

Genaue Messungen mit Femtosekundenfrequenzkämmen

Untersuchungen zur Genauigkeit nichtlinearer Prozesse
und zur zeitlichen Änderung von Naturkonstanten

Dissertation
der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München



vorgelegt von
Marcus Zimmermann
aus Frankfurt am Main

München im April 2005

1. Gutachter: Prof. T. W. Hänsch
2. Gutachter: Prof. D. Habs

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Mai 2005

Meiner Familie gewidmet.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Femtosekunden (fs)-Frequenzkammtechnik, die in der Arbeitsgruppe von Prof. T. W. Hänsch entwickelt wurde, angewendet, um die Genauigkeit nichtlinearer Prozesse zu überprüfen und eine mögliche zeitliche Veränderung von Naturkonstanten nachzuweisen.

Ein Frequenzkamm ist das Spektrum eines regelmäßigen kohärenten Pulszugs, der von einem modengekoppelten Laser ausgesendet wird. Die Frequenzen f_n der Kammoden sind durch $f_n = f_{ce} + n f_r$ gegeben. Dabei ist n eine natürliche Zahl der Größenordnung 10^6 , f_r die Pulswiederholrate des Lasers und f_{ce} eine für alle Moden gleiche Frequenzverschiebung. Wird das Spektrum eines fs-Lasers mit Hilfe einer mikrostrukturierten Glasfaser auf eine Oktave verbreitert, so können die beiden Radiofrequenzen f_r und f_{ce} auf einfache Weise gemessen und kontrolliert werden. Einen fs-Frequenzkamm kann man sich dabei anschaulich als Getriebe vorstellen, der optische Frequenzen und Radiofrequenzen phasengenau miteinander verbindet.

Das oktavenbreite Spektrum nach einer mikrostrukturierten Glasfaser wurde in dieser Arbeit dazu verwendet, um in einem nichtlinearen Kristall durch Summenfrequenzmischung (SFG) bzw. Differenzfrequenzmischung (DFG) zwei neue Frequenzkämme zu erzeugen, deren Frequenzverschiebung $2f_{ce}$ (SFG) bzw. $f_{ce} = 0$ (DFG) beträgt. Durch das Verschwinden von f_{ce} eignet sich der DFG-Kamm als stabiles Uhrwerk für zukünftige optische Uhren, von denen eine relative Genauigkeit von 10^{-18} erwartet wird, was etwa 1 000 mal genauer ist als die besten Cs-Atomuhren der Welt. Ein Vergleich des erzeugten SFG- und DFG-Kamms mit dem Originalkamm gestattet darüber hinaus die Überprüfung der Genauigkeit nichtlinearer Prozesse mit einer relativen Genauigkeit von $6,6 \cdot 10^{-21}$, was verglichen mit früheren Arbeiten eine 100 fache Verbesserung darstellt. Eine Abweichung von den erwarteten Werten konnte im Rahmen der Meßgenauigkeit nicht beobachtet werden.

In Zusammenarbeit mit dem Wasserstofflabor in unserer Arbeitsgruppe wurde die Frequenz des $1S$ - $2S$ Übergangs in atomarem Wasserstoff zu $2\,466\,061\,413\,187\,087 \pm 34$ Hz gemessen, was einer relativen Genauigkeit von $1,4 \cdot 10^{-14}$ entspricht. Damit gehört die $1S$ - $2S$ Frequenz zu den am besten bekannten optischen Frequenzen. Für ihre Messung wurde ein fs-Frequenzkammgenerator verwendet, der mit Hilfe der transportablen Cs-Fontänenuhr FOM des BNM-SYRTE/ENS, Paris stabilisiert wurde. Ein Vergleich mit der Messung aus dem Jahr 1999 ergibt eine relative zeitliche Änderung der $1S$ - $2S$ Frequenz von $(-3,2 \pm 6,3) \cdot 10^{-15}/\text{Jahr}$. Mit diesem Wert und optischen Frequenzmessungen am $^{199}\text{Hg}^+$ bzw. $^{171}\text{Yb}^+$ Ion, die am NIST in Boulder/Colorado bzw. an der PTB in Braunschweig durchgeführt wurden, konnte eine Obergrenze für die gegenwärtige zeitliche Änderung der Feinstrukturkonstante von $\dot{\alpha}/\alpha = (-0,3 \pm 2,0) \cdot 10^{-15}/\text{Jahr}$ angegeben werden. Dieser Wert ist mit Null verträglich. Für seine Herleitung wurden keine Annahmen über das zeitliche Verhalten der anderen Kopplungskonstanten gemacht. Die ermittelten Obergrenzen sind daher weitgehend modellunabhängig.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Leitfaden durch diese Arbeit	6
2	Optische Frequenzmessung	9
2.1	Frühe Methoden	10
2.2	Der Femtosekundenfrequenzkammgenerator	11
2.3	Der optische Synthesizer	20
2.4	Experimenteller Aufbau und Messung optischer Absolutfrequenzen	29
2.5	Messung von optischen Frequenzverhältnissen	35
2.6	Der Frequenzkamm als optisches Uhrwerk	36
2.6.1	Allgemeines zu Uhren	37
2.6.2	Experimentelle Realisierung eines fs-Uhrwerks	42
2.7	Anwendungen im Zeitraum	44
3	Offsetfreie Frequenzkämme und Genauigkeit nichtlinearer Prozesse	47
3.1	Experimenteller Aufbau und Ergebnisse	48
3.2	Interpretation der Meßergebnisse	58
3.3	Vergleich mit anderen Experimenten	60

4	Zeitliche Veränderung von Naturkonstanten	65
4.1	Die Feinstrukturkonstante α	68
4.2	Experimentelle Methoden zur Suche einer zeitlichen Veränderung von Naturkonstanten	70
4.2.1	Elektromagnetische Übergangsfrequenzen als Funktion der Feinstrukturkonstanten	71
4.2.2	Quasar-Absorptionsspektroskopie	74
4.2.3	Uhrenvergleiche im Labor	76
4.3	Zeitliche Änderung von Naturkonstanten im Rahmen einer GUT	77
5	Messung der $1S$-$2S$ Frequenz des Wasserstoffatoms	81
5.1	Auswahlregeln und Übergänge	81
5.2	Experimenteller Aufbau der $1S$ - $2S$ Frequenzmessung	83
5.2.1	Wasserstoffspektrometer	84
5.2.2	Systematiken	86
5.2.3	Änderungen des Wasserstoffspektrometers im Vergleich zu 1999	92
5.2.4	Frequenzkammaufbau 2003	93
5.2.4.1	Frequenzkammaufbau 1999	103
5.2.5	Cs-Fontänenuhr	104
5.2.6	Ablauf der Messung 2003	106
5.3	Meßergebnisse 2003 und Vergleich mit 1999	107
5.3.1	Analyse der Daten Streuung	110
5.4	Obergrenzen für zeitliche Veränderungen von Naturkonstanten	113
5.4.1	Zeitliche Veränderung von α und μ_{Cs}/μ_B	113
5.4.2	Zeitliche Veränderung von μ_{Rb}/μ_{Cs} und μ_{Rb}/μ_B	117
5.4.3	Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse	118

6	Ausblick	123
6.1	Verbesserungen am Wasserstoffspektrometer	123
6.2	Spektroskopie mit Frequenzkämmen	123
6.2.1	1S-3S Spektroskopie an atomarem Wasserstoff	124
6.2.2	1S-2S Spektroskopie an $^4\text{He}^+$	124
6.3	Faser-Frequenzkämme bei $1,5\mu\text{m}$	125
6.4	Messung des relativistischen Dopplereffekts	125
A	Funktionsweise von Ti:Saphir Femtosekunden-Lasern	129
B	Einzelheiten zu Kapitel 5	133
B.1	Stabilisierung der Pulswiederholrate	133
B.2	Bestimmung der Obergrenzen bei N Frequenzvergleichen	134
C	Veröffentlichte Artikel	137
	Literaturverzeichnis	147

1. Einleitung

Ein Ziel der Physik ist es, immer umfassendere und nach Möglichkeit konzeptionell immer einfachere Theorien zu entwickeln, welche die Natur so genau wie möglich beschreiben. Um bestehende Theorien auf ihre Grenzen hin zu überprüfen und so Hinweise auf neue Theorien zu erhalten oder um Vorhersagen neuer Theorien zu testen, müssen Experimente mit höchster Meßgenauigkeit durchgeführt werden. Zwei berühmte Präzisionsexperimente, die zur Entwicklung neuer Theorien und damit zu einem besseren Naturverständnis beigetragen haben, sind das Michelson-Morley-Experiment [Mich87] und die Messung der $2S$ - $2P$ Feinstrukturaufspaltung durch W. E. Lamb, Jr. und R. C. Retherford [Lam47]. Das zuerst genannte Experiment steht am Anfang der speziellen Relativitätstheorie und das zuletzt genannte hat die Entwicklung der Quantenelektrodynamik (QED) ausgelöst. Die QED, welche die elektromagnetische Wechselwirkung beschreibt, ist die am besten überprüfte Theorie, die man in der Physik kennt. Als genauester Test der QED gilt die Messung des magnetischen Momentes eines ungebundenen Elektrons bzw. genauer: der Abweichung des gyromagnetischen Faktors g von der Vorhersage der Dirac-Theorie ($g = 2$). Diese sogenannten $g - 2$ Experimente [Dyc87] haben die Vorhersagen der QED auf einem Niveau von wenigen 10^{-9} bestätigt. An dieser kleinen Zahl erkennt man, die große Bedeutung von Präzisionsmessungen für den Fortschritt der physikalischen Grundlagenforschung, denn nur genauere Messungen und sie begleitende genauere theoretische Rechnungen können in diesem Zusammenhang zu Unvereinbarkeiten führen und damit zur Entwicklung von umfassenderen d. h. besseren Theorien. Es ist interessant zu sehen, daß die Konzepte der QED bzw. der Quantenmechanik allgemein seit vielen Jahrzehnten bestehen und trotz intensiver experimenteller Überprüfung noch *nie* abgeändert werden mußten. Dennoch muß die QED als unvollständig angesehen werden, weil in ihr Parameter (Naturkonstanten) wie z. B. die Feinstrukturkonstante α vorkommen, die innerhalb der QED nicht berechnet werden können, sondern experimentell bestimmt werden müssen. Das kann bedeuten, daß die QED nur die *Näherung* einer umfassenderen Theorie ist, in der auch die Naturkonstanten berechenbar sind. Experimentelle Abweichungen von der QED können also existieren, die Frage ist nur: auf welchem Niveau? Um diese Frage zu beantworten, sind Experimente mit immer steigender Genauigkeit notwendig.

Die beste Beschreibung unserer physikalischen Realität ist im Moment das sogenannte Standardmodell der Teilchenphysik zusammen mit der Allgemeinen Relativitätstheorie. Mit diesem Theorienverbund werden alle uns bekannten Wechselwirkungen (Kräfte) bisher widerspruchsfrei beschrieben. Die QED ist dabei als Teil im Standardmodell enthalten. Wegen seiner zentralen Stellung ist es von großer Bedeutung, diesen Theorienverbund genauestens zu überprüfen. Ein Experiment, das möglicherweise eine Abweichung vom Standardmodell der Teilchenphysik festgestellt hat, ist das Myon $g - 2$ Experiment, das am

Brookhaven National Lab in den USA durchgeführt wird [Ben02]. Die Abweichung des gemessenen Wertes von der theoretischen Vorhersage beträgt laut Referenz [Ben02] etwa 2,6 kombinierte Standardabweichungen. Ob dieser Unterschied ein Hinweis auf „neue“ Physik jenseits des Standardmodells ist oder sich durch Fehler bei der Berechnung des theoretischen Wertes erklären läßt [Kin03], muß durch weitere Untersuchungen geklärt werden.

