulässiges Tripel (U, z, \mathcal{Y}_0) und wollen hierzu die Menge aller Gibbsmaße konstruieren. Wir haben bereits sichergestellt, dass für alle Randkonfigurationen $\bar{Y} \in \mathcal{Y}_0$ gilt:

$$0 < Z_\Lambda^{U,z}(\bar{Y}) < \infty.$$

Die Gibbsverteilung $\gamma_\Lambda^{U,z}(\cdot|\bar{Y})$ in $\Lambda \in \mathcal{B}_b^2$ mit Randbedingung $\bar{Y} \in \mathcal{Y}_0$ sei definiert durch

$$\gamma_\Lambda^{U,z}(A|\bar{Y}) := \frac{1}{Z_\Lambda^{U,z}(\bar{Y})} \int \nu_\Lambda(dY|\bar{Y}) e^{-H_\Lambda^U(Y)} z^{\#Y_\Lambda} 1_A(Y) \quad \text{für } A \in \mathcal{F}_\mathcal{Y}.$$

$\gamma_\Lambda^{U,z}$ ist ein Wahrscheinlichkeitskern von $(\mathcal{Y}_0, \mathcal{F}_{\mathcal{Y}_0, \Lambda^c})$ nach $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_\mathcal{Y})$. Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z) &:= \{\mu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_\mathcal{Y}) : \mu(\mathcal{Y}_0) = 1 \quad \text{und} \\ &\quad \mu(A|\mathcal{F}_{\mathcal{Y}, \Lambda^c}) = \gamma_\Lambda^{U,z}(A|\cdot) \quad \mu\text{-f.s. } \forall A \in \mathcal{F}_\mathcal{Y}, \Lambda \in \mathcal{B}_b^2\} \end{aligned}$$

die Menge aller auf \mathcal{Y}_0 konzentrierten Gibbsmaße zum Potential U und zur Aktivität z . Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_\mathcal{Y})$ mit $\mu(\mathcal{Y}_0) = 1$ gilt die Äquivalenz

$$\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z) \quad \Leftrightarrow \quad (\mu \otimes \gamma_\Lambda^{U,z} = \mu \quad \forall \Lambda \in \mathcal{B}_b^2).$$

Daher gilt für alle Gibbsmaße $\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z)$, alle messbaren Funktionen $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+$ und alle $\Lambda \in \mathcal{B}_b^2$

$$\int \mu(dY) f(Y) = \int \mu(d\bar{Y}) \int \gamma_\Lambda^{U,z}(dY|\bar{Y}) f(Y). \quad (2.2)$$

Falls klar ist, welche Aktivität und welches Potential gerade betrachtet werden, werden wir die Abhängigkeit von U und z bei den Notationen $\gamma_\Lambda^{U,z}$ und $Z_\Lambda^{U,z}$ unterdrücken.

Ist (U, z, \mathcal{Y}_0) zulässig und $\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z)$, so ist die Wirkung des harten Kerns K^U von U gerade die, dass μ -f.s. keine zwei Teilchen einer Konfiguration im harten Kern liegen:

$$\mu(\{Y \in \mathcal{Y} : \exists y, y' \in Y : y \neq y', (y, y') \in K^U\}) = 0. \quad (2.3)$$

Denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle Randbedingungen $\bar{Y} \in \mathcal{Y}_0$ ist

$$\gamma_{\Lambda_n}^{U,z}(\{Y \in \mathcal{Y} : \exists y, y' \in Y_{\Lambda_n} : y \neq y', (y, y') \in K^U\}|\bar{Y}) = 0,$$

da auf dem in der letzten Zeile betrachteten Ereignis der Hamiltonian $H_{\Lambda_n}^U(Y|\bar{Y})$ unendlich ist. Hieraus folgt aber mittels (2.2) im Limes $n \rightarrow \infty$ obige Behauptung.

Sei wieder (U, z, \mathcal{Y}_0) zulässig und $\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z)$ ein Gibbsmaß, so ist die Korrelationsfunktion $\rho^{U,\mu}$ definiert durch

$$\rho^{U,\mu}(Y) = e^{-H^U(Y)} \int \mu(d\bar{Y}) e^{-W^U(Y, \bar{Y})}$$

für endliche Konfigurationen $Y \in \mathcal{Y}$. Existiert eine reelle Zahl $\xi = \xi(U, z, \mathcal{Y}_0) \geq 0$ mit der Eigenschaft

$$\rho^{U,\mu}(Y) \leq \xi^{\#Y} \quad \text{für alle endlichen } Y \in \mathcal{Y} \text{ und alle } \mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z), \quad (2.4)$$

so nennen wir ξ eine Ruelle-Schranke zu (U, z, \mathcal{Y}_0) . Wir benötigen folgende Eigenschaft von Ruelle-Schranken:

Lemma 2 Sei (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ . Für jedes Gibbsmaß $\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z)$ und jede messbare Funktion $f : (\mathbb{R}^2 \times S)^m \rightarrow \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$, gilt dann

$$\int \mu(dY) \sum_{y_1, \dots, y_m \in Y}^{\neq} f(y_1, \dots, y_m) \leq (z\xi)^m \int dy_1 \dots dy_m f(y_1, \dots, y_m). \quad (2.5)$$

Hierbei ist Σ^{\neq} eine abkürzende Schreibweise für eine Mehrfachsumme, bei der die Summationsindices paarweise verschieden sein sollen.

2.4.2 Superstabilität und Temperiertheit

Bisher haben wir noch nicht diskutiert, unter welchen Bedingungen ein Tripel (U, z, \mathcal{Y}_0) zulässig ist oder eine Ruelle-Schranke besitzt. Wir werden im Folgenden zwei hinreichende Kriterien dafür geben.

Proposition 1 Seien $z > 0$ und $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein Potential. Ist $U \geq 0$, so ist (U, z, \mathcal{Y}) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke $\xi := 1$.

Natürlich ist der Fall nichtnegativer, d.h. rein abstoßender Potentiale viel zu restriktiv. Um realistischere Potentiale betrachten zu können, hat D. Ruelle das Konzept der Superstabilität eingeführt und untersucht ([R]). Seien dazu

$$\Gamma_r := r + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \subset \mathbb{R}^2 \quad (r \in \mathbb{Z}^2)$$

das Einheitsquadrat mit Mittelpunkt r und

$$\mathbb{Z}^2(Y) := \{r \in \mathbb{Z}^2 : N_{\Gamma_r}(Y) > 0\}$$

die minimale Menge von Gitterpunkten, so dass die zugehörigen Einheitsquadrate die Konfiguration $Y \in \mathcal{Y}$ vollständig überdecken.

Definition 8 Ein Potential $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt *superstabil*, wenn es Konstanten $a > 0$ und $b \geq 0$ gibt, so dass für alle endlichen Konfigurationen $Y \in \mathcal{Y}$

$$H^U(Y) \geq \sum_{r \in \mathbb{Z}^2(Y)} [aN_{\Gamma_r}(Y)^2 - bN_{\Gamma_r}(Y)].$$

U heißt *regulär nach unten*, falls es eine monoton fallende Funktion $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{r \in \mathbb{Z}^2} \Psi(|r|) < \infty$ gibt, so dass für alle endlichen Konfigurationen $Y, Y' \in \mathcal{Y}$

$$W^U(Y, Y') \geq - \sum_{r \in \mathbb{Z}^2(Y)} \sum_{s \in \mathbb{Z}^2(Y')} \Psi(|r-s|) \left[\frac{1}{2}N_{\Gamma_r}(Y)^2 + \frac{1}{2}N_{\Gamma_s}(Y')^2 \right].$$

Superstabilität und Regularität nach unten sind demnach Eigenschaften von Potentialen, die die Energie von Konfigurationen nach unten beschränken, und zwar in Abhängigkeit der Teilchendichten.

Definition 9 Eine Konfiguration $Y \in \mathcal{Y}$ heißt *temperiert*, falls

$$\bar{s}(Y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n(Y) < \infty \quad \text{mit} \quad s_n(Y) := \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}^2 \cap \Lambda_{n+1/2}} N_{\Gamma_r}^2(Y).$$

\mathcal{Y}_t sei die Menge aller temperierter Konfigurationen.

Temperiertheit bedeutet demnach, dass die quadratische Teilchendichte pro Einheitsquadrat über große Bereiche gemittelt beschränkt bleibt und ist daher eine Eigenschaft, die das Anwachsen von Teilchendichten mit der Entfernung vom Ursprung kontrolliert. Es gilt $\mathcal{Y}_t \in \mathcal{F}_{\mathcal{Y},\infty}$.

Proposition 2 *Sei $z > 0$ und $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein Potential. Ist U superstabil und nach unten regulär, so ist (U, z, \mathcal{Y}_t) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke.*

Im Beweis der Proposition werden wir auch in diesem Fall explizit eine Ruelle-Schranke angeben.

2.4.3 Symmetrieerhaltung

Zum Nachweis von Symmetrieerhaltung verwenden wir jeweils folgendes Kriterium:

Proposition 3 *Sei (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel und g eine bijektive Transformation auf $\mathbb{R}^2 \times S$, so dass $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ g -invariant ist. Gibt es reelle $a_1, a_{-1} \geq 0$, so dass für alle Zylindermengen $D \in \mathcal{F}_{\mathcal{Y},\Lambda_m}$ ($m \in \mathbb{N}$) und alle Gibbsmaße $\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z)$*

$$a_1\mu(g(D)) + a_{-1}\mu(g^{-1}(D)) \geq \mu(D), \quad (2.6)$$

dann ist jedes auf \mathcal{Y}_0 konzentrierte Gibbsmaß $\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z)$ g -invariant.

Diese Proposition folgt aus dem Beweis von Proposition (9.1) in [G1]. Da wir nämlich (S, \mathcal{F}_S) als Standard-Borel-Raum vorausgesetzt haben, ist nach [DV], Theorem A2.6.III auch der Konfigurationsraum $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_{\mathcal{Y}})$ wieder ein Standard-Borel-Raum, was im eben zitierten Beweis benötigt wird. Noch nützlicher wäre ein Kriterium, das nicht die Gibbsmaße, sondern die bedingten Gibbsverteilungen betrifft. Tatsächlich liefert [G1], Proposition (9.1) ein solches Kriterium, das wir für unsere Zwecke leicht modifizieren. Wir betrachten wieder ein zulässiges Tripel (U, z, \mathcal{Y}_0) und eine Transformation g auf $\mathbb{R}^2 \times S$, so dass $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ g -invariant ist. Es gebe reelle $a_1, a_{-1} \geq 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ und alle Zylindermengen $D \in \mathcal{F}_{\mathcal{Y},\Lambda_m}$ ($m \in \mathbb{N}$) ein $n \geq m$ gibt, so dass für alle Randbedingungen $\bar{Y} \in \mathcal{Y}_0$

$$a_1\gamma_{\Lambda_n}^{U,z}(g(D)|\bar{Y}) + a_{-1}\gamma_{\Lambda_n}^{U,z}(g^{-1}(D)|\bar{Y}) \geq \gamma_{\Lambda_n}^{U,z}(D|\bar{Y}) - \delta. \quad (2.7)$$

Dann folgt sofort nach der definierenden Eigenschaft der Gibbsmaße (2.2)

$$a_1\mu(g(D)) + a_{-1}\mu(g^{-1}(D)) \geq \mu(D) - \delta$$

für alle $\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z)$, $\delta > 0$ und alle Zylindermengen $D \in \mathcal{F}_{\mathcal{Y},\Lambda_m}$ ($m \in \mathbb{N}$), also auch

$$a_1\mu(g(D)) + a_{-1}\mu(g^{-1}(D)) \geq \mu(D),$$

und nach obiger Proposition sind daher alle Gibbsmaße $\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z)$ g -invariant, d.h. es gilt Symmetrieerhaltung. Unsere Strategie zum Nachweis von Symmetrieerhaltung wird jeweils sein, ein natürliche Zahl n zu finden, so dass eine zu (2.7) ähnliche Abschätzung gilt.

2.5 Messbarkeitsfragen

2.5.1 Vererbung der Messbarkeit

Wir betrachten verschiedene Zufallsvariablen, von denen jeweils die Messbarkeit bezüglich der entsprechenden σ -Algebren gezeigt werden muss. Anstatt dies jeweils an den einzelnen Stellen explizit nachzuprüfen, geben wir im Folgenden eine Liste von Operationen, die die Messbarkeit erhalten. Zusammen mit elementaren Messbarkeitsaussagen wie dem Satz von Fubini ergibt sich daraus die Messbarkeit aller betrachteten Objekte.

Lemma 3 *Sei $G = \{g_t : t \in \mathbb{R}\}$ eine einparametrische Transformationsgruppe auf $\mathbb{R}^2 \times S$, und seien $Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{Y}$, $B, B_1, B_2 \in \mathcal{E}$, $y \in \mathbb{R}^2 \times S$, $t \in \mathbb{R}$ und $p \in \Omega$ Variablen, wobei (Ω, \mathcal{F}) ein gegebener messbarer Raum ist. Seien außerdem $f_1 : \Omega \times (\mathbb{R}^2 \times S) \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_2 : \Omega \times E(\mathbb{R}^2 \times S) \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Abbildungen. Die folgenden Abbildungen sind dann messbare Funktionen der gegebenen Variablen bezüglich der betrachteten σ -Algebren:*

$$\sum_{y' \in Y} f_1(p, y'), \quad Y_1 \cap Y_2, \quad Y_1 \cup Y_2, \quad Y_1 \setminus Y_2, \quad g_t(Y), \quad (2.8)$$

$$\sum_{b' \in B} f_2(p, b'), \quad B_1 \cap B_2, \quad B_1 \cup B_2, \quad B_1 \setminus B_2, \quad g_t(B), \quad (2.9)$$

$$\inf_{y' \in Y} f_1(p, y'), \quad \{y' \in Y : f_1(p, y') = 0\}, \quad C_{Y,B}(y), \quad E(Y), \quad (2.10)$$

$$\text{die Anzahl der Cluster von } (Y, B). \quad (2.11)$$

2.5.2 Erweiterungen des harten Kerns

Bei der Behandlung der Translationen in Kapitel 4 benötigen wir als Hilfsmittel Erweiterungen des harten Kerns bzw. Erweiterungen einer Menge, die den harten Kern umschließt. Solche Erweiterungen verschaffen uns dort den benötigten Spielraum für Deformationen in der Kernumgebung.

Definition 10 *Für eine Menge $A \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$ bzw. $A' \in \mathbb{R}^2 \times S^2$ und ein reelles $\epsilon > 0$ definieren wir die ϵ -Erweiterungen durch*

$$A_\epsilon := \{(y_1, y_2 + x') : (y_1, y_2) \in A, x' \in B_2(\epsilon)\},$$

$$A'_\epsilon := \{(x + x', \sigma_1, \sigma_2) : (x, \sigma_1, \sigma_2) \in A, x' \in B_2(\epsilon)\}.$$

Ein Problem bei obiger Definition ist, dass nicht klar ist, ob die ϵ -Erweiterung einer messbaren Menge wieder messbar ist. Wir werden daher die Messbarkeit der Mengen voraussetzen müssen oder aber, etwas weniger restriktiv, die Existenz von messbaren Mengen, die die ϵ -Erweiterungen umfassen. In Kapitel 4 betrachten wir den harten Kern K^U eines Potentials U und eine Standard-Menge $K \supset K^U$, innerhalb derer sich das Eintauchverhalten des Potentials in den harten Kern abspielen soll. Um Vorgänge in der Umgebung von K kontrollieren zu können, benötigen wir ein $\epsilon > 0$, sowie Erweiterungen K' und K'' von K mit

$$K', K'' \in (\mathcal{B}^2 \otimes \mathcal{F}_S)^2, \quad (K)_\epsilon \subset K' \quad \text{und} \quad (K')_\epsilon \subset K'', \quad (2.12)$$

so dass K'' wieder eine Standard-Menge ist und $K'' \setminus K$ in gewissem Sinn möglichst klein bleibt. Haben wir erst einmal Mengen K' und K'' mit der Eigenschaft (2.12)

gefunden, so können wir die endliche Reichweite von K'' leicht erzwingen, indem wir K' und K'' noch mit geeigneten Mengen von endlicher Reichweite schneiden, denn K hat ja als Standard-Menge bereits endliche Reichweite. Die Symmetrie von K'' können wir durch Symmetrisierung erzwingen:

$$\{(y_1, y_2) : (y_1, y_2) \in K'' \text{ oder } (y_2, y_1) \in K''\}$$

ist offenbar die kleinste symmetrische Menge, die K'' umfasst, und falls K'' messbar ist, so ist es auch obige Symmetrisierung. Wir wollen daher im Folgenden nur diskutieren, wie man sich messbare Kernerweiterungen K' und K'' verschaffen kann, so dass (2.12) gilt und $K'' \setminus K$ in gewissem Sinn möglichst klein bleibt. Wir geben drei Möglichkeiten dafür an, die jeweils verschiedene Eigenschaften von K voraussetzen.

Möglichkeit 1: Da (S, \mathcal{F}_S) als Standard-Borel-Raum vorausgesetzt ist, gibt es eine Metrik auf S , so dass \mathcal{F}_S die Borel- σ -Algebra bezüglich der von der Metrik erzeugten Topologie ist. Die Ebene \mathbb{R}^2 ist von vornherein mit der Metrik ausgestattet, die von der euklidischen Norm herrührt. Durch Produktbildung erhalten wir eine Metrik d auf $(\mathbb{R}^2 \times S)^2$. Ist nun $A \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$ eine beliebige Teilmenge, so ist die Abbildung $d(\cdot, A)$ stetig, also insbesondere messbar. Die d, ϵ -Erweiterung von A , definiert durch

$$A_{d,\epsilon} := \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^2 \times S)^2 : d((y_1, y_2), A) < \epsilon\},$$

ist daher automatisch messbar. Andererseits ist aber für jede Menge $A \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$ die ϵ -Erweiterung A_ϵ in $A_{d,\epsilon}$ enthalten. Eine Möglichkeit für die Wahl der Mengen in (2.12) ist demnach $K' := K_{d,\epsilon}$ und $K'' := K'_{d,\epsilon}$.

Möglichkeit 2: Meist hängt die Gestalt des harten Kerns nicht von der gesamten Spininformation ab, sondern nur vom Teilchentyp: Sei der Spinraum von der Gestalt $S = S^t \times S'$, wobei S^t eine abzählbare Menge sein soll, auf der die Potenzmenge als σ -Algebra gegeben ist. Außerdem sei hierbei S' mit einer σ -Algebra ausgestattet ist, so dass S' zu einem Standard-Borel-Raum wird. Wir nehmen an, dass $A \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$ von der Gestalt $A = A' \times (S')^2$ mit $A' \subset (\mathbb{R}^2 \times S^t)^2$ ist, wobei wir die Komponenten des Produktraums geeignet umgeordnet haben. Auf \mathbb{R}^2 wählen wir wieder die Metrik, die von der euklidischen Norm herrührt. Durch Produktbildung erhalten wir eine Metrik d' auf $(\mathbb{R}^2)^2$. Nun definieren wir einen weiteren Typ von Erweiterung, nämlich die d', ϵ -Erweiterung, von A durch

$$A_{d',\epsilon} := \bigcup_{\sigma_1, \sigma_2 \in S^t} \{(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2)^2 : d'((x_1, x_2), A'(\sigma_1, \sigma_2)) < \epsilon\} \times \{(\sigma_1, \sigma_2)\} \times (S')^2,$$

wobei $A'(\sigma_1, \sigma_2)$ der σ_1, σ_2 -Schnitt von A' mit $\sigma_1, \sigma_2 \in S^t$ sein soll, und wir die Komponenten wieder geeignet umsortiert haben. Da wir hier eine abzählbare Vereinigung betrachten und die Abbildungen $d'(\cdot, A'(\sigma_1, \sigma_2))$ wieder stetig, also insbesondere messbar sind, ist $A_{d',\epsilon}$ auch wieder messbar. Andererseits ist aber für jede Menge $A \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$ von obiger Form die ϵ -Erweiterung A_ϵ in $A_{d',\epsilon}$ enthalten. Ist daher in (2.12) die Menge K von dieser speziellen Gestalt, so können wir $K' := K_{d',\epsilon}$ und $K'' := K'_{d',\epsilon}$ setzen. Dies hat im Vergleich zur letzten Möglichkeit den Vorteil, dass K'' hier kleiner wird.

Möglichkeit 3: Oft sind auch die in Definition 10 gegebenen ϵ -Erweiterungen schon messbar:

Lemma 4 Sei $A \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$ messbar. Gilt für jeden x, σ, σ' -Schnitt von A

$$\forall U \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen: } U \cap A(x, \sigma, \sigma') \neq \emptyset \Rightarrow \lambda^2(U \cap A(x, \sigma, \sigma')) > 0, \quad (2.13)$$

so ist jede ϵ -Erweiterung A_ϵ ($\epsilon > 0$) auch wieder messbar. Bedingung (2.13) ist beispielsweise erfüllt, falls die Menge der inneren Punkte von $A(x, \sigma, \sigma')$ dicht in $A(x, \sigma, \sigma')$ liegt.

Diese hinreichende Eigenschaft betrifft nur die topologische Struktur der Schnitte von A , ist im konkreten Fall einfach nachzuprüfen und umfasst insbesondere den häufigen Fall, dass der x, σ, σ' -Schnitt von A jeweils eine Kreisscheibe um x ist. Ist nun $\epsilon > 0$ und ist die ϵ -Erweiterung von K in (2.12) wieder messbar, so wählt man für K' und K'' einfach die ϵ -Erweiterungen, d.h. $K' = (K)_\epsilon$ und $K'' = (K')_\epsilon$. Man beachte hierbei, dass die Schnitte von K' nach Definition offene Mengen sind, so dass K'' nach Lemma 4 automatisch messbar ist. In diesem letzten Fall sind offenbar K' und K'' kleinstmöglich gewählt, so dass bei bekannter Messbarkeit der ϵ -Erweiterungen diese Konstruktion vorzuziehen ist.

2.6 Beweis der Lemmata und Propositionen

2.6.1 Zusammenhängende Liegruppen: Lemma 1

Für die Definitionen der hier verwendeten Objekte und deren Eigenschaften verweisen wir auf die einführende Darstellung in [GOV]. Seien G eine zusammenhängende Liegruppe, \mathfrak{g} der Tangentialraum im Punkt $id \in G$ und $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ die Exponentialabbildung. Nach [GOV], Kap. 2, Prop. 3.2 gibt es eine Umgebung V der Identität, die ganz im Bild von \exp enthalten ist. Zu $g \in V$ können wir ein $\eta \in \mathfrak{g}$ wählen mit $g = \exp(\eta)$. $\{\exp(t\eta) : t \in \mathbb{R}\}$ ist dann eine einparametrische Untergruppe von G , die g enthält. V liegt daher in der Vereinigung aller einparametrischer Untergruppen. Da G zusammenhängend ist, erzeugt aber V bereits ganz G , vgl. [GOV], Kap. 1, Korollar zu Satz 4.1.

2.6.2 Eigenschaft der Ruelle-Schranke: Lemma 2

Seien (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ , $\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z)$ ein Gibbsmaß, $m \in \mathbb{N}$ und $f : (\mathbb{R}^2 \times S)^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ messbar. Für $n \in \mathbb{N}$, $g : \mathcal{Y}_{\Lambda_n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ messbar und $\bar{Y} \in \mathcal{Y}_0$ gilt

$$\begin{aligned} & \int \nu_{\Lambda_n}(dY|\bar{Y}) \sum_{y_1, \dots, y_m \in Y_{\Lambda_n}}^{\neq} f(y_1, \dots, y_m) g(Y) \\ &= \int_{\Lambda_n^m} dy_1 \dots dy_m f(y_1, \dots, y_m) \int \nu_{\Lambda_n}(dY'|\bar{Y}) g(\{y_1, \dots, y_m\}Y'). \end{aligned}$$

Zusammen mit (2.2), der Definition der bedingten Gibbsverteilung und der Definition der Korrelationsfunktion erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
& \int \mu(dY) \sum_{y_1, \dots, y_m \in Y_{\Lambda_n}}^{\neq} f(y_1, \dots, y_m) \\
&= \int \mu(d\bar{Y}) \frac{1}{Z_{\Lambda_n}^{U, z}(\bar{Y})} \int \nu_{\Lambda_n}(dY|\bar{Y}) \sum_{y_1, \dots, y_m \in Y_{\Lambda_n}}^{\neq} f(y_1, \dots, y_m) e^{-H_{\Lambda_n}^U(Y)} z^{\#Y_{\Lambda_n}} \\
&= \int \mu(d\bar{Y}) \frac{1}{Z_{\Lambda_n}^{U, z}(\bar{Y})} \int_{\Lambda_n^m} dy_1 \dots dy_m f(y_1, \dots, y_m) \int \nu_{\Lambda_n}(dY'|\bar{Y}) \\
&\quad e^{-H_{\Lambda_n}^U(\{y_1, \dots, y_m\}Y')} z^{\#(\{y_1, \dots, y_m\}Y'_{\Lambda_n})} \\
&= \int_{\Lambda_n^m} dy_1 \dots dy_m f(y_1, \dots, y_m) z^m \rho^{U, \mu}(\{y_1, \dots, y_m\}).
\end{aligned}$$

Schätzen wir nun gemäß (2.4) die Korrelationsfunktion mit Hilfe der Ruelle-Schranke ξ ab, so folgt die Aussage im Limes $n \rightarrow \infty$ mittels monotoner Konvergenz.

2.6.3 Zulässigkeit und Korrelationen: Propositionen 1 und 2

Proposition 1 folgt sofort aus den Definitionen, denn für $U \geq 0$ hat die Wechselwirkungsenergie nur nichtnegative Summanden, und da Energie und Wechselwirkungsenergie nichtnegativ sind, kann die Korrelationsfunktion durch 1 abgeschätzt werden, und für die Zustandssumme gilt für beliebige $\Lambda \in \mathcal{B}_b^2$

$$Z_{\Lambda}^{U, z}(\bar{Y}) \leq \int \nu_{\Lambda}(dY|\bar{Y}) z^{\#Y_{\Lambda}} = e^{-\lambda^2(\Lambda)} \sum_{k \geq 0} \frac{(z\lambda^2(\Lambda))^k}{k!} = e^{(z-1)\lambda^2(\Lambda)}.$$

Zum Beweis von Proposition 2 orientieren wir uns an [R]. Zuerst wollen wir zeigen, dass die Wechselwirkungsenergie wohldefiniert ist:

Lemma 5 *Ist $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein nach unten reguläres Potential und ist $Y \in \mathcal{Y}$ eine endliche und $Y' \in \mathcal{Y}_t$ eine temperierte Konfiguration, so existiert $W^U(Y, Y') \in \overline{\mathbb{R}}$ im Sinne der Netzkonvergenz. Die Ungleichung*

$$W^U(Y, Y') \geq - \sum_{r \in \mathbb{Z}^2(Y)} \sum_{s \in \mathbb{Z}^2(Y')} \Psi(|r-s|) \left[\frac{1}{2} N_{\Gamma_r}(Y)^2 + \frac{1}{2} N_{\Gamma_s}(Y')^2 \right] \quad (2.14)$$

behält ihre Gültigkeit. Außerdem gibt es eine Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bar{s} \geq 0$ gilt: Für jedes endliche $Y \in \mathcal{Y}_{\Lambda_n}$ und jedes temperierte $Y' \in \mathcal{Y}_t$ mit $\bar{s}(Y') \leq \bar{s}$ ist

$$W^U(Y, Y') \geq -\#Y f(n, \bar{s}). \quad (2.15)$$

Beweis: Seien $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein nach unten reguläres Potential und $Y \in \mathcal{Y}$ eine endliche Konfiguration. Zunächst wollen wir festhalten, dass (2.14) automatisch auch für unendliche Konfigurationen Y' gilt, wann immer die Wechselwirkungsenergie $W^U(Y, Y')$ wohldefiniert ist. Denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt die entsprechende Abschätzung für $W^U(Y, Y'_{\Lambda_n})$ nach Definition der Regularität nach unten, und die Behauptung folgt im Limes $n \rightarrow \infty$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $\bar{s} \geq 0$. Sei ferner $Y \in \mathcal{Y}_{\Lambda_n}$ eine endliche Konfiguration und $Y' \in \mathcal{Y}_t$ eine temperierte Konfiguration mit $\bar{s}(Y') \leq \bar{s}$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass Y nur aus einem Teilchen besteht. Sei also $Y = \{y\}$ für ein $y \in \mathbb{R}^2 \times S$

und sei $r \in \mathbb{Z}^2$ mit $y \in \Gamma_r$. Nach Wahl von n ist $|r| \leq n$. Nun betrachten wir die Teilkonfigurationen

$$Y'_- := \{y' \in Y' : U(y, y') < 0\} \quad \text{und} \quad Y'_+ := Y' \setminus Y'_-.$$

Die Wechselwirkungsenergien $W^U(\{y\}, Y'_+)$ und $W^U(\{y\}, Y'_-)$ sind dann wohldefiniert, es gilt $W^U(\{y\}, Y'_+) \geq 0$, und wir schätzen $W^U(\{y\}, Y'_-)$ nach unten ab. Nach obiger Bemerkung ist

$$\begin{aligned} W^U(\{y\}, Y'_-) &\geq -\frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}^2(Y'_-)} \Psi(|r-s|) [1 + N_{\Gamma_s}(Y'_-)]^2 \\ &\geq -\frac{1}{2} \Psi_s - \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} \Psi(|r-s|) N_{\Gamma_s}(Y')^2, \end{aligned}$$

wobei $\Psi_s := \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} \Psi(|s|)$ nach Wahl von Ψ endlich ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} \Psi(|r-s|) N_{\Gamma_s}(Y')^2 &\leq \sum_{k \geq 0} \Psi(k-|r|) \sum_{s \in \mathbb{Z}^2 : |s|=k} N_{\Gamma_s}(Y')^2 \\ &\leq \sum_{k \geq 0} \Psi(k-|r|) (s_k(Y')(2k+1)^2 - s_{k-1}(Y')(2k-1)^2), \end{aligned}$$

und durch zweimaliges Umordnen der Summe können im letzten Term wegen der Monotonie von Ψ die mittleren Teilchendichten jeweils durch \bar{s} abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} &\sum_{k \geq 0} \Psi(k-|r|) (s_k(Y')(2k+1)^2 - s_{k-1}(Y')(2k-1)^2) \\ &= \sum_{k \geq 0} s_k(Y')(2k+1)^2 (\Psi(k-|r|) - \Psi(k+1-|r|)) \\ &\leq \sum_{k \geq 0} \bar{s} (2k+1)^2 (\Psi(k-|r|) - \Psi(k+1-|r|)) \\ &= \sum_{k \geq 0} \bar{s} \Psi(k-|r|) ((2k+1)^2 - (2k-1)^2), \end{aligned}$$

wobei wir $\Psi(t) := 0$ für $t < 0$ und $s_{-1}(Y') = 0$ gesetzt haben. Es folgt also

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} \Psi(|r-s|) N_{\Gamma_s}(Y')^2 &\leq 8\bar{s} \sum_{k \geq 0} k \Psi(k-|r|) \\ &\leq 8\bar{s} \sum_{k=0}^{2|r|-1} 2|r| \Psi(0) + 8\bar{s} \sum_{k \geq 2|r|} 2(k-|r|) \Psi(k-|r|) \leq 32\bar{s} n^2 \Psi(0) + 2\bar{s} \Psi_s, \end{aligned}$$

wobei wir noch $|r| \leq n$ verwendet haben. Setzen wir

$$f(n, \bar{s}) := 16n^2 \bar{s} \Psi(0) + \bar{s} \Psi_s + \frac{1}{2} \Psi_s,$$

so folgt

$$W^U(\{y\}, Y') = W^U(\{y\}, Y'_-) + W^U(\{y\}, Y'_+) \geq -f(n, \bar{s}),$$

und der erste Term ist wohldefiniert. Somit ist auch

$$W^U(Y, Y') = \sum_{y \in Y} W^U(\{y\}, Y') \geq -\#Y f(n, \bar{s}),$$

und der erste Term ist wohldefiniert. \square

Lemma 6 Seien $z > 0$ und $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein superstabiles und nach unten reguläres Potential. Für jedes $\Lambda \in \mathcal{B}_b^2$ und alle temperierten Konfigurationen $\bar{Y} \in \mathcal{Y}_t$ ist die Zustandssumme $Z_\Lambda^{U,z}(\bar{Y})$ endlich.

Beweis: Seien wie vorausgesetzt $z > 0$ und $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein superstabiles und nach unten reguläres Potential, $\Lambda \in \mathcal{B}_b^2$ eine beschränkte Borelmenge und $\bar{Y} \in \mathcal{Y}_t$ eine temperierte Konfiguration. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Lambda \subset \Lambda_n$ und setzen $\bar{s} := \bar{s}(\bar{Y})$. Superstabilität und (2.15) aus Lemma 5 implizieren, dass für jedes $Y \in \mathcal{Y}$

$$H^U(Y_\Lambda) \geq -\#Y_\Lambda b \quad \text{und} \quad W^U(Y_\Lambda, \bar{Y}_{\Lambda^c}) \geq -\#Y_\Lambda f(n, \bar{s}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} Z_\Lambda^{U,z}(\bar{Y}) &= \int \nu_\Lambda(dY|\bar{Y}) e^{-H^U(Y_\Lambda) - W^U(Y_\Lambda, \bar{Y}_{\Lambda^c})} z^{\#Y_\Lambda} \\ &\leq \int \nu_\Lambda(dY|\bar{Y}) e^{\#Y_\Lambda(b+f(n,\bar{s}))} z^{\#Y_\Lambda} = e^{-\lambda^2(\Lambda)} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(z \lambda^2(\Lambda) e^{b+f(n,\bar{s})} \right)^k \\ &= \exp\left(\lambda^2(\Lambda)(z e^{b+f(n,\bar{s})} - 1)\right) < \infty. \end{aligned}$$

□

Wir haben bisher gezeigt, dass für ein superstabiles und nach unten reguläres Potential $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ das Tripel (U, z, \mathcal{Y}_t) zulässig ist und wollen uns nun der Ruelle-Schranke zuwenden. In [R] wird eine solche konstruiert, allerdings nur für den Fall von Gibbsmaßen auf beschränkten Volumina (d.h. bedingten Gibbsverteilungen zu leeren Randkonfigurationen). Wir wollen hier zeigen, dass man in unserer Situation praktisch genauso vorgehen kann und verwenden im Folgenden die Superstabilitätsabschätzungen von D. Ruelle aus [R].