An dieser Stelle sei betont, daß Präzisionsmessungen keineswegs der *einzig*e Weg ist, physikalischen Fortschritt zu erreichen. Eine andere Möglichkeit ist die Beobachtung von deutlichen Effekten, die es aber nach gängigen Theorien überhaupt nicht geben dürfte. Berühmte Beispiele dafür sind die Entdeckung der Linienspektren, der Photoeffekt, die Paritätsverletzung, die Neutrino-massenoszillationen oder die Entdeckung der dunklen Materie bzw. Energie.

Seit der experimentellen Demonstration einer Cs-Uhr im Jahr 1955 [Ess57] sind Zeitintervalle bzw. Frequenzen diejenigen physikalischen Größen, die am genauesten gemessen werden können. Das heißt, wenn eine Messung sehr genau sein soll, dann sollte man die zu messende Größe auf ein Zeitintervall bzw. eine Frequenz zurückführen. Gerade Frequenzen optischer Übergänge sind zur Überprüfung grundlegender Fragestellungen von besonderem Interesse, weil die Güte $Q = f/\delta f$ der Übergänge wegen der hohen Frequenz f bei vergleichsweise kleiner Frequenzbreite δf sehr groß sein kann, was eine hohe Meßgenauigkeit ermöglicht. Ein extremes Beispiel dafür ist der elektrische Oktupolübergang $^2S_{1/2} \rightarrow ^2F_{7/2}$ im $^{171}\text{Yb}^+$ Ion, der eine Lebensdauer von etwa 10 Jahren (!) aufweist, was einer natürlichen Linienbreite von $5 \cdot 10^{-10}$ Hz entspricht [Rob00]. Bei einer Wellenlänge von 467 nm bzw. einer Frequenz von 642 THz hat dieser Übergang eine Güte von etwa 10^{24} . Die Mößbauer-Linie in ^{67}Zn hat im Vergleich dazu eine Güte von „lediglich“ $2 \cdot 10^{15}$ [May92].

Aus der Fülle der optischen Übergänge heben sich diejenigen des Wasserstoffatoms bzw. der wasserstoffähnlichen Ionen dadurch hervor, daß sich ihre Frequenzen wegen der Einfachheit der Systeme (Kern und Elektron) sehr genau berechnen lassen. Aus diesem Grund ist das Wasserstoffspektrum seit jeher ein wichtiger Prüfstein für die Quantenmechanik bzw. QED. Eine Sonderstellung unter den Übergängen des Wasserstoffatoms (H) nimmt der dipolverbotene $1S$ - $2S$ Übergang ein, der bei einer natürlichen Lebensdauer von 0,14 s und einer Wellenlänge von 121,6 nm eine Güte Q von $5 \cdot 10^{16}$ aufweist. Die Frequenz des $1S$ - $2S$ Übergangs wurde im Rahmen dieser Arbeit zu 2 466 061 413 187 087(34) Hz bestimmt, was einer relativen Genauigkeit von $1,4 \cdot 10^{-14}$ entspricht [Fis04a]. Damit ist die $1S$ - $2S$ Frequenz eine der am genauesten bekannten Übergangsfrequenzen. Durch die Messung von mindestens zwei Übergangsfrequenzen im H-Atom läßt sich nicht nur die $1S$ Lambverschiebung bestimmen, mit der die QED gebundener Zustände überprüft werden kann, sondern auch die Rydbergkonstante R_∞ , die durch Messungen am Wasserstoffatom mittlerweile eine der am besten bekannten Naturkonstanten ist [Bir01]. Eine wiederholte Messung der Übergangsfrequenzen gibt darüber hinaus Auskunft über eine mögliche zeitliche Veränderung von Naturkonstanten, was die Grenzen der bisher bekannten Physik sprengen würde [Fis04a]. Weiterhin erlaubt ein Vergleich der $1S$ - $2S$ Frequenz

in Wasserstoff und Antiwasserstoff, wie er am CERN¹ bei Genf durchgeführt werden soll [Amo02, Gab02], eine genaue Überprüfung des CPT-Theorems, das eines der Fundamente der heutigen Physik darstellt. Das CPT-Theorem besagt, daß alle Naturgesetze forminvariant sind bezüglich einer gleichzeitigen Ladungsumkehr $q \rightarrow -q$, Punktspiegelung $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ und Zeitumkehr $t \rightarrow -t$. Eine Folge des CPT-Theorems ist, daß Materie und Antimaterie bis auf ihre Ladung die gleichen physikalischen Eigenschaften haben. Das gilt daher insbesondere für ihre Übergangsfrequenzen. Mit neutralem Antiwasserstoff werden außerdem Gravitationsexperimente mit Antimaterie möglich, die mit *geladenen* Antiteilchen bisher nicht durchführbar waren. So läßt sich z. B. die Frage untersuchen, ob Antimaterie in einer Welt aus Materie nach unten oder nach oben fällt [Wal03]. Die hohe Güte des $1S$ - $2S$ Übergangs macht ihn auch zu einem interessanten Kandidaten für eine neuartige optische Atomuhr, die ihre Taktfrequenz aus der Schwingung von Licht ableitet und mit ihrer Genauigkeit die besten Cs-Uhren der Welt übertreffen kann. Das Wasserstoffatom bzw. wasserstoffähnliche Ionen wie z. B. ${}^4\text{He}^+$ (siehe Abschnitt 6.2.2 auf Seite 124) bieten dabei als einzige Systeme die Möglichkeit, die Zeiteinheit Sekunde durch genaue QED-Rechnungen auf fundamentale Naturkonstanten zurückzuführen. Die Vielzahl dieser Möglichkeiten und ihre Bedeutung für den Fortschritt der Physik im Ganzen ist der Grund dafür, daß Frequenzmessungen am Wasserstoffatom seit vielen Jahren ein zentrales Thema in der Arbeitsgruppe von Prof. T. W. Hänsch sind.

Um die Frequenz des $1S$ - $2S$ Übergangs in atomarem Wasserstoff phasengenau mit der Grundzustandshyperfeinaufspaltung in ${}^{133}\text{Cs}$ vergleichen zu können, wurde in unserer Arbeitsgruppe die sogenannte Femtosekunden²-Frequenzkammtechnik entwickelt, mit deren Hilfe eine *beliebige* optische Frequenz mit der Frequenz einer Cs-Uhr verglichen werden kann. Die fs-Frequenzkammtechnik, deren wichtigster Bestandteil ein modengekoppelter Laser ist, stellt dabei das Bindeglied zwischen dem Radiofrequenzbereich und dem optischen Spektrum dar. Die Funktionsweise und Möglichkeiten der Frequenzkammtechnik werden ausführlich in Kapitel 2 ab Seite 9 beschrieben. An dieser Stelle sei nur hervorgehoben, daß die fs-Frequenzkammtechnik *absolutgenaue* optische Frequenzmessungen gestattet, die durch die Genauigkeit der besten Cs-Uhren der Welt begrenzt sind. Darüber hinaus wird der Bau von neuartigen optischen Atomuhren möglich, die eine relative Genauigkeit im Bereich von 10^{-18} erwarten lassen, was eine etwa 1000-fache Verbesserung gegenüber den besten Cs-Uhren bedeuten würde. Derart genaue Uhren sind nicht nur für die Grundlagenforschung von Bedeutung wie z. B. für Tests der speziellen- und allgemeinen Relativitätstheorie, der Suche nach einer zeitlichen Veränderung von Naturkonstanten und der Radioastronomie (VLBI³), sondern haben auch wichtige Anwendungen im täglichen Leben wie beispielsweise in der Navigation (GPS⁴, GLONASS⁵, Galileo), der Geodäsie und der Informationstechnologie (Synchronisation von Telekommunikationsnetzwerken).

In dieser Arbeit wird die hohe Meßgenauigkeit, die durch die fs-Frequenzkammtechnik

¹franz. Centre Européen pour la Recherche Nucléaire

²1 Femtosekunde = 1 fs = 10^{-15} s

³engl. Very Large Baseline Interferometry

⁴engl. Global Positioning System

⁵engl. Global Navigation Satellite System

ermöglicht wird, dazu verwendet, um zwei sehr unterschiedliche grundlegende Fragestellungen zu untersuchen:

- Wie genau entspricht die Frequenz nichtlinearer Produkte der erwarteten Frequenz?
- Ändern Naturkonstanten ihren Wert mit der Zeit?

Die Exaktheit nichtlinearer Prozesse wird bei optischen Frequenzmessungen meist vorausgesetzt. Im Moment gibt es keine Theorie, die eine Abweichung von den erwarteten Werten vorhersagt. Die relative Genauigkeit, die in diesem Fall durch die Frequenzkammtechnologie ermöglicht wird, ist aber so hoch (besser als 10^{-20}), daß möglicherweise subtile bisher unberücksichtigte Effekte nachweisbar sind. Unabhängig davon, ob eine Abweichung erwartet wird, ist es generell wichtig, auch scheinbar gesicherte Tatsachen, wie z. B. die Exaktheit nichtlinearer Prozesse oder die zeitliche Konstanz von Naturkonstanten, genaustens zu überprüfen. Mit einer speziellen Art von optischen Frequenzkämmen und der Überprüfung der Genauigkeit nichtlinearer Prozesse beschäftigt sich Kapitel 3.

Die Motivation für die Suche nach einer zeitlichen Änderung von Naturkonstanten ist dahingegen etwas konkreter. Viele Physiker glauben, daß es möglich sein sollte, alle in der Natur vorkommenden Kräfte (Wechselwirkungen) mit *einer* Theorie beschreiben zu können. In einer solchen alles umfassenden Theorie wären auch die Werte der Naturkonstanten berechenbar bzw. durch Anfangs- oder Randbedingungen unseres Universums festgelegt und müßten nicht wie bisher gemessen werden. Eventuell stellen sich auch einige unserer heutigen „Naturkonstanten“ als dynamische Größen heraus. Während die Vereinigung der elektromagnetischen- und schwachen Wechselwirkung zur elektroschwachen Wechselwirkung gelungen ist, steht die Vereinigung der elektroschwachen Wechselwirkung mit der starken Wechselwirkung (Quantenchromodynamik) und der Gravitation (Allgemeine Relativitätstheorie) noch aus. Um die Gravitation mit den anderen quantisierten Theorien zu vereinigen, ist es nötig, eine quantisierte Theorie der Gravitation (Quantengravitation) zu finden, was im Rahmen einer 4-dimensionalen Raumzeit noch nicht gelungen ist. Mit Theorien, die mehr als 4 Dimensionen verwenden, wie z. B. Kaluza-Klein- oder Stringtheorien, ist es im Prinzip möglich, eine quantisierte Theorie der Gravitation zu formulieren. Die Extradimensionen sind dabei experimentell kaum beobachtbar und werden erst auf Längenskalen wie der Plancklänge $L_P = \sqrt{G\hbar/c^3} = 1,5 \cdot 10^{-35}$ m wichtig. Eine Folge dieser höherdimensionalen Theorien ist nun, daß der Wert von Naturkonstanten, der in unserem 4-dimensionalen Unterraum gemessen wird, zeitlich *nicht* konstant sein muß (für einen Überblick zu diesem Thema siehe [Uza03]). Vereinheitlichte Theorien (GUT⁶) sagen außerdem eine *korrelierte* zeitliche Veränderung der Feinstrukturkonstante und der Masse bzw. des magnetischen Momentes von Nukleonen voraus [Cal02b]. Könnte man eine zeitliche Änderung von Naturkonstanten bzw. eine Korrelation von zeitlichen Änderungen beobachten, so hätte man einen Hinweis auf die Gültigkeit dieser Theorien und wäre dem Ziel einer umfassenden Theorie einen Schritt näher gekommen.

⁶Grand Unified Theories

Im Zusammenhang mit der Anisotropie des kosmischen Mikrowellenhintergrunds (KMH), die mit dem COBE⁷- bzw. WMAP⁸-Satelliten gemessen wurde, werden zwei kosmologische Modelle diskutiert, die eine zeitliche Veränderung von Naturkonstanten nahelegen: das Modell eines inflationären Universums und das Quintessenz-Modell.