Seien wieder $z > 0$ und $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein superstabiles und nach unten reguläres Potential. Vor der Formulierung der entscheidenden Lemmata müssen noch einige Begriffe definiert werden. Seien dazu die Konstanten a und b aus der Bedingung der Superstabilität von U und die Funktion Ψ aus der Bedingung der Regularität von U nach unten vorgegeben. Zunächst wählen wir eine reelle Konstante $\alpha > 0$ mit

$$\Psi_s[(1+3\alpha)^6 - 1] \leq \frac{a}{4}, \quad \text{wobei} \quad \Psi_s := \sum_{r \in \mathbb{Z}^2} \Psi(|r|),$$

und wir wählen positive $l_j \in \mathbb{N}$, ($j \in \mathbb{N}$), so dass

$$\left| \frac{l_{j+1}}{l_j} - (1+2\alpha) \right| < \alpha \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Für $j \in \mathbb{N}$ seien ferner definiert

$$[j] := \{r \in \mathbb{Z}^2 : |r| \leq l_j\}, \quad \Lambda(j) := \bigcup_{r \in [j]} \Gamma_r \quad \text{und} \quad V_j := \lambda^2(\Lambda(j)) = (2l_j + 1)^2.$$

Wir wählen eine monoton wachsende Funktion $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\psi \geq 1, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \psi(l) = +\infty, \quad \sum_{r \in \mathbb{Z}^2} \psi(|r|) \Psi(|r|) < +\infty \quad \text{und} \quad \frac{\psi(l+1)}{\psi(l)} \leq \frac{l+1}{l}.$$

Hierbei kann man beispielsweise so vorgehen, dass man eine monoton wachsende Funktion $\tilde{\psi}$ mit den ersten drei Eigenschaften wählt und dann rekursiv

$$\psi(l+1) := \tilde{\psi}(l+1) \wedge \frac{l+1}{l} \psi(l)$$

definiert, so dass auch noch die vierte Eigenschaft erfüllt ist. Sei $\psi_j := \psi(l_j)$. Schließlich wählen wir noch $p \in \mathbb{N}$ gemäß folgendem Lemma:

Lemma 7 *Es gibt eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$, so dass die folgende Aussage gilt: Für jede Funktion $N : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, für die ein maximales natürliches $q \geq p$ existiert mit der Eigenschaft*

$$\sum_{r \in [q]} N(r)^2 \geq \psi_q V_q,$$

gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{r \in [q+1]} \sum_{s \notin [q+1]} \Psi(|s-r|) \left[\frac{1}{2} N(r)^2 + \frac{1}{2} N(s)^2 \right] \\ & \leq \sum_{r \in [q+1]} [aN(r)^2 - bN(r)] - \frac{a}{2} \sum_{r \in [q+1]} N(r)^2. \end{aligned}$$

Dieses Lemma taucht in [R] als Proposition 2.1 auf, und der Beweis kann einfach übernommen werden. Im Folgenden verwenden wir die Konstanten

$$\begin{aligned} \Psi_s(p) &:= (1+3\alpha)^3 \sum_{l \geq l_p} [\Psi(l) - \Psi(l+1)] \psi(l) (2l+1)^2, \\ C &:= \frac{1}{4} a (1+3\alpha)^{-3} \quad \text{und} \quad D := \frac{1}{2} (\Psi_s + \Psi(0)) \psi_p V_p + \Psi_s(p). \end{aligned}$$

Nach [R], (2.16), ist $\Psi_s(p)$ endlich, also sind alle Konstanten endlich. Wir definieren noch

$$q(Y) := \max\{q' \geq p : \sum_{r \in [q']} N_{\Gamma_r}(Y)^2 \geq \psi_{q'} V_{q'}\}, \quad (2.16)$$

wobei wir $\max \emptyset := -\infty$ setzen und das Maximum einer unbeschränkten Menge als ∞ definieren. $q(Y)$ kann daher Werte aus $\{p, p+1, \dots\} \cup \{\pm\infty\}$ annehmen. Für temperierte Konfigurationen $Y \in \mathcal{Y}_t$ gilt nach Definition aber grundsätzlich $q(Y) < \infty$. In [R], Proposition 2.5 wird nun obiges Lemma verwendet, um zu zeigen:

Lemma 8 *Sei $Y \in \mathcal{Y}$ und $q \in \{p, p+1, \dots\}$. Es gilt*

$$q(Y) = q \quad \Rightarrow \quad -H_{\Lambda(q+1)}^U(Y) \leq -\frac{a}{4} \sum_{r \in [q+1]} N_{\Gamma_r}(Y)^2 - C \psi_{q+1} V_{q+1}, \quad (2.17)$$

$$q(Y) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{r \notin [p]} \psi(|r|) N_{\Gamma_r}(Y)^2 \leq \Psi_s(p). \quad (2.18)$$

Wieder kann der Beweis einfach übernommen werden. Die beiden Abschätzungen aus Lemma 8 führen zu folgendem Ergebnis:

Lemma 9 Seien $z > 0$ und $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein Potential. Ist U superstabil und nach unten regulär, so hat (U, z, \mathfrak{Y}_t) die Ruelle-Schranke

$$\xi := e^D + \sum_{q \geq p} e^{zV_{q+1} - C\psi_{q+1}V_{q+1}}.$$

Beweis: Tatsächlich ist obiges $\xi < \infty$. Denn C und D sind endlich und wegen $\psi_q \rightarrow \infty$ für $q \rightarrow \infty$ gilt

$$zV_{q+1} - C\psi_{q+1}V_{q+1} \leq -V_{q+1} \leq -q,$$

falls nur q groß genug ist. Sei $\mu \in \mathcal{G}_{y_t}(U, z)$ ein temperiertes Gibbsmaß. Durch vollständige Induktion über m zeigen wir, dass für alle endlichen Konfigurationen $Y \in \mathfrak{Y}$ mit $\#Y = m$ gilt:

$$\rho^{U, \mu}(Y) \leq \xi^{\#Y}. \quad (2.19)$$

Für $m = 0$ ist $Y = \emptyset$. Wegen $\rho^{U, \mu}(\emptyset) = 1$ gilt in diesem Fall die Behauptung. Für den Induktionsschritt $m - 1 \rightarrow m$ sei $Y \in \mathfrak{Y}$ mit $0 < \#Y = m$. Wir wählen ein $y \in Y$ und $r_y \in \mathbb{Z}^2$ mit $y \in \Gamma_{r_y}$. Um die Korrelationsfunktion $\rho^{U, \mu}(Y)$ geeignet zerlegen zu können, definieren wir für $q \in \{-\infty\} \cup \{p, p+1, \dots\}$ unter Verwendung von (2.16)

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}_{t,q}(Y) &:= \{\bar{Y} \in \mathfrak{Y}_t : q = q(Y\bar{Y} - r_y)\} \quad \text{und} \\ \rho_q^{U, \mu}(Y) &:= e^{-H^U(Y)} \int \mu(d\bar{Y}) e^{-W^U(Y, \bar{Y})} \mathbf{1}_{\mathfrak{Y}_{t,q}(Y)}(\bar{Y}). \end{aligned}$$

Da mit \bar{Y} auch $Y\bar{Y} - r_y$ wieder eine temperierte Konfiguration ist, gilt

$$\mathfrak{Y}_t = \mathfrak{Y}_{t, -\infty}(Y) \cup \bigcup_{q \geq p} \mathfrak{Y}_{t,q}(Y) \quad \text{und somit} \quad \rho^{U, \mu}(Y) = \rho_{-\infty}^{U, \mu}(Y) + \sum_{q \geq p} \rho_q^{U, \mu}(Y).$$

Die Anteile der Korrelationsfunktion können nun einzeln abgeschätzt werden. Für $\bar{Y} \in \mathfrak{Y}_{t, -\infty}(Y)$ gilt wegen der Regularität nach unten:

$$\begin{aligned} -2W^U(y, Y\bar{Y} \setminus \{y\}) &\leq \sum_{r \in \mathbb{Z}^2(Y\bar{Y} \setminus \{y\})} \Psi(|r - r_y|) [1 + N_{\Gamma_r}^2(Y\bar{Y} \setminus \{y\})] \\ &\leq \sum_{r \in \mathbb{Z}^2} \Psi(|r|) + \Psi(0) \sum_{r \in [p]} N_{\Gamma_{r+r_y}}^2(Y\bar{Y}) + \sum_{r \notin [p]} \Psi(|r|) N_{\Gamma_{r+r_y}}^2(Y\bar{Y}) \\ &\leq \Psi_s + \Psi(0)\psi_p V_p + \Psi_s(p) = 2D. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir hier verwendet, dass wegen $\bar{Y} \in \mathfrak{Y}_{t, -\infty}(Y)$ definitionsgemäß $q(Y\bar{Y} - r_y) = -\infty$ ist. Die Abschätzung für den zweiten Summanden folgt daher sofort, und für den dritten Summanden haben wir (2.18) aus Lemma 8 auf $Y\bar{Y} - r_y$ angewandt. Nach Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned} \rho_{-\infty}^{U, \mu}(Y) &= e^{-H^U(Y \setminus \{y\})} \int \mu(d\bar{Y}) e^{-W^U((Y \setminus \{y\}), \bar{Y})} e^{-W^U(y, Y\bar{Y} \setminus \{y\})} \mathbf{1}_{\mathfrak{Y}_{t, -\infty}(Y)}(\bar{Y}) \\ &\leq e^D e^{-H^U(Y \setminus \{y\})} \int \mu(d\bar{Y}) e^{-W^U((Y \setminus \{y\}), \bar{Y})} \\ &= e^D \rho^{U, \mu}(Y \setminus \{y\}) \leq e^D \xi^{|Y|-1}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun für $q \geq p$ den Anteil der Korrelationsfunktion $\rho_q^{U,\mu}(Y)$. Zur Abkürzung definieren wir $\Lambda := \Lambda(q+1) + r_y$. Wegen (2.2) und der Definition der bedingten Gibbsverteilung ist

$$\rho_q^{U,\mu}(Y) = \int \mu(d\bar{Y}) \frac{1}{Z_\Lambda^{U,z}(\bar{Y})} \int \nu_\Lambda(dY'|\bar{Y}) 1_{\mathfrak{y}_{t,q}(Y)}(Y') \times e^{-H^U(Y) - W^U(Y,Y') - H_\Lambda^U(Y')}_{z \# Y'_\Lambda},$$

und weiter gilt

$$H^U(Y) + W^U(Y,Y') + H_\Lambda^U(Y') = H_\Lambda^U(Y,Y') + H^U(Y_{\Lambda^c}) + W^U(Y_{\Lambda^c}, Y'_\Lambda),$$

denn auf beiden Seiten kommen alle Wechselwirkungen vor bis auf die von Y'_Λ mit sich selbst. Wegen $Y' \in \mathfrak{y}_{t,q}(Y)$ kann man nun (2.17) aus Lemma 8 auf $YY' - r_y$ anwenden:

$$-H_\Lambda^U(YY') \leq -\frac{a}{4} \sum_{r \in [q+1]} N_{\Gamma_{r+r_y}}(YY')^2 - C\psi_{q+1}V_{q+1} \leq -C\psi_{q+1}V_{q+1}.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} \rho_q^{U,\mu}(Y) &\leq \int \mu(d\bar{Y}) \frac{1}{Z_\Lambda^{U,z}(\bar{Y})} \int \nu_\Lambda(dY'|\bar{Y}) 1_{\mathfrak{y}_{t,q}(Y)}(Y') \\ &\quad \times e^{-H^U(Y_{\Lambda^c}) - W^U(Y_{\Lambda^c}, Y'_\Lambda) - C\psi_{q+1}V_{q+1}}_{z \# Y'_\Lambda} \\ &\leq e^{-C\psi_{q+1}V_{q+1} - H^U(Y_{\Lambda^c})} \int \mu(d\bar{Y}) \frac{1}{Z_\Lambda^{U,z}(\bar{Y})} e^{-W^U(Y_{\Lambda^c}, \bar{Y}_{\Lambda^c})} e^{-\lambda^2(\Lambda)} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda^2(\Lambda)z)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Wegen

$$e^{-\lambda^2(\Lambda)} \frac{1}{Z_\Lambda^{U,z}(\bar{Y})} e^{-W^U(Y_{\Lambda^c}, \bar{Y}_{\Lambda^c})} = \int \gamma_\Lambda^U(dY'|\bar{Y}) 1_{\{Y'_\Lambda = \emptyset\}} e^{-W^U(Y_{\Lambda^c}, Y')}$$

erhalten wir mittels (2.2) durch Abschätzen der Indikatorfunktion

$$\begin{aligned} \rho_q^{U,\mu}(Y) &\leq e^{zV_{q+1} - C\psi_{q+1}V_{q+1}} e^{-H^U(Y_{\Lambda^c})} \int \mu(d\bar{Y}) e^{-W^U(Y_{\Lambda^c}, \bar{Y})} \\ &= e^{zV_{q+1} - C\psi_{q+1}V_{q+1}} \rho^{U,\mu}(Y_{\Lambda^c}) \leq e^{zV_{q+1} - C\psi_{q+1}V_{q+1}} \xi^{m-1} \end{aligned}$$

nach Induktionsvoraussetzung, da $\#Y_{\Lambda^c} \leq m-1$ und $\xi \geq 1$. Durch Zusammensetzen der Abschätzungen der Bestandteile der Korrelationsfunktion ergibt sich

$$\rho^{U,\mu}(Y) \leq e^D \xi^{m-1} + \sum_{q \geq p} e^{zV_{q+1} - C\psi_{q+1}V_{q+1}} \xi^{m-1} \leq \xi^m$$

nach Wahl von ξ . Damit ist nun auch der Induktionsschritt gezeigt. \square

2.6.4 Messbarkeit: Lemma 3

Messbarkeitseigenschaften von Punktprozessen werden ausführlich in vielen Büchern besprochen, siehe etwa [DV], [K] oder [MKM]. Die Messbarkeit des ersten Terms von (2.8) ist Teil des Satzes von Campbell, und man zeigt sie wie den Messbarkeitsteil des Satzes von Fubini: Für Funktionen der Form $f = 1_{P \times A}$ mit $P \in \mathcal{F}$ und $A \in \mathcal{B}^2 \otimes \mathcal{F}_S$ folgt die Aussage sofort aus der Definition der σ -Algebra

\mathcal{F}_Y . Nun kann man die Richtigkeit der Behauptung nacheinander für messbare Indikatorfunktionen, Treppenfunktionen, nichtnegative Funktionen und schließlich für messbare Funktionen zeigen. Für den Rest von (2.8) genügt die Beobachtung, dass für alle $A \in \mathcal{B}^2 \otimes \mathcal{F}_S$ gilt:

$$N_A(Y_1 \cap Y_2) = \sum_{y_1 \in Y_1} \sum_{y_2 \in Y_2} 1_{\{y_1=y_2\}} 1_{\{y_1 \in A\}}, \quad N_A(Y_1 \setminus Y_2) = N_A(Y_1) - N_A(Y_1 \cap Y_2),$$

$$N_A(Y_1 \cup Y_2) = N_A(Y_1) + N_A(Y_2 \setminus Y_1) \quad \text{und} \quad N_A(g_t(Y)) = \sum_{y' \in Y} 1_A(g_t(y')).$$

Für die Terme in (2.9) zeigt man die Messbarkeit völlig analog. Weiter gilt für $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}^2 \otimes \mathcal{F}_S$ und $y' \in \mathbb{R}^2 \times S$

$$\inf_{y' \in Y} f_1(p, y') < c \Leftrightarrow \sum_{y' \in Y} 1_{\{f_1(p, y') < c\}} \geq 1,$$

$$N_A(\{y' \in Y : f_1(p, y') = 0\}) = \sum_{y' \in Y} 1_{\{f_1(p, y') = 0, y' \in A\}},$$

$$y' \in C_{Y,B}(y) \Leftrightarrow \sum_{m \geq 0} \sum_{y_0, \dots, y_m \in Y} 1_{\{y=y_0, y'=y_m\}} \prod_{i=1}^m 1_{\{y_i y_{i+1} \in B\}} \geq 1 \quad \text{und}$$

$$N_A(C_{Y,B}(y)) = \sum_{y' \in Y} 1_{\{y' \in C_{Y,B}(x), y' \in A\}}.$$

Ist $L \in \mathcal{F}_{E(\mathbb{R}^2 \times S)}$, so gibt es ein $L' \in (\mathcal{B}^2 \times S)^2$ mit

$$L = \{y_1 y_2 \in E(\mathbb{R}^2 \times S) : (y_1, y_2) \in L'\}$$

und es gilt

$$N_L(E(Y)) = \frac{1}{2} \sum_{y_1 \in Y} \sum_{y_2 \in Y \setminus \{y_1\}} 1_{\{(y_1, y_2) \in L'\}}.$$

Aus diesen Relationen folgt die Messbarkeit der Terme in (2.10). Ist $k \in \mathbb{N}$, so besteht (Y, B) genau dann aus höchstens k Clustern, wenn

$$\sum_{y_1, \dots, y_k \in Y} 1_{\{Y \setminus (C_{Y,B}(y_1) \cup \dots \cup C_{Y,B}(y_k)) = \emptyset\}} \geq 1.$$

Hieraus schließlich folgt die Messbarkeit der Clusteranzahl.

2.6.5 Messbare Erweiterungen: Lemma 4

Sei $A \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$ messbar, so dass (2.13) für alle Schnitte von A erfüllt ist. Sei $\epsilon > 0$. Wir definieren eine Funktion $f : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ durch

$$f(x, \sigma, x', \sigma') := \lambda^2(A(x, \sigma, \sigma') \cap B_2(x', \epsilon)).$$

Nach dem Satz von Fubini ist f messbar, und für $x, x' \in \mathbb{R}^2, \sigma, \sigma' \in S$ ist

$$f(x, \sigma, x', \sigma') > 0 \Leftrightarrow B_2(x', \epsilon) \cap A(x, \sigma, \sigma') \neq \emptyset \Leftrightarrow (x, \sigma, x', \sigma') \in A_\epsilon,$$

was sich unmittelbar aus (2.13) ergibt. Also ist $A_\epsilon = \{f > 0\}$ eine messbare Menge. Sei nun $A \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$ messbar, so dass die Menge der inneren Punkte von $A(x, \sigma, \sigma')$ dicht in $A(x, \sigma, \sigma')$ liegt. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $U \cap A(x, \sigma, \sigma') \neq \emptyset$. Nach Voraussetzung liegt dann in $U \cap A(x, \sigma, \sigma')$ eine offene Kreisscheibe, also ist $\lambda^2(U \cap A(x, \sigma, \sigma')) > 0$. Damit haben wir in diesem Fall Bedingung (2.13) gezeigt.

Kapitel 3

Spintransformationen

3.1 Resultat

3.1.1 G-glatt approximierbare Potentiale

In diesem Abschnitt betrachten wir reine Spintransformationen auf $\mathbb{R}^2 \times S$. Wie schon erwähnt können diese gleich als Transformationen auf S aufgefasst werden. Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist nun das folgende:

Satz 1 *Seien (S, \mathcal{F}_S) ein Standard-Borel-Raum, λ_S ein Wahrscheinlichkeitsmaß darauf, G eine Transformationsgruppe auf S und (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke, wobei $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein Standard-Potential ist. Gilt*

$$\begin{aligned} \lambda_S &\text{ ist } G\text{-invariant und} \\ U &\text{ ist } G\text{-invariant und } G\text{-glatt approximierbar,} \end{aligned}$$

so ist auch jedes auf \mathcal{Y}_0 konzentrierte Gibbsmaß $\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z)$ invariant unter G .

Bevor wir die im Satz entscheidende Eigenschaft der G -glatten Approximierbarkeit definieren, benötigen wir eine Verschärfung des Begriffs der G -invarianten Menge:

Definition 11 *Eine Menge $A \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$ heißt vollkommen G -invariant, falls*

$$\forall (y, y') \in A, g, g' \in G : (g(y), g'(y')) \in A.$$

Definition 12 *Sei (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ , wobei $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein G -invariantes Standard-Potential ist. U heißt G -glatt approximierbar, falls es eine Zerlegung von U in einen G -glatten Anteil \bar{U} und einen kleinen Störungsanteil u in folgendem Sinn gibt:*

Es existieren eine vollkommen G -invariante Standard-Menge $K \supset K^U$, eine bpqi-Funktion ψ und messbare symmetrische G -invariante Funktionen $\bar{U}, u : K^c \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} U &= \bar{U} - u \text{ auf } K^c, \quad u \geq 0 \text{ auf } K^c, \\ \bar{U} &\text{ hat auf } K^c \text{ durch } \psi \text{ dominierte } G\text{-Ableitungen,} \\ \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int (1_{K^c} \bar{u})(y_1, y_2) |y_1 - y_2|^2 dy_2 &< \infty \text{ und} \\ \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int (1_{K \setminus K^U} + 1_{K^c} \bar{u})(y_1, y_2) dy_2 &< \frac{1}{z\xi}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei $\bar{u} := 1 - e^{-u} \leq u \wedge 1$ ist.

Man beachte noch, dass Bedingung (3.1) nicht von der Wahl der Norm abhängt. Die Klasse der G -glatt approximierbaren G -invarianten Standard-Potentiale ist eine reichhaltige Klasse von Potentialen. Ein G -glatt approximierbares G -invariantes Standard-Potential kann eine Singularität im Ursprung oder einen harten Kern haben. Die Bedingungen an den harten Kern sind dabei relativ schwach: Er soll als Standard-Menge lediglich beschränkte Reichweite haben, und es soll möglich sein, ihn zu einer vollkommenen G -invarianten Standard-Menge K zu vergrößern, ohne dass die Differenz $K \setminus K^U$ im Sinne der letzten Bedingung in (3.1) zu groß wird. Diese approximative vollkommene G -Invarianz des harten Kerns bedeutet allerdings nicht, dass K^U gar nicht vom Spin abhängen darf. Beispielsweise ist der interessante Fall eingeschlossen, dass der Spin neben der Komponente, auf die die Transformationen wirken, auch noch andere hat, in denen unter anderem der Teilchentyp kodiert sein könnte. K und demnach auch der harte Kern und das Eintauchverhalten in den harten Kern bzw. die Singularität dürfen also durchaus vom Teilchentyp abhängen. Tatsächlich werden auf der Menge $K \setminus K^U$ überhaupt keine Eigenschaften von U vorausgesetzt, und für niedrige Aktivität z kann dieser Bereich nach der letzten Bedingung in (3.1) sogar sehr groß gewählt werden. Die entscheidende Eigenschaft von G -approximierbaren Potentialen ist deren Zerlegbarkeit in einen glatten Anteil \bar{U} und einen Störungsanteil u . Da an u keinerlei Regularitätsbedingungen gestellt sind, braucht U weder differenzierbar noch stetig zu sein. An den Störungsanteil u werden lediglich zwei Integrierbarkeitsbedingungen gestellt, die im Wesentlichen $u \wedge 1$ betreffen. Der glatte Anteil \bar{U} dagegen hat die in diesem Zusammenhang üblichen Regularitätsbedingungen, allerdings auch nur außerhalb von K .

Definition 12 für G -glatt approximierbare Potentiale ist für unseren Beweis von Satz 1 maßgeschneidert, dabei aber relativ kompliziert. Die folgende Proposition gibt ein einfacheres hinreichendes Kriterium.

Proposition 4 *Sei (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ , wobei $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein Potential der Form*

$$U(x_1, \sigma_1, x_2, \sigma_2) = J(x_1 - x_2)V(\sigma_1, \sigma_2) + L(x_1 - x_2)$$

sei, so dass $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $V : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbare symmetrische Funktionen sind. Es gelte:

V ist auf S^2 gleichgradig G -stetig, beschränkt und G -invariant,

L hat einen kompakten harten Kern K^L und

$$\forall \epsilon > 0 : \int \mathbf{1}_{(K_\epsilon^L)^c}(x) |J(x)| |x|^2 dx < \infty \text{ und } J \text{ ist beschränkt auf } (K_\epsilon^L)^c,$$

wobei $K_\epsilon^L := \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x, K^L) < \epsilon\}$ die ϵ -Erweiterung von K^L bezüglich der von der euklidischen Norm induzierten Metrik sein soll. Dann ist U ein G -invariantes Standard-Potential, das G -glatt approximierbar ist.

Ist S ein kompakter topologischer Raum und U ein Potential von obiger Form, so dass sowohl V als auch die Operation von G auf V stetig sind, so ist die Operation von G auf V automatisch gleichgradig stetig und V ist beschränkt. Diesen Fall hatten wir in [R11] behandelt, und zwar unter der Zusatzvoraussetzung, dass J beschränkt ist.

3.1.2 Vergleich mit dem Resultat von Shlosman

Wir wollen unser Resultat mit früheren Resultaten vergleichen, um Unterschiede aufzeigen zu können. Das erste Resultat für Symmetrieerhaltung von reinen Spinsymmetrien bei Gibbsschen Punktprozessen, das keine so restriktiven Annahmen wie beschränkte Teilchendichten benötigt, ist das Ergebnis von S. B. Shlosman in [Sh]. Im Kern von dessen Beweis steht ein lokaler Grenzwertsatz für die Faltung von Wahrscheinlichkeitsdichten. Die Struktur des Arguments wird damit eine völlig andere, und dementsprechend sind die Voraussetzungen von anderer Art:

Satz 2 *Seien (S, \mathcal{F}_S) ein Spinraum, λ_S ein Wahrscheinlichkeitsmaß darauf, G eine zusammenhängende kompakte Liegruppe, die messbar auf S operiert, und sei (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel. Hierbei sei U ein Standard-Potential der Form*

$$U(x, \sigma, x', \sigma') = J(x - x')V(\sigma, \sigma'),$$

wobei $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $V : S^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ messbare symmetrische Funktionen sind, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_S \text{ ist } G\text{-invariant, } U \text{ ist } (*)\text{-superstabil, } J \text{ hat endliche Reichweite,} \\ V \text{ ist } G\text{-glatt und } G\text{-invariant und } \sup_{\sigma_1, \sigma_2, h} \partial_h^2 V(\sigma_1, \sigma_2) < \infty. \end{aligned}$$

Dann ist auch jedes stationäre Gibbsmaß $\mu \in \mathcal{G}_{y_0}(U, z)$ invariant unter G .

Statt einer einparametrischen Transformationsgruppe wird eine kompakte zusammenhängende Liegruppe betrachtet. Entsprechend ist hier unter ∂_h^2 die Ableitung in Richtung eines Tangentialvektors h mit $\|h\| = 1$ zu verstehen. Es wird angenommen, dass U von einer speziellen Gestalt ist, die am ehesten mit der Gestalt in Proposition 4 verglichen werden kann. Der wesentliche Unterschied zu unserem Resultat ist die Glattheitsbedingung sowie die Forderung endlicher Reichweite des Potentials. Dafür gibt es keinerlei Voraussetzungen an den harten Kern. Superstabilität wird hier in einer etwas verschärften Form gefordert, die insbesondere impliziert, dass $0 < b \leq V \leq B < \infty$ mit reellen Konstanten $b, B \in \mathbb{R}$ gilt. Schließlich werden nur solche Gibbsmaße betrachtet, die eine gewisse schwache Stationaritätsbedingung erfüllen.

Mit unserem Resultat besser vergleichbar ist das Resultat aus [G2] von H.-O. Georgii:

Satz 3 *Seien (S, \mathcal{F}_S) ein Standard-Borel-Raum, λ_S ein σ -finites Maß darauf, G eine einparametrische Transformationsgruppe auf S und (U, z, \mathcal{Y}_t) ein zulässiges Tripel, wobei $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein G -invariantes Potential sei. Der harte Kern von U sei leer oder von der Form*

$$K^U = \{(y_1, y_2) : |y_1 - y_2|_n \leq \delta\},$$

wobei $|\cdot|_n$ eine beliebige Norm auf \mathbb{R}^2 und $\delta \geq 0$ eine reelle Zahl ist. Außerdem gelte

$$|\partial_G^2 U(y_1, y_2)| \leq \psi(|y_1 - y_2|) \quad \text{für alle } (y_1, y_2) \in (K^U)^c$$

mit einer monoton fallenden Funktion $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\int \psi(r)r^3 dr < \infty$. Dann ist jedes temperierte Gibbsmaß $\mu \in \mathcal{G}_{y_t}(U, z)$ G -invariant.

Der wesentliche Unterschied zu unserem Resultat ist wieder die Glattheitsbedingung, die wir stark abgeschwächt haben. Dafür kann hier auf die Existenz einer Ruelle-Schranke verzichtet werden, es müssen also beispielsweise keinerlei Superstabilitätsannahmen gemacht werden. Eben solche Annahmen benötigen wir, um mit der fehlenden Glattheit zurechtzukommen. Aber auch im glatten Fall gibt es noch Unterschiede: Zum einen können wir allgemeinere harte Kerne betrachten, und zum anderen machen wir überhaupt keine Annahme über das Eintauchverhalten des Potentials in die Singularität, während in Satz 3 nur Potentiale betrachtet werden, deren G -Ableitungen in der Umgebung des Kerns bzw. der Singularität beschränkt sind.

3.2 Beweis von Satz 1

Der Beweis unterscheidet sich an einigen wesentlichen Stellen technisch und konzeptionell von unserem Beweis in [Ri1]. Dies ist einerseits eine Folge der etwas allgemeineren Formulierung des Satzes, andererseits arbeiten wir hier mit einem Spin-abhängigen Kantenprozess. Dadurch können wir zwar auf stochastische Dominierung verzichten, dafür wird die Transformation auf dem Konfigurationsraum komplizierter. Wir haben diese Veränderungen vorgenommen, um den Beweis dem des nächsten Kapitels anzugleichen und so schon wesentliche Ideen des Beweises im Fall der Translation vorzubereiten.

3.2.1 Konstanten

Seien (S, \mathcal{F}_S) ein Standard-Borel-Raum, λ_S ein Wahrscheinlichkeitsmaß darauf, G eine einparametrische Transformationsgruppe auf S und (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ , wobei $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein Standard-Potential ist. Es gelte

$$\begin{aligned} \lambda_S &\text{ ist } G\text{-invariant und} \\ U &\text{ ist } G\text{-invariant und } G\text{-glatt approximierbar.} \end{aligned}$$

Dann gibt eine vollkommen G -invariante Standard-Menge $K \supset K^U$, eine bpqi-Funktion ψ und eine Zerlegung von U in messbare symmetrische G -invariante Funktionen $\bar{U} : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $u : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} U &= \bar{U} - u \text{ und } u \geq 0 \text{ auf } (\mathbb{R}^2 \times S)^2, \quad u = 0 \text{ auf } K, \\ \bar{U} &\text{ hat auf } K^c \text{ durch } \psi \text{ dominierte } G\text{-Ableitungen,} \end{aligned} \tag{3.2}$$

sowie

$$\begin{aligned} c_u &:= \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int \tilde{u}(y_1, y_2) |y_1 - y_2|^2 dy_2 < \infty \quad \text{und} \\ c_\xi &:= \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int (1_{K \setminus K^U} + \tilde{u})(y_1, y_2) dy_2 < \frac{1}{z\xi}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

wobei $\tilde{u} = 1 - e^{-u}$ sein soll. Wir benötigen außerdem die Konstanten

$$\begin{aligned} c_\psi &:= \|\psi\| \vee \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int \psi(y_1, y_2) (|y_1 - y_2|^2 \vee 1) dy_2 \quad \text{und} \\ c_K &:= \sup\{|y_1 - y_2| : (y_1, y_2) \in K\}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

die endlich sind, da nach Voraussetzung ψ eine $bpqi$ -Funktion ist und K endliche Reichweite hat. Wir zeigen die G -Invarianz aller Gibbsmaße mit Kriterium (2.6) aus Proposition 3, daher betrachten wir ein festes $\mu \in \mathcal{G}_{y_0}(U, z)$, einen festen Transformationsparameter $\tau \in \mathbb{R}$ und eine feste Zylindermenge $D \in \mathcal{F}_{y, \Lambda_{n'}}$ mit $n' \in \mathbb{N}$. Ohne Einschränkung können wir $\tau > 0$ wählen. Gemäß dem modifizierten Kriterium (2.7) geben wir außerdem ein festes reelles $\delta > 0$ vor. Im ganzen Beweis werden wir Abhängigkeiten von obigen Parametern und Konstanten in den Notationen nicht berücksichtigen.

3.2.2 Zerlegung von μ und Kantenprozess

Für $n \in \mathbb{N}$ und $Y \in \mathcal{Y}$ betrachten wir die Kantenmenge

$$E_n(Y) := E_{\Lambda_n}(Y) = \{y_1 y_2 \in E(Y) : y_1 y_2 \cap \Lambda_n \neq \emptyset\}.$$

Auf dem Ereignisraum $(\mathcal{E}_{E_n(Y)}, \mathcal{B}_{E_n(Y)})$ sei $\pi_n(\cdot|Y)$ das Bernoullimaß zur Familie von Wahrscheinlichkeiten

$$(\tilde{u}(b))_{b \in E_n(Y)} \quad \text{mit} \quad \tilde{u}(b) := 1 - e^{-u(b)}.$$

Wegen $0 \leq u < \infty$ gilt tatsächlich $0 \leq \tilde{u}(b) < 1$ für alle Kanten $b \in E_n(Y)$. Wie in der Einführung erwähnt, kann $\pi_n(\cdot|Y)$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_{\mathcal{E}})$ fortgesetzt werden. Für alle $D \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ ist $\pi_n(D|\cdot)$ $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$ -messbar, also ist π_n ein Wahrscheinlichkeitskern von $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_{\mathcal{Y}})$ nach $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_{\mathcal{E}})$.

Lemma 10 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G_n'' := \{Y \in \mathcal{Y}_0 : \sum_{b \in E_n(Y)} \tilde{u}(b) < \infty\}$. Es gilt

$$\mu \otimes \nu_{\Lambda_n}(G_n'') = 1 \quad \text{und} \quad \mu(G_n'') = 1.$$

Für jedes $Y \in G_n''$ gilt nach dem Lemma von Borel-Cantelli, dass bezüglich $\pi_n(\cdot|Y)$ jede Kantenmenge fast sicher endlich ist, d.h. $\pi_n(\cdot|Y)$ hat seine ganze Masse auf der abzählbaren Menge der endlichen Teilmengen $B \subset E_n(Y)$:

$$\sum'_{B \subset E_n(Y)} \pi_n(\{B\}|Y) = 1,$$

wobei das Summenzeichen \sum' andeuten soll, dass sich die Summe nur über endliche Teilmengen erstrecken soll. Es gilt

$$\pi_n(\{B\}|Y) = \prod_{b \in B} \tilde{u}(b) \prod_{b \in E_n(Y) \setminus B} (1 - \tilde{u}(b)) = e^{-H_{\Lambda_n}^u(Y)} \prod_{b \in B} (e^{u(b)} - 1),$$

daher ist insbesondere für jedes $Y \in G_n''$ der Hamiltonian $H_{\Lambda_n}^u(Y)$ endlich. In diesem Fall ergibt sich aus der Zerlegung des Potentials also eine entsprechende Zerlegung des Hamiltonians

$$H_{\Lambda_n}^U(Y) = H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(Y) - H_{\Lambda_n}^u(Y).$$

Zusammen mit der Zerlegungseigenschaft der Gibbsmaße (2.2) folgt für jede $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}} \otimes \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ -messbare Funktion $f \geq 0$

$$\begin{aligned} \int \mu \otimes \pi_n f &= \int \mu(d\bar{Y}) \frac{1}{Z_{\Lambda_n}(\bar{Y})} \int \nu_{\Lambda_n}(dY|\bar{Y}) \sum'_{B \subset E_n(Y)} f(Y, B) \\ &\quad \times z^{\#Y_{\Lambda_n}} e^{-H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(Y)} \prod_{b \in B} (e^{u(b)} - 1), \end{aligned} \tag{3.5}$$

wobei wir verwendet haben, dass wir nach Lemma 10 auf beiden Seiten von (3.5) annehmen können, dass $Y \in G_n''$ ist, und somit obige Umformungen erlaubt sind. Falls f nicht von B abhängt, steht auf der linken Seite von (3.5) gerade die μ -Erwartung von f , da π_n ein Wahrscheinlichkeitskern ist; die rechte Seite besagt, dass die Störung u des G -glaten Potentials \bar{U} in einem Kantenprozess B kodiert ist, so dass die Störung nur solche Teilchenpaare y_1, y_2 betrifft, deren Verbindungskante $y_1 y_2$ in B ist.

Neben $\pi_n(\cdot|Y)$ betrachten wir auf dem Ereignisraum $(\mathcal{E}_{E_n(Y)}, \mathcal{B}_{E_n(Y)})$ auch das auf die endlichen Kantenmengen konzentrierte Zählmaß $\pi_n'(\cdot|Y)$. Wie π_n kann auch π_n' als Wahrscheinlichkeitskern von $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_\mathcal{Y})$ nach $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_\mathcal{E})$ betrachtet werden. Für alle $\mathcal{F}_\mathcal{E}$ -messbaren Funktionen $f \geq 0$ gilt

$$\int \pi_n'(dB|Y)f(B) = \sum'_{B \subset E_n(Y)} f(B).$$

3.2.3 Verallgemeinerte Transformation

Für $n > n'$, $Y \in \mathcal{Y}$ und $B \subset E_n(Y)$ seien

$$B_+ := B \cup \{y_1 y_2 \in E_n(Y) : (y_1, y_2) \in K\}$$

die erweiterte Kantenmenge und

$$r_{Y, B_+}(\Lambda) = \sup\{|y'| : y' \in C_{Y, B_+}(\Lambda)\}$$

die Reichweite des von $\Lambda \in \mathcal{B}_b^2$ ausgehenden B_+ -Clusters. Wir betrachten nun speziell den von $\Lambda_{n'}$ ausgehenden B_+ -Cluster, wobei $n' \in \mathbb{N}$ die im Abschnitt 3.2.1 fest gewählte natürliche Zahl ist.

Lemma 11 *Es gilt* $\sup_{n > n'} \int \mu \otimes \pi_n(dY, dB) r_{Y, B_+}(\Lambda_{n'}) < \infty$.

Nach der Ungleichung von Čebyšev können wir daher eine natürliche Zahl $R > n'$ wählen, die nicht von n abhängt, so dass das Ereignis

$$G'_n := \{(Y, B) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{E} : r_{Y, B_+}(\Lambda_{n'}) < R, B \subset E_n(Y)\} \in \mathcal{F}_\mathcal{Y} \otimes \mathcal{F}_\mathcal{E}$$

für jedes $n > n'$ die Wahrscheinlichkeit

$$\mu \otimes \pi_n(G'_n) \geq 1 - \frac{\delta}{2}$$

hat. Für $n > R$ definieren wir die Funktionen

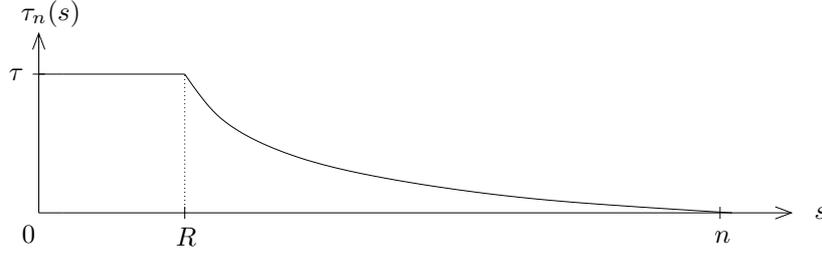
$$q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \tau_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\begin{aligned} q(s) &:= \frac{1}{1 \vee (s \log(s))}, & Q(k) &:= \int_0^k q(s) ds, \\ r(s, k) &:= \int_{(s \vee 0) \wedge k}^k \frac{q(s')}{Q(k)} ds', & \tau_n(s) &:= \tau r(s - R, n - R). \end{aligned}$$

Abbildung 3.1 zeigt den Graphen von τ_n . Wichtige Eigenschaften von τ_n sind:

$$\begin{aligned} \tau_n(s) &= \tau \quad \text{für } s \leq R, & \tau_n(s) &= 0 \quad \text{für } s \geq n \\ & & & \text{und } \tau_n \text{ ist monoton fallend.} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Abbildung 3.1: Graph von τ_n

Durch

$$T_n^0 : \mathbb{R}^2 \times S \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S, \quad T_n^0(y) := g_{\tau_n(|y|)}(y)$$

wird nun eine Transformation auf $\mathbb{R}^2 \times S$ gegeben, die man auch als Transformation auf \mathcal{Y} betrachten kann, bei der jedes Teilchen y der Konfiguration Y der Transformation zum ortsabhängigen Parameter $\tau_n(|y|)$ unterworfen wird. Wir wollen diese verallgemeinerte Transformation T_n^0 als Hilfsmittel in unserem Beweis verwenden; man vergleiche dazu die Vorgehensweise in [G2].

3.2.4 Gute Konfigurationen

Um die im Kantenprozess kodierte Störung u und das unspezifizierte Verhalten des Potentials in K in den Griff zu bekommen, werden wir T_n^0 durch eine Transformation

$$\mathfrak{T}_n : \mathcal{Y} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{E}$$

ersetzen, die folgende Eigenschaften haben soll:

- (1) Ist B eine Menge von Kanten zwischen Teilchen in Y , so ergibt sich die transformierte Konfiguration $(\tilde{Y}, \tilde{B}) = \mathfrak{T}_n(Y, B)$ dadurch, dass jedes Teilchen $y \in Y$ an seinem Ort bleibt und sein Spin mittels $g_{t_{n,Y,B}(y)}$ transformiert wird.
- (2) Der Transformationsparameter $t_{n,Y,B}(y)$ darf von der Gesamtkonfiguration (Y, B) abhängen, d.h. wir verlangen nicht, dass die Teilchen unabhängig voneinander transformiert werden.
- (3) Teilchen im Innenbereich Λ_n werden mittels g_τ transformiert, und Teilchen im Außenbereich Λ_n^c werden gar nicht transformiert.
- (4) Teilchen, die durch eine Kante aus B verbunden sind, werden derselben Transformation unterworfen.
- (5) \mathfrak{T}_n ist bijektiv, und das Referenzmaß $\nu \otimes \pi'_n$ ist invariant unter \mathfrak{T}_n .
- (6) Es existiert eine geeignete Abschätzung des Hamiltonians $H_{\Lambda_n}^{\tilde{U}}(\tilde{Y})$. Letzteres bedeutet insbesondere, dass auch Teilchen $y, y' \in Y$ mit $(y, y') \in K$ derselben Transformation unterworfen werden sollen.

Eigenschaft (3) impliziert, dass die Transformation der gewählten Zylindermenge D mittels g_τ gleichbedeutend ist mit der Transformation dieser Menge durch \mathfrak{T}_n . (4)-(6) fordern wir im Hinblick auf die linke Seite von (3.5). Hat nämlich \mathfrak{T}_n diese Eigenschaften, so lässt sich die Dichte des durch \mathfrak{T}_n transformierten Prozesses

bezüglich des untransformierten Prozesses unter dem Maß $\mu \otimes \pi_n$ leicht angeben. Somit erscheint eine derartige Transformation \mathfrak{T}_n als geeignetes Werkzeug, um eine (2.7) ähnelnde Abschätzung zu erhalten. Allerdings sind sicher nicht alle obigen Eigenschaften gleichzeitig erfüllbar, denn beispielsweise ist es möglich, dass Innen- und Außenbereich über Kanten miteinander verbunden sind; daher sind Eigenschaften (3) und (4) nicht gleichzeitig erfüllbar. Falls allerdings $n > R$ und $(Y, B) \in G'_n$ ist, kann genau diese Situation nicht eintreten, und gemäß Lemma 11 ist dies immerhin mit hoher Wahrscheinlichkeit der Fall. Bei den anderen Eigenschaften ergeben sich ähnliche Probleme, so dass wir damit zufrieden sein werden, obige Eigenschaften für alle (Y, B) aus einer gewissen Menge von guten Konfigurationen

$$G_n := \left\{ (Y, B) \in G'_n : \sum_{i=1}^2 \Sigma_i(n, Y, B) < 1 \right\} \in \mathcal{F}_Y \otimes \mathcal{F}_E \quad (3.7)$$

zu erhalten. Die Funktionen $\Sigma_i(n, Y, B)$ werden wir genau an den Stellen definieren, wo wir erzwingen wollen, dass gute Konfigurationen eine bestimmte Eigenschaft haben sollen. Später, in Lemma 16, werden wir dann zeigen, dass die Menge der guten Konfigurationen G_n nahezu Wahrscheinlichkeit 1 hat, falls nur n groß genug gewählt wird. Bis dahin sei $n \geq R + 1$ fest gewählt.

3.2.5 Modifikation der verallgemeinerten Transformation

Seien $Y \in \mathcal{Y}$ und $B \subset E_n(Y)$ eine endliche Teilmenge. Wir wollen $t_{n,Y,B}$ und $\mathfrak{T}_n(Y, B)$ konstruieren. Eine mögliche Wahl von $t_{n,Y,B}$, die die im letzten Abschnitt geforderten Eigenschaften hat, ist

$$t_{n,Y,B} : Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad t_{n,Y,B}(y) := \min \{ \tau_n(|y'|) : y' \in C_{Y,B_+}(y) \}.$$

Da nach (3.6) $\tau_n(x) = 0$ für $|x| \geq n$ ist, wird dieses Minimum tatsächlich angenommen. Wir wollen eine messbare Funktion angeben, die die Position eines Teilchens liefert, in dem das Minimum angenommen wird. Später werden wir benötigen, dass diese Konstruktion nur sehr indirekt von den Teilchenspins abhängt. Wir wählen daher zuerst eine messbare Hilfsfunktion $h_n : \{(X, x) : X \in \mathcal{X}, x \in X\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$h_n(X, x) \in X, \quad |h_n(X, x)| \geq |x| \quad \text{und} \quad \tau_n(|h_n(X, x)|) = \min \{ \tau_n(|x'|) : x' \in X \}.$$

Beispielsweise können wir h_n folgendermaßen wählen: Für $X \subset \Lambda_n$ ist X endlich, und wir definieren $h_n(X, x)$ als den Punkt von X mit maximalem $|\cdot|$ -Abstand vom Ursprung. (Gibt es mehrere solche, so wählen wir unter diesen denjenigen, der maximal ist bezüglich der lexikographischen Ordnung.) Ist $X \cap \Lambda_n^c \neq \emptyset$ und $x \in \Lambda_n^c$ so setzen wir $h_n(X, x) := x$. Ist schließlich $X \cap \Lambda_n^c \neq \emptyset$ und $x \in \Lambda_n$, so sei $h_n(X, x)$ derjenige Punkt von $X \cap \Lambda_n^c$ mit minimalem $|\cdot|$ -Abstand vom Ursprung. (Gibt es mehrere solche, so wählen wir unter diesen denjenigen, der maximal ist bezüglich der lexikographischen Ordnung auf \mathbb{R}^2 .) Für $Y \in \mathcal{Y}$, $B \in E_n(Y)$ und $y \in Y$ sei nun

$$a_{n,Y,B_+}^o(y) := h_n(p(C_{Y,B_+}(y)), p(y)).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n,Y,B_+}^o(y) &\in p(C_{Y,B_+}(y)), & |a_{n,Y,B_+}^o(y)| &\geq |y| \\ \text{und} \quad t_{n,Y,B}(y) &= \tau_n(|a_{n,Y,B_+}^o(y)|). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Außerdem gilt nach Konstruktion

$$t_{n,Y,B}(y) = t_{n,Y,B}(y') \quad \forall y, y' \in Y \text{ mit } y \xleftrightarrow{Y,B} y'. \quad (3.9)$$

Nun kommen wir zur Definition der deformierten Transformation. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{n,B}(Y) &:= \{g_{t_{n,Y,B}(y)}y : y \in Y\} = \{(x, g_{t_{n,Y,B}(y)}\sigma) : (x, \sigma) \in Y\} \quad \text{und} \\ \mathfrak{T}_{n,Y}(B) &:= \{g_{t_{n,Y,B}(y)}y g_{t_{n,Y,B}(y')}y' : yy' \in B\}. \end{aligned}$$

Falls B nicht wie oben gefordert eine endliche Teilmenge von $E_n(Y)$ ist, so setzen wir $\mathfrak{T}_{n,B} = id$ und $\mathfrak{T}_{n,Y} = id$. Die deformierte Transformation sei nun definiert durch

$$\mathfrak{T}_n : \mathcal{Y} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{E}, \quad \mathfrak{T}_n(Y, B) := (\mathfrak{T}_{n,B}(Y), \mathfrak{T}_{n,Y}(B)).$$

Unter Verwendung von Lemma 3 kann gezeigt werden, dass alle eben definierten Objekte messbar bezüglich der betrachteten σ -Algebren sind. Wir wollen gemäß Kriterium (2.7) auch die Transformation in Gegenrichtung betrachten. Seien also die Objekte $\bar{\mathfrak{T}}_n$, $\bar{\mathfrak{T}}_{n,B}$ und $\bar{\mathfrak{T}}_{n,Y}$ analog zu obigen Objekten definiert, wobei statt dem Transformationsparameter $t_{n,Y,B}$ der Transformationsparameter $\bar{t}_{n,Y,B} := -t_{n,Y,B}$ verwendet werden soll. Das folgende Lemma gilt dann analog für die Transformation in Gegenrichtung.

Lemma 12 *Für gute Konfigurationen $(Y, B) \in G_n$ ist*

$$(\mathfrak{T}_{n,B}Y)_{\Lambda_n'} = (g_\tau Y)_{\Lambda_n'} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{T}_{n,B}Y)_{\Lambda_n^c} = Y_{\Lambda_n^c}. \quad (3.10)$$

Entscheidende Eigenschaften von \mathfrak{T}_n sind nun, dass \mathfrak{T}_n bijektiv ist und dass wir das Transformationsverhalten von $\nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n$ unter \mathfrak{T}_n bestimmen können:

Lemma 13 *Die Transformation $\mathfrak{T}_n : \mathcal{Y} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{E}$ ist bijektiv mit $\bar{\mathfrak{T}}_n$ als Inversem.*

Lemma 14 *Das Maß $\nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(\cdot|\bar{Y})$ ist für alle $\bar{Y} \in \mathcal{Y}$ invariant unter \mathfrak{T}_n .*

3.2.6 Schlussargument des Beweises

Aus Zerlegung (3.5) und Lemma 14 ergibt sich

$$\begin{aligned} &\mu \otimes \pi_n(\mathfrak{T}_n(D \cap G_n)) \\ &= \int \mu(d\bar{Y}) \frac{1}{Z_{\Lambda_n}(\bar{Y})} \int \nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(dY, dB|\bar{Y}) \\ &\quad 1_{\mathfrak{T}_n(D \cap G_n)}(Y, B) z^{\#Y_{\Lambda_n}} e^{-H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(Y)} \prod_{b \in B} (e^{u(b)} - 1) \\ &= \int \mu(d\bar{Y}) \frac{1}{Z_{\Lambda_n}(\bar{Y})} \int \nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(dY, dB|\bar{Y}) \\ &\quad 1_{\mathfrak{T}_n(D \cap G_n)} \circ \mathfrak{T}_n(Y, B) z^{\#(\mathfrak{T}_{n,B}Y)_{\Lambda_n}} e^{-H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\mathfrak{T}_{n,B}Y)} \prod_{b \in \mathfrak{T}_{n,Y}B} (e^{u(b)} - 1). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Menge D mit $D \times \mathcal{E}$ identifiziert. Im letzten Term ist nun

$$\begin{aligned} 1_{\mathfrak{T}_n(D \cap G_n)} \circ \mathfrak{T}_n &= 1_{D \cap G_n} && \text{wegen Lemma 13,} \\ \#(\mathfrak{T}_{n,B}Y)_{\Lambda_n} &= \#Y_{\Lambda_n} && \text{nach Konstruktion und} \\ \prod_{b \in \mathfrak{T}_{n,Y}B} (e^{u(b)} - 1) &= \prod_{b \in B} (e^{u(b)} - 1) && \text{wegen (3.9) und der } G\text{-Invarianz von } u. \end{aligned}$$

Daher lässt sich obiger Integrand zu

$$1_{D \cap G_n}(Y, B) z^{\#Y_{\Lambda_n}} e^{-H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\mathfrak{X}_{n,B}Y)} \prod_{b \in B} (e^{u(b)} - 1)$$

vereinfachen, und Analoges ergibt sich für die Rückwärtstransformation $\bar{\mathfrak{X}}_n$. Es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{e}{2} \mu \otimes \pi_n(\bar{\mathfrak{X}}_n(D \cap G_n)) + \frac{e}{2} \mu \otimes \pi_n(\mathfrak{X}_n(D \cap G_n)) - \mu \otimes \pi_n(D \cap G_n) \\ &= \int \mu(d\bar{Y}) \frac{1}{Z_{\Lambda_n}(\bar{Y})} \int \nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(dY, dB|\bar{Y}) 1_{D \cap G_n}(Y, B) z^{\#Y_{\Lambda_n}} \prod_{b \in B} (e^{u(b)} - 1) \\ & \quad \times \left[\frac{e}{2} (e^{-H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\bar{T}_{n,B}Y)} + e^{-H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(T_{n,B}Y)}) - e^{-H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(Y)} \right], \end{aligned}$$

und der letzte Term des Integranden ist nichtnegativ; denn wegen der Konvexität der Exponentialfunktion ist

$$\frac{1}{2} (e^{-H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\bar{T}_{n,B}Y)} + e^{-H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(T_{n,B}Y)}) \geq e^{-\frac{1}{2}H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\bar{T}_{n,B}Y) - \frac{1}{2}H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(T_{n,B}Y)},$$

und für gute Konfigurationen haben wir folgende Abschätzung für Hamiltonians:

Lemma 15 *Für $(Y, B) \in G_n$ gilt*

$$H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\bar{\mathfrak{X}}_{n,B}Y) + H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\mathfrak{X}_{n,B}Y) \leq 2H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(Y) + 1. \quad (3.11)$$

Insgesamt erhalten wir daher

$$\frac{e}{2} \mu \otimes \pi_n(\bar{\mathfrak{X}}_n(D \cap G_n)) + \frac{e}{2} \mu \otimes \pi_n(\mathfrak{X}_n(D \cap G_n)) \geq \mu \otimes \pi_n(D \cap G_n). \quad (3.12)$$

In (3.12) würden wir gerne $D \cap G_n$ durch D ersetzen. Der dabei gemachte Fehler bleibt klein, falls die Menge der guten Konfigurationen G_n eine hohe Wahrscheinlichkeit hat.

Lemma 16 *Falls $n \geq R + 1$ groß genug gewählt wird, ist $\mu \otimes \pi_n(G_n^c) \leq \delta$.*

Für den Beweis von Satz 1 sei nun ein solches $n \geq R + 1$ fest gewählt. Wegen $D \in \mathcal{F}_{\mathfrak{y}, \Lambda_{n'}}$ und (3.10) gilt

$$\forall (Y, B) \in D \cap G_n : (\mathfrak{X}_{n,B}Y)_{\Lambda_{n'}} \in g_\tau D.$$

Analoges gilt für die Transformation in Gegenrichtung, also folgt

$$\mathfrak{X}_n(D \cap G_n) \subset g_\tau D \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{X}}_n(D \cap G_n) \subset g_{-\tau} D.$$

Mit Hilfe dieser Inklusionen folgt aus (3.12) unter Verwendung von Lemma 16

$$\frac{e}{2} \mu(g_{-\tau} D) + \frac{e}{2} \mu(g_\tau D) \geq \mu(D) - \delta.$$

Da $\delta > 0$ beliebig gewählt war, folgt im Limes $\delta \rightarrow 0$ die Abschätzung (2.6). Da aber auch $\mu \in \mathcal{G}_{\mathfrak{y}_0}(U, z)$, $\tau > 0$, $n' \in \mathbb{N}$ und $D \in \mathcal{F}_{\mathfrak{y}, \Lambda_{n'}}$ beliebig vorgegeben waren, ergibt sich die Behauptung somit aus dem hinreichenden Kriterium für Symmetriehaltung von Proposition 3.

3.3 Beweis der Lemmata

3.3.1 Konvergenz des Hamiltonians: Lemma 10

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $Y \in \mathcal{Y}$. Wegen

$$H_{\Lambda_n}^{\tilde{u}}(Y) = \sum_{b \in E_n(Y)} \tilde{u}(b) \leq \sum_{y_1, y_2 \in Y}^{\neq} 1_{\{y_1 \in \Lambda_n\}} \tilde{u}(y_1, y_2)$$

gilt für alle $\bar{Y} \in \mathcal{Y}$

$$\int \nu_{\Lambda_n}(dY|\bar{Y}) H_{\Lambda_n}^{\tilde{u}}(Y) \leq \int_{\Lambda_n} dy_1 \left(\int_{\Lambda_n} dy_2 \tilde{u}(y_1, y_2) + \sum_{y_2 \in \bar{Y}_{\Lambda_n^c}} \tilde{u}(y_1, y_2) \right).$$

Mittels Lemma 2 ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \int \mu \otimes \nu_{\Lambda_n}(dY) H_{\Lambda_n}^{\tilde{u}}(Y) &\leq \int_{\Lambda_n} dy_1 \left(\int_{\Lambda_n} dy_2 \tilde{u}(y_1, y_2) + z\xi \int_{\Lambda_n^c} dy_2 \tilde{u}(y_1, y_2) \right) \\ &\leq \int_{\Lambda_n} dy_1 (1 + z\xi) c_\xi \leq 4n^2 (1 + z\xi) c_\xi, \end{aligned}$$

wobei wir die Integrale über y_2 durch c_ξ abgeschätzt haben, vergleiche (3.3). Da der letzte Term einen endlichen Wert hat, ist die erste Behauptung gezeigt, und die zweite folgt hieraus, da μ wegen (2.2) und der Definition der bedingten Gibbsverteilung absolutstetig zu $\mu \otimes \nu_{\Lambda_n}$ ist.

3.3.2 Beschränkte Cluster-Reichweite: Lemma 11

Für $n > n'$, $Y \in \mathcal{Y}$ und $B \subset E_n(Y)$ schätzen wir die Clusterreichweite $r_{Y, B_+}(\Lambda_{n'})$ ab. Dazu betrachten wir zunächst einen Pfad y_0, \dots, y_m im Graphen (Y, B_+) mit $y_0 \in \Lambda_{n'}$ und ein k mit $1 \leq k \leq m$, so dass auf dem Pfad gerade die $|\cdot|$ -Länge der Kante $y_{k-1}y_k$ maximal ist. Es gilt dann

$$|y_m| \leq |y_0| + \sum_{i=1}^m |y_i - y_{i-1}| \leq n' + m|y_k - y_{k-1}|.$$

Durch Betrachtung aller Möglichkeiten für solche Pfade und Kanten maximaler Länge folgt

$$r_{Y, B_+}(\Lambda_{n'}) \leq n' + \sum_{m \geq 1} \sum_{k=1}^m \sum_{y_0, \dots, y_m \in Y}^{\neq} 1_{\{y_0 \in \Lambda_{n'}\}} m |y_k - y_{k-1}| \prod_{i=1}^m 1_{\{y_i y_{i-1} \in B_+\}}.$$

Unter dem Bernoullimaß $\pi_n(dB|Y)$ sind die Ereignisse $\{y_i y_{i-1} \in B_+\}$ unabhängig, und es gilt

$$\int \pi_n(dB|Y) 1_{\{y_i y_{i-1} \in B_+\}} \leq 1_{K^U}(y_{i-1}, y_i) + g(y_{i-1}, y_i), \quad (3.13)$$

wobei die Hilfsfunktion $g : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g := 1_{K \setminus K^U} + \tilde{u}$ definiert ist. Unter Verwendung der Eigenschaft des harten Kerns (2.3) folgt

$$\begin{aligned} R_n &:= \int \mu(dY) \int \pi_n(dB|Y) r_{Y, B_+}(\Lambda_{n'}) - n' \\ &\leq \sum_{m \geq 1} \sum_{k=1}^m \int \mu(dY) \sum_{y_0, \dots, y_m \in Y}^{\neq} 1_{\{y_0 \in \Lambda_{n'}\}} m |y_k - y_{k-1}| \prod_{i=1}^m g(y_{i-1}, y_i) \\ &\leq \sum_{m \geq 1} \sum_{k=1}^m (z\xi)^{m+1} \int dy_0 \dots dy_m 1_{\{y_0 \in \Lambda_{n'}\}} m |y_k - y_{k-1}| \prod_{i=1}^m g(y_{i-1}, y_i), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt noch Lemma 2 verwendet haben. Nach (3.3) und (3.4) gilt aber für alle $y \in \mathbb{R}^2 \times S$

$$\int g(y, y') |y - y'| dy' \leq \int g(y, y') (1 + |y - y'|^2) dy' \leq c_g \quad (3.14)$$

mit $c_g := (1 + c_K^2) c_\xi + c_u$, und $\int g(y, y') dy' \leq c_\xi$.

Daher können wir die Integrale über dy_i der Reihe nach von $i = m$ bis 1 auswerten. Dazu schätzen wir in jedem Schritt das Integral über dy_i durch eine der obigen Konstanten ab. Durch die m Integrationen erhalten wir genau einen Faktor c_g und $(m - 1)$ Faktoren c_ξ , während die Integration über dy_0 schließlich noch einen zusätzlichen Faktor $\lambda^2(\Lambda_{n'}) = (2n')^2$ liefert. Es ist demnach

$$R_n \leq (2n' z \xi)^2 c_g \sum_{m \geq 1} m^2 (c_\xi z \xi)^{m-1} < \infty,$$

wobei der Wert der Summe wegen $c_\xi z \xi < 1$ endlich ist.

3.3.3 Deformierte Transformation: Lemma 12

Sei $(Y, B) \in G_n$. Für ein Teilchen $y \in Y$ gelten dann folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} y \in \Lambda_{n'} &\Rightarrow a_{n, Y, B_+}^o(y) \in \Lambda_R \Rightarrow t_{n, Y, B}(y) = \tau \quad \text{und} \\ y \in \Lambda_n^c &\Rightarrow a_{n, Y, B_+}^o(y) \in \Lambda_n^c \Rightarrow t_{n, Y, B}(y) = 0. \end{aligned}$$

Hierbei gilt die erste Implikation nach Definition der Clusterreichweite R bzw. wegen $|a_{n, Y, B_+}^o(y)| \geq |y|$ aus (3.8), und die zweite Implikation folgt jeweils aus den Eigenschaften von τ_n (3.6), da nach (3.8) $t_{n, Y, B}(y) = \tau_n(|a_{n, Y, B_+}^o(y)|)$ ist. Damit ist die Behauptung (3.10) bewiesen.

3.3.4 Bijektivität der Transformation: Lemma 13

Seien $Y \in \mathcal{Y}$, $B \in \mathcal{E}$ und $(\tilde{Y}, \tilde{B}) := \mathfrak{T}_n(Y, B)$. Falls B keine endliche Teilmenge von $E(Y)$ ist, so gilt $(\tilde{Y}, \tilde{B}) = \mathfrak{T}_n(Y, B) = (Y, B)$ und $\bar{\mathfrak{T}}_n(\tilde{Y}, \tilde{B}) = (Y, B)$. Anderenfalls folgt aus der vollkommenen G -Invarianz von K

$$(y, y') \in K \Leftrightarrow (g_{t_{n, Y, B}(y)} y, g_{t_{n, Y, B}(y')} y') \in K,$$

daher sind die \tilde{B}_+ -Cluster von (\tilde{Y}, \tilde{B}) gerade die transformierten B_+ -Cluster von (Y, B) . Da sich bei der Transformation die Teilchenpositionen nicht ändern, gilt daher für alle $y \in Y$ nach Definition des äußersten Punktes eines Clusters

$$a_{n, Y, B_+}^o(y) = a_{n, \tilde{Y}, \tilde{B}_+}^o(\tilde{y}) \quad \text{mit } \tilde{y} := g_{t_{n, Y, B}(y)} y.$$

Sei nun $y \in Y$. Bei der Konstruktion von (\tilde{Y}, \tilde{B}) wird y zum Transformationsparameter $t_{n, Y, B}(y)$ transformiert. Das dabei entstehende Teilchen \tilde{y} wird bei der Konstruktion der Rücktransformation zum Transformationsparameter $\bar{t}_{n, \tilde{Y}, \tilde{B}}(\tilde{y}) = -t_{n, \tilde{Y}, \tilde{B}}(\tilde{y})$ transformiert. Nach Obigem gilt aber

$$\bar{t}_{n, \tilde{Y}, \tilde{B}}(\tilde{y}) + t_{n, Y, B}(y) = -\tau_n(|a_{n, \tilde{Y}, \tilde{B}_+}^o(\tilde{y})|) + \tau_n(|a_{n, Y, B_+}^o(y)|) = 0,$$

somit erhalten wir wieder y zurück. Auch in diesem Fall ist also $\bar{\mathfrak{T}}_n(\tilde{Y}, \tilde{B}) = (Y, B)$. Es folgt $\bar{\mathfrak{T}}_n \circ \mathfrak{T}_n = id$, und $\mathfrak{T}_n \circ \bar{\mathfrak{T}}_n = id$ zeigt man völlig analog.

3.3.5 Invarianz des Referenzmaßes: Lemma 14

Für die \mathfrak{T}_n -Invarianz von $\nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(\cdot|\bar{Y})$ ist zu zeigen, dass für jede $\mathcal{F}_y \otimes \mathcal{F}_E$ -messbare Funktion $f \geq 0$ gilt:

$$\int \nu_{\Lambda_n}(dY|\bar{Y}) \sum'_{B \subset E_n(Y)} f \circ \mathfrak{T}_n(Y, B) = \int \nu_{\Lambda_n}(dY|\bar{Y}) \sum'_{B \subset E_n(Y)} f(Y, B). \quad (3.15)$$

Sei also $\bar{Y} \in \mathcal{Y}$ und $f \geq 0$ messbar. Definitionsgemäß lässt sich die linke Seite von (3.15) darstellen als

$$e^{-4n^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} I(k) \quad \text{mit} \quad I(k) = \int_{\Lambda_n^k} dy \sum'_{B \subset E_n(\bar{Y}_y)} f \circ \mathfrak{T}_n(\bar{Y}_y, B),$$

wobei wir die Bezeichnung $\bar{Y}_y = \{y_1, \dots, y_k\} \cup \bar{Y}_{\Lambda_n^c}$ verwenden. Wir würden gerne eine Kantenmenge B festlegen, bevor wir die Zustände y_i der Teilchen festlegen. Wir führen daher Kanten zwischen Indices anstelle der Kanten zwischen Teilchen ein. Sei dazu $\mathbb{N}_k := \{1, \dots, k\}$,

$$\bar{Y}^k := \mathbb{N}_k \cup \bar{Y}_{\Lambda_n^c} \quad \text{und} \quad E_n(\bar{Y}^k) := \{y_1 y_2 \in E(\bar{Y}^k) : y_1 y_2 \cap \mathbb{N}_k \neq \emptyset\}.$$

Für $B \subset E_n(\bar{Y}^k)$ und eine Folge von k Zuständen $y \in (\Lambda_n \times S)^k$ definieren wir B_y als diejenige Kantenmenge, die entsteht, wenn bei jeder Kante der Menge B der Endpunkt i durch y_i ersetzt wird. Wie schon eben verwenden wir außerdem die zur Folge gehörige Konfiguration $\bar{Y}_y = \{y_i : i \in \mathbb{N}_k\} \cup \bar{Y}_{\Lambda_n^c}$. Mit Hilfe dieser Kurznotationen erhalten wir

$$I(k) = \sum'_{B \subset E_n(\bar{Y}^k)} \int_{\Lambda_n^k} dx I(k, B, x) \quad \text{mit} \quad I(k, B, x) := \int_{S^k} d\sigma f \circ \mathfrak{T}_n(\bar{Y}_{(x, \sigma)}, B_{(x, \sigma)}).$$

Das Bild von $(\bar{Y}_{(x, \sigma)}, B_{(x, \sigma)})$ unter \mathfrak{T}_n besteht nun aber genau aus den Teilchen mit Ort x_i und Spin σ'_i , wobei σ'_i aus σ_i durch die Transformation zum Parameter $t_{n, \bar{Y}_{(x, \sigma)}, B_{(x, \sigma)}}(x_i, \sigma_i)$ hervorgeht. Würde dieser Parameter nicht von σ abhängen, könnten wir jetzt die G -Invarianz von λ_S anwenden. Bei der Definition des Transformationsparameters gehen die Spins aber nur insofern ein, als bei den zu betrachtenden B_+ -Clustern auch Kanten berücksichtigt werden müssen, deren zugehörige Teilchenpaare in K liegen. Wir definieren daher für $x \in \Lambda_n^k$, $B' \subset E_n(\bar{Y}^k)$ die Menge $A_{k, x, B'}$ aller Spins, so dass B' gerade die Kantenmenge all solcher Teilchenpaare ist:

$$A_{k, x, B'} := \{\sigma \in S^k : \forall yy' \in E_n(\bar{Y}^k)_{(x, \sigma)} : yy' \in B'_{(x, \sigma)} \Leftrightarrow (y, y') \in K\}.$$

Besteht B' aus unendlich vielen Kanten, so ist $A_{k, x, B'}$ leer, denn für $yy' \in E_n(\bar{Y}^k)_{(x, \sigma)}$ mit $(y, y') \in K$ ist $yy' \subset \Lambda_{n+c_K}$, aber Λ_{n+c_K} kann nur endlich viele Teilchen enthalten. Durch eine vollständige Fallunterscheidung nach B' erhalten wir somit

$$I(k, B, x) = \sum'_{B' \subset E_n(\bar{Y}^k)} \int_{S^k} d\sigma 1_{A_{k, x, B'}}(\sigma) f \circ \mathfrak{T}_n(\bar{Y}_{(x, \sigma)}, B_{(x, \sigma)}).$$