Der KMH ist in guter Näherung isotrop und entspricht einer Schwarzkörperstrahlung von 2,7 K. Durch die genannten Satellitenmissionen konnte jedoch eine Anisotropie von etwa $\Delta T/T = 10^{-5}$ auf einer Winkelskala von 1° und darunter nachgewiesen werden. Diese Temperaturschwankungen spiegeln räumliche Dichteschwankungen in der Frühzeit unseres Universums wieder (ca. 379 000 Jahre nach dem Urknall). Um die Entstehung dieser Dichteschwankungen zu erklären, wird von vielen Kosmologen angenommen, daß es fast unmittelbar nach dem Urknall eine kurz andauernde Phase starker Expansion gab: die sogenannte Inflation. Für das Einsetzen, die Dauer und die Stärke der Expansion existieren je nach Theorie verschiedene Zahlenwerte. Ein typischer Wert für das Einsetzen der Inflation ist 10^{-35} s nach dem Urknall, die Dauer bewegt sich in der Größenordnung von 10^{-33} s und für den Expansionsfaktor werden Werte von 10^{30} bis 10^{50} angenommen. Die Ursache für diese starke Expansion wird einem skalaren Quantenfeld zugeschrieben, das Inflaton genannt wird. Dem Inflatonfeld entspricht dabei ein negativer Druck, der die Expansion vorantreibt. Die beobachteten Strukturen im KMH lassen sich durch Quantenfluktuationen des Inflatonfeldes erklären, die durch die starke Expansion verstärkt wurden. Darüber hinaus kann die Inflationsphase auch die euklidische Geometrie unseres Universums auf natürliche Weise erklären. Da Naturkonstanten wie die Elektronenmasse und die Elementarladung während der Inflationsphase ihren Wert drastisch geändert haben müssen, wird vermutet, daß Naturkonstanten auch heute noch einer schwachen zeitlichen Änderung unterliegen [Bör05, Kar04].

Ein weiteres Ergebnis der genannten Satellitenmessungen ist, daß die Energie des Universums gegenwärtig zu etwa 70% aus einer Energieform besteht, die uns völlig unbekannt ist: der dunklen Energie. Die homogen verteilte dunkle Energie, die ebenfalls einem negativen Druck entspricht, ist die Ursache für die gegenwärtige beschleunigte Expansion des Universums. Da man weiß, daß die dunkle Energie in früheren Epochen nicht so groß gewesen sein kann wie heute, weil ansonsten die Entstehung von Sternen nicht möglich gewesen wäre, wurde ein dynamisches Modell der dunklen Energie entwickelt: das Quintessenz-Modell. In diesem Modell ist die dunkle Energie die homogen verteilte potentielle und kinetische Energie (Quintessenz) eines skalaren Felds, das Kosmon genannt wird. Das Kosmonfeld ist dabei mit dem Alter des Universums verknüpft und daher eine zeitabhängige Größe. Das Quintessenz-Modell sagt u. a. eine Abhängigkeit der Kopplungskonstanten vom Kosmonfeld voraus und damit eine zeitliche Veränderung der Kopplungskonstanten [Wet04].

Wegen der freien Parameter aller genannten Theorien, ist es im Moment jedoch noch nicht möglich, *konkrete* Zahlenwerte für eine zeitliche Änderung von Naturkonstanten anzugeben. Das bedeutet, daß die experimentelle Suche weder auf eine bestimmte Naturkonstante noch auf eine zeitliche Epoche des Universums eingeschränkt werden kann.

⁷engl. **CO**smic **B**ackground **E**xplorer; siehe <http://aether.lbl.gov/www/projects/cobe/>

⁸engl. **W**ilkinson **M**icrowave **A**nisotropy **P**robe; siehe <http://map.gsfc.nasa.gov>

Eine zeitliche Veränderung von nichtgravitativen Naturkonstanten steht dabei im Widerspruch zum Einstein'schen Äquivalenzprinzip, das die Grundlage aller metrischen Gravitationstheorien ist. Es könnte aber auch sein, daß sich einige unserer „Naturkonstanten“ im Rahmen einer übergeordneten Theorie als dynamische Größen herausstellen.

Die Frage nach einer zeitlichen Änderung von Naturkonstanten ist in den letzten Jahren verstärkt in den Blickpunkt des Interesses gerückt, weil Absorptionsspektren interstellarer Gaswolken zu beweisen schienen, daß die Feinstrukturkonstante α vor ca. 10 Milliarden Jahren relativ gesehen etwa 10^{-5} kleiner war als heute [Mur03]. Obwohl diese Beobachtungen durch nachfolgende Untersuchungen nicht bestätigt werden konnten [Qua04, Sri04], wird im Moment mit verschiedensten Methoden intensiv nach einer zeitlichen Änderung von Naturkonstanten gesucht. Dabei gewinnen Präzisionsmessungen im Labor, wie sie in dieser Arbeit durchgeführt wurden, zunehmend an Bedeutung. Mit der experimentellen Suche einer zeitlichen Änderung von Naturkonstanten beschäftigen sich die Kapitel 4 und 5.

1.1 Leitfaden durch diese Arbeit

Nach der allgemeinen Einführung in Kapitel 1 zeichnet **Kapitel 2 (optische Frequenzmessung)** in kurzer Form die technische Entwicklung der optischen Frequenzmessung in den letzten 10 Jahren nach, die ihren Höhepunkt in der Realisierung eines stabilen, regelmäßigen Gitters optischer Bezugsfrequenzen fand, das den gesamten Bereich von mehr als einer Oktave überdeckt. Wie noch gezeigt werden wird, bildet ein zeitlich periodischer Pulszug, der von einem modengekoppelten Laser ausgesendet wird, im Frequenzraum eine kammartige Modenstruktur aus, die im folgenden kurz *Frequenzkamm* genannt wird. Die Frequenzen *aller* Moden des Frequenzkamms werden durch lediglich zwei Parameter festgelegt: der Frequenzabstand benachbarter Moden, welcher der Pulswiederholrate ω_r entspricht, und der sogenannten Offsetfrequenz ω_{ce} , welche die Frequenzen aller Kammoden um einen festen Betrag verschiebt. Wird das Spektrum eines fs-Lasers auf eine Oktave verbreitert, was mit Hilfe einer mikrostrukturierten Glasfaser geschehen kann, so können ω_r und ω_{ce} , die beide dem Radiofrequenzbereich angehören, auf einfache Weise gemessen und kontrolliert werden. Dadurch ist es zum einen möglich, die Frequenzen aller Kammoden *phasengenau* auf eine Cs-Atomuhr zurückzuführen, wodurch die hohe Genauigkeit von Cs-Uhren auch für optische Frequenzmessungen nutzbar wird, zum anderen kann die Frequenz eines optischen Referenzoszillators phasengenau in eine Radiofrequenz umgewandelt werden, was den Bau neuartiger optischer Uhren ermöglicht, die das Potential besitzen, 1 000 mal genauer zu sein als die besten Cs-Uhren der Welt. Es wird sowohl die Funktionsweise eines solchen Frequenzkammgenerators beschrieben als auch die experimentellen Möglichkeiten dieser Technik dargelegt. Besonderen Wert wird dabei auf die Messung optischer Absolutfrequenzen und Frequenzverhältnissen, die Realisierung eines optischen Uhrwerks und die Erzeugung von verstärkten *identischen* Femtosekunden-Pulsen gelegt.

In **Kapitel 3 (Offsetfreie Frequenzkämme und die Genauigkeit nichtlinearer Prozesse)** wird beschrieben, wie man durch Differenzfrequenzmischung (DFG⁹) einen Frequenzkamm erzeugen kann, dessen Offsetfrequenz ω_{ce} verschwindet. Das bedeutet, daß alle Moden eines solchen Frequenzkamms exakte Harmonische der Pulswiederholrate ω_r sind. Durch alleinige Kontrolle der Pulswiederholrate ist es damit möglich, sämtliche Moden des Frequenzkamms in ihrer Frequenz festzulegen. Mit einem solchen offsetfreien Frequenzkamm sollte es möglich sein, ein einfaches optisches Uhrwerk zu bauen, das optische Referenzfrequenzen ohne Verluste an Stabilität und Genauigkeit in den Radiofrequenzbereich überführen kann. Im Experiment wurde ausgehend von einem Frequenzkamm mit nicht verschwindenden ω_{ce} zwei neue Frequenzkämme durch Summenfrequenzmischung (SFG¹⁰) bzw. Differenzfrequenzmischung erzeugt, deren Offsetfrequenz im ersten Fall $2\omega_{ce}$ beträgt und im zweiten Fall zu Null wird. Die Schwebungsfrequenz, die entsteht, wenn man die beiden neuen Frequenzkämme mit dem Originalkamm überlagert, ist in beiden Fällen ω_{ce} . Das ist aber nur dann so, wenn bei der Summen- bzw. Differenzfrequenzbildung keine Abweichung vom theoretisch erwarteten Wert auftritt. Ein Vergleich der gemessenen Offsetfrequenzen erlaubt daher, die Genauigkeit der beiden nichtlinearen Prozesse zu überprüfen. Setzt man die Unabhängigkeit der Prozesse voraus, so kann im Rahmen dieser Arbeit die relative Genauigkeit von SFG bzw. DFG mit besser als $6,6 \cdot 10^{-21}$ angegeben werden [Zim04].

Kapitel 4 (Zeitliche Veränderung von Naturkonstanten) beschäftigt sich mit der experimentellen Suche nach einer zeitlichen Änderung von Naturkonstanten. Insbesondere werden zwei atomphysikalische- bzw. spektroskopische Methoden beschrieben und miteinander verglichen, die beide nach einer zeitlichen Änderung von Übergangsfrequenzen Ausschau halten, um dadurch Rückschlüsse auf die darin enthaltenen Naturkonstanten ziehen zu können. Von besonderem Interesse ist dabei die Feinstrukturkonstante α . Die eine Methode, die Quasar-Absorptionsspektroskopie, analysiert das Licht von Quasaren, das auf dem Weg zur Erde von Gaswolken teilweise absorbiert wurde und deshalb eine Vielzahl von Absorptionslinien aufweist. Wenn man die Rotverschiebung einer Absorptionslinie bestimmt hat und damit den Zeitpunkt der Absorption kennt (typischerweise vor einigen Milliarden Jahren), dann kann man die damalige Absorptionsfrequenz berechnen, mit der heutigen vergleichen und so auf eine zeitliche Änderung von Naturkonstanten schließen. Der Vorteil dieser Methode ist die große Zeitspanne, die zwischen Absorption und Beobachtung liegt. Dadurch ist sie trotz mittlerer Meßgenauigkeit sehr empfindlich auf eine *lineare* zeitliche Änderung von Naturkonstanten. Die zweite Methode vergleicht die Frequenzen unterschiedlicher Atomuhren miteinander z. B. die Frequenz des $1S$ - $2S$ Übergangs in atomarem Wasserstoff („Wasserstoffuhr“) mit der ^{133}Cs -Hyperfeinaufspaltung (Cs-Uhr). Aus der zeitlichen Änderung bzw. Konstanz des gemessenen Frequenzverhältnisses kann man ebenfalls Aussagen über die zeitliche Änderung von Naturkonstanten machen. Die Stärke dieser Methode ist die hohe relative Meßgenauigkeit von typischerweise 10^{-14} - 10^{-15} . Die Empfindlichkeit auf eine lineare zeitliche Änderung von Naturkonstanten, wird dabei durch das vergleichsweise kleine Zeitintervall von einigen Jahren

⁹engl. **D**ifference **F**requency **G**eneration

¹⁰engl. **S**um **F**requency **G**eneration

begrenzt. Beide Methoden ergänzen sich gegenseitig, da sie den Wert von Naturkonstanten auf unterschiedlichen Zeitskalen bestimmen. Am Schluß des Kapitels wird die zeitliche Veränderung von Naturkonstanten im Rahmen großer vereinheitlichter Theorien (GUT¹¹) diskutiert.