Die Summanden der letzten Summe bezeichnen wir mit $I(k, B, x, B')$. Ist nun $\sigma \in A_{k, x, B'}$, so gilt aber

$$\begin{aligned} t_{n, \bar{Y}_{(x, \sigma)}, B_{(x, \sigma)}}(x_i, \sigma_i) &= \tau_n(|a_{n, \bar{Y}_{(x, \sigma)}, B_{(x, \sigma)}}^o(x_i, \sigma_i)|) \\ &= \tau_n(|h_n((C_{\bar{Y}^k, B \cup B'}(i))_x, x_i)|) =: t_{k, B, x, B'}(i), \end{aligned}$$

wobei $(C_{\bar{Y}^k, B \cup B'}(i))_x \in \mathcal{X}$ diejenige Konfiguration von Positionen sein soll, die aus $C_{\bar{Y}^k, B \cup B'}(i)$ entsteht, wenn jeder Punkt $j \in C_{\bar{Y}^k, B \cup B'}(i)$ durch x_j ersetzt wird und jedes $y \in C_{\bar{Y}^k, B \cup B'}(i)$ durch seine Position $p(y)$. Die wesentliche Beobachtung ist nun, dass der Transformationsparameter $t_{k, B, x, B'}(i)$ gar nicht mehr von der Spinkonfiguration abhängt, solange nur sichergestellt ist, dass $\sigma \in A_{k, x, B'}$ ist. Mit

$$g_{k, B, x, B'} : S^k \rightarrow S^k, \quad (g_{k, B, x, B'}(\sigma))_i := g_{t_{k, B, x, B'}(i)}(\sigma_i)$$

gilt für $\sigma \in A_{k, x, B'}$ also

$$\mathfrak{T}_n(\bar{Y}_{(x, \sigma)}, B_{(x, \sigma)}) = (\bar{Y}_{(x, g_{k, B, x, B'}(\sigma))}, B_{(x, g_{k, B, x, B'}(\sigma))}),$$

und wegen der vollkommenen G -Invarianz von K gilt außerdem

$$1_{A_{k, x, B'}}(\sigma) = 1_{A_{k, x, B'}}(g_{k, B, x, B'}(\sigma)).$$

Unter Verwendung der Abkürzung

$$F_{k, B, x, B'} : S^k \rightarrow S^k, \quad F_{k, B, x, B'}(\sigma) := 1_{A_{k, x, B'}}(\sigma) f(\bar{Y}_{(x, \sigma)}, B_{(x, \sigma)})$$

folgt

$$I(k, B, x, B') = \int_{S^k} d\sigma F_{k, B, x, B'}(g_{k, B, x, B'}(\sigma)),$$

und wegen der G -Invarianz von λ_S ist $\lambda_S^k \circ g_{k, B, x, B'}^{-1} = \lambda_S^k$ und daher

$$I(k, B, x, B') = \int_{S^k} d\sigma F_{k, B, x, B'}(\sigma) = \int_{S^k} d\sigma 1_{A_{k, x, B'}}(\sigma) f(\bar{Y}_{(x, \sigma)}, B_{(x, \sigma)}).$$

Damit sind wir aber fertig, da dieselbe Argumentation zeigt, dass die rechte Seite von (3.15) geschrieben werden kann als

$$e^{-4n^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum'_{B \subset E_n(\bar{Y}^k)} \int_{\Lambda_n^k} dx \sum'_{B' \subset E_n(\bar{Y}^k)} \int_{S^k} d\sigma 1_{A_{k, x, B'}}(\sigma) f(\bar{Y}_{(x, \sigma)}, B_{(x, \sigma)}).$$

3.3.6 Abschätzung der Energie: Lemma 15

Für $y, y' \in \mathbb{R}^2 \times S$ und $\vartheta \in [-1, 1]$ mit $(y, g_s y') \notin K$ für alle $s \in [-\vartheta, \vartheta]$ gilt

$$\begin{aligned} \bar{U}(y, g_\vartheta y') + \bar{U}(y, g_{-\vartheta} y') - 2\bar{U}(y, y') &= \varphi_{y, y'}^{\bar{U}}(\vartheta) + \varphi_{y, y'}^{\bar{U}}(-\vartheta) - 2\varphi_{y, y'}^{\bar{U}}(0) \\ &\leq \sup_{s \in [-\vartheta, \vartheta]} \frac{d^2}{dt^2} \varphi_{y, y'}^{\bar{U}}(s) \vartheta^2 = \sup_{s \in [-\vartheta, \vartheta]} \partial_G^2 \bar{U}(y, g_s y') \vartheta^2 \end{aligned}$$

nach Taylor-Entwicklung von $\varphi_{y, y'}^{\bar{U}}$, was wegen der G -Glattheit von \bar{U} möglich ist. Die ψ -Dominierung der G -Ableitungen liefert

$$\sup_{s \in [-\vartheta, \vartheta]} \partial_G^2 \bar{U}(y, g_s y') \leq \psi(y, y').$$

Sei nun $(Y, B) \in G_n$. Ohne Einschränkung können wir die rechte Seite von (3.11) als endlich voraussetzen. Unter Verwendung der Kurzschreibweisen

$$\begin{aligned} \vartheta_{y, y'} &:= t_{n, Y, B}(y') - t_{n, Y, B}(y) \quad \text{für } y, y' \in E_n(Y) \quad \text{und} \\ E_{n, K}(Y) &:= \{yy' \in E_n(Y) : (y, y') \notin K\} \quad \text{für } Y \in \mathcal{Y} \end{aligned}$$

ist dann

$$\begin{aligned}
& H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\bar{\mathfrak{X}}_{n,B}Y) + H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\mathfrak{X}_{n,B}Y) - 2H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(Y) \\
&= \sum_{yy' \in E_{n,K}(Y)} [\bar{U}(y, g_{-\vartheta_{y,y'}}(y')) + \bar{U}(y, g_{\vartheta_{y,y'}}(y')) - 2\bar{U}(y, y')] \\
&\leq \sum_{yy' \in E_{n,K}(Y)} \psi(y, y') (t_{n,Y,B}(y) - t_{n,Y,B}(y'))^2 =: f_n(Y, B).
\end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir verwendet, dass \bar{U} G -invariant ist und dass wegen (3.9) für $(y, y') \in K$ $\vartheta_{y,y'} = 0$ ist, und im zweiten Schritt konnten wir obige Taylorabschätzung verwenden, da für $(y, y') \notin K$ wegen der vorausgesetzten vollkommenen G -Invarianz auch $(y, g_s y') \notin K$ für alle $s \in [-\vartheta, \vartheta]$ ist. Nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem quadratischen Mittel ist

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} \left((t_{n,Y,B}(y) - \tau_n(|y|)) + (\tau_n(|y|) - \tau_n(|y'|)) + (\tau_n(|y'|) - t_{n,Y,B}(y')) \right)^2 \\
&\leq (t_{n,Y,B}(y) - \tau_n(|y|))^2 + (\tau_n(|y|) - \tau_n(|y'|))^2 + (\tau_n(|y'|) - t_{n,Y,B}(y'))^2,
\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
f_n(Y, B) &\leq 6 \sum_{y,y' \in Y}^{\neq} \psi(y, y') (\tau_n(|y|) - t_{n,Y,B}(y))^2 \\
&\quad + 3 \sum_{y,y' \in Y}^{\neq} 1_{\{|y| \leq |y'|\}} \psi(y, y') (\tau_n(|y|) - \tau_n(|y'|))^2.
\end{aligned}$$

In der ersten Summe auf der rechten Seite folgt unter Verwendung der Eigenschaften (3.8) von a_{n,Y,B_+}^o

$$\begin{aligned}
(\tau_n(|y|) - t_{n,Y,B}(y))^2 &= (\tau_n(|y|) - \tau_n(|a_{n,Y,B_+}^o(y)|))^2 \\
&\leq \sum_{y'' \in Y} 1_{\{|y| \leq |y''|\}} 1_{\{y \xleftrightarrow{Y,B_+} y''\}} (\tau_n(|y|) - \tau_n(|y''|))^2.
\end{aligned}$$

Durch Unterscheidung der Fälle $y'' \neq y, y'$ und $y'' = y'$ können wir daher $f_n(Y, B)$ durch die Summe der beiden folgenden Ausdrücke abschätzen:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(n, Y, B) &:= 6 \sum_{y,y',y'' \in Y}^{\neq} 1_{\{y \xleftrightarrow{Y,B_+} y''\}} \psi(y, y') 1_{\{|y| \leq |y''|\}} |\tau_n(|y|) - \tau_n(|y''|)|^2, \\
\Sigma_2(n, Y) &:= 9 \sum_{y,y'' \in Y}^{\neq} \psi(y, y'') 1_{\{|y| \leq |y''|\}} |\tau_n(|y|) - \tau_n(|y''|)|^2.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Verwenden wir diese Summen bei der Definition von G_n in (3.7), erhalten wir die Behauptung (3.11).

3.3.7 Gute Konfigurationen: Lemma 16

Die in der Definition (3.7) der Menge der guten Konfigurationen verwendeten Funktionen $\Sigma_i(n, Y, B)$ haben wir in (3.16) angegeben. Mit Hilfe der Abkürzung

$$\tau_n^q(y, y'') := 1_{\{|y| \leq |y''|\}} |\tau_n(|y|) - \tau_n(|y''|)|^2$$

lassen sie sich schreiben als

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(n, Y, B) &= 6 \sum_{y,y',y'' \in Y}^{\neq} 1_{\{y \xleftrightarrow{Y,B_+} y''\}} \psi(y, y') \tau_n^q(y, y'') \quad \text{und} \\
\Sigma_2(n, Y) &= 9 \sum_{y,y'' \in Y}^{\neq} \psi(y, y'') \tau_n^q(y, y'').
\end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass die Erwartung der beiden Funktionen Σ_i beliebig klein wird, wenn wir n groß genug wählen. Zuerst werden wir aber noch einige Tatsachen vorstellen, die wir später brauchen.

Vorbereitungen

Sei $n \geq R + 1$. Für $s' > s$ mit $s' > R$ und $s < n$ gilt

$$0 \leq r(s - R, n - R) - r(s' - R, n - R) = \int_{R \vee s}^{s' \wedge n} \frac{q(t - R)}{Q(n - R)} dt \leq (s' - s) \frac{q(s - R)}{Q(n - R)}$$

wegen der Monotonie von q . Dies impliziert dann

$$\tau_n^q(x, x') \leq 1_{\{x \in \Lambda_n\}} \tau^2 (|x'| - |x|)^2 \frac{q(|x| - R)^2}{Q(n - R)^2} \quad \text{für } x, x' \in \mathbb{R}^2, \quad (3.17)$$

indem wir $s' := |x'|$ und $s := |x|$ substituieren. (Falls $s' \leq R$ oder $s \geq n$ ist, so gilt sogar $\tau_n^q(x, x') = 0$.) Wir wollen nun untersuchen, wie wir die Terme auf der rechten Seite von (3.17) kontrollieren können. Zuerst bemerken wir, dass

$$\int_{\Lambda_n} dx q(|x| - R)^2 \leq 16R^2 + 32Q(n - R) \quad \text{für } n \geq 2R. \quad (3.18)$$

Schreiben wir nämlich $s := |x|$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_n} dx q(|x| - R)^2 &\leq \int_0^{2R} ds 8s + \int_R^{n-R} ds 8(s + R)q(s)^2 \\ &\leq 16R^2 + 32 \int_0^{n-R} q(s) ds \leq 16R^2 + 32Q(n - R). \end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir $q \leq 1$ verwendet, und im zweiten Schritt $s + R \leq 2s$ und $sq(s) \leq 2$. Außerdem erhalten wir $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \infty$ als Konsequenz von $\log \log n \leq Q(n)$ für $n > 1$. Aus (3.18) folgt daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_n} dx \frac{q(|x| - R)^2}{Q(n - R)^2} = 0. \quad (3.19)$$

Schließlich gilt für $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^2$ nach der Dreiecksungleichung

$$\left| |x_m| - |x_0| \right| \leq m \bigvee_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}|, \quad \text{also } (|x_m| - |x_0|)^2 \leq m^2 \bigvee_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}|^2. \quad (3.20)$$

Abschätzung der Terme Σ_i

Wir verwenden die Ideen aus dem Beweis von Lemma 11. Für $Y \in \mathcal{Y}$ und $B \subset E_n(Y)$ schätzen wir die Summanden von $\Sigma_1(n, Y, B)$ ab, indem wir alle Möglichkeiten für Pfade y_0, \dots, y_m von $y = y_0$ bis $y'' = y_m$ im Graphen (Y, B_+) betrachten und die Fälle $y_j = y'$ und $y_j \neq y' \forall j$ unterscheiden. Nach (3.17) und (3.20) können wir dann $\Sigma_1(n, Y, B)$ abschätzen durch

$$\begin{aligned} &6\tau^2 \sum_{m \geq 0} m^2 \sum_{k=1}^m \sum_{y_0, \dots, y_m \in Y}^{\neq} 1_{\{y_0 \in \Lambda_n\}} \frac{q(|y_0| - R)^2}{Q(n - R)^2} |y_k - y_{k-1}|^2 \\ &\times \prod_{i=1}^m 1_{\{y_i, y_{i-1} \in B_+\}} \left[\sum_{y' \in Y, y' \neq y_i \forall i} \psi(y_0, y') + \sum_{j=1}^{m-1} \psi(y_0, y_j) \right]. \end{aligned}$$

Die zweite Summe in den eckigen Klammern ist höchstens $c_\psi m$. Unter Verwendung von Lemma 2, der Integralabschätzungen (3.13), (3.14) und (3.4) folgt daher genauso wie im Beweis von Lemma 11:

$$\begin{aligned} & \int \mu(dY) \int \pi_n(dB|Y) \Sigma_1(n, Y, B) \\ & \leq 6\tau^2 \sum_{m \geq 0} m^2 \sum_{k=1}^m (z\xi)^{m+1} \int dy_0 \dots dy_m 1_{\{y_0 \in \Lambda_n\}} \frac{q(|y_0| - R)^2}{Q(n - R)^2} |y_k - y_{k-1}|^2 \\ & \quad \times \prod_{i=1}^m g(y_{i-1}, y_i) \left[z\xi \int dy' \psi(y_0, y') + c_\psi m \right] \\ & \leq (z\xi)^2 c_g 6\tau^2 \sum_{m \geq 0} m^3 (c_\xi z\xi)^{m-1} \int_{\Lambda_n} dy_0 \frac{q(|y_0| - R)^2}{Q(n - R)^2} (z\xi c_\psi + c_\psi m). \end{aligned}$$

Nach (3.19) wird der letzte Ausdruck beliebig klein, falls nur n groß genug ist. Analog gilt

$$\int \mu(dY) \Sigma_2(n, Y) \leq 9(z\xi\tau)^2 c_\psi \int_{\Lambda_n} dy \frac{q(|y| - R)^2}{Q(n - R)^2},$$

und auch dieser Ausdruck wird beliebig klein, falls nur n groß genug ist. Insgesamt erhalten wir

$$\int \mu \otimes \pi_n(d(Y, B)) \sum_{i=1}^2 \Sigma_i(n, Y, B) \leq \frac{\delta}{2}$$

für genügend große natürliche Zahlen n , und $\mu \otimes \pi_n(G_n^c) \leq \delta$ folgt daraus unter Verwendung der Ungleichung von Čebyšev, der hohen Wahrscheinlichkeit von G_n' und der Definition von G_n in (3.7).

3.4 Approximierbarkeit: Proposition 4

Sei (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ , wobei $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein Potential der Form

$$U(x_1, \sigma_1, x_2, \sigma_2) = J(x_1 - x_2)V(\sigma_1, \sigma_2) + L(x_1 - x_2)$$

sei, so dass $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $V : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbare symmetrische Funktionen sind. Es gelte:

V ist auf S^2 gleichgradig G -stetig, beschränkt und G -invariant,

L hat einen kompakten harten Kern K^L , und

$$\forall \epsilon > 0 : \int 1_{(K_\epsilon^L)^c}(x) |J(x)| |x|^2 dx < \infty \text{ und } J \text{ ist beschränkt auf } (K_\epsilon^L)^c.$$

Dann ist U automatisch ein G -invariantes Standard-Potential. Es gilt

$$K^U = \{(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2)^2 : x_1 - x_2 \in K^L\} \times S^2 \quad \text{und wir setzen}$$

$$K := \{(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2)^2 : x_1 - x_2 \in K_\epsilon^L\} \times S^2,$$

wobei $\epsilon > 0$ so klein gewählt werden soll, dass

$$\sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int 1_{K \setminus K^U}(y_1, y_2) dy_2 = \lambda^2(K_\epsilon^L \setminus K^L) < \frac{1}{z\xi}.$$

Die Wahl eines solchen ϵ ist möglich, da wegen der Kompaktheit von K^L und der σ -Stetigkeit von λ^2 nach unten $\lambda^2(K_\epsilon^L \setminus K^L)$ beliebig klein wird, wenn nur ϵ klein genug ist. K ist eine vollkommen G -invariante Standard-Menge mit $K \supset K^U$, und wir setzen

$$c := \frac{1}{z\xi} - \lambda^2(K_\epsilon^L \setminus K^L) \quad \text{und} \quad c' := \frac{c}{2 \int dx 1_{(K_\epsilon^L)^c}(x) |J(x)|}.$$

Da V gleichgradig G -stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in S, t \in \mathbb{R} : \quad |t| < \delta \Rightarrow |V(\sigma_1, g_t \sigma_2) - V(\sigma_1, \sigma_2)| < c'.$$

Wir glätten V unter Zuhilfenahme eines Integrationskerns. Sei $f_\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine unendlich oft stetig differenzierbare symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichte mit Träger in $] -\delta, \delta[$, beispielsweise

$$f_\delta(x) := \frac{1}{c_\delta} 1_{]-\delta, \delta[}(x) e^{-(1-x^2/\delta^2)^{-1}} \quad \text{mit} \quad c_\delta := \int_{-\delta}^{\delta} e^{-(1-x^2/\delta^2)^{-1}} dx. \quad (3.21)$$

Wir setzen

$$\bar{V}(\sigma_1, \sigma_2) := \int dt f_\delta(t) V(\sigma_1, g_t \sigma_2).$$

Dann ist nach Konstruktion $\|V - \bar{V}\| \leq c'$, \bar{V} ist G -glatt und

$$\left| \partial_G^2 \bar{V}(\sigma_1, \sigma_2) \right| = \left| \int dt f_\delta''(t) V(\sigma_1, g_t \sigma_2) \right| \leq 2\delta \|f_\delta''\| \|V\| =: c_{\delta, V}.$$

Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \bar{U}(x_1, \sigma_1, x_2, \sigma_2) &:= J(x_1 - x_2) \bar{V}(\sigma_1, \sigma_2) + |J(x_1 - x_2)| c' + L(x_1 - x_2) \quad \text{und} \\ u(x_1, \sigma_1, x_2, \sigma_2) &:= J(x_1 - x_2) (\bar{V} - V)(\sigma_1, \sigma_2) + |J(x_1 - x_2)| c'. \end{aligned}$$

Auf K^c ist dann $U = \bar{U} - u$ und die Funktionen \bar{U} und u sind endlich. Wegen $\|V - \bar{V}\| \leq c'$ ist $u \geq 0$ auf K^c . \bar{U} hat in K^c G -Ableitungen, die dominiert werden durch die Funktion

$$\psi(x_1, \sigma_1, x_2, \sigma_2) := c_{\delta, V} 1_{(K_\epsilon^L)^c}(x_1 - x_2) |J(x_1 - x_2)|.$$

ψ ist eine bpqi-Funktion. Wegen $\tilde{u} \leq u \leq 2|J|c'$ auf K^c folgen die beiden letzten Eigenschaften von (3.1) aus den Voraussetzungen an J und der Definition von c' .

Kapitel 4

Translation

Einiges in diesem Kapitel verläuft völlig analog zum letzten Kapitel. Aber auch wenn Passagen aus Kommentaren, Resultaten und Beweisen, die wir hier bringen, schon im letzten Kapitel aufgetaucht sind, wollen wir der Vollständigkeit halber hier nicht auf sie verzichten, damit dieser Abschnitt in sich abgeschlossen ist.

4.1 Das Resultat

4.1.1 Der markierte Fall

Wir kommen zu den Translationen auf \mathbb{R}^2 . Dazu geben wir uns eine Richtung vor, d.h. einen Vektor \vec{a} der Länge $|\vec{a}|_2 = 1$. Für $t \in \mathbb{R}$ wollen wir die Transformation

$$g_t : \mathbb{R}^2 \times S \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S, \quad g_t(x, \sigma) := (x, \sigma) + t\vec{a} := (x + t\vec{a}, \sigma)$$

betrachten. g_t ist eine reine Ortstransformation und kann daher genauso gut als Transformation auf \mathbb{R}^2 aufgefasst werden. Sei $G_{\vec{a}} := \{g_t : t \in \mathbb{R}\}$ die Transformationsgruppe aller Translationen in Richtung \vec{a} . In den Bezeichnungen $G_{\vec{a}}$ -invariant, $G_{\vec{a}}$ -stetig, $G_{\vec{a}}$ -glatt und $G_{\vec{a}}$ -Ableitung wollen wir der Einfachheit halber $G_{\vec{a}}$ durch \vec{a} ersetzen. Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist nun das folgende:

Satz 4 *Seien (S, \mathcal{F}_S) ein Standard-Borel-Raum, λ_S ein Wahrscheinlichkeitsmaß darauf, (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke, wobei $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein Standard-Potential sei. Ist U \vec{a} -invariant und \vec{a} -glatt approximierbar, dann ist auch jedes Gibbsmaß $\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z)$ \vec{a} -invariant.*

Die im Satz entscheidende Eigenschaft der \vec{a} -glatten Approximierbarkeit von U müssen wir erst noch definieren:

Definition 13 *Sei (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ , wobei $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein \vec{a} -invariantes Standard-Potential sei. U heißt \vec{a} -glatt approximierbar, falls es eine Zerlegung von U in einen \vec{a} -glatten Anteil \bar{U} und einen kleinen Störungsanteil u in folgendem Sinn gibt:*

Es existieren ein $\epsilon > 0$, messbare Kernerweiterungen K, K' und K'' mit

$$\begin{aligned} K^U &\subset K, \quad (K)_\epsilon \subset K', \quad (K')_\epsilon \subset K'', \\ K &\text{ ist eine } \vec{a}\text{-invariante Standard-Menge} \quad \text{und} \\ K'' &\text{ ist eine Standard-Menge,} \end{aligned} \tag{4.1}$$

und weiter existieren eine bpqi-Funktion ψ und messbare symmetrische \vec{a} -invariante Funktionen $\bar{U}, u : K^c \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} U &= \bar{U} - u \text{ und } u \geq 0 \quad \text{auf } K^c, \\ \bar{U} &\text{ hat auf } K^c \text{ durch } \psi \text{ dominierte } \vec{a}\text{-Ableitungen,} \\ \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int (1_{K^c} \tilde{u})(y_1, y_2) |y_1 - y_2|^2 dy_2 &< \infty \text{ und} \\ \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int (1_{K'' \setminus K^U} + 1_{K^c} \tilde{u})(y_1, y_2) dy_2 &< \frac{1}{z\xi}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

wobei $\tilde{u} := 1 - e^{-u} \leq u \wedge 1$.

Man beachte noch, dass Bedingung (4.2) nicht von der Wahl der Norm abhängt. Da die Definition von \vec{a} -glatt approximierbaren Potentialen fast völlig analog der von G -glatt approximierbaren Potentialen ist, ergibt sich ein ähnliches Bild: Auch \vec{a} -glatt approximierbare Potentiale dürfen eine Singularität im Ursprung oder einen harten Kern haben. Der harte Kern soll dabei als Standard-Menge lediglich beschränkte Reichweite haben, und es soll möglich sein, ihn zu einer Standard-Menge K'' zu vergrößern, ohne dass die Differenz $K'' \setminus K^U$ im Sinne der letzten Bedingung in (4.2) zu groß wird. Man vergleiche dazu die Diskussion in Abschnitt 2.5.2. Der harte Kern und das Eintauchverhalten in den harten Kern bzw. die Singularität dürfen vom Teilchentyp abhängen. Auf der Menge $K \setminus K^U$ werden überhaupt keine Eigenschaften von U vorausgesetzt, und für niedrige Aktivität z kann dieser Bereich nach der letzten Bedingung in (4.2) sogar sehr groß gewählt werden. Die entscheidende Eigenschaft von \vec{a} -approximierbaren Potentialen ist deren Zerlegbarkeit in einen glatten Anteil \bar{U} und einen Störungsanteil u . Da an u keinerlei Regularitätsbedingungen gestellt sind, braucht U weder differenzierbar noch stetig zu sein. An den Störungsanteil u werden lediglich zwei Integrierbarkeitsbedingungen gestellt, die im Wesentlichen $u \wedge 1$ betreffen. Der glatte Anteil \bar{U} dagegen hat die in diesem Zusammenhang üblichen Regularitätsbedingungen, allerdings auch nur außerhalb von K . Der Unterschied der beiden Definitionen 12 und 13 liegt nun darin, dass wir in Definition 12 die vollkommene G -Invarianz von K gefordert haben, während wir jetzt in (4.2) stattdessen K einmal durch eine Erweiterung K'' ersetzt haben. Hier die vollkommene \vec{a} -Invarianz von K zu fordern, wäre zu viel verlangt, denn dann würde $K \setminus K^U$ zu groß. Die Einführung von K'' hat aber ein ähnliches Ziel, nämlich die Kontrolle der Wirkung der Transformation auf das Potential in einer Umgebung des harten Kerns bzw. der Singularität.

Definition 13 für \vec{a} -glatt approximierbare Potentiale ist für unseren Beweis von Satz 4 maßgeschneidert, dabei aber relativ kompliziert. Wir wollen daher einfachere hinreichende Kriterien angeben. Besonders einfach gestaltet sich der Fall, dass U schon glatt ist:

Proposition 5 Sei (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ , wobei $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein \vec{a} -invariantes Standard-Potential sei, das \vec{a} -glatt auf ganz $(K^U)^c$ ist. U ist \vec{a} -glatt approximierbar, falls es ein $\epsilon > 0$, messbare Kernerweiterungen K, K' und K'' mit Eigenschaft (4.1) und eine bpqi-Funktion ψ gibt, so dass gilt:

$$\begin{aligned} U &\text{ hat auf } K^c \text{ durch } \psi \text{ dominierte } \vec{a}\text{-Ableitungen und} \\ \int 1_{K'' \setminus K^U}(y_1, y_2) dy_2 &< 1/(z\xi) \quad \text{für alle } y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S. \end{aligned}$$

Ein prominentes Beispiel, das in die Klasse der in Proposition 5 betrachteten Potentiale fällt, ist das Widom-Rowlinson-Modell mit q Teilchensorten, bei dem verschiedene Typen von Teilchen über verschiedene harte Kerne miteinander wechselwirken: Hier ist $S = \{1, \dots, q\}$ eine endliche Menge, die die verschiedenen Teilchensorten beschreibt, und gegeben ist eine Standard-Menge $K^U \subset (\mathbb{R}^2 \times S)^2$ und das zu diesem harten Kern gehörige translationsinvariante Potential U , das auf K^U den Wert ∞ und sonst den Wert 0 hat. Nach Proposition 5 ist U \vec{a} -glatt approximierbar, falls es Kernerweiterungen mit Eigenschaft (4.1) gibt, die nicht zu groß werden. Hierzu vergleiche man wieder die Diskussion in Abschnitt 2.5.2.

Hat man statt Glattheit wenigstens noch Stetigkeit, gibt folgendes Kriterium zwei Beispiele für Klassen von \vec{a} -glatt approximierbaren Potentialen:

Proposition 6 *Sei (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ , wobei $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein \vec{a} -invariantes Standard-Potential sei. Es gebe ein $\epsilon > 0$, messbare Kernerweiterungen K, K' und K'' mit Eigenschaft (4.1), so dass gilt:*

$$\sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int 1_{K'' \setminus K^U}(y_1, y_2) dy_2 < 1/(z\xi) \quad \text{und}$$

U ist in $(K^c)_\epsilon$ gleichgradig \vec{a} -stetig und beschränkt.

U ist \vec{a} -glatt approximierbar, falls es eine bpqi-Funktion ψ und ein $R \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für

$$\tilde{K} := \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^2 \times S)^2 : |y_1 - y_2| \leq R\}$$

eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) U hat auf \tilde{K}^c durch ψ dominierte \vec{a} -Ableitungen.

(b) Es gibt ein \vec{a} -invariantes Standard-Potential $\tilde{U} \geq 0$ mit $|U| \leq \tilde{U}$ in \tilde{K}^c ,

\tilde{U} hat auf \tilde{K}^c durch ψ dominierte \vec{a} -Ableitungen und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int \tilde{U}(y_1, y_2) |y_1 - y_2|^2 1_{\{|y_1 - y_2| \geq r\}} dy_2 = 0.$$

Beispielsweise ist Bedingung (a) trivialerweise erfüllt, wenn U endliche Reichweite hat, und (b) schließt den Fall ein, dass es Konstanten $\epsilon' > 0$, $R \geq 0$ und $k \geq 0$ gibt, so dass

$$|U(y_1, y_2)| \leq \frac{k}{|y_1 - y_2|^{4+\epsilon'}} \quad \text{für alle } y_1, y_2 \in (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \text{ mit } |y_1 - y_2| \geq R.$$

4.1.2 Der unmarkierte Fall

Der unmarkierte Fall ist im vorhergehenden Abschnitt natürlich schon enthalten: Gemäß der im zweiten Kapitel getroffenen Konvention wähle man einfach $S = \{0\}$. Da man oft lediglich am unmarkierten Fall bei translationsinvarianten Potentialen $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ interessiert ist und sich das Resultat hier noch etwas vereinfacht, wollen wir diesen Spezialfall noch einmal separat präsentieren. Die Definitionen aus Abschnitt 2.3.4 bzw. aus dem vorhergehenden Abschnitt lauten jetzt wie folgt:

Definition 14 *Ein translationsinvariantes Standard-Potential auf \mathbb{R}^2 ist eine Funktion $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die messbar und symmetrisch ist, und deren harter Kern $K^U := \{U = +\infty\}$ beschränkt ist.*

Im Regelfall ist der harte Kern eines Standard-Potentials leer, der Ursprung oder eine Kreisscheibe.

Definition 15 Sei $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein translationsinvariantes Potential auf \mathbb{R}^2 . U heißt \vec{a} -stetig bzw. -glatt auf einer Menge $A \subset \mathbb{R}^2$, falls die Abbildungen

$$\varphi_x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad t \mapsto U(x + t\vec{a}) \quad (x \in A)$$

in $t = 0$ stetig bzw. zweimal stetig differenzierbar sind. In letzterem Fall sagen wir, dass die \vec{a} -Ableitungen von U in A durch eine Funktion $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ dominiert sind, falls

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi_{x+s\vec{a}}(0) \leq \psi(x) \quad \text{für alle } x \in A, s \in [-1, 1] \text{ mit } x + s\vec{a} \in A.$$

In diesem Zusammenhang ist eine beschränkte, quadratintegrierbare Funktion (bqi-Funktion) eine messbare symmetrische Funktion $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$\|\psi\| < \infty \quad \text{und} \quad \int \psi(x)|x|^2 dx < \infty.$$

Definition 16 Sei (U, z, \mathcal{X}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ , wobei $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein translationsinvariantes Standard-Potential sei. U heißt \vec{a} -glatt approximierbar, falls es eine Zerlegung von U in einen \vec{a} -glatten Anteil \bar{U} und einen kleinen Störungsanteil u in folgendem Sinn gibt:

Es gibt eine symmetrische kompakte Menge $K \supset K^U$, eine bqi-Funktion ψ und messbare symmetrische Funktionen $\bar{U}, u : K^c \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} U &= \bar{U} - u \quad \text{und} \quad u \geq 0 \quad \text{auf } K^c, \\ \bar{U} &\text{ hat auf } K^c \text{ durch } \psi \text{ dominierte } \vec{a}\text{-Ableitungen,} \\ \int (1_{K^c} \bar{u})(x)|x|^2 dx &< \infty \quad \text{und} \quad \lambda^2(K \setminus K^U) + \int (1_{K^c} \bar{u})(x) dx < \frac{1}{z\xi}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Hierbei ist wieder $\bar{u} := 1 - e^{-u}$. Die hinreichende Bedingung für glatt approximierbare Potentiale vereinfacht sich ebenso:

Proposition 7 Sei (U, z, \mathcal{X}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke, wobei $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein translationsinvariantes Standard-Potential sei. U ist \vec{a} -glatt approximierbar, falls der harte Kern K^U von U kompakt ist, U stetig in $(K^U)^c$ ist, und es eine bqi-Funktion ψ und ein $R \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $\tilde{K} := \Lambda_R$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) U hat auf \tilde{K}^c durch ψ dominierte \vec{a} -Ableitungen.
- (b) Es gibt ein translationsinvariantes Standard-Potential $\tilde{U} \geq 0$ mit $|U| \leq \tilde{U}$ in \tilde{K}^c , das auf \tilde{K}^c durch ψ dominierte \vec{a} -Ableitungen hat, und für das gilt

$$\int_{\tilde{K}^c} \tilde{U}(x)|x|^2 dx < \infty.$$

Beispielsweise ist Bedingung (a) trivialerweise erfüllt, wenn U endliche Reichweite hat, und (b) schließt den Fall ein, dass es Konstanten $\epsilon' > 0$, $R \geq 0$ und $k \geq 0$ gibt, so dass

$$|U(x)| \leq \frac{k}{|x|^{4+\epsilon'}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } |x| \geq R.$$

Wie im markierten Fall haben wir folgenden Satz:

Satz 5 Sei (U, z, \mathcal{X}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke, wobei $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein translationsinvariantes Standard-Potential sei. Ist U \bar{a} -glatt approximierbar, dann ist auch jedes Gibbsmaß $\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}_0}(U, z)$ \bar{a} -invariant.

4.1.3 Vergleich mit dem Resultat von Fröhlich und Pfister

Um aufzuzeigen, inwieweit unser Resultat bestehende Resultate verbessert und erweitert, wollen wir es mit dem Resultat von J. Fröhlich und C.-E. Pfister vergleichen. Deren Ergebnis zur Erhaltung der Translationssymmetrie in [FP1] hatte einige Fehler und Lücken, die in [FP2] behoben werden konnten. Der dort präsentierte Satz ist formuliert, ohne beschränkte Korrelationen zu verwenden. Um besser vergleichen zu können, ziehen wir daher das Korollar zum Satz heran und modifizieren es leicht, so dass unsere Definitionen und Bezeichnungen verwendet werden können:

Satz 6 Sei (U, z, \mathcal{X}_t) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke, wobei $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein translationsinvariantes Standard-Potential sei, das bis auf eine mögliche Ausnahme im Ursprung \bar{a} -glatt ist. Es gebe ein $\epsilon > 0$, so dass die Integrierbarkeitsbedingung

$$\int dx e^{-U(x)} \sup_{t \in \mathbb{R}: |t| \leq \epsilon |x|} \left| \frac{d^2}{dt^2} U(x + t\bar{a}) \right| |x|^2 < \infty \quad (4.4)$$

erfüllt ist. Dann ist auch jedes temperierte Gibbsmaß $\mu \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}_t}(U, z)$ \bar{a} -invariant.

Zum Vergleich dazu am besten geeignet ist unser Resultat im unmarkierten Fall, Satz 5. Der wesentliche Unterschied ist natürlich die Glattheitsbedingung, die wir stark abgeschwächt haben. Aber auch im glatten Fall gibt es noch Unterschiede: Integrierbarkeitsbedingung (4.4) im Unendlichen ist eine leichte Verschärfung unserer Forderung, dass U \bar{a} -Ableitungen hat, die durch eine bpqi-Funktion ψ dominiert sind. Die Integrierbarkeitsbedingung (4.4) im Ursprung dagegen ist eine Annahme über das Eintauchverhalten des Potentials in die Singularität, und eine solche benötigen wir gar nicht. Außerdem ist die Methode zur Behandlung der Singularität aus [FP2] nicht bei harten Kernen anwendbar, so dass unser Resultat auch in diesem Hinblick allgemeiner ist.

4.2 Beweis des markierten Falles: Satz 4

4.2.1 Konstanten

Seien (S, \mathcal{F}_S) ein Standard-Borel-Raum, λ_S ein Wahrscheinlichkeitsmaß darauf, (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ , wobei $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein \bar{a} -invariantes Standard-Potential sei, das \bar{a} -glatt approximierbar ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und messbare Kernerweiterungen K, K' und K'' mit

$$\begin{aligned} K^U &\subset K, \quad (K)_\epsilon \subset K', \quad (K')_\epsilon \subset K'', \\ K &\text{ ist eine } \bar{a}\text{-invariante Standard-Menge} \quad \text{und} \\ K'' &\text{ ist eine Standard-Menge.} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Weiter gibt es eine bpqi-Funktion ψ und messbare symmetrische \bar{a} -invariante Funktionen $\bar{U} : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $u : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} U &= \bar{U} - u \text{ und } u \geq 0 \text{ auf } (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \quad \text{und } u = 0 \text{ auf } K, \\ \bar{U} &\text{ hat auf } K^c \text{ durch } \psi \text{ dominierte } \bar{a}\text{-Ableitungen,} \end{aligned} \quad (4.6)$$

so dass für $\tilde{u} = 1 - e^{-u}$ gilt:

$$\begin{aligned} c_u &:= \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int \tilde{u}(y_1, y_2) |y_1 - y_2|^2 dy_2 < \infty \quad \text{und} \\ c_\xi &:= \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int (1_{K'' \setminus K^U} + \tilde{u})(y_1, y_2) dy_2 < \frac{1}{z\xi}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ohne Einschränkung können wir $(\{0\} \times S)^2 \subset K$ annehmen. Aus Symmetriegründen können wir ferner annehmen, dass die Verschiebungen in Richtung $\vec{a} = \vec{e} := (1, 0)$ erfolgen. Wir definieren eine messbare Funktion $f_K : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_K = 0 \text{ auf } K, \quad f_K = 1 \text{ auf } (K'')^c, \quad f_K \text{ ist } \vec{e}\text{-glatt und } \partial_{\vec{e}} f_K \text{ ist beschränkt,}$$

wobei $\partial_{\vec{e}} f_K$ die \vec{e} -Ableitungen bezüglich der zweiten Ortskomponente sein sollen. Sei dazu $\tilde{f} : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f} := 1_{(K')^c}$ und $f_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine unendlich oft stetig differenzierbare Wahrscheinlichkeitsdichte mit Träger in $] -\epsilon, \epsilon[$, vergleiche (3.21), dann hat die durch

$$f_K(y', y) := \int dt \tilde{f}(y', y - t\vec{e}) f_\epsilon(t)$$

definierte Funktion wegen (4.5) die gewünschten Eigenschaften. Wir benötigen außerdem folgende Konstanten:

$$\begin{aligned} c_\psi &:= \|\psi\| \vee \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int dy_2 \psi(y_1, y_2) (|y_1 - y_2|^2 \vee 1), \\ c_K &:= \sup\{|y_1 - y_2| : (y_1, y_2) \in K''\} \quad \text{und} \\ c_f &:= \sup\{|\partial_{\vec{e}} f_K(y_1, y_2)| : (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^2 \times S)^2\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

die endlich sind, da ψ eine bpqi-Funktion ist, K'' beschränkte Reichweite hat und $\partial_{\vec{e}} f_K$ beschränkt ist. Auf S wählen wir eine messbare Ordnung. Eine solche existiert, denn (S, \mathcal{F}_S) ist ein Standard-Borel-Raum, also ist nach [G1], Satz (4.A6) entweder S abzählbar und \mathcal{F}_S die Potenzmenge darauf, und wir wählen auf S eine beliebige Wohlordnung, oder es gibt eine bimesbare Abbildung von (S, \mathcal{F}_S) auf $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}))$, und auf diesem Ereignisraum ist die lexikographische Ordnung messbar. Bezüglich der gewählten Ordnung auf S sei

$$“\leq” \text{ die lexikographische Ordnung auf } \mathbb{R}^2 \times S,$$

die wiederum messbar ist. Außerdem betrachten wir auf $\mathbb{R}^2 \times S$ auch die partielle Ordnung $\leq_{\vec{e}}$, die folgendermaßen definiert sei:

$$(r_1, r_2, \sigma) \leq_{\vec{e}} (r'_1, r'_2, \sigma') \quad :\Leftrightarrow \quad r_1 \leq r'_1, r_2 = r'_2, \sigma = \sigma'.$$

Jeder Verschiebungsvektor ist von der Form $m\tau(1, 0)$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $\tau \in [0, 1/2]$, es genügt daher zu zeigen dass jedes Gibbsmaß $\mu \in \mathcal{G}_{y_0}(U, z)$ invariant unter jeder Verschiebung $\tau(1, 0)$ ist mit $\tau \in [0, 1/2]$. Wir zeigen die Translationsinvarianz aller Gibbsmaße mit Kriterium (2.6) aus Proposition 3, daher betrachten wir ein festes $\mu \in \mathcal{G}_{y_0}(U, z)$, einen festen Transformationsparameter $\tau \in [0, 1/2]$ und eine feste Zylindermenge $D \in \mathcal{F}_{y, \Lambda_{n'-1}}$ mit $n' \in \mathbb{N}$. Gemäß dem modifizierten Kriterium (2.7) geben wir außerdem ein festes reelles $\delta > 0$ vor. Im ganzen Beweis werden wir Abhängigkeiten von obigen Parametern und Konstanten in den Notationen nicht berücksichtigen.

4.2.2 Zerlegung von μ und Kantenprozess

Für $n \in \mathbb{N}$ und $Y \in \mathcal{Y}$ betrachten wir die Kantenmenge

$$E_n(Y) := E_{\Lambda_n}(Y) = \{y_1 y_2 \in E(Y) : y_1 y_2 \cap \Lambda_n \neq \emptyset\}.$$

Auf dem Ereignisraum $(\mathcal{E}_{E_n(Y)}, \mathcal{B}_{E_n(Y)})$ sei $\pi_n(\cdot|Y)$ das Bernoullimaß zur Familie von Wahrscheinlichkeiten

$$(\tilde{u}(b))_{b \in E_n(Y)} \quad \text{mit} \quad \tilde{u}(b) := 1 - e^{-u(b)}.$$

Wegen $0 \leq u < \infty$ gilt tatsächlich $0 \leq \tilde{u}(b) < 1$ für alle Kanten $b \in E_n(Y)$. Wie in der Einführung erwähnt, kann $\pi_n(\cdot|Y)$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_{\mathcal{E}})$ fortgesetzt werden. Für alle $D \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ ist $\pi_n(D|\cdot)$ $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$ -messbar, also ist π_n ein Wahrscheinlichkeitskern von $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_{\mathcal{Y}})$ nach $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_{\mathcal{E}})$.

Lemma 17 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G_n'' := \{Y \in \mathcal{Y}_0 : \sum_{b \in E_n(Y)} \tilde{u}(b) < \infty\}$. Es gilt

$$\mu \otimes \nu_{\Lambda_n}(G_n'') = 1 \quad \text{und} \quad \mu(G_n'') = 1.$$

Für jedes $Y \in G_n''$ gilt nach dem Lemma von Borel-Cantelli, dass bezüglich $\pi_n(\cdot|Y)$ jede Kantenmenge fast sicher endlich ist, d.h. $\pi_n(\cdot|Y)$ hat seine ganze Masse auf der abzählbaren Menge der endlichen Teilmengen $B \subset E_n(Y)$:

$$\sum'_{B \subset E_n(Y)} \pi_n(\{B\}|Y) = 1,$$

wobei das Summenzeichen \sum' andeuten soll, dass sich die Summe nur über endliche Teilmengen erstrecken soll. Es gilt

$$\pi_n(\{B\}|Y) = \prod_{b \in B} \tilde{u}(b) \prod_{b \in E_n(Y) \setminus B} (1 - \tilde{u}(b)) = e^{-H_{\Lambda_n}^u(Y)} \prod_{b \in B} (e^{u(b)} - 1),$$

daher ist insbesondere für jedes $Y \in G_n''$ der Hamiltonian $H_{\Lambda_n}^u(Y)$ endlich. In diesem Fall ergibt sich aus der Zerlegung des Potentials also eine entsprechende Zerlegung des Hamiltonians

$$H_{\Lambda_n}^U(Y) = H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(Y) - H_{\Lambda_n}^u(Y).$$

Zusammen mit der Zerlegungseigenschaft der Gibbsmaße (2.2) folgt für jede $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}} \otimes \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ -messbare Funktion $f \geq 0$

$$\begin{aligned} \int d\mu \otimes \pi_n f &= \int \mu(d\bar{Y}) \frac{1}{Z_{\Lambda_n}(\bar{Y})} \int \nu_{\Lambda_n}(dY|\bar{Y}) \sum'_{B \subset E_n(Y)} f(Y, B) \\ &\quad \times z^{\#Y_{\Lambda_n}} e^{-H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(Y)} \prod_{b \in B} (e^{u(b)} - 1), \end{aligned} \quad (4.9)$$

wobei wir verwendet haben, dass wir nach Lemma 10 auf beiden Seiten von (4.9) annehmen können, dass $Y \in G_n''$ ist, und somit obige Umformungen erlaubt sind. Falls f nicht von B abhängt, steht auf der linken Seite von (4.9) gerade die μ -Erwartung von f , da π_n ein Wahrscheinlichkeitskern ist, und die rechte Seite besagt, dass die Störung u des \vec{e} -glatte Potentials \bar{U} in einem Kantenprozess B kodiert ist, so dass die Störung nur solche Teilchenpaare y_1, y_2 betrifft, deren Verbindungskante $y_1 y_2$ in B ist.

Neben $\pi_n(\cdot|Y)$ betrachten wir auf dem Ereignisraum $(\mathcal{E}_{E_n(Y)}, \mathcal{B}_{E_n(Y)})$ auch das auf die endlichen Kantenmengen konzentrierte Zählmaß $\pi'_n(\cdot|Y)$. Wie π_n kann auch π'_n als Wahrscheinlichkeitskern von $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_Y)$ nach $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_\mathcal{E})$ betrachtet werden. Für alle $\mathcal{F}_\mathcal{E}$ -messbaren Funktionen $f \geq 0$ gilt

$$\int \pi'_n(dB|Y)f(B) = \sum'_{B \subset E_n(Y)} f(B).$$

4.2.3 Verallgemeinerte Translation

Für $n > n'$, $Y \in \mathcal{Y}$ und $B \subset E_n(Y)$ seien

$$B_+ := B \cup \{y_1 y_2 \in E_n(Y) : (y_1, y_2) \in K''\}$$

die erweiterte Kantenmenge und

$$r_{Y, B_+}(\Lambda) = \sup\{|y'| : y' \in C_{Y, B_+}(\Lambda)\}$$

die Reichweite des von $\Lambda \in \mathcal{B}_b^2$ ausgehenden B_+ -Clusters. Man beachte hierbei, dass wir im Vergleich zum letzten Kapitel bei der Definition der erweiterten Kantenmenge statt der Kernerweiterung K die vergrößerte Kernerweiterung K'' verwendet haben. Wir betrachten nun speziell den von $\Lambda_{n'}$ ausgehenden B_+ -Cluster, wobei $n' \in \mathbb{N}$ die im Abschnitt 4.2.1 fest gewählte natürliche Zahl ist.

Lemma 18 *Es gilt* $\sup_{n > n'} \int \mu \otimes \pi_n(dY, dB) r_{Y, B_+}(\Lambda_{n'}) < \infty$.

Nach der Ungleichung von Čebyšev können wir daher eine natürliche Zahl $R > n'$ wählen, die nicht von n abhängt, so dass das Ereignis

$$G'_n := \{(Y, B) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{E} : r_{Y, B_+}(\Lambda_{n'}) < R, B \subset E_n(Y) \text{ endlich}\} \in \mathcal{F}_Y \otimes \mathcal{F}_\mathcal{E}$$

für jedes $n > n'$ die Wahrscheinlichkeit

$$\mu \otimes \pi_n(G'_n) \geq 1 - \frac{\delta}{2}$$

hat. Für $n > R$ definieren wir die Funktionen

$$q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \tau_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

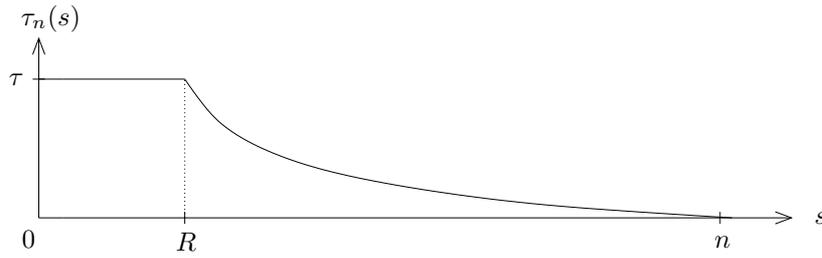
$$\begin{aligned} q(s) &:= \frac{1}{1 \vee (s \log(s))}, & Q(k) &:= \int_0^k q(s) ds, \\ r(s, k) &:= \int_{(s \vee 0) \wedge k}^k \frac{q(s')}{Q(k)} ds', & \tau_n(s) &:= \tau r(s - R, n - R). \end{aligned}$$

Abbildung 4.1 zeigt den Graphen von τ_n . Wichtige Eigenschaften von τ_n sind:

$$\begin{aligned} \tau_n(s) &= \tau \quad \text{für } s \leq R, \quad \tau_n(s) = 0 \quad \text{für } s \geq n \\ &\text{und } \tau_n \text{ ist monoton fallend.} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Für $Y \in \mathcal{Y}$, $B \in E_n(Y)$ und $y \in Y$ sei $a_{n, Y, B_+}(y)$ ein Teilchen des Clusters $C_{Y, B_+}(y)$ mit

$$|a_{n, Y, B_+}(y)| \geq |y| \quad \text{und} \quad \tau_n(|a_{n, Y, B_+}(y)|) = \min\{\tau_n(|y'|) : y' \in C_{Y, B_+}(y)\},$$

Abbildung 4.1: Graph von τ_n

so dass $a_{n,Y,B_+}(y)$ eine messbare Funktion von y, Y und B ist. Beispielsweise können wir a_{n,Y,B_+} folgendermaßen wählen: Für $C_{Y,B_+}(y) \subset \Lambda_n$ ist $C_{Y,B_+}(y)$ endlich, und wir definieren $a_{n,Y,B_+}(y)$ als das Teilchen von $C_{Y,B_+}(y)$ mit maximalem $|\cdot|$ -Abstand vom Ursprung. (Gibt es mehrere solche, so wählen wir unter diesen dasjenige, das maximal ist bezüglich der lexikographischen Ordnung.) Ist $C_{Y,B_+}(y) \cap \Lambda_n^c \neq \emptyset$ und $y \in \Lambda_n^c$, so setzen wir $a_{n,Y,B_+}(y) := y$. Ist schließlich $C_{Y,B_+}(y) \cap \Lambda_n^c \neq \emptyset$ und $y \in \Lambda_n$, so sei $a_{n,Y,B_+}(y)$ dasjenige Teilchen von $C_{Y,B_+}(y) \cap \Lambda_n^c$ mit minimalem $|\cdot|$ -Abstand vom Ursprung. (Gibt es mehrere solche, so wählen wir unter diesen dasjenige, das maximal ist bezüglich der lexikographischen Ordnung.)

Durch

$$T_n^0 : \mathbb{R}^2 \times S \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S, \quad T_n^0(y) := y + \tau_n(|y|)\vec{e}$$

wird nun eine Transformation auf $\mathbb{R}^2 \times S$ gegeben, die man auch als Transformation auf \mathcal{Y} betrachten kann, bei der jedes Teilchen y der Konfiguration Y um $\tau_n(|y|)$ in Richtung \vec{e} verschoben wird. Wir wollen diese verallgemeinerte Translation T_n^0 als Hilfsmittel in unserem Beweis verwenden; man vergleiche dazu die Vorgehensweise in [FP1] bzw. [FP2].

4.2.4 Gute Konfigurationen

Um die im Kantenprozess kodierte Störung u und das unspezifizierte Verhalten des Potentials in K in den Griff zu bekommen, werden wir diese verallgemeinerte Translation durch eine Transformation

$$\mathfrak{T}_n : \mathcal{Y} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{E}$$

ersetzen, die folgende Eigenschaften haben soll:

- (1) Ist B eine Menge von Kanten zwischen Teilchen in Y , so ergibt sich die transformierte Konfiguration $(\tilde{Y}, \tilde{B}) = \mathfrak{T}_n(Y, B)$ dadurch, dass jedes Teilchen $y \in Y$ um einen gewissen Betrag $t_{n,Y,B}(y)$ in Richtung \vec{e} verschoben wird.
- (2) Der Verschiebungsbetrag $t_{n,Y,B}(y)$ darf von der Gesamtkonfiguration (Y, B) abhängen, d.h. wir verlangen nicht, dass die Teilchen unabhängig voneinander verschoben werden.
- (3) Teilchen im Innenbereich $\Lambda_{n'-1}$ werden um $\tau\vec{e}$ verschoben, und Teilchen im Außenbereich Λ_n^c werden gar nicht verschoben.
- (4) Teilchen, die durch eine Kante aus B verbunden sind, werden um denselben Betrag verschoben.

- (5) \mathfrak{T}_n ist bijektiv, und die Dichte des transformierten Prozesses bezüglich des untransformierten Prozesses unter dem Maß $\nu \otimes \pi'_n$ kann explizit angegeben werden.
- (6) Es existieren geeignete Abschätzungen dieser Dichte sowie des Hamiltonians $H_{\Lambda_n}^{\tilde{U}}(\tilde{Y})$. Letzteres bedeutet insbesondere, dass auch Teilchen $y, y' \in Y$ mit $(y, y') \in K$ um denselben Betrag verschoben werden sollen.

Eigenschaft (3) impliziert, dass die Verschiebung der gewählten Zylindermenge D gleichbedeutend ist mit der Transformation dieser Menge durch \mathfrak{T}_n . (4)-(6) fordern wir im Hinblick auf die rechte Seite von (4.9). Hat nämlich \mathfrak{T}_n diese Eigenschaften, so lässt sich auch die Dichte des durch \mathfrak{T}_n transformierten Prozesses bezüglich des untransformierten Prozesses unter dem Maß $\mu \otimes \pi_n$ abschätzen. Somit erscheint eine derartige Transformation \mathfrak{T}_n als geeignetes Werkzeug, um eine (2.7) ähnelnde Abschätzung zu erhalten. Allerdings sind sicher nicht all diese Eigenschaften gleichzeitig erfüllbar, denn beispielsweise ist es möglich, dass Innen- und Außenbereich über Kanten miteinander verbunden sind; daher sind Eigenschaften (3) und (4) nicht gleichzeitig erfüllbar. Falls allerdings $n > R$ und $(Y, B) \in G'_n$ ist, kann genau diese Situation nicht eintreten, und gemäß Lemma 18 ist dies immerhin mit hoher Wahrscheinlichkeit der Fall. Bei den anderen Eigenschaften ergeben sich ähnliche Probleme, so dass wir damit zufrieden sein werden, obige Eigenschaften für alle (Y, B) aus einer gewissen Menge von guten Konfigurationen

$$G_n := \left\{ (Y, B) \in G'_n : \sum_{i=1}^5 \Sigma_i(n, Y, B) < 1 \right\} \in \mathcal{F}_Y \otimes \mathcal{F}_E \quad (4.11)$$

zu erhalten. Die Funktionen $\Sigma_i(n, Y, B)$ werden wir genau an den Stellen definieren, wo wir erzwingen wollen, dass gute Konfigurationen eine bestimmte Eigenschaft haben sollen. Später, in Lemma 24, werden wir dann zeigen, dass die Menge der guten Konfigurationen G_n nahezu Wahrscheinlichkeit 1 hat, falls nur n groß genug gewählt wird. Bis dahin sei $n \geq R + 1$ fest gewählt.

4.2.5 Modifikation der verallgemeinerten Translation

Vor der eigentlichen Konstruktion einer modifizierten Translation \mathfrak{T}_n mit obigen Eigenschaften wollen wir uns überlegen, wie wir uns eine solche verschaffen können. Seien dazu $Y \in \mathcal{Y}$ und $B \subset E_n(Y)$ endlich. Je zwei durch eine Kante aus B verbundene Teilchen in Y sollen um denselben Betrag verschoben werden, daher können wir gleich ganze B -Cluster verschieben. Da mit dem Außenbereich Λ_n^c verbundene Cluster nicht verschoben werden sollen, genügt es, die vollständig in Λ_n enthaltenen Cluster zu betrachten. Gehen wir zunächst davon aus, zu wissen, dass für $0 \leq i < k$ der B -Cluster C_n^i von (Y, B) um den Betrag τ_n^i verschoben wird, wobei $0 = \tau_n^0 \leq \dots \leq \tau_n^{k-1}$ (vergleiche Abbildung 4.2). Um den Betrag der Verschiebung eines zusätzlichen Punktes P_n^k zu ermitteln, definieren wir eine Funktion $t_n^k : \mathbb{R}^2 \times S \rightarrow \mathbb{R}$, die nur von den Teilchen der Cluster C_n^0, \dots, C_n^{k-1} abhängt, so dass

$$\begin{aligned} &\text{für alle } y \in Y \setminus (C_n^0 \cup \dots \cup C_n^{k-1}) : \\ &t_n^k(y) \geq \tau_n^{k-1} \quad \text{und} \\ &t_n^k(y) = \tau_n^{k-1} = \tau_n^i, \quad \text{falls } \exists y' \in C_n^i, i < k : (y', y) \in K, \end{aligned} \quad (4.12)$$

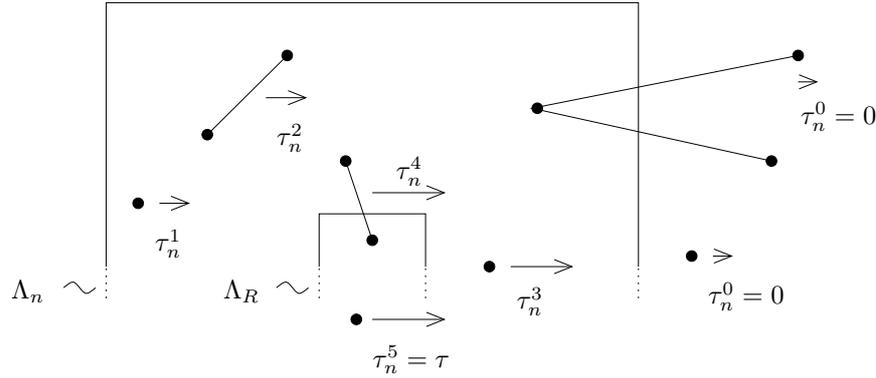


Abbildung 4.2: Jeder B -Cluster C_n^i wird um $\tau_n^i \vec{e}$ verschoben

und so dass t_n^k dennoch möglichst nahe bei $\tau_n(|\cdot|)$ liegt. Wir definieren dann P_n^k als denjenigen Punkt der restlichen Cluster, auf dem t_n^k seinen minimalen Wert $\tau_n^k := t_n^k(P_n^k)$ annimmt, und legen fest, dass der B -Cluster C_n^k des Punktes P_n^k um genau diesen Betrag τ_n^k verschoben wird. Wegen des ersten Teils von (4.12) gilt dann automatisch

$$\tau_n^{k-1} \leq \tau_n^k. \tag{4.13}$$

Bevor wir aus diesen heuristischen Überlegungen und Absichtserklärungen eine rigorose Definition machen, wollen wir noch einen Typ von Hilfsfunktionen einführen: Zu $y' \in \mathbb{R}^2 \times S$ und $t \in \mathbb{R}$ sei

$$h_{y',t} := |\tau_n(|y'|) - c_K - t|,$$

und die Funktion $m_{y',t} : \mathbb{R}^2 \times S \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sei definiert durch

$$m_{y',t}(y) := \begin{cases} t & \text{falls } h_{y',t} c_f > \frac{1}{2} \\ t + h_{y',t} f_K(y', y) + \infty 1_{\{f_K(y', y) = 1\}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

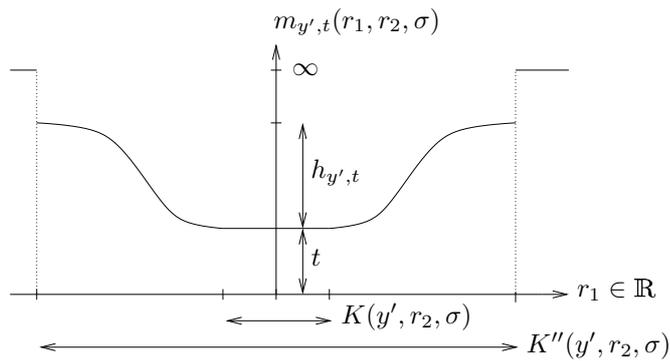


Abbildung 4.3: Graph von $m_{y',t}(\cdot, r_2, \sigma)$

Abbildung 4.3 zeigt einige wichtige Eigenschaften des Graphen von $m_{y',t}$. In Abschnitt 4.3.3 werden wir Eigenschaften dieser Hilfsfunktion zeigen, die wir beim Beweis späterer Lemmata benötigen. An dieser Stelle begnügen wir uns aber mit der Anschauung, die obige Abbildung vermittelt.

Nun kommen wir zur rekursiven Definition der Verschiebungsvektoren unserer Cluster. Seien dazu $t_{n,Y,B}^0 := \tau_n(|\cdot|)$, $C_{n,Y,B}^0$ der B -Cluster des Außenbereichs Λ_n^c , $m = m(Y, B)$ die Anzahl der B -Cluster von $Y \setminus C_{n,Y,B}^0$ und $\tau_{n,Y,B}^0 := 0$. Im k -ten Konstruktionsschritt ($1 \leq k \leq m$) setzen wir

$$t_{n,Y,B}^k := t_{n,Y,B}^{k-1} \wedge \bigwedge_{y \in C_{n,Y,B}^{k-1}} m_{y, \tau_{n,Y,B}^{k-1}} = t_{n,Y,B}^0 \wedge \bigwedge_{0 \leq i < k} \bigwedge_{y \in C_{n,Y,B}^i} m_{y, \tau_{n,Y,B}^i}.$$

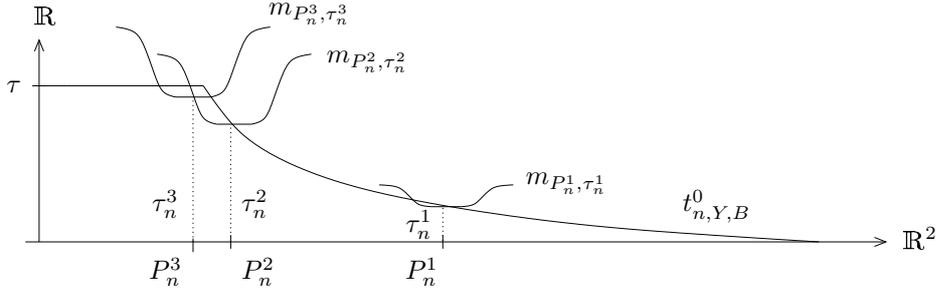


Abbildung 4.4: Konstruktion von t_n^k im Fall $C_n^i = \{P_n^i\}$

Sei der Pivot-Punkt $P_{n,Y,B}^k$ derjenige Punkt von $Y \setminus (C_{n,Y,B}^0 \cup \dots \cup C_{n,Y,B}^{k-1})$, in dem $t_{n,Y,B}^k$ sein Minimum annimmt. Ist dieser Punkt nicht eindeutig bestimmt, so wählen wir denjenigen Punkt mit dieser Eigenschaft, der bezüglich der lexikographischen Ordnung minimal ist, um die Konstruktion eindeutig zu machen. Seien ferner $\tau_{n,Y,B}^k := t_{n,Y,B}^k(P_{n,Y,B}^k)$ der entsprechende minimale Wert von $t_{n,Y,B}^k$, $C_{n,Y,B}^k$ der B -Cluster des Punktes $P_{n,Y,B}^k$ und $T_{n,Y,B}^k := id + t_{n,Y,B}^k \vec{e}$. Für $k = m + 1$ können wir noch $t_{n,Y,B}^{m+1}$ definieren, aber dann bricht die Rekursion ab, da nach Wahl von m $Y \setminus (C_{n,Y,B}^0 \cup \dots \cup C_{n,Y,B}^m) = \emptyset$ ist. In den soeben eingeführten Notationen werden wir die Abhängigkeit von Y und B unterdrücken, falls klar ist, welche Konfiguration wir betrachten.

Lemma 19 *Für jedes $1 \leq k \leq m$ haben die eben konstruierten Objekte die in (4.12) und (4.13) genannten Eigenschaften.*

Nun kommen wir schließlich zur Definition der deformierten Transformation: Für $y \in C_{n,Y,B}^k$ sei $t_{n,Y,B}(y) := \tau_{n,Y,B}^k$ der Betrag, um den das Teilchen y verschoben wird. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{n,B}(Y) &:= \bigcup_{k=0}^m (C_{n,Y,B}^k + \tau_{n,Y,B}^k \vec{e}) = \{y + t_{n,Y,B}(y) \vec{e} : y \in Y\} \quad \text{und} \\ \mathfrak{T}_{n,Y}(B) &:= \{(y + t_{n,Y,B}(y) \vec{e})(y' + t_{n,Y,B}(y') \vec{e}) : yy' \in B\}. \end{aligned}$$

Falls B nicht wie oben gefordert eine endliche Teilmenge von $E_n(Y)$ ist, so setzen wir $\mathfrak{T}_{n,B} = id$ und $\mathfrak{T}_{n,Y} = id$. Die deformierte Transformation sei nun definiert durch

$$\mathfrak{T}_n : \mathcal{Y} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{E}, \quad \mathfrak{T}_n(Y, B) := (\mathfrak{T}_{n,B}(Y), \mathfrak{T}_{n,Y}(B)).$$

Unter Verwendung von Lemma 3 kann gezeigt werden, dass alle eben definierten Objekte messbar bezüglich der betrachteten σ -Algebren sind.

Lemma 20 *Für gute Konfigurationen $(Y, B) \in G_n$ ist*

$$(\mathfrak{T}_{n,B}Y - \tau \vec{e})_{\Lambda_{n'-1}} = Y_{\Lambda_{n'-1}} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{T}_{n,B}Y)_{\Lambda_n^c} = Y_{\Lambda_n^c}. \quad (4.14)$$

Lemma 21 Die Transformation $\mathfrak{T}_n : \mathcal{Y} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{E}$ ist bijektiv.

Im Beweis von Lemma 21 werden wir die zu \mathfrak{T}_n inverse Abbildung konstruieren, die wir im Beweis des folgenden Lemmas benötigen. Dort behaupten wir, dass für jedes $\bar{Y} \in \mathcal{Y}$ das Maß $\nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(\cdot|\bar{Y})$ absolutstetig bezüglich $\nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(\cdot|\bar{Y}) \circ \mathfrak{T}_n^{-1}$ ist, und zwar mit Radon-Nikodym-Dichte $\varphi_n \circ \mathfrak{T}_n^{-1}$, wobei

$$\varphi_n(Y, B) := \prod_{k=1}^{m(Y, B)} |1 + \partial_{\vec{e}} t_{n, Y, B}^k(P_{n, Y, B}^k)|. \quad (4.15)$$

$\partial_{\vec{e}}$ soll hier die Ortsableitung in Richtung \vec{e} sein. Im Beweis des Lemmas wird auch gezeigt, dass Definition (4.15) $\nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(\cdot|\bar{Y})$ -fast sicher sinnvoll ist, in dem Sinn, dass die Ableitungen in den betrachteten Punkten existieren.

Lemma 22 Für jedes $\bar{Y} \in \mathcal{Y}$ und jede $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}} \otimes \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ -messbare Funktion $f \geq 0$ gilt

$$\int d\nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(\cdot|\bar{Y}) (f \circ \mathfrak{T}_n \cdot \varphi_n) = \int d\nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(\cdot|\bar{Y}) f. \quad (4.16)$$

Wir wollen gemäß Kriterium (2.7) auch die Verschiebung in die Gegenrichtung betrachten. Seien also die Objekte $\bar{\mathfrak{T}}_n, \bar{\mathfrak{T}}_{n, B}, \bar{\mathfrak{T}}_{n, Y}$ und $\bar{\varphi}_n$ analog zu obigen Objekten definiert, wobei nun \vec{e} durch den Vektor $-\vec{e}$ ersetzt werden soll. Alle vorhergehenden Lemmata gelten dann entsprechend für diese deformierte Translation in Gegenrichtung. Wir wollen sicherheitshalber noch anmerken, dass $\bar{\mathfrak{T}}_n$ hier nicht die inverse Abbildung zu \mathfrak{T}_n ist.

4.2.6 Schlussargument des Beweises

Aus Zerlegung (4.9) und Lemma 22 ergibt sich

$$\begin{aligned} & \mu \otimes \pi_n(\mathfrak{T}_n(D \cap G_n)) \\ &= \int \mu(d\bar{Y}) \frac{1}{Z_{\Lambda_n}(\bar{Y})} \int \nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(dY, dB|\bar{Y}) \\ & \quad 1_{\mathfrak{T}_n(D \cap G_n)}(Y, B) z^{\#Y_{\Lambda_n}} e^{-H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(Y)} \prod_{b \in B} (e^{u(b)} - 1) \\ &= \int \mu(d\bar{Y}) \frac{1}{Z_{\Lambda_n}(\bar{Y})} \int \nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(dY, dB|\bar{Y}) \\ & \quad 1_{\mathfrak{T}_n(D \cap G_n)} \circ \mathfrak{T}_n(Y, B) z^{\#(\mathfrak{T}_{n, B} Y)_{\Lambda_n}} \varphi_n(Y, B) e^{-H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\mathfrak{T}_{n, B} Y)} \prod_{b \in \mathfrak{T}_{n, Y} B} (e^{u(b)} - 1). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Menge D mit $D \times \mathcal{E}$ identifiziert. Im letzten Term ist nun

$$\begin{aligned} 1_{\mathfrak{T}_n(D \cap G_n)} \circ \mathfrak{T}_n &= 1_{D \cap G_n} && \text{wegen Lemma 21,} \\ \#(\mathfrak{T}_{n, B} Y)_{\Lambda_n} &= \#Y_{\Lambda_n} && \text{wegen (4.14) und} \\ \prod_{b \in \mathfrak{T}_{n, Y} B} (e^{u(b)} - 1) &= \prod_{b \in B} (e^{u(b)} - 1) && \text{wegen der } G\text{-Invarianz von } u. \end{aligned}$$

Daher lässt sich obiger Integrand zu

$$1_{D \cap G_n}(Y, B) z^{\#Y_{\Lambda_n}} e^{\log \varphi_n(Y, B) - H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\mathfrak{T}_{n, B} Y)} \prod_{b \in B} (e^{u(b)} - 1)$$

vereinfachen, und Analoges ergibt sich für die Rückwärtstransformation $\bar{\mathfrak{T}}_n$. Es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{e}{2}\mu \otimes \pi_n(\bar{\mathfrak{T}}_n(D \cap G_n)) + \frac{e}{2}\mu \otimes \pi_n(\mathfrak{T}_n(D \cap G_n)) - \mu \otimes \pi_n(D \cap G_n) \\ &= \int \mu(d\bar{Y}) \frac{1}{Z_{\Lambda_n}(\bar{Y})} \int \nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(dY, dB|\bar{Y}) 1_{D \cap G_n}(Y, B) z^{\#Y_{\Lambda_n}} \prod_{b \in B} (e^{u(b)} - 1) \\ & \quad \times \left[\frac{e}{2} (e^{\log \bar{\varphi}_n(Y, B) - H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\bar{T}_{n, BY})} + e^{\log \varphi_n(Y, B) - H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(T_{n, BY})}) - e^{-H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(Y)} \right], \end{aligned}$$

und der letzte Term des Integranden ist nichtnegativ. Denn wegen der Konvexität der Exponentialfunktion ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(e^{\log \bar{\varphi}_n(Y, B) - H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\bar{T}_{n, BY})} + e^{\log \varphi_n(Y, B) - H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(T_{n, BY})} \right) \\ & \geq e^{\frac{1}{2}(\log \bar{\varphi}_n(Y, B) + \log \varphi_n(Y, B) - H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\bar{T}_{n, BY}) - H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(T_{n, BY}))}, \end{aligned}$$

und für gute Konfigurationen haben wir Abschätzungen für Hamiltonians und Dichten:

Lemma 23 *Für $(Y, B) \in G_n$ gilt*

$$H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\bar{\mathfrak{T}}_{n, BY}) + H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\mathfrak{T}_{n, BY}) \leq 2H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(Y) + 1 \quad \text{und} \quad (4.17)$$

$$1 + \log \bar{\varphi}_n(Y, B) + \log \varphi_n(Y, B) \geq 0. \quad (4.18)$$

Insgesamt erhalten wir daher

$$\frac{e}{2}\mu \otimes \pi_n(\bar{\mathfrak{T}}_n(D \cap G_n)) + \frac{e}{2}\mu \otimes \pi_n(\mathfrak{T}_n(D \cap G_n)) \geq \mu \otimes \pi_n(D \cap G_n). \quad (4.19)$$

In (4.19) würden wir gerne $D \cap G_n$ durch D ersetzen. Der dabei gemachte Fehler bleibt klein, falls die Menge der guten Konfigurationen G_n hohe Wahrscheinlichkeit hat.