In **Kapitel 5 (Messung der 1S-2S Frequenz des Wasserstoffatoms)** wird die Frequenzmessung des 1S-2S Übergangs in atomarem Wasserstoff beschrieben, die im Frühjahr 2003 durchgeführt wurde. Dabei wird auf den experimentellen Aufbau, den Ablauf der Messung und die Systematiken der Wasserstoffspektroskopie eingegangen. Außerdem werden die Fortschritte hervorgehoben, die es im Vergleich zur Messung im Sommer 1999 gab [Nie00a]. Bei beiden Messungen kamen fs-Frequenzkammgeneratoren zum Einsatz, die von der transportablen Cs-Fontänenuhr FOM¹² referenziert wurden. Diese Cs-Uhr wurde in den Arbeitsgruppen um A. Clairon am BNM-SYRTE¹³ bzw. C. Salomon an der ENS¹⁴ entwickelt und gehört zu den genauesten der Welt. Wertet man die Messung von 2003 auf die gleiche Weise aus wie 1999, so ergibt sich für die Zentroidfrequenz des 1S-2S Übergangs ein Wert von $2\,466\,061\,413\,187\,084 \pm 34$ Hz, was einer absoluten Genauigkeit von $1,4 \cdot 10^{-14}$ entspricht. Vergleicht man diesen Wert mit dem Ergebnis aus dem Jahr 1999, so ist die zeitliche Änderung $f_{1S-2S}(2003) - f_{1S-2S}(1999) = -29 \pm 57$ Hz, was einer mit Null verträglichen relativen zeitlichen Änderung von $\frac{\partial}{\partial t} f_{1S-2S} / f_{1S-2S} = (-3,2 \pm 6,3) \cdot 10^{-15}/\text{Jahr}$ entspricht. Kombiniert man dieses Ergebnis mit anderen Frequenzvergleichen, die im gleichen Zeitraum am NIST¹⁵ [Ude01, Biz03], an der PTB¹⁶ [Ste01, Pei04] bzw. am BNM-SYRTE durchgeführt wurden [Mar03], und quantenmechanischen Rechnungen [Dzu99a, Fla04], so läßt sich daraus für den Zeitraum von 1999 bis 2003 eine Obergrenze für die zeitliche Änderung der Feinstrukturkonstanten α und einigen relativen kernmagnetischen Momenten bestimmen [Fis04a, Pei04]. Speziell für die Feinstrukturkonstante ergibt sich: $\dot{\alpha}/\alpha = (-0,3 \pm 2,0) \cdot 10^{-15}/\text{Jahr}$. Alle ermittelten Obergrenzen sind mit Null verträglich und wurden im wesentlichen *ohne* Annahmen über die zeitliche Änderung von Naturkonstanten bestimmt. Eine Korrelation von Driftraten wurde ebenfalls nicht vorausgesetzt. Damit sind die Ergebnisse weitgehend *modellunabhängig*.

Zu Beginn des **Ausblicks** werden geplante Verbesserungen des Wasserstoffspektrometers erläutert und zwei Experimente vorgestellt, mit denen versucht werden soll, den Wasserstoff 1S-3S und den $^4\text{He}^+$ 1S-2S 2-Photonen-Übergang *alleine* mit stabilisierten Frequenzkämmen zu spektroskopieren. Danach wird auf faserbasierte fs-Frequenzkämme um $1,5 \mu\text{m}$ hingewiesen, die möglicherweise eine Überprüfung der Frequenzkammtechnik mit einer relativen Genauigkeit im Bereich von 10^{-18} gestatten. Zum Schluß wird auf Experimente zur Messung des relativistischen Dopplereffekts eingegangen.

¹¹engl. **Grand Unified Theories**

¹²franz. **Fontaine Mobile**

¹³franz. **Bureau National de Métrologie - Systèmes de Référence Temps-Espace**, Paris

¹⁴franz. **École Normale Supérieure / Laboratoire Kastler Brossel**, Paris

¹⁵engl. **National Institute for Science and Technology**, Boulder/Colorado

¹⁶**Physikalisch Technische Bundesanstalt**, Braunschweig

2. Optische Frequenzmessung

Die Frequenz f einer elektromagnetischen Schwingung in der Einheit Hertz ($1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$) ist die Anzahl der Schwingungsperioden in einem Zeitintervall von einer Sekunde Länge. Eine Frequenzmessung besteht also aus einer Zeitintervallmessung und einem Zählvorgang. Im Gegensatz zu allen anderen Meßgrößen kann das Abzählen von Ereignissen wie z. B. den Nulldurchgängen einer Schwingung im Prinzip ohne jegliche Unsicherheit durchgeführt werden. Daher ist eine Frequenzmessung von ihrer Unsicherheit her einer Zeitintervallmessung äquivalent.

Die Zeiteinheit Sekunde ist seit 1964 über die Frequenz der Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands von ^{133}Cs definiert. Wenn eine elektromagnetische Welle dieser Frequenz 9 192 631 770 Schwingungsperioden durchlaufen hat, ist definitionsgemäß die Zeit von einer Sekunde vergangen. Alle Uhren- bzw. Frequenzstandards, deren Funktion auf dieser Definition beruht, werden Cäsium-Atomuhren genannt. Die besten Atomuhren der Welt können das Zeitintervall von einer Sekunde Länge mit einer relativen Genauigkeit von besser als 10^{-15} realisieren [Mar03]. Das bedeutet, daß solche Uhren in über 30 Millionen Jahren um weniger als eine Sekunde falsch gehen. Genaueste absolute Frequenzmessungen müssen immer auf möglichst direktem Weg auf die Zeiteinheit Sekunde zurückgeführt werden, die im Moment von den bereits angesprochenen Cs-Uhren dargestellt wird. Aufgrund der großen Fortschritte in der optischen Frequenzmessung ist es in der näheren Zukunft durchaus möglich, daß die Sekunde mit Hilfe einer optischen Übergangsfrequenz definiert wird und nicht wie bisher mit einem Mikrowellenübergang.

Das Problem bei der Absolutfrequenzmessung von Licht ist nun, daß die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde so groß ist, daß keine Zähllektronik den Schwingungen folgen kann. Zum Beispiel hat grünes Licht einer Vakuumwellenlänge λ_0 von 532 nm eine Frequenz

$$f = c_0/\lambda_0 \quad (2.1)$$

von etwa 564 THz¹, wobei c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist, die definitionsgemäß 299 792 458 m/s beträgt. Mit MIM²- bzw. Schottky-Dioden kann man zwar Licht einer Frequenz bis etwa 100 THz ($\lambda = 3 \mu\text{m}$) in elektronische Signale umwandeln, aber die schnellste Zähllektronik hat eine obere Grenze von etwa 100 GHz. Licht schwingt also mehr als 1 000 mal schneller, als man zu zählen vermag.

¹1 THz = 1 Terahertz = 10^{12} Hz

²engl. Metal Insulator Metal

2.1 Frühe Methoden

Man könnte nun versuchen, eine optische Frequenz indirekt mit Hilfe von Gleichung 2.1 zu bestimmen, indem man eine Wellenlänge mißt. Es zeigt sich jedoch, daß die relative Genauigkeit von Wellenlängenmessungen, die man mit Interferometern erreichen kann, durch Wellenfrontstörungen auf etwa 10^{-8} [Avi86], bestenfalls 10^{-10} beschränkt ist.

Ein Weg, die Frequenz von Licht direkt zu messen, besteht darin, den Frequenzunterschied zu einer wohlbekanntem optischen Referenzfrequenz zu bestimmen. Dazu überlagert man die Referenzfrequenz mit dem Licht unbekannter Frequenz, wobei die Polarisierungen nicht orthogonal sein dürfen, und mißt die Frequenz der Schwebung, die sich zwischen den beiden Wellen ausbildet, mit einer Photodiode. Dabei darf die Schwebungsfrequenz, die dem Frequenzunterschied beider Wellen entspricht, natürlich nicht größer als die Bandbreite der Zähllektronik sein. Damit hat man das Problem auf die Frage reduziert, wie man eine optische Referenzfrequenz erzeugen kann, deren Frequenz ausreichend genau bekannt ist. Für höchste Meßgenauigkeit, ist es notwendig, die optische Referenzfrequenz direkt, d. h. phasenstarr, von einer Cäsium-Atomuhr abzuleiten. Eine solche optische Referenz kann erzeugt werden, indem man von einer Cs-Uhr ausgeht und deren Frequenz durch viele nichtlineare Prozesse³ vervielfacht bis man in der Nähe der zu messenden optischen Frequenz gelangt ist. Da nichtlineare Prozesse, insbesondere für optische Frequenzen, einen geringen Wirkungsgrad haben, muß nach jedem Vervielfachungsschritt die Leistung durch einen sogenannten Transferoszillator aufgefrischt werden, der wiederum mit dem nichtlinearen Produkt phasenstarr verbunden werden muß. Solche sogenannte **harmonische Frequenzketten** wurden in der Vergangenheit gebaut und für optische Frequenzmessungen eingesetzt [Sch96, Ber99], haben aber erhebliche Nachteile. Sie sind zum einen sehr komplex und deshalb schwer zu bedienen, da viele Oszillatoren gleichzeitig betrieben werden müssen, deren Frequenzen auf das gesamte elektromagnetische Spektrum von einigen MHz bis viele 100 THz verteilt sind. Das hat zur Folge, daß man im allgemeinen für jeden Oszillator eine andere Technologie einsetzen muß. Zum anderen sind sie nur für die Messung *einer* optischen Frequenz gebaut und daher nicht vielseitig. Wenn man eine andere Frequenz vermessen möchte, wird es fast immer so sein, daß der Frequenzunterschied zwischen der neuen Frequenz und der Referenzfrequenz zu groß ist, um elektronisch gezählt werden zu können.

Deshalb hat man in der Vergangenheit Techniken entwickelt, um Frequenzlücken zu verkleinern, die größer als 100 GHz sind. Eine solche Technik ist die optische Intervallteilerstufe [Tel90]. Mit ihr kann ein Frequenzintervall, das von zwei Frequenzen aufgespannt wird, halbiert werden, indem man eine dritte Frequenz erzeugt, die genau in der Mitte zwischen den ersten beiden liegt. Durch eine Hintereinanderschaltung von n Intervallteilerstufen kann jedes Frequenzintervall $\Delta\omega$ soweit verkleinert werden, bis man in einem Schwebungsexperiment die Breite $\delta\omega$ des kleinsten Intervalls bestimmen kann.⁴ Die Breite

³Die Grundlagen der nichtlinearen Prozesse werden z. B. in [Boy92] erläutert. Siehe auch Seite 22.

⁴In Kapitel 2 wird die Frequenz f in Form der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f$ verwendet, weil dadurch eine kompaktere Formulierung vieler Beziehungen möglich ist. Dahingegen wird in den experimentellen

des gesamten Intervalls ist dann gerade $\Delta\omega = 2^n \cdot \delta\omega$. Eine solche **Intervallteilerstufenkette** wurde 1997 in unserem Labor verwendet, um die 1S-2S Frequenz des Wasserstoffatoms von etwa 2 466 THz zu messen [Ude97]. Aber auch eine Intervallteilerstufenkette ist kompliziert in der Handhabung und nicht sehr flexibel.

Eine weitere Technik zur Überbrückung großer Frequenzlücken ist der **optische Frequenzkammgenerator** OFCG.⁵ Ein OFCG ist ein effizienter elektrooptischer Modulator (EOM), der durch die gleichzeitige resonante Überhöhung einer optischen Trägerfrequenz und einer Modulationsfrequenz ein *Gitter* optischer Frequenzen erzeugen kann, dessen benachbarte Moden sich in ihrer Frequenz gerade um die Modulationsfrequenz unterscheiden [Bro94, Kou94]. Ein solches regelmäßiges Frequenzgitter wird im folgenden kurz Frequenzkamm genannt. Die Moden des Kamms bestehen dabei aus der Trägerfrequenz und einigen hundert Seitenbändern, die durch die Modulation entstehen. Die Modulationsfrequenz beträgt typischerweise einige GHz und läßt sich leicht aus einem Cs-Frequenznormal ableiten. Damit ist der OFCG mit einem Lineal im Frequenzraum vergleichbar, mit dem sich optische Frequenzintervalle von einigen THz überdecken lassen. 1998 wurde in unserem Labor mit einem OFCG ein 3,5 THz breiter Frequenzkamm erzeugt, mit dessen Hilfe die Wasserstoff-Deuterium Isotopieverschiebung des 1S-2S Übergangs von etwa 671 GHz bestimmt wurde [Hub98].

Soll mit einem Frequenzkammgenerator, dessen Modenabstand im Hinblick auf das folgende mit ω_r bezeichnet wird, eine Frequenzdifferenz $\Delta\omega$ gemessen werden, die von zwei Frequenzen ω_1 und ω_2 definiert wird, so mißt man die beiden Schwebungsfrequenzen ω_{b1} und ω_{b2} der beiden Frequenzen mit in der Nähe liegenden Moden des Frequenzkamms. Wie in Abbildung 2.1 dargestellt, ergibt sich die Frequenzdifferenz $\Delta\omega$ dann zu

$$\Delta\omega = n \omega_r \pm \omega_{b1} \pm \omega_{b2}. \quad (2.2)$$

Die ganze Zahl n muß durch eine zusätzliche *grobe* Messung des Frequenzintervalls bestimmt werden. Da die Frequenzunsicherheit dieser Messung aber nur wenig kleiner als ω_r selbst sein muß, stellt sie keine große Herausforderung dar. Die Vorzeichen, mit denen ω_{b1} und ω_{b2} in die Gleichung 2.2 eingehen, müssen ebenfalls experimentell ermittelt werden.

2.2 Der Femtosekundenfrequenzkammgenerator

Die Zahl der Seitenbänder, die mit einem OFCG erzeugt werden kann, ist durch die Dispersion des elektrooptischen Kristalls begrenzt, so daß Kammbreiten von etwa 10 THz bisher nicht überschritten wurden [Kou95].

Eine andere Möglichkeit, einen optischen Frequenzkamm zu erzeugen, besteht darin, einen gepulsten Laser zu verwenden, der bereits von seiner Arbeitsweise her eine starke Amplitudenmodulation aufweist. Diese Idee wurde bereits 1978 von J. Eckstein, A. I. Ferguson

Kapiteln 3 und 5 die Frequenz f verwendet, weil damit bei Frequenzangaben Verwechslungen mit der Kreisfrequenz ω ausgeschlossen sind.

⁵engl. **O**ptical **F**requency **C**omb **G**enerator

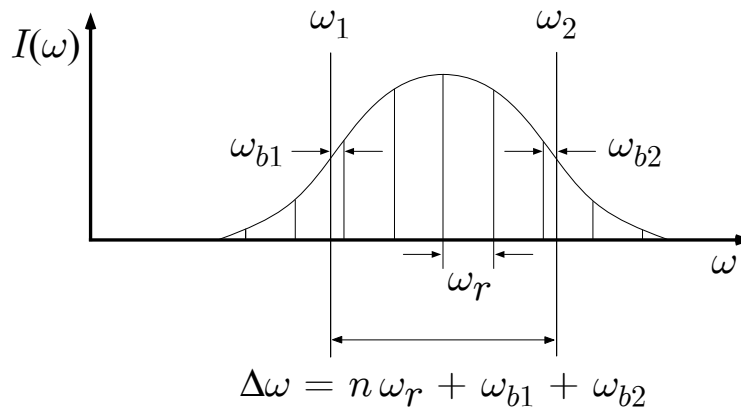


Abbildung 2.1: Messung einer Frequenzdifferenz $\Delta\omega$ mit einem Frequenzkamm. n sowie die Lage der optischen Frequenzen bezüglich der Kammoden müssen durch gesonderte Messungen bestimmt werden, die aber technisch nicht anspruchsvoll sind.

und T. W. Hänsch realisiert, die mit einem gepulsten Farbstofflaser einer Pulsdauer von 100-500 ps ein Frequenzintervall von 1,8 GHz überbrücken und damit die 4d Feinstrukturaufspaltung von Natrium messen konnten [Eck78].⁶

Ein gepulster Laser ist aber nur dann ein Frequenzkammgenerator, wenn er zwei Bedingungen erfüllt. Zum einen müssen die Pulse den Laser in regelmäßigen Abständen verlassen, d. h. der Pulszug muß von der Intensität her periodisch sein, und zum anderen muß zwischen aufeinanderfolgenden Pulsen eine definierte Phasenbeziehung bestehen, d. h. der Pulszug muß kohärent sein. Gütegeschaltete Pulslaser sind daher keine Frequenzkammgeneratoren, weil deren Lasertätigkeit zwischen zwei Pulsen vollständig zum Erliegen kommt und aufeinanderfolgende Pulse deshalb keine Phasenbeziehung mehr aufweisen. Ein modengekoppelter Laser ist im Gegensatz dazu ein Frequenzkammgenerator, da bei ihm ein und derselbe Puls über lange Zeit im Resonator umläuft. Damit sind alle Pulse, die den Resonator über den Auskoppler verlassen, abgeschwächte Kopien des umlaufenden Pulses selbst, wodurch automatisch eine Phasenbeziehung zwischen den Pulsen festgelegt wird. Die Funktionsweise von modengekoppelten Lasern bzw. fs-Lasern wird in Anhang A beschrieben. Während das Spektrum eines einzelnen Pulses keine Moden enthält und nach Maßgabe der Pulslänge Δt eine Breite $\Delta\omega$ von

$$\Delta\omega = \text{const}/\Delta t \quad \text{mit} \quad \text{const} \approx 2\pi \quad (2.3)$$

aufweist, besitzt das Spektrum eines Pulszugs eine zusätzliche kammartige Unterstruktur, die ihre Ursache in der regelmäßigen Wiederholung der Pulse hat. Mathematisch gesprochen entsteht der Frequenzkamm durch eine Fouriertransformation dieses regelmäßigen kohärenten Pulszugs (siehe Abbildung 2.2). Gleichung 2.3 gilt jedoch nur für bandbreitenbegrenzte Pulse. In allen anderen Fällen (gechirpte Pulse) ist das Spektrum breiter als durch Gleichung 2.3 gegeben. Der genaue Wert der Konstanten hängt dabei von der

⁶1 ps = 1 Pikosekunde = 10^{-12} s

Pulsform und den jeweiligen Definitionen von $\Delta\omega$ und Δt ab. Das Intensitätsprofil von fs-Pulsen wird in guter Näherung von einer sech^2 Funktion beschrieben.⁷ Ist Δt bzw. $\Delta\omega$ die volle Breite auf halber Maximalthöhe (FWHM⁸) des Intensitätsprofils bzw. Spektrums, so ist $\text{const} = 2\pi \cdot 0,315$. Im Vergleich dazu hätten Gauß-förmige Pulse $\text{const} = 2\pi \cdot 0,441$.

Im folgenden soll der Frequenzkamm eines modengekoppelten Lasers etwas quantitativer untersucht werden. Dabei betrachten wir zunächst den vereinfachten Fall eines Pulszugs, der dadurch entsteht, daß eine monochromatische optische Welle der Frequenz ω_c , die sogenannte Trägerwelle, einer zeitlich streng periodischen Amplitudenmodulation $A(t)$ unterworfen wird. Die Pulse sollen dabei eine Dauer von Δt haben. Solche Pulse mit konstanter Trägerfrequenz nennt man ungechirpte Pulse. Später wird sich zeigen, daß eine Verallgemeinerung auf gechirpte Pulse zu keiner wesentlichen Änderung der Schlußfolgerungen führt. Die zeitliche Periode T der Amplitudenmodulation, also der zeitliche Abstand der Pulse, bedeutet, daß zu jeder Zeit t

$$A(t) = A(t + T) \quad (2.4)$$

gültig ist. Das elektrische Feld $E(t)$ der periodisch modulierten Trägerwelle ist durch

$$E(t) = A(t)e^{-i\omega_c t} + c.c. \quad (2.5)$$

gegeben. Als streng periodische Funktion kann man $A(t)$ in eine Fourierreihe entwickeln:

$$A(t) = \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{-im\omega_r t} \right). \quad (2.6)$$

Die Koeffizienten A_m , die nicht von der Zeit abhängen, beinhalten die spektralen Intensitäten und die relativen Phasenbeziehungen der Fourierkomponenten untereinander. Daher sind die A_m im allgemeinen komplexe Zahlen. Mit $\omega_r = 2\pi/T$ wird die Pulswiederholfrequenz bezeichnet. Für das elektrische Feld $E(t)$ des Pulszugs folgt dann:

$$E(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{-i(m\omega_r + \omega_c)t} + c.c. \quad (2.7)$$

Das Frequenzspektrum das sich durch Fouriertransformation von Gleichung 2.7 ergibt, besteht also aus einem regelmäßigen Kamm von Frequenzen ω_m , für die

$$\omega_m = m\omega_r + \omega_c \quad (2.8)$$

gilt, wobei m eine natürliche Zahl ist. Der Abstand zweier benachbarter Frequenzmoden des Kamms ist dabei durch ω_r gegeben. Da sich ω_c immer als Summe einer Harmonischen von ω_r und einer zunächst noch unbekanntem anderen Frequenz ω_{ce} darstellen läßt [Rei99, Tel99], kann man Gleichung 2.8 umschreiben und erhält:

$$\omega_n = n\omega_r + \omega_{ce}. \quad (2.9)$$

⁷sech = Sekanshyperbolicus; $\text{sech}(t) = 1/\cosh(t) = 2/(\exp(t) + \exp(-t))$

⁸engl. Full Width at Half Maximum

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man n so wählen, daß $\omega_{ce} < \omega_r$ ist. Damit ist der Frequenzkamm gerade um ω_{ce} von der Position exakter Harmonischer von ω_r verschoben. Die Modennummer n ist dabei eine natürliche Zahl, die für typische Werte von ω_r eine Größenordnung von 10^6 hat. Auf eine anschauliche Interpretation der sogenannten Träger-Einhüllenden-Schlupf-Frequenz⁹ ω_{ce} wird später im Text eingegangen (siehe Abbildung 2.2). Da $A(t)$ reine Amplitudenmodulation beschreiben soll und daher reell sein muß ($A(t) = A(t)^*$), folgt für die Fourierkoeffizienten $A_{-m} = A_m^*$. Damit ergibt sich für die Intensität der Fourierkomponenten

$$|A_{-m}|^2 = A_{-m}A_{-m}^* = A_m^*A_m = |A_m|^2. \quad (2.10)$$

D. h. die Intensitätsverteilung des Kammspektrums ist symmetrisch bezüglich der Trägerfrequenz ω_c (siehe Abbildung 2.2). Nach Gleichung 2.3 ist die Breite $\Delta\omega$ des Spektrums in etwa durch $2\pi/\Delta t$ gegeben. Ein Pulszug mit kürzeren Pulsen führt deshalb zu einem breiteren Frequenzkamm, mit dem sich dann auch größere Frequenzlücken überbrücken lassen. Das Zeit- und Frequenzraumbild eines kohärenten Pulszugs erscheint vielleicht auf den ersten Blick widersprüchlich, aber die Tatsache, daß das elektrische Feld zwischen zwei Pulsen nahezu verschwindet, bedeutet *nicht*, daß die Intensität der einzelnen Kammoden ebenso verschwindet. Vielmehr besteht zwischen den Moden eine Phasenbeziehung, die bewirkt, daß sich die elektrischen Felder aller Moden zu bestimmten Zeiten zu einem Puls addieren während sie sonst destruktiv interferieren. Würde man eine Mode des Frequenzkamms spektral herausfiltern, so wäre ihre Intensität zu jeder Zeit konstant.