Lemma 24 *Falls $n \geq R + 1$ groß genug gewählt wird, ist $\mu \otimes \pi_n(G_n^c) \leq \delta$.*

Für den Beweis von Satz 4 sei nun ein solches $n \geq R + 1$ fest gewählt. Wegen $D \in \mathcal{F}_{\mathfrak{y}, \Lambda_{n'-1}}$ und (4.14) gilt

$$\forall (Y, B) \in D \cap G_n : (\mathfrak{T}_{n, BY} - \tau \vec{e})_{\Lambda_{n'-1}} \in D, \quad \text{d.h. } \mathfrak{T}_{n, BY} \in D + \tau \vec{e}.$$

Analoges gilt für die Transformation in Gegenrichtung, also folgt

$$\mathfrak{T}_n(D \cap G_n) \subset D + \tau \vec{e} \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{T}}_n(D \cap G_n) \subset D - \tau \vec{e}.$$

Mit Hilfe dieser Inklusionen folgt aus (4.19) unter Verwendung von Lemma 24

$$\frac{e}{2}\mu(D - \tau \vec{e}) + \frac{e}{2}\mu(D + \tau \vec{e}) \geq \mu(D) - \delta.$$

Da $\delta > 0$ beliebig gewählt war, folgt im Limes $\delta \rightarrow 0$ die Abschätzung (2.6). Da aber auch $\mu \in \mathcal{G}_{\mathfrak{y}_0}(U, z)$, $\tau > 0$, $n' \in \mathbb{N}$ und $D \in \mathcal{F}_{\mathfrak{y}, \Lambda_{n'-1}}$ beliebig vorgegeben waren, ergibt sich die Behauptung somit aus dem hinreichenden Kriterium für Symmetrienerhaltung von Proposition 3.

4.3 Beweis der Lemmata

4.3.1 Konvergenz des Hamiltonians: Lemma 17

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $Y \in \mathcal{Y}$. Wegen

$$H_{\Lambda_n}^{\tilde{u}}(Y) = \sum_{b \in E_n(Y)} \tilde{u}(b) \leq \sum_{y_1, y_2 \in Y}^{\neq} 1_{\{y_1 \in \Lambda_n\}} \tilde{u}(y_1, y_2)$$

gilt für alle $\bar{Y} \in \mathcal{Y}$

$$\int \nu_{\Lambda_n}(dY|\bar{Y}) H_{\Lambda_n}^{\tilde{u}}(Y) \leq \int_{\Lambda_n} dy_1 \left(\int_{\Lambda_n} dy_2 \tilde{u}(y_1, y_2) + \sum_{y_2 \in \bar{Y}_{\Lambda_n^c}} \tilde{u}(y_1, y_2) \right).$$

Mittels Lemma 2 ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \int \mu \otimes \nu_{\Lambda_n}(dY) H_{\Lambda_n}^{\tilde{u}}(Y) &\leq \int_{\Lambda_n} dy_1 \left(\int_{\Lambda_n} dy_2 \tilde{u}(y_1, y_2) + z\xi \int_{\Lambda_n^c} dy_2 \tilde{u}(y_1, y_2) \right) \\ &\leq \int_{\Lambda_n} dy_1 (1 + z\xi) c_\xi \leq 4n^2 (1 + z\xi) c_\xi, \end{aligned}$$

wobei wir die Integrale über y_2 durch c_ξ abgeschätzt haben, vergleiche (3.3). Da der letzte Term einen endlichen Wert hat, ist die erste Behauptung gezeigt, und die zweite folgt hieraus, da μ wegen (2.2) und der Definition der bedingten Gibbsverteilung absolutstetig zu $\mu \otimes \nu_{\Lambda_n}$ ist.

4.3.2 Beschränkte Cluster-Reichweite: Lemma 18

Für $n > n'$, $Y \in \mathcal{Y}$ und $B \subset E_n(Y)$ schätzen wir die Clusterreichweite $r_{Y, B_+}(\Lambda_{n'})$ ab. Dazu betrachten wir zunächst einen Pfad y_0, \dots, y_m im Graphen (Y, B_+) mit $y_0 \in \Lambda_{n'}$ und ein k mit $1 \leq k \leq m$, so dass auf dem Pfad gerade die $|\cdot|$ -Länge der Kante $y_{k-1}y_k$ maximal ist. Es gilt dann

$$|y_m| \leq |y_0| + \sum_{i=1}^m |y_i - y_{i-1}| \leq n' + m|y_k - y_{k-1}|.$$

Durch Betrachtung aller Möglichkeiten für solche Pfade und Kanten maximaler Länge folgt

$$r_{Y, B_+}(\Lambda_{n'}) \leq n' + \sum_{m \geq 1} \sum_{k=1}^m \sum_{y_0, \dots, y_m \in Y}^{\neq} 1_{\{y_0 \in \Lambda_{n'}\}} m |y_k - y_{k-1}| \prod_{i=1}^m 1_{\{y_i y_{i-1} \in B_+\}}.$$

Unter dem Bernoullimaß $\pi_n(dB|Y)$ sind die Ereignisse $\{y_i y_{i-1} \in B_+\}$ unabhängig, und es gilt

$$\int \pi_n(dB|Y) 1_{\{y_i y_{i-1} \in B_+\}} \leq 1_{K^U}(y_{i-1}, y_i) + g(y_{i-1}, y_i), \quad (4.20)$$

wobei die Hilfsfunktion $g : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g := 1_{K^U \setminus K^V} + \tilde{u}$ definiert ist. Unter Verwendung der Eigenschaft des harten Kerns (2.3) folgt

$$\begin{aligned} R_n &:= \int \mu(dY) \int \pi_n(dB|Y) r_{Y, B_+}(\Lambda_{n'}) - n' \\ &\leq \sum_{m \geq 1} \sum_{k=1}^m \int \mu(dY) \sum_{y_0, \dots, y_m \in Y}^{\neq} 1_{\{y_0 \in \Lambda_{n'}\}} m |y_k - y_{k-1}| \prod_{i=1}^m g(y_{i-1}, y_i) \\ &\leq \sum_{m \geq 1} \sum_{k=1}^m (z\xi)^{m+1} \int dy_0 \dots dy_m 1_{\{y_0 \in \Lambda_{n'}\}} m |y_k - y_{k-1}| \prod_{i=1}^m g(y_{i-1}, y_i), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt noch Lemma 2 verwendet haben. Nach (4.7) und (4.8) gilt aber für alle $y \in \mathbb{R}^2 \times S$

$$\int g(y, y') |y - y'| dy' \leq \int g(y, y') (1 + |y - y'|^2) dy' \leq c_g \quad (4.21)$$

mit $c_g := (1 + c_K^2)c_\xi + c_u$, und $\int g(y, y') dy' \leq c_\xi$,

daher können wir die Integrale über dy_i der Reihe nach von $i = m$ bis 1 auswerten. Dazu schätzen wir in jedem Schritt das Integral über dy_i durch eine der obigen Konstanten ab. Durch die m Integrationen erhalten wir genau einen Faktor c_g und $(m - 1)$ Faktoren c_ξ ; die Integration über dy_0 liefert schließlich noch einen zusätzlichen Faktor $\lambda^2(\Lambda_{n'}) = (2n')^2$. Es ist demnach

$$R_n \leq (2n'z\xi)^2 c_g \sum_{m \geq 1} m^2 (c_\xi z\xi)^{m-1} < \infty,$$

wobei der Wert der Summe wegen $c_\xi z\xi < 1$ endlich ist.

4.3.3 Eigenschaften der Hilfsfunktion

Zunächst halten wir einige Eigenschaften von Funktionen auf \mathbb{R} und Teilmengen von \mathbb{R} fest, die wir im Folgenden benötigen. Ist $A \subset \mathbb{R}$, so gilt

$$A \text{ ist offen} \Rightarrow \begin{cases} A \text{ ist abzählbare disjunkte Vereinigung offener Intervalle} \\ \text{und } \partial A \text{ ist eine abzählbare abgeschlossene Menge.} \end{cases} \quad (4.22)$$

Sei I ein Intervall. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt 1/2-Lipschitz-stetig, falls

$$|f(r) - f(r')| \leq \frac{1}{2}|r - r'| \quad \text{für alle } r, r' \in I.$$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig differenzierbar, falls f stetig ist und falls

$$\begin{aligned} \exists M \subset I : M \text{ ist abzählbar und abgeschlossen,} \\ f \text{ ist auf } I \setminus M \text{ stetig differenzierbar.} \end{aligned}$$

Da M abgeschlossen ist, sind die Zusammenhangskomponenten von $I \setminus M$ dann nach (4.22) abzählbar viele Intervalle. Der Nutzen obiger Definition ist nun, dass für eine streng monotone, stückweise stetig differenzierbare Transformation f auf \mathbb{R} der Integral-Transformationssatz von Lebesgue anwendbar ist, was wir später benötigen werden. f' ist dann also λ^1 -f.s. wohldefiniert und für jede \mathcal{B}^1 -messbare Funktion $g \geq 0$ gilt

$$\int g(f(x)) |f'(x)| dx = \int g(x') dx'. \quad (4.23)$$

Es gelten folgende Vererbungseigenschaften:

Lemma 25 *Seien $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen auf einem Intervall I .*

- (a) *Sind f_1 und f_2 1/2-Lipschitz-stetig, so auch $f_1 \wedge f_2$.*
- (b) *Sind f_1 und f_2 stückweise stetig differenzierbar, so auch $f_1 \wedge f_2$.*

Beweis: Seien I ein Intervall und $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$. Für (a) seien $x, x' \in \mathbb{R}$. Mittels Fallunterscheidung, für welche der beiden Funktionen das Minimum $f_1 \wedge f_2$ in den Punkten x bzw. x' angenommen wird, folgt die Behauptung. Für (b) seien M_1 und M_2 abzählbare abgeschlossene Mengen in I gemäß obiger Definition. Wir setzen

$$M = \partial \left(\bigcup_{A_1, A_2} A_1 \cap A_2 \cap \{f_1 \neq f_2\} \right),$$

wobei A_1 und A_2 über die Zusammenhangskomponenten von $I \setminus M_1$ und $I \setminus M_2$ laufen. M ist nach (4.22) eine abzählbare abgeschlossene Menge, und auf jeder Zusammenhangskomponente von $I \setminus M$ stimmt $f_1 \wedge f_2$ entweder mit f_1 oder mit f_2 überein. Da f_1 und f_2 auf $I \setminus M$ stetig differenzierbar sind, ist es auch $f_1 \wedge f_2$, und da f_1 und f_2 stetig sind, ist es auch $f_1 \wedge f_2$. \square

Für $y' \in \mathbb{R}^2 \times S$ und $t \in \mathbb{R}$ war die Hilfsfunktion $m_{y',t} : \mathbb{R}^2 \times S \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$m_{y',t}(y) := \begin{cases} t & \text{falls } h_{y',t} c_f > \frac{1}{2} \\ t + h_{y',t} f_K(y', y) + \infty 1_{\{f_K(y', y)=1\}} & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit

$$h_{y',t} := |\tau_n(|y'| - c_K) - t|.$$

Zur Formulierung der Eigenschaften der Hilfsfunktion verwenden wir wie in Definition 4 die folgenden Sprechweisen für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \times S \rightarrow \mathbb{R}$: Wir sagen, f ist $1/2$ - \bar{e} -Lipschitz-stetig bzw. stückweise stetig \bar{e} -differenzierbar, falls für alle $r_2 \in \mathbb{R}, \sigma \in S$ die Funktion $f(\cdot, r_2, \sigma)$ $1/2$ -Lipschitz-stetig bzw. stückweise stetig differenzierbar ist.

Lemma 26 *Sei $y' \in \mathbb{R}^2 \times S$ und $t \in \mathbb{R}$. $\tau_n(|\cdot|) \wedge m_{y',t}$ ist $1/2$ - \bar{e} -Lipschitz-stetig und stückweise stetig \bar{e} -differenzierbar.*

Beweis: Sei $y' \in \mathbb{R}^2 \times S$ und $t \in \mathbb{R}$. Beide Funktionseigenschaften betreffen nur die erste Ortskomponente, daher betrachten wir eine feste zweite Ortskomponente $r_2 \in \mathbb{R}$ und einen festen Spin $\sigma \in S$ und betrachten die Funktionen

$$\tilde{\tau} := \tau_n(|(\cdot, r_2, \sigma)|) \quad \text{und} \quad \tilde{m} := m_{y',t}(\cdot, r_2, \sigma).$$

Es genügt dann zu zeigen, dass $\tilde{\tau} \wedge \tilde{m}$ $1/2$ -Lipschitz-stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. $\tilde{\tau}$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\tau/Q(n-R) \leq 1/2$, denn es ist ja $n-R \geq 1$ und $\tau \leq 1/2$. Außerdem ist $\tilde{\tau}$ auch stetig differenzierbar bis auf höchstens vier Ausnahmestellen. Falls $h_{y',t} c_f > 1/2$ und damit $m_{y',t} = t$ ist, so folgen die Behauptungen sofort aus Lemma 25. Wir können im Folgenden also $h_{y',t} c_f \leq 1/2$ annehmen. Sei

$$A := \{r \in \mathbb{R} : f_K(y', r, r_2, \sigma) < 1\}$$

der Bereich, auf dem \tilde{m} endlich ist. Wegen der \bar{e} -Stetigkeit von f_K ist A offen und wegen (4.22) ist ∂A abzählbar und abgeschlossen. Es genügt daher zu zeigen, dass für jede Zusammenhangskomponente I von $\mathbb{R} \setminus \partial A$ gilt: $\tilde{\tau} \wedge \tilde{m}$ ist auf dem Abschluss \bar{I} von I $1/2$ -Lipschitz-stetig und stückweise stetig differenzierbar. Sei also I eine solche Zusammenhangskomponente. Entweder ist dann $I \subset A$ oder $I \subset \mathbb{R} \setminus A$. Im zweiten Fall gilt auf I $\tilde{m} = \infty$, also $\tilde{\tau} \wedge \tilde{m} = \tilde{\tau}$, und wir sind fertig, da $\tilde{\tau}$ nach

obigen Bemerkungen 1/2-Lipschitz-stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Wir brauchen also nur noch den Fall $I \subset A$ zu betrachten. Dazu definieren wir

$$\tilde{m}^f := t + h_{y',t} f_K(y', \cdot, r_2, \sigma).$$

\tilde{m}^f ist stetig differenzierbar und wegen $h_{y',t} c_f \leq 1/2$ auch 1/2-Lipschitz-stetig. Nach Lemma 25 ist also auch $\tilde{\tau} \wedge \tilde{m}^f$ 1/2-Lipschitz-stetig und stückweise stetig differenzierbar; daher genügt es zu zeigen, dass

$$\tilde{\tau} \leq \tilde{m}^f \text{ auf } \partial I \quad \text{und somit} \quad \tilde{\tau} \wedge \tilde{m} = \tilde{\tau} \wedge \tilde{m}^f \text{ auf } \bar{I}. \quad (4.24)$$

Hierbei folgt die zweite aus der ersten Aussage, da auf $I \subset A$ definitionsgemäß $\tilde{m}^f = \tilde{m}$ ist, und auf ∂I $\tilde{m} = \infty$ ist. Zum Beweis von (4.24) seien $r \in \partial I$ und $y := (r, r_2, \sigma)$. Wegen $I \subset A \subset K''(y', r_2, \sigma)$ liegt r im Abschluss von $K''(y', r_2, \sigma)$. Es folgt $|y - y'| \leq c_K$, also $|y'| - c_K \leq |y|$. Da τ_n monoton fällt, ergibt sich

$$\tilde{\tau}(r) = \tau_n(|y|) \leq \tau_n(|y'| - c_K) \leq t + h_{y',t} = \tilde{m}^f(r)$$

nach Wahl der Höhe $h_{y',t}$, und damit ist (4.24) gezeigt. \square

4.3.4 Eigenschaften der Konstruktion: Lemma 19

Sei $1 \leq k \leq m$. Die erste Hälfte von (4.12) ergibt sich direkt aus den Definitionen von t_n^k und P_n^{k-1} , denn für $y \in Y \setminus (C_n^0 \cup \dots \cup C_n^{k-1})$ ist

$$t_n^k(y) = t_n^{k-1}(y) \wedge \bigwedge_{y' \in C_n^{k-1}} m_{y', \tau_n^{k-1}}(y) \geq \tau_n^{k-1}.$$

Unter Verwendung der Definition von τ_n^k folgt hieraus sofort die Monotonieeigenschaft (4.13). Für die zweite Hälfte von (4.12) seien $y \in C_n^l$ und $y' \in C_n^i$ mit $i < k \leq l$. Wir haben bereits $t_n^k(y) \geq \tau_n^{k-1} \geq \tau_n^i$ gezeigt. Aber $\tau_n^i \geq t_n^k(y)$ ergibt sich sofort aus der Definition von t_n^k , denn für $(y', y) \in K$ ist

$$t_n^k(y) \leq m_{y', \tau_n^i}(y) = \tau_n^i.$$

Wir zeigen noch einige weitere Eigenschaften der Konstruktion. Das folgende Lemma zeigt, wie man die Verschiebungsbeträge τ_n^k abschätzen kann, und wie man den Verschiebungsbetrag eines beliebigen Punktes $y \in C_n^k$ ohne die Kenntnis von P_n^k bestimmen kann:

Lemma 27 Für $Y \in \mathcal{Y}$, endliches $B \subset E(Y)$ und $k \geq 0$ gilt

$$\tau_n^k \leq t_n^0(y) \quad \text{für alle } y \in C_n^{k'} \text{ mit } k' \geq k, \quad (4.25)$$

$$\tau_n^k \geq t_n^0(a_{n,Y,B_+}(P_n^k)) \quad \text{falls } (Y, B) \in G_n, \quad (4.26)$$

$$\tau_n^k = t_n^{k'+1}(y) \quad \text{für alle } y \in C_n^k \text{ und } k' \geq k. \quad (4.27)$$

Beweis: (4.25) folgt aus der Definition von P_n^k und aus $t_n^k \leq t_n^0$.

Für den Beweis von (4.26) sei $(Y, B) \in G_n$. Wir hätten gerne

$$\forall y, y' \in Y : |y| \leq |y'|, y \xleftrightarrow{Y, B_+} y' \Rightarrow |\tau_n(|y| - c_K) - \tau_n(|y'|)| c_f \leq 1/2, \quad (4.28)$$

und setzen daher

$$\Sigma_1(n, Y, B) := \sum_{y, y' \in Y} 1_{\{|y| \leq |y'|\}} 1_{\{y \xleftrightarrow{Y, B_+} y'\}} 4(\tau_n(|y| - c_K) - \tau_n(|y'|))^2 c_f^2. \quad (4.29)$$

Wegen $(Y, B) \in G_n$ ist dann $\Sigma_1(n, Y, B) < 1$ nach Definition der Menge G_n der guten Konfigurationen in (4.11). Somit darf auch jeder Summand von Σ_1 höchstens 1 sein, was (4.28) impliziert. Durch vollständige Induktion über k zeigen wir nun (4.26). Für $k = 0$ haben wir sogar Gleichheit, wenn P_n^0 als beliebiger Punkt von C_n^0 definiert wird. Für den Induktionsschritt $k - 1 \rightarrow k$ sei $i \leq k - 1$ und $y \in C_n^i$. Nach (4.25), der Induktionsannahme und (4.28) folgt dann

$$0 \leq (\tau_n(|y| - c_K) - \tau_n^i) c_f \leq (\tau_n(|y| - c_K) - \tau_n(|a_{n,Y,B_+}(y)|)) c_f \leq 1/2,$$

also ist $h_{y,\tau_n^i} c_f \leq 1/2$, und folglich ist $m_{y,\tau_n^i}(P_n^k) = \infty$, falls $(y, P_n^k) \notin K''$ ist. Entsprechende Terme brauchen also bei der Berechnung von $t_n^k(P_n^k)$ gar nicht berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} \tau_n^k &= t_n^k(P_n^k) = t_n^0(P_n^k) \wedge \bigwedge_{i < k} \bigwedge_{y \in C_n^i: (y, P_n^k) \in K''} m_{y,\tau_n^i}(P_n^k) \\ &\geq t_n^0(P_n^k) \wedge \bigwedge_{i < k: P_n^i \xrightarrow{Y, B_+} P_n^k} \tau_n^i \geq t_n^0(a_{n,Y,B_+}(P_n^k)). \end{aligned}$$

Hier haben wir im letzten Schritt noch einmal die Induktionsannahme verwendet. Zum Beweis von (4.27) seien $y \in C_n^k$ und $k' \geq k$. Nach der Definition von P_n^k ist $t_n^k(y) \geq \tau_n^k$, daher ist

$$t_n^{k'+1}(y) = t_n^k(y) \wedge \bigwedge_{k \leq i \leq k'} \bigwedge_{y' \in C_n^i} m_{y',\tau_n^i}(y) = \tau_n^k,$$

wobei wir auch noch verwendet haben, dass nach (4.13) $m_{y',\tau_n^i}(y) \geq \tau_n^i \geq \tau_n^k$ ist, und dass $m_{y,\tau_n^k}(y) = \tau_n^k$ ist. \square

Im Beweis von (4.26) haben wir auch gezeigt, dass gute Konfigurationen $(Y, B) \in G_n$ die folgende Eigenschaft haben: In der Konstruktion von $\mathfrak{T}_n(Y, B)$ gilt $h_{y,\tau_n^k} c_f \leq 1/2$ für jedes $y \in C_n^k$, d.h. in der Definition der Funktionen m_{y,τ_n^k} tritt immer der zweite Fall ein.

Nun wollen wir noch t_n^k und T_n^k auf Monotonie- und Regularitätseigenschaften hin untersuchen:

Lemma 28 Für $Y \in \mathcal{Y}$, endliches $B \subset E(Y)$ und $k \geq 0$ gilt

$$t_n^k \text{ ist } 1/2\text{-}\vec{e}\text{-Lipschitz-stetig und stückweise stetig } \vec{e}\text{-differenzierbar,} \quad (4.30)$$

$$T_n^k \text{ ist } \leq_{\vec{e}}\text{-wachsend und bijektiv.} \quad (4.31)$$

Beweis: Seien $Y \in \mathcal{Y}$, $B \subset E(Y)$ endlich und $k \geq 0$. t_n^k ist das Minimum von endlich vielen Funktionen der Form $\tau_n(|\cdot|) \wedge m_{y',t}$ mit $y' \in \mathbb{R}^2 \times S$ und $t \in \mathbb{R}$. Behauptung (4.30) folgt daher sofort aus der entsprechenden Eigenschaft dieser Funktionen aus Lemma 26 und der Vererbungseigenschaft aus Lemma 25, die wir im letzten Abschnitt gezeigt haben. Als direkte Folge von (4.30) ist T_n^k \vec{e} -stetig und $\leq_{\vec{e}}$ -wachsend, also auch bijektiv. Damit haben wir auch (4.31) gezeigt. \square

4.3.5 Deformierte Verschiebung: Lemma 20

Zunächst zeigen wir einige Hilfsaussagen:

Lemma 29 Für $(Y, B) \in G_n$, $y, y' \in Y$ und $s \in [-1, 1]$ gilt

$$0 \leq \tau_n(|a_{n,Y,B_+}(y)|) \leq t_{n,Y,B}(y) \leq \tau_n(|y|) \leq \tau, \quad (4.32)$$

$$(y, y') \in K \Rightarrow t_{n,Y,B}(y) = t_{n,Y,B}(y'), \quad (4.33)$$

$$(y, y') \notin K \Rightarrow (y, y' + s(t_{n,Y,B}(y') - t_{n,Y,B}(y))\vec{e}) \notin K. \quad (4.34)$$

Beweis: Seien $(Y, B) \in G_n$, $y, y' \in Y$ und $s \in [-1, 1]$. (4.32) folgt aus (4.26) und (4.25). Für (4.33) und (4.34) seien $y_i \in C_n^i$ und $y_j \in C_n^j$ für $i \leq j$. Mit

$$K(y_i) := \{y \in \mathbb{R}^2 \times S : (y_i, y) \in K\} \quad \text{und} \quad \Lambda^i := \{y \in \mathbb{R}^2 \times S : t_n^i(y) \geq \tau_n^i\}$$

gilt dann $y_j \in \Lambda^i$ und

$$\forall y \in K(y_i) \cap \Lambda^i : t_n^{j+1}(y) = t_n^i(y) \wedge \bigwedge_{i \leq k \leq j} \bigwedge_{y' \in C_n^k} m_{y', \tau_n^k}(y) = \tau_n^i. \quad (4.35)$$

Denn $t_n^i(y) \geq \tau_n^i$ gilt nach Definition von Λ^i , $m_{y', \tau_n^k} \geq \tau_n^i$ gilt wegen (4.13) und $m_{y_i, \tau_n^i}(y) = \tau_n^i$ wegen $y \in K(y_i)$. Ist nun $(y_i, y_j) \in K$, dann gilt $y_j \in K(y_i) \cap \Lambda^i$, und aus (4.35) und (4.27) folgt $\tau_n^j = t_n^{j+1}(y_j) = \tau_n^i$, was die Behauptung (4.33) zeigt. Für (4.34) setzen wir $T_{n,s}^{j+1} := id + s \cdot t_n^{j+1}\vec{e}$ und nehmen $(y_i, y_j) \notin K$ an. Wegen $y_j \in \Lambda^i \setminus K(y_i)$ und $\tau_n^j = t_n^{j+1}(y_j)$, was nach (4.27) gilt, genügt es, folgende Aussage zu zeigen:

$$T_{n,s}^{j+1}(\Lambda^i \setminus K(y_i)) = \Lambda^i \setminus K(y_i) + s\tau_n^i\vec{e}. \quad (4.36)$$

Seien hierzu $\sigma \in S$ und $r \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Wegen der Stetigkeit von $t_n^i(\cdot, r, \sigma)$ gilt $t_n^i(\cdot, r, \sigma) = \tau_n^i$ auf $\partial\Lambda^i(\cdot, r, \sigma)$. Wie im Beweis von (4.35) folgt daher $t_n^{j+1}(\cdot, r, \sigma) = \tau_n^i$ auf $\partial\Lambda^i$. Aber $T_{n,s}^{j+1}(\cdot, r, \sigma)$ ist wachsend, stetig und bijektiv, was man wie im Beweis von (4.31) zeigen kann. Somit gilt

$$T_{n,s}^{j+1}(\Lambda^i) = \Lambda^i + s\tau_n^i\vec{e},$$

und zusammen mit (4.35) ergibt sich die Behauptung (4.36). \square

Zum Beweis von Lemma 20 sei wieder $(Y, B) \in G_n$. Wir betrachten ein Teilchen $y \in Y$. Es gilt

$$y + t_{n,Y,B}(y)\vec{e} - \tau\vec{e} \notin \Lambda_{n'-1}, \quad \text{falls } y \notin \Lambda_{n'},$$

da $0 \leq t_{n,Y,B}(y) \leq \tau$ nach (4.10) ist. Falls aber $y \in \Lambda_{n'}$, so gilt $a_{n,Y,B_+}(y) \in \Lambda_R$ nach Definition von G_n . Mittels (4.10) folgt $\tau_n(|a_{n,Y,B_+}(y)|) = \tau$, also gilt wegen (4.32) auch $t_{n,Y,B}(y) = \tau$. Damit ist der erste Teil gezeigt. Auch für die zweite Behauptung betrachten wir ein Teilchen $y \in Y$. Falls $y \in \Lambda_n$ ist, so ist auch $T_n^0(y) \in \Lambda_n$, da nach (4.31) T_n^0 bijektiv ist und $T_n^0 = id$ auf Λ_n^c ist. Andererseits ist wegen (4.32)

$$y \leq_{\vec{e}} y + t_{n,Y,B}(y)\vec{e} \leq_{\vec{e}} T_n^0(y),$$

und insgesamt folgt daher $y + t_{n,Y,B}(y)\vec{e} \in \Lambda_n$. Falls aber $y \notin \Lambda_n$ ist, dann ist nach (4.10) $\tau_n(|y|) = 0$ also nach (4.32) auch $t_{n,Y,B}(y) = 0$.

4.3.6 Bijektivität der Transformation: Lemma 21

Wir konstruieren die inverse Transformation $\tilde{\mathfrak{T}}_n$ rekursiv, und zwar ganz ähnlich wie in der Konstruktion von \mathfrak{T}_n , d.h. in einer gegebenen Konfiguration (\tilde{Y}, \tilde{B}) wählen wir \tilde{B} -Cluster \tilde{C}_n^k mit Pivot-Punkten \tilde{P}_n^k und verschieben sie um $\tilde{\tau}_n^k$ in Richtung $-\vec{e}$, wobei $0 = \tilde{\tau}_n^0 \leq \dots \leq \tilde{\tau}_n^m$ gelten soll, siehe Abbildung 4.5.

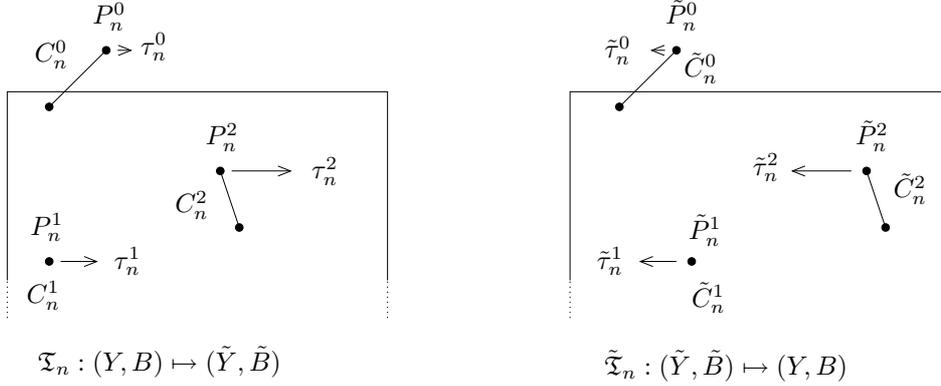


Abbildung 4.5: Konstruktion des Inversen $\tilde{\mathfrak{T}}_n$ von \mathfrak{T}_n .

Um zu motivieren, wie die inverse Transformation definiert werden muss, betrachten wir zunächst ein $Y \in \mathcal{Y}$ mit endlicher Kantenmenge $B \subset E_n(Y)$ und setzen $(\tilde{Y}, \tilde{B}) := \mathfrak{T}_n(Y, B)$. Bei der Konstruktion von (\tilde{Y}, \tilde{B}) haben wir B -Cluster C_n^k mit Pivot-Punkten P_n^k und Verschiebungsbeträge $0 = \tau_n^0 \leq \dots \leq \tau_n^m$ definiert, so dass jeder Cluster C_n^k um $\tau_n^k \vec{e}$ verschoben wird. Im Bild (\tilde{Y}, \tilde{B}) führen wir die Bezeichnungen $\tilde{P}_n^k := P_n^k + \tau_n^k \vec{e}$ und $\tilde{C}_n^k := C_n^k + \tau_n^k \vec{e}$ ein. Wollen wir nun das Bild von (\tilde{Y}, \tilde{B}) unter der inversen Transformation wie oben angedeutet rekursiv bestimmen, so müssen wir die \tilde{B} -Cluster in der richtigen Reihenfolge betrachten, d.h. wir müssen zuerst \tilde{C}_n^0 um $-\tau_n^0 \vec{e}$ zurückverschieben, dann \tilde{C}_n^1 um $-\tau_n^1 \vec{e}$, und so weiter. Schließlich wollen wir ja die Ausgangskonfiguration (Y, B) zurückerhalten. Wir müssen daher nach einer Möglichkeit suchen, die Cluster \tilde{C}_n^k unter den \tilde{B} -Clustern von (\tilde{Y}, \tilde{B}) der Reihe nach zu identifizieren. Falls wir die Cluster $\tilde{C}_n^0, \dots, \tilde{C}_n^{k-1}$ und die zugehörigen Verschiebungen $-\tau_n^0 \vec{e}, \dots, -\tau_n^{k-1} \vec{e}$ bereits gefunden haben, so kennen wir auch die Cluster C_n^0, \dots, C_n^{k-1} , also auch t_n^k und T_n^k . Daher hilft uns in diesem Fall das folgende Lemma, den nächsten Cluster \tilde{C}_n^k mit dem Pivot-Punkt \tilde{P}_n^k und dem Verschiebungsvektor $-\tau_n^k \vec{e}$ zu finden:

Lemma 30 Sei $1 \leq k \leq m$. Für alle $\tilde{y} \in \tilde{Y} \setminus (\tilde{C}_n^0 \cup \dots \cup \tilde{C}_n^{k-1})$ gilt

$$t_n^k \circ (T_n^k)^{-1}(\tilde{P}_n^k) \leq t_n^k \circ (T_n^k)^{-1}(\tilde{y}).$$

Alle \tilde{y} , für die in dieser Ungleichung sogar Gleichheit gilt, haben die Eigenschaft $(T_n^k)^{-1}(\tilde{P}_n^k) \leq (T_n^k)^{-1}(\tilde{y})$, wobei " \leq " die lexikographische Ordnung sein soll.