An dieser Stelle soll hervorgehoben werden, daß **alle** Moden des Frequenzkamms durch ω_r bzw. ω_{ce} in ihrer Frequenz festgelegt sind. Die Pulswiederholrate ω_r eines linearen Laserresonators ist mit seiner Länge L über die Beziehung

$$\omega_r = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi \frac{v_g}{2L} \quad (2.11)$$

verknüpft, wobei v_g die Gruppengeschwindigkeit des Pulses im Resonator ist.¹⁰ Mit einer typischen Resonatorlänge von 1 m und $v_g \approx c_0$ ergibt sich für $\omega_r/(2\pi)$ ein Wert von etwa 150 MHz. Für eine genaue Berechnung von ω_r muß die Dispersion des Resonators berücksichtigt werden. Damit sind ω_r und ω_{ce} dem Radiofrequenzbereich zuzuordnen, der Frequenzmessungen besonders gut zugänglich ist, weil die dazu notwendigen Utensilien wie Zähler, Mischer, Frequenzgeneratoren, Verstärker, usw. alle kommerziell erhältlich sind. Wenn es gelingt ω_r und ω_{ce} phasenkohärent mit einer Cs-Atomuhr zu verbinden, dann sind die Frequenzen aller Moden des Frequenzkamms mit der Genauigkeit der verwendeten Atomuhr bekannt. Wie man das erreichen kann, wird in Abschnitt 2.3 erläutert. Ein solches regelmäßiges Gitter genau bekannter Lasermoden ist ein ideales Werkzeug, um unbekannte optische Frequenzen zu vermessen.

⁹engl. Carrier Envelope offset frequency

¹⁰Die 2 im Nenner von Gleichung 2.11 stammt daher, daß der Puls zwei mal den Resonator durchlaufen muß, um wieder am Auskoppler anzukommen. Bei einem Ringresonator muß die 2 daher durch eine 1 ersetzt werden.

Um die physikalische Bedeutung von ω_{ce} näher zu untersuchen, betrachten wir das elektrische Feld E des Pulszugs zur Zeit t und $t + T$:

$$E(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-i(n\omega_r + \omega_{ce})t} + \text{c.c.} \quad \text{und} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} E(t+T) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-i(n\omega_r + \omega_{ce})(t+T)} + \text{c.c.} \\ &= E(t) e^{-i2\pi\omega_{ce}/\omega_r} + \text{c.c.} = E(t) e^{-i\Delta\varphi} + \text{c.c.} . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Das elektrische Feld $E(t+T)$ ist also bis auf den Phasenfaktor $e^{-i\Delta\varphi}$ identisch mit $E(t)$, d. h. obwohl die Intensitätsverteilung $A(t)$ periodisch mit T ist, gilt das für das elektrische Feld im Allgemeinen *nicht*. Für $\Delta\varphi$ läßt sich die folgende Beziehung ablesen:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\omega_{ce}}{\omega_r} \quad \text{bzw.} \quad \omega_{ce} = \frac{\Delta\varphi}{T}. \quad (2.14)$$

Offensichtlich haben aufeinanderfolgende Pulse nur dann identische elektrische Feldverläufe, falls $\Delta\varphi = 0$ bzw. $\omega_{ce} = 0$ ist.

In Abbildung 2.2 wird eine anschauliche Erklärung für die Entstehung des Phasenfaktors $e^{-i\Delta\varphi}$ gegeben. Wenn man den Puls, der im Resonator eines modengekoppelten Lasers umläuft, genauer betrachtet, so stellt man fest, daß sich sein elektrisches Feld relativ zur Einhüllenden des Pulses mit der Zeit verändern kann. Ist nämlich die Phasengeschwindigkeit v_p der Trägerwelle nicht identisch mit der Gruppengeschwindigkeit v_g des Pulses, so ändert die Trägerwelle ständig ihre Position bezüglich der Einhüllenden. Dies führt bei benachbarten Pulsen zu einer Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen Träger und Einhüllenden. Da eine Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ pro Zeitintervall T einer Frequenz entspricht, ergibt sich für die Träger-Einhüllenden-Schlupf-Frequenz $\omega_{ce} = \Delta\varphi/T$. Dabei ist $\Delta\varphi$ modulo 2π zu rechnen. Weil sich v_g bzw. v_p beim Durchgang durch dispersive Medien wie z. B. den Laserkristall, Prismen oder geschirpte Spiegel ändern, sind die hier verwendeten Größen als über einen Resonatorumlauf gemittelte effektive Gruppen- bzw. Phasengeschwindigkeit anzusehen.

Der Frequenzkamm, der aus einem *unendlich* langen Pulszug entsteht, besteht aus einer regelmäßigen Anordnung von Deltafunktionen im Frequenzraum. Im Gegensatz dazu enthält das Spektrum eines einzelnen Pulses keine Modenstruktur. Zwischen diesen beiden Extremfällen besteht ein fließender Übergang. Ähnlich der spektralen Auflösung eines Gitters sinkt die Frequenzbreite $\delta\omega$ der Kammoden mit der Anzahl der betrachteten Pulse. Wie in Referenz [Ude02a] gezeigt wurde, verringert sich die spektrale Breite einer einzelnen Kammode entsprechend $\delta\omega \approx \sqrt{24/[T^2(N^2 - 1)]}$. Dabei ist T die Zeit zwischen zwei Pulsen und N die Anzahl der Pulse im Pulszug. Das heißt, nach sehr vielen Pulsen ($N \gg 1$) sinkt $\delta\omega$ erwartungsgemäß wie N^{-1} . Nach einer Zeitspanne von 1 s, in der $1\text{ s}/T$ Pulse enthalten sind, ist die spektrale Breite der Kammoden mit $T \ll 1\text{ s}$ bereits auf $\delta f = \delta\omega/(2\pi) = \sqrt{24}/(2\pi) \approx 1\text{ Hz}$ gesunken. Bezogen auf eine typische optische

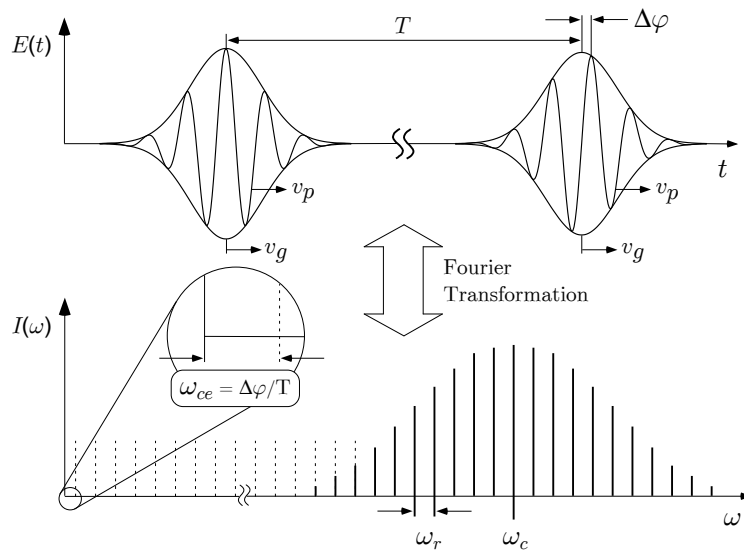


Abbildung 2.2: Der Pulzzug eines modengekoppelten Lasers im Zeit- und Frequenzraum. Zwei aufeinanderfolgende Pulse (oben) und das Frequenzspektrum, das durch Fouriertransformation eines Pulzzugs entsteht (unten). Durch Unterschiede in der Gruppengeschwindigkeit des Pulses v_g und der Phasengeschwindigkeit der Trägerwelle v_p innerhalb des Laserresonators kommt es zwischen benachbarten Pulsen zu einem Phasenschlupf $\Delta\varphi$, wodurch der Kamm insgesamt um $\omega_{ce} = \Delta\varphi/T$ von der Position exakter Harmonischer von ω_r verschoben wird.

Frequenz von 500 THz (600 nm) ergibt sich daraus eine Güte von $Q = 10^{14}$. Dieser theoretische Wert ignoriert allerdings technische Rauschprozesse wie z. B. Schwankungen der Resonatorlänge, die durch Schalleinwirkung hervorgerufen werden.

Das bisher gesagte bezog sich lediglich auf den idealisierten Fall, daß die Trägerfrequenz entlang des Pulses konstant ist. Im folgenden soll kurz beschrieben werden, ob und wie sich die gezogenen Schlußfolgerungen ändern, wenn man diese Annahme fallen läßt. Ein Puls, bei dem sich die Frequenz der Trägerwelle entlang der Einhüllenden ändert, wird *gechirpter Puls* genannt (siehe Abbildung 2.3). Rein mathematisch gesehen kann ein Pulzzug, der aus solchen Pulsen besteht, weiterhin durch eine periodische Modulationsfunktion $A(t)$ beschrieben werden, die auf eine monochromatische Trägerwelle der Frequenz ω_c wirkt. Weil $A(t)$ jetzt zusätzlich zur Amplitudenmodulation auch eine Phasenmodulation beschreibt, muß $A(t)$ eine *komplexwertige* Funktion sein. Da aber $A(t)$ nach wie vor eine periodische Funktion ist, kann sie in eine Fourierreihe analog zu Gleichung 2.6 entwickelt werden. Die Existenz der Fourierreihenentwicklung für $A(t)$ garantiert, daß das Frequenzspektrum dieselbe Kammstruktur besitzt wie in Gleichung 2.9 beschrieben. Lediglich das Spektrum muß jetzt nicht mehr symmetrisch sein und ω_{ce} ist nicht mehr einer anschaulichen Interpretation wie im oberen Teil von Abbildung 2.2 zugänglich, weil die Trägerfrequenz ω_c nicht mehr eindeutig definiert werden kann. Das ist aber für Anwendungen in der optischen Frequenzmessung gänzlich unerheblich. Einzig wichtig ist nur der regelmäßige Modenabstand ω_r , der lediglich die Periodizität der Modulationsfunktion $A(t)$

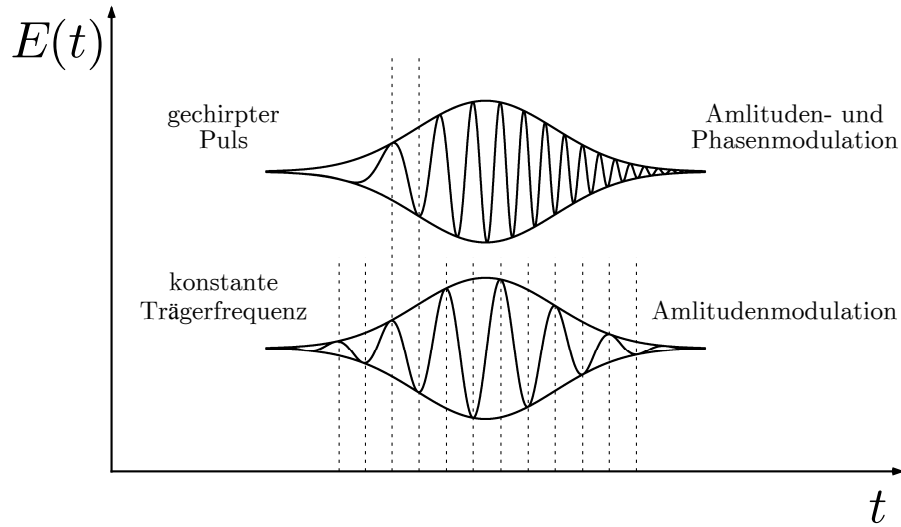


Abbildung 2.3: Ein Puls mit konstanter Trägerfrequenz (unten) und ein Puls mit nicht konstanter Trägerfrequenz (gechirpter Puls, oben). Gechirpte Pulse gehen aus einer Trägerfrequenz ω_c durch Amplituden- **und** Phasenmodulation hervor.

voraussetzt.