Beweis: Zuerst bemerken wir, dass für alle k nach Definition von T_n^k

$$(T_n^k)^{-1} + t_n^k \circ (T_n^k)^{-1} \vec{e} = id \quad (4.37)$$

gilt. Ferner ist wegen $t_n^{k+1} \leq t_n^k$ auch $T_n^{k+1} \leq_{\vec{e}} T_n^k$, und daher $(T_n^k)^{-1} \leq_{\vec{e}} (T_n^{k+1})^{-1}$ wegen der \vec{e} -Monotonie von $(T_n^{k+1})^{-1}$ aus (4.31). Zusammen mit (4.37) ergibt sich

daher

$$t_n^{k+1} \circ (T_n^{k+1})^{-1} \leq t_n^k \circ (T_n^k)^{-1}. \quad (4.38)$$

Seien nun $1 \leq k \leq m$ und $\tilde{y} \in \tilde{Y} \setminus (\tilde{C}_n^0 \cup \dots \cup \tilde{C}_n^{k-1})$, d.h. $\tilde{y} \in \tilde{C}_n^l$ für ein $l \geq k$. Für dasjenige $y \in C_n^l$ mit $y + \tau_n^l \vec{e} = \tilde{y}$ gilt dann

$$t_n^{l+1}(y) = \tau_n^l \quad \text{und} \quad T_n^{l+1}(y) = \tilde{y},$$

wobei wir (4.27) verwendet haben. Mit Hilfe von $\tilde{P}_n^k = T_n^k(P_n^k)$, (4.13) und (4.38) schließen wir

$$t_n^k(T_n^k)^{-1}(\tilde{P}_n^k) = \tau_n^k \leq \tau_n^l = t_n^{l+1}(y) = t_n^{l+1}(T_n^{l+1})^{-1}(\tilde{y}) \leq t_n^k(T_n^k)^{-1}(\tilde{y}).$$

Falls für das betrachtete \tilde{y} sogar Gleichheit gilt, muss in der Ungleichungskette überall Gleichheit gelten, also folgt $\tau_n^k = \tau_n^l$ und $t_n^{l+1}(T_n^{l+1})^{-1}(\tilde{y}) = t_n^k(T_n^k)^{-1}(\tilde{y})$. Zusammen mit (4.37) erhalten wir also $y = (T_n^{l+1})^{-1}(\tilde{y}) = (T_n^k)^{-1}(\tilde{y})$ und somit $t_n^k(y) = \tau_n^l = \tau_n^k$. Nach Definition von P_n^k folgt daher $(T_n^k)^{-1}(\tilde{P}_n^k) = P_n^k \leq y$, und die Behauptung ist gezeigt. \square

Lemma 30 beschreibt nun genau, wie das Inverse zu \mathfrak{X}_n rekursiv definiert werden muss: Seien zunächst $\tilde{Y} \in \mathcal{Y}$ und $\tilde{B} \subset E_n(\tilde{Y})$ endlich. Sei $\tilde{C}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^0$ der \tilde{B} -Cluster von Λ_n^c , $\tilde{m} = \tilde{m}(\tilde{Y}, \tilde{B})$ die Anzahl der verschiedenen \tilde{B} -Cluster von $\tilde{Y} \setminus \tilde{C}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^0$, $\tilde{t}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^0 = \tau_n(|\cdot|)$ und $\tilde{\tau}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^0 := 0$. Im k -ten Konstruktionsschritt ($k \geq 1$) setzen wir

$$\tilde{t}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k := \tilde{t}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^{k-1} \wedge \bigwedge_{y \in \tilde{C}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^{k-1} - \tilde{\tau}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^{k-1}} m_{y, \tilde{\tau}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^{k-1}}.$$

Seien $\tilde{T}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k = id + \tilde{t}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k \vec{e}$ und $\tilde{P}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k$ derjenige Punkt von $\tilde{Y} \setminus (\tilde{C}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^0 \cup \dots \cup \tilde{C}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^{k-1})$, in dem die Funktion $\tilde{t}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k \circ (\tilde{T}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k)^{-1}$ ihr Minimum annimmt. Falls es mehr als einen solchen Punkt gibt, so wählen wir unter diesen den Punkt y , so dass $(\tilde{T}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k)^{-1}(y)$ bezüglich der lexikographischen Ordnung “ \leq ” minimal wird. Sei $\tilde{\tau}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k := \tilde{t}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k \circ (\tilde{T}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k)^{-1}(\tilde{P}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k)$ das entsprechende Minimum und sei $\tilde{C}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k$ der \tilde{B} -Cluster des Pivot-Punktes $\tilde{P}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k$. Für $k = \tilde{m} + 1$ bricht die Rekursion ab. Falls klar ist, welche Konfiguration wir betrachten, werden wir bei obigen Bezeichnungen die Abhängigkeit von \tilde{Y} und \tilde{B} wieder unterdrücken. Wir müssen noch zeigen, dass obige Konstruktion wohldefiniert ist, in dem Sinn, dass $\tilde{T}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k$ in jedem Schritt invertierbar ist. Außerdem benötigen wir später weitere Eigenschaften der Konstruktion, die wir im folgenden Lemma nachweisen wollen:

Lemma 31 *Sei $\tilde{Y} \in \mathcal{Y}$, $\tilde{B} \subset E_n(\tilde{Y})$ endlich und $k \geq 0$. Dann gilt*

$$\tilde{t}_n^k \text{ ist } 1/2\text{-}\vec{e}\text{-Lipschitz-stetig, } \tilde{T}_n^k \text{ ist bijektiv und } \leq_{\vec{e}}\text{-wachsend,} \quad (4.39)$$

$$(\tilde{T}_n^k)^{-1} + \tilde{t}_n^k \circ (\tilde{T}_n^k)^{-1} \vec{e} = id, \quad (4.40)$$

$$\forall c \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^2 \times S : \tilde{t}_n^k \circ (\tilde{T}_n^k)^{-1}(y) \geq c \Leftrightarrow \tilde{t}_n^k(y - c\vec{e}) \geq c, \quad (4.41)$$

$$\tilde{t}_n^k \leq \tilde{t}_n^{k-1} \quad \text{und} \quad \tilde{\tau}_n^{k-1} \leq \tilde{\tau}_n^k, \quad (4.42)$$

$$\forall y \in \tilde{C}_n^k : \tilde{t}_n^{k+1} \circ (\tilde{T}_n^{k+1})^{-1}(y) = \tilde{\tau}_n^k. \quad (4.43)$$

Beweis: Die Definitionen von \tilde{t}_n^k und \tilde{T}_n^k gleichen denen von t_n^k und T_n^k , so dass wir (4.39) und (4.40) genauso wie die entsprechenden Eigenschaften (4.30), (4.31) und (4.37) zeigen können. Zum Beweis von (4.41) stellen wir unter Verwendung von

(4.40) und (4.39) fest, dass für $c \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^2 \times S$ folgende Aussagen äquivalent sind:

$$\begin{aligned} \tilde{t}_n^k \circ (\tilde{T}_n^k)^{-1}(y) \geq c &\Leftrightarrow (\tilde{T}_n^k)^{-1}(y) \leq_{\vec{e}} y - c\vec{e} \\ &\Leftrightarrow y \leq_{\vec{e}} \tilde{T}_n^k(y - c\vec{e}) = y - c\vec{e} + \tilde{t}_n^k(y - c\vec{e}). \end{aligned}$$

Der erste Teil von (4.42) ist klar, und für den zweiten Teil beachten wir

$$\begin{aligned} \tilde{t}_n^{k-1} \circ (\tilde{T}_n^{k-1})^{-1}(\tilde{P}_n^k) \geq \tilde{\tau}_n^{k-1} &\Rightarrow \tilde{t}_n^{k-1}(\tilde{P}_n^k - \tilde{\tau}_n^{k-1}\vec{e}) \geq \tilde{\tau}_n^{k-1} \\ \Rightarrow \tilde{t}_n^k(\tilde{P}_n^k - \tilde{\tau}_n^{k-1}\vec{e}) \geq \tilde{\tau}_n^{k-1} &\Rightarrow \tilde{\tau}_n^k = \tilde{t}_n^k \circ (\tilde{T}_n^k)^{-1}(\tilde{P}_n^k) \geq \tilde{\tau}_n^{k-1}, \end{aligned}$$

wobei die erste Aussage nach Definition von \tilde{P}_n^{k-1} gilt, die erste und die dritte Folgerung wegen (4.41) richtig sind und die zweite Folgerung nach Definition von \tilde{t}_n^k gültig ist. Für (4.43) sei $y \in \tilde{C}_n^k$. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{t}_n^k \circ (\tilde{T}_n^k)^{-1}(y) \geq \tilde{\tau}_n^k &\Rightarrow \tilde{t}_n^k(y - \tilde{\tau}_n^k\vec{e}) \geq \tilde{\tau}_n^k \\ \Rightarrow \tilde{t}_n^{k+1}(y - \tilde{\tau}_n^k\vec{e}) = \tilde{\tau}_n^k &\Rightarrow \tilde{t}_n^{k+1} \circ (\tilde{T}_n^{k+1})^{-1}(y) = \tilde{\tau}_n^k, \end{aligned}$$

wobei die erste Aussage nach Definition gilt, und sich die drei Implikationen aus (4.41), $y - \tilde{\tau}_n^k\vec{e} \in \tilde{C}_n^k - \tilde{\tau}_n^k\vec{e}$ und (4.40) ergeben. \square

Für $y \in \tilde{C}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k$ sei $\tilde{t}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}(y) := \tilde{\tau}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k$ der Betrag, um den das Teilchen y verschoben wird. Wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{X}}_{n,\tilde{B}}(\tilde{Y}) &:= \bigcup_{k=0}^m (\tilde{C}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k - \tau_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k\vec{e}) = \{y - \tilde{t}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}(y)\vec{e} : y \in \tilde{Y}\} \quad \text{und} \\ \tilde{\mathfrak{X}}_{n,\tilde{Y}}(\tilde{B}) &:= \{(y - \tilde{t}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}(y)\vec{e})(y' - \tilde{t}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}(y')\vec{e}) : yy' \in \tilde{B}\}. \end{aligned}$$

Falls \tilde{B} nicht wie oben gefordert eine endliche Teilmenge von $E_n(\tilde{Y})$ ist, so setzen wir $\tilde{\mathfrak{X}}_{n,\tilde{B}} = id$ und $\tilde{\mathfrak{X}}_{n,\tilde{Y}} = id$. Den Kandidaten für das Inverse zu \mathfrak{X}_n definieren wir durch

$$\tilde{\mathfrak{X}}_n : \mathcal{Y} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{E}, \quad \tilde{\mathfrak{X}}_n(Y, B) := (\tilde{\mathfrak{X}}_{n,\tilde{B}}(Y), \tilde{\mathfrak{X}}_{n,\tilde{Y}}(B)).$$

Unter Verwendung von Lemma 3 können wir wieder feststellen, dass alle eben konstruierten Objekte messbar bezüglich der betrachteten σ -Algebren sind. Die einzige Schwierigkeit ist es dabei zu zeigen, dass die Funktionen $(\tilde{T}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k)^{-1}(y)$ messbar sind. Dies folgt aber aus der \vec{e} -Monotonie von $\tilde{T}_{n,\tilde{Y},\tilde{B}}^k$.

Bevor wir zeigen, dass $\tilde{\mathfrak{X}}_n$ wirklich invers zu \mathfrak{X}_n ist, benötigen wir noch eine zu Lemma 30 analoge Aussage. Sei dafür $\tilde{Y} \in \mathcal{Y}$ und $\tilde{B} \subset E_n(\tilde{Y})$ endlich. Seien \tilde{t}_n^k , \tilde{T}_n^k , \tilde{C}_n^k , \tilde{P}_n^k und $\tilde{\tau}_n^k$ ($0 \leq k \leq \tilde{m}$) wie eben definiert und $(Y, B) := \tilde{\mathfrak{X}}_n(\tilde{Y}, \tilde{B})$. Zur Bezeichnung der Objekte in (Y, B) setzen wir $P_n^k := \tilde{P}_n^k - \tilde{\tau}_n^k\vec{e}$ und $C_n^k := \tilde{C}_n^k - \tilde{\tau}_n^k\vec{e}$, vergleiche Abbildung 4.5.

Lemma 32 Sei $1 \leq k \leq m$. Für alle $y \in Y \setminus (C_n^0 \cup \dots \cup C_n^{k-1})$ gilt

$$\tilde{t}_n^k(P_n^k) \leq \tilde{t}_n^k(y).$$

Alle y , für die in dieser Ungleichung Gleichheit gilt, haben die Eigenschaft $P_n^k \leq y$, wobei " \leq " die lexikographische Ordnung sein soll.

Beweis: Seien $1 \leq k \leq m$ und $y \in Y \setminus (C_n^0 \cup \dots \cup C_n^{k-1})$, d.h. $y \in C_n^l$ für ein $l \geq k$. Für dasjenige $\tilde{y} \in \tilde{C}_n^l$ mit $\tilde{y} - \tilde{\tau}_n^l \vec{e} = y$ gilt

$$\tilde{t}_n^{l+1}(\tilde{T}_n^{l+1})^{-1}(\tilde{y}) = \tilde{\tau}_n^l \quad \text{und} \quad (\tilde{T}_n^{l+1})^{-1}(\tilde{y}) = y$$

nach (4.43) und (4.40). Mit Hilfe von (4.42) schließen wir deshalb

$$\tilde{t}_n^k(P_n^k) = \tilde{\tau}_n^k \leq \tilde{\tau}_n^l = \tilde{t}_n^{l+1}(\tilde{T}_n^{l+1})^{-1}(\tilde{y}) = \tilde{t}_n^{l+1}(y) \leq \tilde{t}_n^k(y).$$

Falls für das betrachtete y sogar Gleichheit gilt, muss in der Ungleichungskette überall Gleichheit gelten, also folgt $\tilde{\tau}_n^k = \tilde{\tau}_n^l$ und $\tilde{t}_n^k(y) = \tilde{\tau}_n^l$, d.h. $\tilde{T}_n^k(y) = y + \tilde{\tau}_n^l \vec{e} = \tilde{y}$. Es folgt $\tilde{\tau}_n^k = \tilde{\tau}_n^l = \tilde{t}_n^k(y) = \tilde{t}_n^k \circ (\tilde{T}_n^k)^{-1}(\tilde{y})$, also gilt $P_n^k = (\tilde{T}_n^k)^{-1}(\tilde{P}_n^k) \leq (\tilde{T}_n^k)^{-1}(\tilde{y}) = y$ nach Definition von \tilde{P}_n^k , und die Behauptung ist gezeigt. \square

Lemma 33 *Auf $\mathcal{Y} \times \mathcal{E}$ gilt $\tilde{\mathfrak{X}}_n \circ \mathfrak{X}_n = id$ und $\mathfrak{X}_n \circ \tilde{\mathfrak{X}}_n = id$.*

Beweis: Für den ersten Teil betrachten wir $Y \in \mathcal{Y}$, $B \in \mathcal{E}$ und setzen $(\tilde{Y}, \tilde{B}) := \mathfrak{X}_n(Y, B)$. Falls B keine endliche Teilmenge von $E_n(Y)$ ist, gilt $\tilde{\mathfrak{X}}_n \circ \mathfrak{X}_n(Y, B) = \tilde{\mathfrak{X}}_n(Y, B) = (Y, B)$. Andernfalls ist nach Konstruktion $\tilde{m}(\tilde{Y}, \tilde{B}) = m(Y, B)$, und der zweite Teil von Lemma 20 impliziert $\tilde{C}_{n, \tilde{Y}, \tilde{B}}^0 = C_{n, Y, B}^0$. Nun genügt es,

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{n, \tilde{Y}, \tilde{B}}^k &= t_{n, Y, B}^k, & \tilde{T}_{n, \tilde{Y}, \tilde{B}}^k &= T_{n, Y, B}^k, & \tilde{\tau}_{n, \tilde{Y}, \tilde{B}}^k &= \tau_{n, Y, B}^k, \\ \tilde{P}_{n, \tilde{Y}, \tilde{B}}^k &= P_{n, Y, B}^k + \tau_{n, Y, B}^k & \text{und} & & \tilde{C}_{n, \tilde{Y}, \tilde{B}}^k &= C_{n, Y, B}^k + \tau_{n, Y, B}^k \end{aligned} \quad (4.44)$$

für alle $k \geq 0$ durch vollständige Induktion über k zu zeigen. Der Fall $k = 0$ ist trivial. Für den Induktionsschritt $k - 1 \rightarrow k$ bemerken wir, dass $\tilde{t}_n^k = t_n^k$ nach Induktionsannahme gilt und $\tilde{T}_n^k = T_n^k$ sofort folgt. Zusammen mit Lemma 30 und der Definition von \tilde{P}_n^k folgt $\tilde{P}_n^k = P_n^k + \tau_n^k$ und $\tilde{\tau}_n^k = \tau_n^k$. Hieraus ergibt sich sofort $\tilde{C}_n^k = C_n^k + \tau_n^k$.

Für den zweiten Teil betrachten wir $\tilde{Y} \in \mathcal{Y}$, $\tilde{B} \in \mathcal{E}$ und setzen $(Y, B) := \tilde{\mathfrak{X}}_n(\tilde{Y}, \tilde{B})$. Ohne Einschränkung ist $\tilde{B} \subset E_n(\tilde{Y})$ endlich, und es genügt, (4.44) durch vollständige Induktion über k zu zeigen. $\tilde{C}_{n, \tilde{Y}, \tilde{B}}^0 = C_{n, Y, B}^0$ folgt aus einer zum zweiten Teil von Lemma 20 analogen Aussage, und der Induktionsschritt ergibt sich unter Verwendung von Lemma 32. \square

4.3.7 Dichte des transformierten Prozesses: Lemma 22

Sei $\bar{Y} \in \mathcal{Y}$ und $f \geq 0$ $\mathcal{F}_{\bar{Y}} \otimes \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ -messbar. Definitionsgemäß lässt sich die linke Seite von (4.16) darstellen als

$$e^{-4n^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} I(k) \quad \text{mit} \quad I(k) = \int_{\Lambda_n^k} dy \sum'_{B \subset E_n(\bar{Y}_y)} (f \circ \mathfrak{X}_n \cdot \varphi_n)(\bar{Y}_y, B),$$

wobei wir die Bezeichnung $\bar{Y}_y = \{y_1, \dots, y_k\} \cup \bar{Y}_{\Lambda_n^c}$ verwenden. Wir würden gerne eine Kantenmenge B festlegen, bevor wir die Positionen x_i der Teilchen festlegen. Wir führen daher Kanten zwischen Indices anstelle der Kanten zwischen Teilchen ein. Seien dazu $\mathbb{N}_k := \{1, \dots, k\}$,

$$\bar{Y}^k := \mathbb{N}_k \cup \bar{Y}_{\Lambda_n^c} \quad \text{und} \quad E_n(\bar{Y}^k) := \{y_1 y_2 \in E(\bar{Y}^k) : y_1 y_2 \cap \mathbb{N}_k \neq \emptyset\}.$$

Für $B \subset E_n(\bar{Y}^k)$ und $y \in (\Lambda_n \times S)^I$ ($I \subset \mathbb{N}_k$) definieren wir B_y als diejenige Kantenmenge, die entsteht, wenn bei jeder Kante der Menge B der Endpunkt $i \in I$

durch y_i ersetzt wird und jede Kante, die einen Endpunkt $i \in \mathbb{N}_k \setminus I$ enthält, ganz gelöscht wird. Analog sei $\bar{Y}_y := \{y_i : i \in I\} \cup \bar{Y}_{\Lambda_n^c}$ die zur Folge gehörige Konfiguration. Mit Hilfe dieser Kurznotation erhalten wir

$$I(k) = \sum'_{B \subset E_n(\bar{Y}^k)} I(k, B) \quad \text{mit} \quad I(k, B) := \int_{\Lambda_n^k} dy (f \circ \mathfrak{T}_n \cdot \varphi_n)(\bar{Y}_y, B_y).$$

Um $I(k, B)$ zu bestimmen, müssen wir $\mathfrak{T}_n(\bar{Y}_y, B_y)$ berechnen, und dazu wiederum müssen wir die Punkte P_{n, \bar{Y}_y, B_y}^i unter den Teilchen y_j identifizieren. Seien also m_B die Anzahl der verschiedenen B -Cluster von $\bar{Y}^k \setminus C_{\bar{Y}^k, B}(\Lambda_n^c)$, $C_{\bar{Y}^k, B}(\eta(0)) := C_{\bar{Y}^k, B}(\Lambda_n^c) \cap \mathbb{N}_k$ und $S(B)$ die Menge aller Abbildungen $\eta : \{1, \dots, m_B\} \rightarrow (\bar{Y}^k \setminus C_{\bar{Y}^k, B}(\Lambda_n^c))$, so dass jeder Punkt $\eta(i)$ in einem anderen B -Cluster liegt. Für $\eta \in S(B)$ definieren wir

$$\begin{aligned} A_{k, B, \eta} &:= \{y \in (\Lambda_n \times S)^k : \forall 1 \leq j \leq m_B : y_{\eta(j)} = P_{n, \bar{Y}_y, B_y}^j\} \quad \text{und} \\ \tilde{A}_{k, B, \eta} &:= \{y \in (\Lambda_n \times S)^k : \forall 1 \leq j \leq m_B : y_{\eta(j)} = \tilde{P}_{n, \bar{Y}_y, B_y}^j\}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{P}_{n, \bar{Y}_y, B_y}^j$ die Pivot-Punkte aus der Konstruktion der inversen Transformation aus Abschnitt 4.3.6 sein sollen. Wir schreiben

$$I(k, B) = \sum_{\eta \in S(B)} \int_{\Lambda_n^k} dy 1_{A_{k, B, \eta}}(y) (f \circ \mathfrak{T}_n \cdot \varphi_n)(\bar{Y}_y, B_y)$$

und bezeichnen die Summanden des letzten Terms mit $I(k, B, \eta)$. Falls $y \in A_{k, B, \eta}$ ist, können wir einen einfachen Ausdruck für $\mathfrak{T}_n(\bar{Y}_y, B_y)$ angeben. Sei dazu

$$t_{B, \eta, y}^{\eta(j)} := t_{n, \bar{Y}_{y_{\eta(j)-1}, B_{y_{\eta(j)-1}}}}^j$$

die Verschiebungsfunktion für den j -ten Cluster, wobei $y^{\eta, j}$ die Teilfolge von y sein soll, die der Indexmenge $C_{\bar{Y}^k, B}^{\eta, j} := \bigcup_{i \leq j} C_{\bar{Y}^k, B}(\eta(i))$ entspricht, also die Teilfolge der Punkte, die schon vorher verschoben wurden. Für $y \in (\Lambda_n \times S)^k$ setzen wir nun $T_{B, \eta}(y) := (T_{B, \eta, y}^i(y_i))_{1 \leq i \leq k}$, wobei

$$T_{B, \eta, y}^{\eta(j)} := id + t_{B, \eta, y}^{\eta(j)} \vec{e} \quad \text{und} \quad T_{B, \eta, y}^i := id + t_{B, \eta, y}^{\eta(j)}(y_{\eta(j)}) \vec{e}$$

für $0 \leq j \leq m_B$ und $i \in C_{\bar{Y}^k, B}(\eta(j))$, $i \neq \eta(j)$ sein soll. Für $i \in C_{\bar{Y}^k, B}(\eta(j))$ hängt die Abbildung $T_{B, \eta, y}^i$ offenbar nicht von der ganzen Folge y ab, sondern nur von denjenigen Folgengliedern y_l mit $l \in C_{\bar{Y}^k, B}^{\eta, j-1}$ und zusätzlich von $y_{\eta(j)}$, falls $i \neq \eta(j)$ ist. Nach Konstruktion gilt nun

$$y \in A_{k, B, \eta} \Rightarrow \begin{cases} \mathfrak{T}_n(\bar{Y}_y, B_y) = (\bar{Y}_{T_{B, \eta}(y)}, B_{T_{B, \eta}(y)}) & \text{und} \\ T_{n, \bar{Y}_y, B_y}^j = T_{B, \eta, y}^{\eta(j)} & \text{für alle } j \leq m_B. \end{cases} \quad (4.45)$$

Des Weiteren stellen wir fest, dass für alle $y \in (\mathbb{R}^2 \times S)^k$ gilt:

$$y \in A_{k, B, \eta} \Leftrightarrow T_{B, \eta}(y) \in \tilde{A}_{k, B, \eta}. \quad (4.46)$$

“ \Rightarrow ” gilt wegen (4.45) und (4.44) aus dem Beweis von Lemma 33. Zum Beweis von “ \Leftarrow ” sei $y \in (\mathbb{R}^2 \times S)^k$ mit $T_{B, \eta}(y) \in \tilde{A}_{k, B, \eta}$, und sei $(Y', B') := \tilde{\mathfrak{T}}_n(\bar{Y}_{T_{B, \eta}(y)}, B_{T_{B, \eta}(y)})$, wobei $\tilde{\mathfrak{T}}_n$ wie im letzten Abschnitt das Inverse zu \mathfrak{T}_n ist. Mittels vollständiger Induktion über j können wir zeigen, dass für alle j gilt:

$$T_{n, Y', B'}^j = T_{B, \eta, y}^{\eta(j)}, \quad y_{\eta(j)} = P_{n, Y', B'}^j \quad \text{und} \quad \{y_i : i \in C_{\bar{Y}^k, B}(\eta(j))\} = C_{n, Y', B'}^j.$$

Im Induktionsschritt $j - 1 \rightarrow j$ folgt dabei die erste Behauptung aus der Induktionsannahme, die dritte aus der zweiten und die zweite aus der ersten, der Definition von $\tilde{A}_{k,B,\eta}$ und (4.44) aus dem Beweis von Lemma 33, da

$$\begin{aligned} T_{n,Y',B'}^j(y_{\eta(j)}) &= T_{B,\eta,y}^{\eta(j)}(y_{\eta(j)}) = \tilde{P}_{n,\bar{Y}_{T_{B,\eta}(y)},B_{T_{B,\eta}(y)}}^j \\ &= P_{n,Y',B'}^j + \tau_{n,Y',B'}^j = T_{n,Y',B'}^j(P_{n,Y',B'}^j) \end{aligned}$$

und $T_{n,Y',B'}^j$ bijektiv ist. Dies schließt den Induktionsbeweis ab, und nun folgt $(\bar{Y}_y, B_y) = (Y', B')$, woraus wir $y_{\eta(j)} = P_{n,Y',B'}^j = P_{n,\bar{Y}_y,B_y}^j$ folgern können. Damit haben wir (4.46) gezeigt.

Die Hilfsfunktion $g : (\mathbb{R}^2 \times S)^k \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $g(y) := 1_{\tilde{A}_{k,B,\eta}}(y)f(\bar{Y}_y, B_y)$ definiert. (4.45) und (4.46) implizieren nun die Darstellung

$$I(k, B, \eta) = \left[\prod_{j=0}^{m_B} \left(\prod_{i \in C_{\bar{Y}^k, B}(\eta(j))} \int dy_i \right) |1 + \partial_{\bar{e}} t_{B,\eta,y}^{\eta(j)}(y_{\eta(j)})| \right] g(T_{B,\eta}(y)),$$

wo wir auch schon die Definition (4.15) der Dichtefunktion eingesetzt haben. Jetzt transformieren wir die Integrale. Von $j = m_B$ bis 1 und $i \in C_{\bar{Y}^k, B}(\eta(j))$ substituieren wir $y'_i := T_{B,\eta,y}^i y_i$. Für $i \neq \eta(j)$ ist $T_{B,\eta,y}^i$ eine Verschiebung um einen festen Vektor, daher ist $dy'_i = dy_i$. Für $i = \eta(j)$ betrifft die Transformation nur die erste Ortskomponente. Für feste zweite Ortskomponente \bar{r}_i und Spinkomponente σ_i von y_i transformiert sich die erste Ortskomponente r_i mittels $id + t_{B,\eta,y}^i(\cdot, \bar{r}_i, \sigma_i)$. Nach (4.30) ist $t_{B,\eta,y}^i(\cdot, \bar{r}_i, \sigma_i)$ 1/2-Lipschitz-stetig und stückweise stetig differenzierbar, also ist $id + t_{B,\eta,y}^i(\cdot, \bar{r}_i, \sigma_i)$ streng monoton wachsend und stückweise stetig differenzierbar. Der Transformationssatz von Lebesgue (4.23) liefert daher

$$dy'_{\eta(j)} = |1 + \partial_{\bar{e}} t_{B,\eta,y}^{\eta(j)}(y_{\eta(j)})| dy_{\eta(j)}.$$

Somit erhalten wir

$$I(k, B, \eta) = \left[\prod_{j=0}^{m_B} \left(\prod_{i \in C_{\bar{Y}^k, B}(\eta(j))} \int dy'_i \right) \right] g(y') = \int_{\Lambda_n^k} dy 1_{\tilde{A}_{k,B,\eta}}(y) f(\bar{Y}_y, B_y).$$

Damit sind wir aber fertig, da dieselbe Argumentation zeigt, dass die rechte Seite von (4.16) geschrieben werden kann als

$$e^{-4n^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum'_{B \subset E_n(\bar{Y}^k)} \sum_{\eta \in S(B)} \int_{\Lambda_n^k} dy 1_{\tilde{A}_{k,B,\eta}}(y) f(\bar{Y}_y, B_y).$$

Ganz analog zu obigen Überlegungen kann man zeigen, dass die Dichtefunktion überhaupt erst wohldefiniert ist. Es gilt nämlich für jede Randbedingung $\bar{Y} \in \mathcal{Y}$

$$\begin{aligned} &\nu_{\Lambda_n} \otimes \pi'_n(\varphi_n \text{ ist wohldefiniert} | \bar{Y}) \\ &= e^{-4n^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum'_{B \subset E_n(\bar{Y}^k)} \sum_{\eta \in S(B)} \int_{\Lambda_n^k} dy 1_{A_{k,B,\eta}}(y) \prod_{j=0}^{m_B} 1_{\{\partial_{\bar{e}} t_{B,\eta,y}^{\eta(j)}(y_{\eta(j)}) \text{ existiert}\}}. \end{aligned}$$

Da aber $t_{B,\eta,y}^{\eta(j)}$ stückweise stetig \bar{e} -differenzierbar ist, gilt für beliebige $r \in \mathbb{R}$, $\sigma \in S$, k, B, η und y wie in obiger Formel, dass $\partial_{\bar{e}} t_{B,\eta,y}^{\eta(j)}(\cdot, r, \sigma)$ λ^1 -f.s. existiert. Nach dem Satz von Fubini kann man daher die Indikatorfunktionen unter dem Produkt alle durch 1 ersetzen, und obige Wahrscheinlichkeit ist daher 1.

4.3.8 Wichtige Abschätzungen: Lemma 23

Abschätzung der Energie

Für $y, y' \in \mathbb{R}^2 \times S$ und $\vartheta \in [-1, 1]$ mit $(y, y' + s\vec{e}) \notin K$ für alle $s \in [-\vartheta, \vartheta]$ gilt

$$\begin{aligned} \bar{U}(y, y' + \vartheta\vec{e}) + \bar{U}(y, y' - \vartheta\vec{e}) - 2\bar{U}(y, y') &= \varphi_{y, y'}^{\bar{U}}(\vartheta) + \varphi_{y, y'}^{\bar{U}}(-\vartheta) - 2\varphi_{y, y'}^{\bar{U}}(0) \\ &\leq \sup_{s \in [-\vartheta, \vartheta]} \frac{d^2}{dt^2} \varphi_{y, y'}^{\bar{U}}(s) \vartheta^2 = \sup_{s \in [-\vartheta, \vartheta]} \partial_{\vec{e}}^2 \bar{U}(y, y' + s\vec{e}) \vartheta^2 \end{aligned}$$

nach Taylor-Entwicklung von $\varphi_{y, y'}$, was wegen der \vec{e} -Glattheit von \bar{U} möglich ist. Die ψ -Dominierung der \vec{e} -Ableitungen liefert

$$\sup_{s \in [-\vartheta, \vartheta]} \partial_{\vec{e}}^2 \bar{U}(y, y' + s\vec{e}) \leq \psi(y, y').$$

Sei nun $(Y, B) \in G_n$. Ohne Einschränkung können wir die rechte Seite von (4.17) als endlich voraussetzen. Unter Verwendung der Kurzschreibweisen

$$\begin{aligned} \vartheta_{y, y'} &:= t_{n, Y, B}(y') - t_{n, Y, B}(y) \quad \text{für } y, y' \in E_n(Y) \quad \text{und} \\ E_{n, K}(Y) &:= \{yy' \in E_n(Y) : (y, y') \notin K\} \quad \text{für } Y \in \mathcal{Y} \end{aligned}$$

ist dann

$$\begin{aligned} &H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\mathfrak{X}_{n, B} Y) + H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(\mathfrak{X}_{n, B} Y) - 2H_{\Lambda_n}^{\bar{U}}(Y) \\ &= \sum_{yy' \in E_{n, K}(Y)} [\bar{U}(y, y' + \vartheta_{y, y'} \vec{e}) + \bar{U}(y, y' - \vartheta_{y, y'} \vec{e}) - 2\bar{U}(y, y')] \\ &\leq \sum_{yy' \in E_{n, K}(Y)} \psi(y, y') (t_{n, Y, B}(y) - t_{n, Y, B}(y'))^2 =: f_n(Y, B). \end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir verwendet, dass \bar{U} \vec{e} -invariant ist und dass wegen (4.33) für $(y, y') \in K$ $\vartheta_{y, y'} = 0$ ist, und im zweiten Schritt konnten wir obige Taylorabschätzung verwenden, da nach (4.34) für $(y, y') \notin K$ auch $(y, y' + s\vec{e}) \notin K$ für alle $s \in [-\vartheta_{y, y'}, \vartheta_{y, y'}]$ ist. Nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem quadratischen Mittel ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \left((t_{n, Y, B}(y) - \tau_n(|y|)) + (\tau_n(|y|) - \tau_n(|y'|)) + (\tau_n(|y'|) - t_{n, Y, B}(y')) \right)^2 \\ &\leq (t_{n, Y, B}(y) - \tau_n(|y|))^2 + (\tau_n(|y|) - \tau_n(|y'|))^2 + (\tau_n(|y'|) - t_{n, Y, B}(y'))^2, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} f_n(Y, B) &\leq 6 \sum_{y, y' \in Y}^{\neq} \psi(y, y') (\tau_n(|y|) - t_{n, Y, B}(y))^2 \\ &\quad + 3 \sum_{y, y' \in Y}^{\neq} \mathbf{1}_{\{|y| \leq |y'|\}} \psi(y, y') (\tau_n(|y|) - \tau_n(|y'|))^2. \end{aligned}$$

In der ersten Summe auf der rechten Seite folgt unter Verwendung von (4.32)

$$\begin{aligned} (\tau_n(|y|) - t_{n, Y, B}(y))^2 &\leq (\tau_n(|y|) - \tau_n(|a_{n, Y, B_+}(y)|))^2 \\ &\leq \sum_{y'' \in Y} \mathbf{1}_{\{|y| \leq |y''|\}} \mathbf{1}_{\{y \xleftrightarrow{Y, B_+} y''\}} (\tau_n(|y|) - \tau_n(|y''|))^2. \end{aligned}$$

Durch Unterscheidung der Fälle $y'' \neq y, y'$ und $y'' = y'$ können wir daher $f_n(Y, B)$ durch die Summe der beiden folgenden Ausdrücke abschätzen:

$$\begin{aligned}\Sigma_2(n, Y, B) &:= 6 \sum_{y, y', y'' \in Y}^{\neq} 1_{\{y \xrightarrow{Y, B} y''\}} \psi(y, y') 1_{\{|y| \leq |y''|\}} |\tau_n(|y| - c_K) - \tau_n(|y''|)|^2, \\ \Sigma_3(n, Y) &:= 9 \sum_{y, y'' \in Y}^{\neq} \psi(y, y'') 1_{\{|y| \leq |y''|\}} |\tau_n(|y| - c_K) - \tau_n(|y''|)|^2.\end{aligned}\tag{4.47}$$

Verwenden wir diese Summen bei der Definition von G_n in (4.11), erhalten wir die Behauptung (4.17).