Um zu untersuchen, welche Prozesse einen frequenzabhängigen Modenabstand $\omega_r(\omega)$ bewirken können, der einen Frequenzkamm für genaueste optische Frequenzmessungen ungeeignet machen würde, betrachtet man die Randbedingungen eines Laserresonators der Länge L , die sich folgendermaßen zusammenfassen lassen

$$2L k(\omega_n) = n 2\pi + \Delta\Phi_n. \quad (2.15)$$

Hierbei gibt die natürliche Zahl n der Größenordnung 10^6 die Anzahl der Halbwellen im Resonator an und $\Delta\Phi_n$ berücksichtigt Phasenverschiebungen, die beispielsweise durch Beugung (Guoy-Phase) oder Reflexion an dielektrischen Schichten hervorgerufen werden und möglicherweise von der Wellenlänge abhängen.¹¹ Die Dispersion des Resonators wird durch die Wellenzahl $k(\omega_n)$ beschrieben, die sich um die Zentralfrequenz¹² ω_0 herum in eine Taylorreihe entwickeln läßt:

$$k(\omega_n) = k(\omega_0) + \left. \frac{\partial k}{\partial \omega_n} \right|_{\omega_0} (\omega_n - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega_n^2} \right|_{\omega_0} (\omega_n - \omega_0)^2 + \dots \quad (2.16)$$

Der zweite Term ist proportional zum Kehrwert der Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ und der dritte Term ist proportional zum Kehrwert der Gruppengeschwindigkeitsdispersion $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$. Um einen frequenzunabhängigen Modenabstand ω_r zu garantieren, darf $\omega_r \equiv \omega_{n+1} -$

¹¹Betrachtet man die Reflexion an gechirpten Spiegeln, so ist die Frequenzabhängigkeit von $\Delta\Phi_n$ offensichtlich. Alternativ zur Einführung von $\Delta\Phi_n$ könnte man auch die Resonatorlänge L als frequenzabhängig annehmen.

¹²Im Falle der ungechirpten Pulse, d. h. einer konstanten Trägerfrequenz, ist $\omega_0 = \omega_c$.

ω_n nicht von n abhängen. Mit Hilfe der Gleichungen 2.15 und 2.16 sieht man, daß dies nur dann der Fall ist, wenn in Gleichung 2.16 alle Terme bis auf die ersten verschwinden bzw. sich gegenseitig kompensieren. Außerdem darf die Differenz $\Delta\Phi_{n+1} - \Delta\Phi_n$ nicht von n abhängen. Wie in Anhang A ab Seite 129 erklärt ist, ist die Kompensation der Gruppengeschwindigkeitsdispersion eine Grundvoraussetzung für das Funktionieren von modengekoppelten Lasern. Das Verschwinden des dritten Terms in Gleichung 2.16 ist damit automatisch garantiert. Die regelmäßige Kammstruktur kann aber offensichtlich durch Dispersion höherer Ordnung ($\frac{\partial^i k}{\partial \omega^i}$ mit $i \geq 3$) oder eine Frequenzabhängigkeit von $\Delta\Phi_{n+1} - \Delta\Phi_n$ gestört werden. Diese Terme begrenzen auch die erreichbare Pulsdauer eines modengekoppelten Lasers. Kleinere Abweichungen von der Kammstruktur können allerdings durch den optischen Kerr-Effekt¹³ im Lasermedium ausgeglichen werden (siehe Anhang A).

Um abzuschätzen, wie sich ein nicht konstanter Modenabstand auf die Lasertätigkeit auswirkt, stellt man sich einen Puls mit einer Pulslänge (FWHM) von 10 fs vor, der aus zwei Pulsen (1,2) von je 10 fs zusammengesetzt ist. Beide Pulse sollen über einen Resonatorumlauf gemittelt geringfügig unterschiedliche Gruppengeschwindigkeiten $v_g(1)$ bzw. $v_g(2)$ besitzen. Der relative Unterschied der Gruppengeschwindigkeiten sei $(v_g(2) - v_g(1))/v_g(1) = 10^{-15}$. Der Unterschied in v_g überträgt sich wegen $\omega_r = 2\pi v_g/(2L)$ in gleicher Weise auf die Modenabstände $\omega_r(1,2)$ der den beiden Pulsen entsprechenden Frequenzkämmen.¹⁴ Beide Pulse seien zu einer bestimmten Zeit überlagert. Aufgrund der unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten bzw. Modenabstände sind beide Pulse bereits nach 10 s um 10 fs, also um eine volle Pulsbreite, voneinander getrennt. Dieses Beispiel zeigt, daß bereits kleinste Abweichungen von einem regelmäßigen Frequenzkamm schon nach kurzer Zeit zu einem Zerfließen des im Resonator umlaufenden Pulses führen und damit zum Erliegen der gepulsten Lasertätigkeit. Da ein solches Zerfließen nicht beobachtet wird, muß der Modenabstand mit einer hohen Genauigkeit konstant sein. Experimente haben gezeigt, daß dies mit einer relativen Genauigkeit von besser als $3 \cdot 10^{-17}$ der Fall ist [Ude99a]. Die Meßzeit zum Erreichen einer derartig großen Genauigkeit beträgt typischerweise viele Stunden. Daher sind *kurzzeitige* Abweichungen von der regelmäßigen Kammstruktur, die sich mit steigender Meßzeit zu Null mitteln, nicht ausgeschlossen.

Aus Gleichung 2.3 geht hervor, daß es günstig ist, einen modengekoppelten Laser mit möglichst kurzen Pulsen als Frequenzkammgenerator zu verwenden, da man mit ihm große Frequenzintervalle vermessen kann. Während man 1978 mit Pulsen einer Länge von 100-500 ps lediglich ein Intervall von 1,8 GHz überbrücken konnte [Eck78], so war man 1998 in der Lage, mit Pulsen von 70 fs, ein Intervall von über 18 THz zu vermessen. Damit war es möglich, die Frequenz der Cäsium D_1 Linie zu bestimmen [Ude99b]. Frequenzintervalle bis zu 45 THz konnten überbrückt werden, nachdem das Spektrum eines fs-Lasers durch Selbstphasenmodulation in einer Monomodenglasfaser verbreitert wurde (siehe Seite 22). Mit einem solchen Aufbau wurde 1999 die $1S$ - $2S$ Frequenz von atomarem Wasserstoff

¹³Der Kerr-Effekt beruht auf der Intensitätsabhängigkeit von $k(\omega)$ bzw. $n(\omega)$, die in Gleichung 2.16 nicht berücksichtigt wurde.

¹⁴Es wird ein linearer Resonator angenommen.

gemessen [Rei00a]. Die Vergrößerung des meßbaren Frequenzintervalls hat dabei immer zu einer deutlichen Vereinfachung des experimentellen Aufbaus geführt.

Um fs-Frequenzkämme für die Messung von Frequenzdifferenzen nach Abbildung 2.1 auf Seite 12 einsetzen zu können, reicht es bereits aus, nur die Pulswiederholrate ω_r messen zu können, was als Schwebungsfrequenz benachbarter Kammoden auf einfache Weise mit einer Photodiode möglich ist. Damit ist die Frequenz aller Moden bis auf den Wert von ω_{ce} bekannt. Eine phasengenaue Rückführung von ω_r auf eine Cs-Atomuhr kann dadurch geschehen, daß man ω_r mit einem Zähler mißt, der von einer Cs-Uhr referenziert wird, d. h. der Zähler bekommt die Information, wie lang eine Sekunde dauert, direkt von einer Atomuhr. Diese Methode beinhaltet die Gefahr, daß sich der Zähler aufgrund eines unzureichenden Signal-zu-Rausch-Verhältnisses oder zu geringer Leistung des Signals verzählt, was zu einem falschen Meßergebnis führt. Es sei darauf hingewiesen, daß sich bereits kleine Fehler beim Zählen von ω_r durch den Faktor $n \approx 10^6$ verstärkt auf das Ergebnis auswirken (siehe Gleichungen 2.2 und 2.9). Aus diesem Grund ist es vorteilhaft, beim Zählen von ω_r eine zusätzliche Kontrollmessung durchzuführen, welche die Sicherheit vor Meßfehlern erhöht (Redundanz).

Folgendes Verfahren hat sich in unserer Arbeitsgruppe besonders bewährt. Zuerst wird ω_r mit einem Phasenregelkreis PLL¹⁵ auf eine wohl definierte Frequenz, die sogenannte Lokaloszillatorfrequenz, stabilisiert. Die Lokaloszillatorfrequenz wird dabei von einem Frequenzgenerator erzeugt, der mit einer Cs-Uhr referenziert ist. Mit einem Kontrollzähler, der ebenfalls mit der Cs-Uhr referenziert ist, wird ω_r gezählt und damit das korrekte Funktionieren des PLL überprüft. Arbeiten PLL und Zähler fehlerfrei, so zeigt der Kontrollzähler immer die Lokaloszillatorfrequenz an. Dadurch, daß man alle Meßpunkte verwirft, bei denen der Kontrollzähler eine Frequenz anzeigt, die außerhalb einer gewählten Toleranzgrenze liegt, hat man eine hohe Sicherheit vor fehlerhaften Meßpunkten. Undetektierbare Fehler können nur dann auftreten, wenn beide redundanten Systeme (in diesem Fall PLL und Zähler) *gleichzeitig denselben* Fehler machen. Ein solches Zusammentreffen ist sehr unwahrscheinlich. Um ω_r stabilisieren zu können, muß man seinem Wert gezielt verändern können, was nach Gleichung 2.11 über die Länge L des Laserresonators erreicht werden kann. Für eine Grobverstellung von L bietet es sich an, einen Spiegelhalter des Resonators auf einem μm -Verschiebetisch zu montieren. Eine Feineinstellung und elektronische Regelung von ω_r ist möglich, indem man einen Spiegel des Resonators auf eine Piezokeramik aufklebt.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß es für höchste Meßgenauigkeit wichtig ist, eine Phasenstabilisierung zu verwenden und keine Frequenzstabilisierung. Eine Frequenzstabilisierung führt nämlich zu Fehlern, falls die Frequenzexkursionen bevorzugt in eine Richtung gehen, was experimentell nicht unwahrscheinlich ist. Über die Zeit gemittelt ergibt sich daraus ein kleiner Frequenzunterschied zwischen der geregelten Frequenz und der Lokaloszillatorfrequenz. Eine derartige Frequenzverschiebung ist bei einer Phasenre-

¹⁵Engl. **Phase Locked Loop**; eine gute Einführung in die Technik der Phasenregelung findet sich in [Gar79].

gelung dagegen ausgeschlossen, selbst dann, wenn die Phasenexkursionen immer in die gleiche Richtung gehen.

2.3 Der optische Synthesizer

Will man mit dem Frequenzkamm nicht nur Frequenzdifferenzen sondern auch die Absolutfrequenz von Licht messen, so muß man zusätzlich zu ω_r auch noch die Offsetfrequenz ω_{ce} messen können. Um die Redundanz zu erhöhen, kann man auch hier ω_{ce} mit einem PLL auf einen Lokalszillator stabilisieren und den PLL mit einem Zähler kontrollieren. Für die Anwendung dieser Methode ist es zusätzlich notwendig, ω_{ce} kontrollieren zu können (siehe Seite 27).