Abschätzung der Dichten

Sei wieder $(Y, B) \in G_n$. Wegen der in (4.30) festgestellten $1/2$ - $\bar{\epsilon}$ -Lipschitz-Stetigkeit ist

$$|\partial_{\bar{\epsilon}} t_{n, Y, B}^k(P_{n, Y, B}^k)| \leq 1/2.$$

Unter Verwendung der Abschätzung $-\log(1-a) \leq 2a$ für $0 \leq a \leq 1/2$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned}f_n(Y, B) &:= -\log \bar{\varphi}_n(Y, B) - \log \varphi_n(Y, B) \\ &= - \sum_{k=1}^{m(Y, B)} \log(1 - (\partial_{\bar{\epsilon}} t_{n, Y, B}^k(P_{n, Y, B}^k))^2) \leq \sum_{k=1}^{m(Y, B)} 2(\partial_{\bar{\epsilon}} t_{n, Y, B}^k(P_{n, Y, B}^k))^2.\end{aligned}$$

Falls $\varphi_n(Y, B)$ wohldefiniert ist, gibt es eine Umgebung der ersten Ortskomponente von $P_{n, Y, B}^k$, auf der $t_{n, Y, B}^k$ mit $t_{n, Y, B}^0$ oder einer der Funktionen $m_{y, \tau_{n, Y, B}^i}$ übereinstimmt, wobei $0 \leq i < k$ und $y \in C_{n, Y, B}^i$ mit $(y, P_{n, Y, B}^k) \in K''$. Daher können wir $(\partial_{\bar{\epsilon}} t_{n, Y, B}^k(P_{n, Y, B}^k))^2$ abschätzen durch die Summe von $(\partial_{\bar{\epsilon}} t_{n, Y, B}^0(P_{n, Y, B}^k))^2$ und

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{y \in C_{n, Y, B}^i} 1_{K''}(y, P_{n, Y, B}^k) (\tau_n(|y| - c_K) - \tau_{n, Y, B}^i)^2 c_f^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{y \in C_{n, Y, B}^i} 1_{K''}(y, P_{n, Y, B}^k) (\tau_n(|y| - c_K) - \tau_n(|a_{n, Y, B_+}(y)|))^2 c_f^2,\end{aligned}$$

wobei wir (4.26) im letzten Schritt verwendet haben. Für $y = (r_1, r_2, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \times S$ ist

$$|\partial_{\bar{\epsilon}} t_{n, Y, B}^0(y)| = 1_{\{n \geq |r_1| > |r_2| \vee R\}} \tau \frac{q(|r_1| - R)}{Q(n - R)} \leq 1_{\{y \in \Lambda_n\}} \tau \frac{q(|y| - R)}{Q(n - R)},$$

also lässt sich $f_n(Y, B)$ durch die Summe der beiden folgenden Ausdrücke abschätzen:

$$\begin{aligned}\Sigma_4(n, Y) &:= 2\tau^2 \sum_{y \in Y} 1_{\{y \in \Lambda_n\}} \frac{q(|y| - R)^2}{Q(n - R)^2}, \\ \Sigma_5(n, Y, B) &:= 2c_f^2 \sum_{y, y' \in Y}^{\neq} \sum_{y'' \in Y} 1_{K''}(y, y') 1_{\{y \xrightarrow{Y, B} y''\}} 1_{\{|y| \leq |y''|\}} \\ &\quad \times (\tau_n(|y| - c_K) - \tau_n(|y''|))^2.\end{aligned}\tag{4.48}$$

Verwenden wir diese Terme in der Definition (4.11) von G_n , folgt die Behauptung.

4.3.9 Gute Konfigurationen: Lemma 24

Die in der Definition (4.11) der Menge der guten Konfigurationen verwendeten Funktionen $\Sigma_i(n, Y, B)$ haben wir in (4.29), (4.47) und (4.48) angegeben. Mit Hilfe der Abkürzung

$$\tau_n^q(y, y'') := 1_{\{|y| \leq |y''|\}} |\tau_n(|y| - c_K) - \tau_n(|y''|)|^2$$

lassen sie sich schreiben als

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 4c_f^2 \sum_{y, y'' \in Y} 1_{\{y \xleftrightarrow{Y, B^+} y''\}} \tau_n^q(y, y''), & \Sigma_2 &= 6 \sum_{y, y', y'' \in Y}^{\neq} 1_{\{y \xleftrightarrow{Y, B^+} y''\}} \psi(y, y') \tau_n^q(y, y''), \\ \Sigma_3 &= 9 \sum_{y, y'' \in Y}^{\neq} \psi(y, y'') \tau_n^q(y, y''), & \Sigma_4 &= 2\tau^2 \sum_{y \in \Lambda_n} 1_{\{y \in \Lambda_n\}} \frac{q(|y| - R)^2}{Q(n - R)^2} \quad \text{und} \\ \Sigma_5 &= 2c_f^2 \sum_{y, y' \in Y}^{\neq} \sum_{y'' \in Y} 1_{K''}(y, y') 1_{\{y \xleftrightarrow{Y, B^+} y''\}} \tau_n^q(y, y''). \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass die Erwartung jedes Σ_i beliebig klein wird, wenn wir n groß genug wählen. Zuerst werden wir aber noch einige Tatsachen vorstellen, die wir später brauchen.

Vorbereitungen

Sei $n \geq R + 1$. Für $s' > s$ mit $s' > R$ und $s < n$ gilt

$$0 \leq r(s - R, n - R) - r(s' - R, n - R) = \int_{R \vee s}^{s' \wedge n} \frac{q(t - R)}{Q(n - R)} dt \leq (s' - s) \frac{q(s - R)}{Q(n - R)}$$

wegen der Monotonie von q . Wir setzen $\bar{n} := n + c_K$ und $\bar{R} := R + c_K$. Obige Abschätzung impliziert dann

$$\tau_n^q(x, x') \leq 1_{\{x \in \Lambda_{\bar{n}}\}} \tau^2 (|x'| - |x| + c_K)^2 \frac{q(|x| - \bar{R})^2}{Q(\bar{n} - \bar{R})^2} \quad \text{für } x, x' \in \mathbb{R}^2, \quad (4.49)$$

indem wir $s' := |x'|$ und $s := |x| - c_K$ substituieren. (Falls $s' \leq R$ oder $s \geq n$ ist, so gilt sogar $\tau_n^q(x, x') = 0$.) Wir wollen nun untersuchen, wie wir die Terme auf der rechten Seite von (4.49) in den Griff bekommen können. Zuerst bemerken wir, dass

$$\int_{\Lambda_{\bar{n}}} dx q(|x| - \bar{R})^2 \leq 16\bar{R}^2 + 32Q(\bar{n} - \bar{R}) \quad \text{für } \bar{n} \geq 2\bar{R}. \quad (4.50)$$

Schreiben wir nämlich $s := |x|$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_{\bar{n}}} dx q(|x| - \bar{R})^2 &\leq \int_0^{2\bar{R}} ds 8s + \int_{\bar{R}}^{\bar{n} - \bar{R}} ds 8(s + \bar{R})q(s)^2 \\ &\leq 16\bar{R}^2 + 32 \int_0^{\bar{n} - \bar{R}} q(s) ds \leq 16\bar{R}^2 + 32Q(\bar{n} - \bar{R}). \end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir $q \leq 1$ verwendet, und im zweiten Schritt $s + \bar{R} \leq 2s$ und

$sq(s) \leq 2$. Außerdem erhalten wir $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \infty$ als Konsequenz von $\log \log n \leq Q(n)$ für $n > 1$. Aus (4.50) folgt daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_{\bar{n}}} dx \frac{q(|x| - \bar{R})^2}{Q(\bar{n} - \bar{R})^2} = 0. \quad (4.51)$$

Schließlich gilt für $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^2$ nach der Dreiecksungleichung

$$\left| |x_m| - |x_0| + c_K \right| \leq m \bigvee_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}| + c_K \leq (m+1)(1 \vee c_K) \left(1 \vee \bigvee_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}| \right),$$

und es folgt

$$\left(|x_m| - |x_0| + c_K \right)^2 \leq (m+1)^2 (1 \vee c_K^2) \bigvee_{i=1}^m (1 \vee |x_i - x_{i-1}|^2). \quad (4.52)$$

Abschätzung der Terme Σ_i

Wir verwenden die Ideen aus dem Beweis von Lemma 18. Für $Y \in \mathcal{Y}$ und $B \subset E_n(Y)$ schätzen wir die Summanden von $\Sigma_1(n, Y, B)$ ab, indem wir alle Möglichkeiten für Pfade y_0, \dots, y_m von $y = y_0$ bis $y'' = y_m$ im Graphen (Y, B_+) betrachten. Nach (4.49) und (4.52) können wir dann $\Sigma_1(n, Y, B)$ abschätzen durch das Produkt einer Konstanten c mit

$$\sum_{m \geq 0} (m+1)^2 \sum_{k=1}^m \sum_{y_0, \dots, y_m \in Y}^{\neq} 1_{\{y_0 \in \Lambda_{\bar{n}}\}} \frac{q(|y_0| - \bar{R})^2}{Q(\bar{n} - \bar{R})^2} (1 \vee |y_k - y_{k-1}|^2) \prod_{i=1}^m 1_{\{y_i y_{i-1} \in B_+\}}.$$

Unter Verwendung von Lemma 2, (4.20) und (4.21) folgt daher genauso wie in Beweis von Lemma 18:

$$\begin{aligned} & \int \mu(dY) \int \pi_n(dB|Y) \Sigma_1(n, Y, B) \\ & \leq (z\xi)^2 c_g c \sum_{m \geq 0} (m+1)^3 (c_\xi z\xi)^{m-1} \int_{\Lambda_{\bar{n}}} dy_0 \frac{q(|y_0| - \bar{R})^2}{Q(\bar{n} - \bar{R})^2}. \end{aligned}$$

Im letzten Term hat die Summe über m wegen (4.7) einen endlichen Wert, und wegen (4.51) kann das Integral beliebig klein gemacht werden, wenn nur n groß genug ist.

Ebenso schätzen wir die Summanden von $\Sigma_2(n, Y, B)$ ab, indem wir alle Möglichkeiten für Pfade y_0, \dots, y_m von $y = y_0$ nach $y'' = y_m$ in (Y, B_+) betrachten und die Fälle $y_j = y'$ und $y_j \neq y' \forall j$ unterscheiden. Nach (4.49) und (4.52) können wir $\Sigma_2(n, Y, B)$ abschätzen durch das Produkt einer Konstanten c mit

$$\begin{aligned} & \sum_{m \geq 0} (m+1)^2 \sum_{k=1}^m \sum_{y_0, \dots, y_m \in Y}^{\neq} 1_{\{y_0 \in \Lambda_{\bar{n}}\}} \frac{q(|y_0| - \bar{R})^2}{Q(\bar{n} - \bar{R})^2} (1 \vee |y_k - y_{k-1}|^2) \\ & \times \prod_{i=1}^m 1_{\{y_i y_{i-1} \in B_+\}} \left[\sum_{y' \in Y, y' \neq y_i \forall i} \psi(y_0, y') + \sum_{j=1}^{m-1} \psi(y_0, y_j) \right]. \end{aligned}$$

Die zweite Summe in den eckigen Klammern ist nach (4.8) höchstens $c_\psi m$, daher

folgt wie oben:

$$\begin{aligned} & \int \mu(dY) \int \pi_n(dB|Y) \Sigma_2(n, Y, B) \\ & \leq (z\xi)^2 c_g c \sum_{m \geq 0} (m+1)^3 (c_\xi z\xi)^{m-1} \int_{\Lambda_{\bar{n}}} dy_0 \frac{q(|y_0| - \bar{R})^2}{Q(\bar{n} - \bar{R})^2} (z\xi c_\psi + c_\psi m). \end{aligned}$$

Somit wird der Ausdruck wieder beliebig klein, falls nur n groß genug ist. Analog gilt mit einer Konstanten c

$$\int \mu(dY) \Sigma_3(n, Y) \leq c(z\xi)^2 \int_{\Lambda_{\bar{n}}} dy \frac{q(|y| - \bar{R})^2}{Q(\bar{n} - \bar{R})^2} \int dy'' \psi(y, y'') (1 \vee |y - y''|^2).$$

Da nach (4.8) das zweite Integral höchstens c_ψ ist, wird auch dieser Ausdruck beliebig klein, falls nur n groß genug ist. Selbiges gilt für

$$\int \mu(dY) \Sigma_4(n, Y) \leq 2z\xi\tau^2 \int_{\Lambda_{\bar{n}}} dy \frac{q(|y| - \bar{R})^2}{Q(\bar{n} - \bar{R})^2}.$$

Schließlich können wir auch noch $\Sigma_5(n, Y, B)$ abschätzen durch das Produkt einer Konstanten c mit

$$\begin{aligned} & \sum_{m \geq 0} (m+1)^2 \sum_{k=1}^m \sum_{y_0, \dots, y_m \in Y}^{\neq} 1_{\{y_0 \in \Lambda_{\bar{n}}\}} \frac{q(|y_0| - \bar{R})^2}{Q(\bar{n} - \bar{R})^2} (1 \vee |y_k - y_{k-1}|^2) \\ & \times \prod_{i=1}^m 1_{\{y_i y_{i-1} \in B_+\}} \left[\sum_{y' \in Y, y' \neq y_i \forall i} 1_{K''}(y_0, y') + \sum_{j=1}^m 1_{K''}(y_0, y_j) \right]. \end{aligned}$$

Die zweite Summe in den eckigen Klammern ist höchstens m . Wie oben folgt

$$\begin{aligned} & \int \mu(dY) \int \pi_n(dB|Y) \Sigma_5(n, Y, B) \\ & \leq (z\xi)^2 c_g c \sum_{m \geq 0} (m+1)^3 (c_\xi z\xi)^{m-1} \int_{\Lambda_{\bar{n}}} dy_0 \frac{q(|y_0| - \bar{R})^2}{Q(\bar{n} - \bar{R})^2} (z\xi c_\xi + m), \end{aligned}$$

was wieder beliebig klein wird, wenn nur n groß genug ist. Insgesamt erhalten wir

$$\int \mu \otimes \pi_n(d(Y, B)) \sum_{i=1}^5 \Sigma_i(n, Y, B) \leq \frac{\delta}{2}$$

für genügend große natürliche Zahlen n , und $\mu \otimes \pi_n(G_n^c) \leq \delta$ folgt daraus unter Verwendung der Ungleichung von Čebyšev, der hohen Wahrscheinlichkeit von G'_n und der Definition von G_n in (4.11).

4.4 Approximierbarkeit: Propositionen 5 und 6

Proposition 5 folgt sofort aus den Definitionen. Zum Beweis von Proposition 6 sei (U, z, \mathcal{Y}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ , wobei $U : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ein \bar{a} -invariantes Standard-Potential sei. Es gebe ein $\epsilon > 0$, messbare Kernerweiterungen K, K' und K'' mit Eigenschaft (4.1), so dass gilt:

$$\begin{aligned} & \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int 1_{K'' \setminus K^U}(y_1, y_2) dy_2 < 1/(z\xi) \quad \text{und} \\ & U \text{ ist in } (K^c)_\epsilon \text{ gleichgradig } \bar{a}\text{-stetig und beschränkt.} \end{aligned}$$

Ferner gebe es eine bpqi-Funktion ψ und ein $R \in \mathbb{N}$, so dass für

$$\tilde{K} := \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^2 \times S)^2 : |y_1 - y_2| \leq R\}$$

eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) U hat auf \tilde{K}^c durch ψ dominierte \vec{a} -Ableitungen.
- (b) Es gibt ein \vec{a} -invariantes Standard-Potential $\tilde{U} \geq 0$ mit $|U| \leq \tilde{U}$ in \tilde{K}^c ,

\tilde{U} hat auf \tilde{K}^c durch ψ dominierte \vec{a} -Ableitungen und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int \tilde{U}(y_1, y_2) |y_1 - y_2|^2 1_{\{|y_1 - y_2| \geq r\}} dy_2 = 0.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$c := 1/(z\xi) - \sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int 1_{K'' \setminus K^c}(y_1, y_2) dy_2 > 0.$$

Im Fall (a) setzen wir $U_1 := U$ und im Fall (b) setzen wir $U_1 := \tilde{U}$. Wir können durch Vergrößerung von R ohne Einschränkung annehmen, dass $R \geq 1$ und \tilde{K} so groß ist, dass $K \subset \tilde{K}$ und im Fall (b) außerdem

$$\sup_{y_1 \in \mathbb{R}^2 \times S} \int 2\tilde{U}(y_1, y_2) |y_1 - y_2|^2 1_{\tilde{K}^c}(y_1, y_2) dy_2 < \frac{c}{2}.$$

In beiden Fällen dient U_1 als \vec{a} -glatte Approximation von U auf \tilde{K}^c . Sei

$$C := \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^2 \times S)^2 : |y_1 - y_2| \leq R + 1\} \setminus K.$$

Für $\delta' > 0$ sei $f_{\delta'} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine symmetrische glatte Wahrscheinlichkeitsdichte mit Träger in $] -\delta', \delta' [$, vergleiche (3.21) im Abschnitt 3.4. Die Funktion

$$U_2(x_1, \sigma_1, x_2, \sigma_2) := \int dt f_{\delta'}(t) U(x_1, \sigma_1, x_2 - t\vec{a}, \sigma_2)$$

ist dann eine \vec{a} -glatte Approximation von U auf C . Falls δ' klein genug ist, folgt aus der gleichgradigen \vec{a} -Stetigkeit von U

$$|U_2(y_1, y_2) - U(y_1, y_2)| < c' := \frac{c}{16(R+1)^2} \quad \text{für } (y_1, y_2) \in C.$$

Sei schließlich $g : (\mathbb{R}^2 \times S)^2 \rightarrow [0, 1]$ eine \vec{a} -glatte Funktion mit $g(y_1, y_2) = 0$ für $|y_1 - y_2| \leq R$, $g(y_1, y_2) = 1$ für $|y_1 - y_2| \geq R + 1$ und beschränkten \vec{a} -Ableitungen $\partial_{\vec{a}} g$ und $\partial_{\vec{a}}^2 g$. Jetzt können wir $\bar{U}, u : K^c \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\bar{U} := (1 - g)(U_2 + c') + gU_1 \quad \text{und} \quad u := \bar{U} - U$$

definieren. Dass die konstruierten Objekte in beiden Fällen (a) und (b) die in Definition 13 geforderten Eigenschaften haben, ist nun leicht nachzuprüfen.

4.5 Beweise im unmarkierten Fall

4.5.1 Beweis von Proposition 7

Der Beweis verläuft analog zum markierten Fall. Sei (U, z, \mathcal{X}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ , wobei $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein translationsinvariantes Standard-Potential sei, so dass der harte Kern K^U von U kompakt ist, U stetig in $(K^U)^c$ ist und es eine bqi-Funktion ψ und ein $R \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $\tilde{K} := \Lambda_R$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) U hat auf \tilde{K}^c durch ψ dominierte \bar{a} -Ableitungen.
- (b) Es gibt ein translationsinvariantes Standard-Potential $\tilde{U} \geq 0$ mit $|U| \leq \tilde{U}$ in \tilde{K}^c , das auf \tilde{K}^c durch ψ dominierte \bar{a} -Ableitungen hat, und für das gilt

$$\int_{\tilde{K}^c} \tilde{U}(x)|x|^2 dx < \infty.$$

Aus Kompaktheitsgründen können wir ein $\epsilon > 0$ wählen, so dass für den Abschluß K der ϵ -Erweiterung K_ϵ^U des harten Kerns

$$c := 1/(z\xi) - \lambda^2(K \setminus K^U) > 0$$

ist. Im Fall (a) setzen wir $U_1 := U$ und im Fall (b) setzen wir $U_1 := \tilde{U}$. Wir können durch Vergrößerung von R ohne Einschränkung annehmen, dass $R \geq 1$ und \tilde{K} so groß ist, dass $K \subset \tilde{K}$ und im Fall (b) außerdem

$$\int_{\Lambda_R^c} 2\tilde{U}(x) dx < \frac{c}{2}.$$

In beiden Fällen dient $U_1(x)$ als Approximation von U auf Λ_R^c . Sei $C := \Lambda_{R+1} \setminus K$. Für $\delta > 0$ sei $f_\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine glatte symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichte mit Träger in $]-\delta, \delta[$, vergleiche (3.21) im Abschnitt 3.4. Die Funktion

$$U_2(x) := \int dt f_\delta(t)U(x - t\bar{a})$$

ist dann eine \bar{a} -glatte Approximation von U auf C . Falls wir δ genügend klein wählen, folgt aus der Stetigkeit von U und der Beschränktheit von C

$$|U_2(x) - U(x)| < c' := c/[4\lambda^2(C)] \quad \text{für alle } x \in C.$$

Sei schließlich $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ eine \bar{a} -glatte Funktion mit $g(x) = 0$ für $|x| \leq R$, $g(x) = 1$ für $|x| \geq R + 1$ und beschränkten \bar{a} -Ableitungen $\partial_{\bar{a}}g$ und $\partial_{\bar{a}}^2g$. Jetzt können wir die Funktionen $\bar{U}, u : K^c \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\bar{U} := (1 - g)(U_2 + c') + gU_1 \quad \text{und} \quad u := \bar{U} - U$$

definieren. Dass die konstruierten Objekte in beiden Fällen (a) und (b) die in Definition 16 geforderten Eigenschaften haben, ist nun leicht nachzuprüfen.

4.5.2 Beweis von Satz 5

Da der unmarkierte Fall nur ein Spezialfall des markierten Falles ist, lässt sich fast der ganze Beweis wortwörtlich übernehmen. Wegen der Translationsinvarianz in alle Richtungen ergeben sich Vereinfachungen, und durch die etwas veränderten Voraussetzungen ist der Beginn des Beweises leicht abgewandelt:

Sei (U, z, \mathcal{X}_0) ein zulässiges Tripel mit Ruelle-Schranke ξ , wobei $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein translationsinvariantes Standard-Potential sei, das \vec{a} -glatt approximierbar ist. Seien $K \supset K^U$ eine symmetrische kompakte Menge und ψ eine bqi-Funktion. Seien $\bar{U} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ messbare symmetrische Funktionen mit $0 \in K$, $U = \bar{U} - u$ und $u \geq 0$ auf \mathbb{R}^2 , $u = 0$ auf K , so dass \bar{U} in K^c durch ψ dominierte \vec{a} -Ableitungen hat und

$$c_u := \int \tilde{u}(x)|x|^2 dx < \infty \quad \text{und} \quad \lambda^2(K \setminus K^U) + \int \tilde{u}(x) dx < 1/(z\xi).$$

In diesem unmarkierten translationsinvarianten Fall sind $K' := K_\epsilon$ und $K'' := (K')_\epsilon$ automatisch messbar, vergleiche Abschnitt 2.5.2. Wählen wir hierbei $\epsilon > 0$ klein genug, gilt sogar

$$c_\xi := \lambda^2(K'' \setminus K^U) + \int \tilde{u}(x) dx < 1/(z\xi),$$

denn K ist kompakt und wegen der σ -Stetigkeit des Maßes λ^2 nach unten wird daher $\lambda^2(K'' \setminus K)$ beliebig klein, wenn nur ϵ klein genug ist. Ab dieser Stelle kann der Beweis von Satz 4 mit den entsprechenden Vereinfachungen übernommen werden.

Literaturverzeichnis

- [D1] R. L. Dobrushin, The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity, *Theor. Prob. Appl.* 13 (1968) 197-224.
- [D2] R. L. Dobrushin, Prescribing a system of random variables by conditional distributions, *Theor. Prob. Appl.* 15 (1970) 458-486.
- [DS] R. L. Dobrushin, S. B. Shlosman, Absence of breakdown of continuous symmetry in two-dimensional models of statistical physics, *Comm. Math. Phys.* 42 (1975) 31-40.
- [DV] D. J. Daley, D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer, New York, 1988
- [FP1] J. Fröhlich, C.-E. Pfister, On the absence of spontaneous symmetry breaking and of crystalline ordering in two-dimensional systems, *Comm. Math. Phys.* 81 (1981) 277-298.
- [FP2] J. Fröhlich, C.-E. Pfister, Absence of crystalline ordering in two dimensions, *Comm. Math. Phys.* 104 (1986) 697-700.
- [G1] H.-O. Georgii, *Gibbs measures and phase transitions*, de Gruyter Studies in Mathematics 9, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1988.
- [G2] H.-O. Georgii, Translation invariance and continuous symmetries in two-dimensional continuum systems, in: S. Miracle-Sole, J. Ruiz., V. Zagrebnov (Eds.), *Mathematical results in Statistical Mechanics*, World Scientific, Singapore etc. , 1999, pp. 53-69.
- [GHM] H.-O. Georgii, O. Häggström, C. Maes, The random geometry of equilibrium phases, in: C. Domb and J. L. Lebowitz (Eds.), *Phase Transitions and Critical Phenomena Vol. 18*, Academic Press, London, 2000, pp. 1-142.
- [GOV] V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishchik, E. B. Vinberg, *Foundations of Lie Theory and Lie Transformation Groups*, Springer, Berlin, 1997.
- [ISV] D. Ioffe, S. Shlosman, Y. Velenik, 2D models of statistical physics with continuous symmetry: the case of singular interactions, *Comm. Math. Phys.* 226 (2002) 433-454.
- [K] O. Kallenberg, *Random Measures*, Akademie-Verlag and Academic Press, Berlin and London, 1986

-
- [LR] O. E. Lanford, D. Ruelle, Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics, *Comm. Math. Phys.* 13 (1969) 194-215.
- [M] N. D. Mermin, Absence of ordering in certain classical systems, *J. Math. Phys.* 8 (1967) 1061-1064.
- [MKM] K. Matthes, J. Kerstan, J. Mecke, *Infinitely divisible point processes*, John Wiley, Chichester, 1978.
- [MW] N. D. Mermin, H. Wagner, Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models, *Phys. Rev. Letters* 17 (1966) 1133-1136.
- [P] C.-E. Pfister, On the symmetry of the Gibbs states in two dimensional lattice systems, *Comm. Math. Phys.* 79 (1981) 181-188.
- [R] D. Ruelle, Superstable interactions in classical statistical mechanics, *Comm. Math. Phys.* 18 (1970) 127-159.
- [Ri1] T. Richthammer, Two-dimensional Gibbsian point processes with continuous spin symmetries, *Stoch. Proc. Appl.* 115 (2005) 827-848.
- [Ri2] T. Richthammer, Translation-invariance of two-dimensional Gibbsian systems of particles with internal degrees of freedom, *arXiv: math.PR/0603140*.
- [Sh] S. Shlosman, Continuous models with continuous symmetries in two dimensions, in: J. Fritz, J. L. Lebowitz, D. Szasz (Eds.), *Random fields Vol. 2*, North Holland, Amsterdam, 1979, pp. 949-966.
- [Sim] B. Simon, *The statistical mechanics of lattice gases*, Princeton University Press, Princeton, 1993
- [Sin] Y. G. Sinai, *Theory of phase transitions: Rigorous results*, Pergamon Press Oxford, 1982

Verzeichnis ausgewählter Symbole

Allgemeine Bezeichnungen

| | |
|--|---|
| $:=$ | definierende Gleichung |
| $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ | Menge der natürlichen Zahlen |
| $\mathbb{Z} := \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ | Menge der ganzen Zahlen |
| \mathbb{R} | Menge der reellen Zahlen |
| $\mathbb{R}_+ := [0, \infty[$ | Menge der nichtnegativen reellen Zahlen |
| $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ | Menge der reellen Zahlen, eingeschlossen ∞ |
| $[a, b]$ | abgeschlossenes Intervall |
| $]a, b[$ | offenes Intervall |
| $[a, b[,]a, b]$ | halboffene Intervalle |
| \emptyset | leere Menge |
| $A \times B$ | Mengenprodukt der Mengen A und B |
| $A \subset B$ | A ist Teilmenge von B |
| $K(a), K(b)$ | Schnitt einer Menge $K \subset A \times B$ für $a \in A$ bzw. $b \in B$ |
| $\mathcal{P}(M) := \{A : A \subset M\}$ | Potenzmenge einer Menge M |
| M^c | Komplement einer Menge M |
| $\#M$ | Kardinalität einer Menge M |
| ∂A | Rand einer Menge in einem top. Raum |
| $r_1 \vee r_2 := \max\{r_1, r_2\}$ | Maximum zweier reeller Zahlen r_1, r_2 |
| $r_1 \wedge r_2 := \min\{r_1, r_2\}$ | Minimum zweier reeller Zahlen r_1, r_2 |
| $\bigwedge_{i \in I} r_i := \min\{r_i : i \in I\}$ | Minimum einer Familie reeller Zahlen $(r_i)_{i \in I}$ |
| $ \cdot $ | Maximumsnorm |
| $ \cdot _2$ | Euklidische Norm |
| $\ \cdot\ $ | Supremumsnorm von reellwertigen Funktionen |
| $B_2(x, r)$ | offene Kreisscheibe um x mit Radius r |
| $B_2(r) := B(0, r)$ | offene Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius r |
| $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ | Produkt der σ -Algebren \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 |
| $\lambda_1 \otimes \lambda_2$ | Produkt der Maße λ_1 und λ_2 |
| $\mu \otimes \pi$ | Produkt des Maßes μ und des Übergangskernes π |
| $\mathcal{P}_1(\Omega, \mathcal{F})$ | Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf (Ω, \mathcal{F}) |
| Σ^\neq | Summe, wobei die Indices paarweise verschieden sind |
| Σ' | Summe, wobei der Index nur über endliche Mengen läuft |

Zustandsräume und Konfigurationsräume

| | |
|--|--|
| \mathcal{B}^2 | Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R}^2 |
| \mathcal{B}_b^2 | Menge der beschränkten Borelmengen |
| λ^2 | Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$ |
| $\Lambda_r := [-r, r]^2$ | Quadrat der Seitenlänge $2r$ |
| p, s | Projektionen von $\mathbb{R}^2 \times S$ auf \mathbb{R}^2 bzw. S , 6 |
| $E(X)$ | Menge aller Kanten auf X , 6 |
| $\overset{X,B}{\longleftrightarrow}$ | Zusammenhangs-Äquivalenzrelation auf (X, B) , 6 |
| $C_{X,B}(x), C_{X,B}(M)$ | B -Cluster von x bzw. M in (X, B) , 6 |
| $\mathcal{F}_{E(\mathbb{R}^2 \times S)}$ | Kanten- σ -Algebren, 6 |
| \mathcal{Y}, \mathcal{X} | Konfigurationsraum der Teilchen bzw. der Positionen, 7, 7 |
| Y_A | Einschränkung der Konfiguration, 7 |
| \mathcal{Y}_A | Einschränkung des Konfigurationsraums, 7 |
| N_A | Zählvariablen, 7 |
| $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{F}_{\mathcal{X}}$ | σ -Algebren auf den Konfigurationsräumen |
| $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}, \Lambda}, \mathcal{F}_{\mathcal{X}, \Lambda}$ | σ -Algebren der Ereignisse in Λ , 7 |
| $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}, \infty}, \mathcal{F}_{\mathcal{X}, \infty}$ | Tail- σ -Algebren, 7 |
| ν | Verteilung des Poissonschen Punktprozesses, 7 |
| $\nu_{\Lambda}(\cdot \bar{Y})$ | Poissonsche Verteilungen mit fester Randbedingung, 7 |
| \mathcal{E} | Konfigurationsraum der Kanten, 7 |
| $\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ | σ -Algebra auf \mathcal{E} , 8 |
| $(\mathcal{E}_E, \mathcal{B}_E)$ | Bernoulli-Ereignisraum auf abzählbarer Kantenmenge E , 8 |

Potentiale, Gibbsmaße

| | |
|---|---|
| K^U | harter Kern des Potentials U , 8 |
| $\varphi_{y_1, y_2}^U(t) := U(y_1, g_t(y_2))$ | Regularitätsfunktion der Wirkung von G auf U , 10 |
| $\partial_G^2 U$ | G -Ableitung von U , 10 |
| $H^U(Y)$ | Energie einer Konfiguration Y , 12 |
| $W^U(Y, Y')$ | Wechselwirkungsenergie zweier Konfigurationen Y, Y' , 12 |
| $H_{\Lambda}^U(Y)$ | Hamiltonian einer Konfiguration Y in Λ , 12 |
| $E_{\Lambda}(Y)$ | Menge der Λ treffenden Kanten in Y , 12 |
| $Z_{\Lambda}^{U, z}(\bar{Y})$ | Zustandssumme der Konfiguration \bar{Y} in Λ , 12 |
| $\gamma_{\Lambda}^{U, z}$ | bedingte Gibbsverteilung in Λ , 13 |
| $\mathcal{G}_{\mathcal{Y}_0}(U, z)$ | Menge der Gibbsmaße bezüglich (U, z, \mathcal{Y}_0) , 13 |
| $\xi = \xi(U, z, \mathcal{Y}_0)$ | eine Ruelle-Schranke zu (U, z, \mathcal{Y}_0) 13 |
| Γ_r | Einheitsquadrat mit Eckpunkt r , 14 |
| $\mathbb{Z}^2(Y)$ | minimale Y überdeckende Gitterpunktmenge, 14 |
| \bar{s} | maximale mittlere Teilchendichte, 14 |
| A_{ϵ} | ϵ -Erweiterung der Menge A , 16 |

Lebenslauf

Persönliche Daten

| | |
|---------------|--------------------------|
| Name | Thomas Richthammer |
| geboren | am 21.03. 1977 in Amberg |
| Familienstand | ledig |

Ausbildung

| | |
|-----------------|--|
| 09/1987–06/1996 | Gregor-Mendel-Gymnasium Amberg |
| 06/1996 | Abitur |
| 08/1996–08/1997 | Zivildienst im Caritas-Altenheim Amberg |
| 10/1997–05/2003 | Studium der Mathematik mit Nebenfach Theoretische Physik an der LMU München |
| 10/1999–06/2000 | Auslandsstudium an der Oxford University |
| 05/2003 | Mathematikdiplom |

Promotion

| | |
|--------------|--|
| seit 06/2003 | Promotion an der LMU München bei Prof. Dr. Georgii |
| seit 06/2003 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut der LMU München |