Falls das Spektrum des Frequenzkamms eine volle Oktave überdeckt, d. h. die Frequenzen ω und 2ω sind im Spektrum enthalten, dann ist es auf besonders *einfache* Art möglich, ω_{ce} zu messen [Jon00, Did00, Hol00].¹⁶ Dazu betrachtet man eine Mode ω_n auf der langwelligen Seite des Kammspektrums und verdoppelt ihre Frequenz in einem nichtlinearen Kristall zu $2\omega_n$. Anschließend mißt man die Schwebungsfrequenz zwischen $2\omega_n$ und ω_{2n} mit einer Photodiode. Daß die Frequenz ω_{2n} im Spektrum des Kamms enthalten ist, wird durch die Breite von einer Oktave gewährleistet. Für die Schwebungsfrequenz ergibt sich (siehe Abbildung 2.4):

$$2\omega_n - \omega_{2n} = 2(\omega_{ce} + n\omega_r) - (\omega_{ce} + 2n\omega_r) = \omega_{ce}. \quad (2.17)$$

Sobald man ω_{ce} zusätzlich zu ω_r kennt, ist die **absolute** Frequenz aller Kammoden festgelegt.

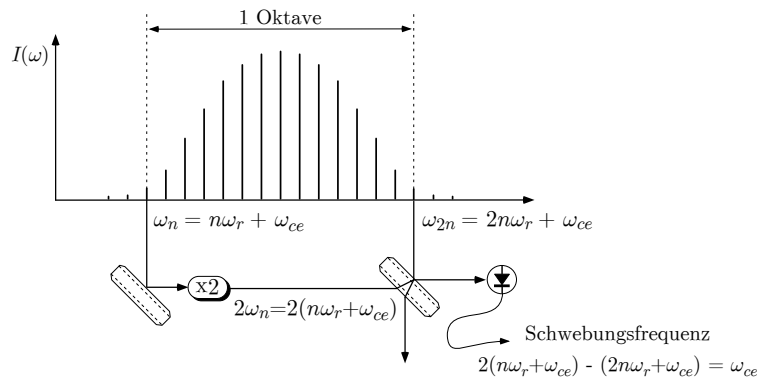


Abbildung 2.4: Bestimmung von ω_{ce} mit einem oktavenbreiten Frequenzkamm. Die Schwebungsfrequenz zwischen $2\omega_n$ und ω_{2n} ist gerade ω_{ce} .

Die Situation in Abbildung 2.4 soll noch etwas präzisiert werden. Im Experiment wird man sicherlich nicht eine Mode ω_n aus dem Spektrum herausfiltern, um ω_{ce} zu bestimmen.

¹⁶Auf die Bestimmung von ω_{ce} mit Frequenzkämmen geringerer Breite wird später im Text eingegangen und für die Bestimmung von ω_{ce} durch spektrale Interferometrie sei auf die Referenzen [Lep95, Meh00, Kak01] verwiesen.

Das wäre nicht nur schwierig, sondern würde auch zu einem schlechten Signal-zu-Rausch Verhältnis (SNR¹⁷) von ω_{ce} führen. Statt dessen verwendet man einen Ausschnitt des Kamms, der um ω_n zentriert ist und viele 1 000 Moden enthält. Durch den nichtlinearen Prozeß wird dann ein Frequenzkamm erzeugt, der um $2\omega_n$ zentriert ist. Die Breite dieses neuen Kamms ist durch die Phasenanpassung gegeben und beträgt typischerweise einige nm. In diesem Fall ist es nicht mehr korrekt, alleine von der Erzeugung der zweiten Harmonischen (SHG¹⁸) zu sprechen. Zwar würde dadurch ein Kamm erzeugt werden, der um $2\omega_n$ zentriert ist, der Modenabstand wäre aber $2\omega_r$, was nicht beobachtet wird. Die Lösung dieses Problems besteht darin, daß es sich bei dem nichtlinearen Prozeß nicht um SHG alleine handelt, sondern um den allgemeineren Prozeß der Summenfrequenzerzeugung (SFG). Der SFG-Kamm hat den gleichen Modenabstand ω_r wie der oktavenbreite Kamm, ist aber gegen diesen um ω_{ce} verschoben. Dadurch, daß man nicht nur die Mode $2\omega_n$ sondern den SFG-Kamm mit dem Originalkamm überlagert, entstehen viele Schwebungsfrequenzen, die alle zu ω_{ce} beitragen und dadurch das SNR erhöhen. Das SNR von ω_{ce} ist maximal, wenn die Pulse, die dem SFG- bzw. Originalkamm entsprechen, zeitgleich an der Photodiode ankommen. Falls sich die beiden Pulse zeitlich nicht überlappen, kann ω_{ce} nicht detektiert werden, weil sich die verschiedenen Beiträge durch destruktive Interferenz auslöschen. Daher ist es notwendig, die Weglängen des $\omega_n/2\omega_n$ - und ω_{2n} -Arms mit einer optischen Verzögerungsstrecke einander anzugleichen (siehe Abbildung 2.9 auf Seite 32).

Im Jahr 2000 als das Schema in Abbildung 2.4 entwickelt wurde, gab es noch keine fs-Laser (Oszillatoren), deren Spektrum eine Oktave überdeckt hätte. Um ein oktavenbreites Spektrum zu erreichen, wurden verschiedene Wege eingeschlagen: zum einen versuchte man einen Laser zu bauen, der eine Oktave direkt aus dem Resonator erzeugt, und zum anderen verbreiterte man das Spektrum eines fs-Lasers extern, d. h. außerhalb des Resonators. Da der erste Weg von uns nicht besprochen wurde, sei an dieser Stelle auf die Referenzen [Ell01, Bar02, For03] verwiesen, wobei nur die Autoren von Referenz [For03] in der Lage sind, ω_{ce} nach Abbildung 2.4 zu stabilisieren. Mittlerweile sind fs-Laser bzw. Bausätze mit einem nahezu oktavenbreiten Spektrum sogar kommerziell erhältlich.¹⁹ Obwohl mit solchen Lasern ω_{ce} ohne externe spektrale Verbreiterung gemessen und stabilisiert werden kann [Fuj05],²⁰ so hat eine externe Verbreiterung dennoch Vorteile, falls ein stabilisierter Frequenzkamm in spektralen Bereichen weitab der Ti:Saphir Wellenlänge von ca. 800 nm benötigt wird. Ein Beispiel dafür ist die Messung der $1S$ - $2S$ Frequenz in atomarem Wasserstoff (siehe Kapitel 5), wo ein Frequenzkamm bei 486 nm verwendet wurde.

Ein Effekt, der zur externen Verbreiterung des Kamms unter Beibehaltung seiner periodischen Struktur ausgenutzt werden kann, ist die Selbstphasenmodulation (SPM²¹).

¹⁷engl. **S**ignal to **N**oise **R**atio

¹⁸engl. **S**econd **H**armonic **G**eneration

¹⁹Femtolasers Produktions GmbH (Femtosource Rainbow) und Nanolayers Optical Coatings GmbH (Venteon | Pulse : one). Im Einzelfall muß allerdings darauf geachtet werden, wie die spektrale Breite gemessen wird (FWHM oder -10 dB).

²⁰Strenggenommen wird auch hier die spektrale Verbreiterung durch Selbstphasenmodulation im nichtlinearen Kristall benötigt.

²¹engl. **S**elf **P**hase **M**odulation

Sie findet statt, wenn ein Material mit intensitätsabhängigem Brechungsindex n von einem leistungsstarken Laser durchleuchtet wird. Der Brechungsindex n eines Materials als Funktion der Lichtintensität I ist durch

$$n(\omega, I) = n_0(\omega) + n_2 I(t) \quad (2.18)$$

gegeben. Dabei ist $n_0(\omega)$ der Brechungsindex bei verschwindender Lichtintensität und n_2 der sogenannte nichtlineare Brechungsindex. Für Materialien wie z. B. Saphir oder Quarz, die im sichtbaren Spektralbereich lichtdurchlässig sind, d. h. eine große Bandlücke aufweisen, ist n_2 in guter Näherung unabhängig von der Frequenz. Das ist gleichbedeutend mit der Tatsache, daß der Brechungsindex n einer Änderung von I praktisch ohne Verzögerungszeit folgt. Obwohl n_2 einen sehr kleinen Wert hat,²² kann er eine Rolle spielen, falls I nur genügend groß ist. Das ist bei fs-Lasern der Fall. Ist l die Länge des durchstrahlten Materials, so ergibt sich aus Gleichung 2.18 eine Phasenverschiebung $\Delta\Phi$ von:

$$\Delta\Phi = -n_2 I(t) \omega_c l / c \quad (2.19)$$

Da $I(t)$ eine periodische Funktion der Frequenz ω_r ist, entspricht $\Delta\Phi$ einer Phasenmodulation, die neue Seitenbänder um bereits bestehende Kammoden erzeugt und auf diese Weise das Spektrum verbreitert. Dabei bleibt die Regelmäßigkeit der Kammstruktur aufgrund der Periodizität von $I(t)$ erhalten. Die Kammverbreiterung ist allerdings durch die Gruppengeschwindigkeitsdispersion begrenzt, weil diese zu einem zeitlichen Zerfließen der Pulse und damit zu einer Verringerung der Spitzenintensität führt.

Die Verbreiterung des Spektrums unter Beibehaltung der Kammstruktur kann analog dazu auch im Frequenzraum mit dem Prozeß des Vierwellenmischens (FWM²³) beschrieben werden (siehe Abbildung 2.5). Ist die elektrische Feldstärke einer Lichtwelle so groß, daß das Bindungspotential der Elektronen im durchstrahlten Medium nicht mehr länger als harmonisch angesehen werden kann, so ist die Polarisation P des Mediums keine lineare Funktion des erregenden Feldes E mehr. Falls die Feldstärke des Lichtfeldes ausreichend weit unterhalb der Ionisationsgrenze des entsprechenden Mediums liegt, kann die Polarisation in eine Potenzreihe entwickelt werden:²⁴

$$P_i = \epsilon_0 \left(\sum_j \chi_{i,j}^{(1)} E_j + \sum_{j,k} \chi_{i,j,k}^{(2)} E_j E_k + \sum_{j,k,l} \chi_{i,j,k,l}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right), \quad (2.20)$$

wobei die Indizes i, j, k, l jeweils die kartesischen Koordinaten x, y, z durchlaufen. Die Suszeptibilitäten n -ter Ordnung $\chi^{(n)}$ sind im allgemeinen Fall Tensoren der Stufe $n + 1$. $\chi^{(1)}$ wird auch lineare Suszeptibilität genannt. Die nichtlinearen Anteile der Polarisation P_i ($\chi^{(n)}$ mit $n \geq 2$) erzeugen dabei neue Lichtwellen, deren Frequenzen sich von denen der Ausgangswellen unterscheiden. Beispiele dafür sind die bereits erwähnte Summen- bzw. Differenzfrequenzerzeugung, die beide auf dem $\chi^{(2)}$ Term basieren. Obwohl die nichtlinearen Suszeptibilitäten im allgemeinen sehr klein sind, können nichtlineare Prozesse durch

²²Für Quarzglas bzw. Saphir ist $n_2 \approx 3 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2/\text{W}$.

²³engl. **Four Wave Mixing**

²⁴Die Ionisationsgrenze wird in Festkörpern typischerweise bei Intensitäten von 10^{15} W/cm^2 erreicht.

Fokussierung bzw. Verwendung gepulster Laser sehr effizient ablaufen.²⁵ Damit die neu erzeugten Wellen nicht destruktiv interferieren, sondern sich konstruktiv addieren, muß gewährleistet sein, daß die Differenz aus der Summe der Wellenzahlvektoren der Ausgangswellen $\vec{k}_{a,i}$ und der erzeugten Welle \vec{k}_e verschwindet (Phasenanpassung, Impulserhaltung):

$$\Delta\vec{k} = \sum_i \vec{k}_{a,i} - \vec{k}_e = 0. \quad (2.21)$$

Bei einem Differenzbildungsprozeß ist der entsprechende Wellenzahlvektor negativ zu rechnen. Betrachtet man $\chi^{(2)}$ -Prozesse, so kann diese Bedingung in vielen Fällen durch die Doppelbrechung anisotroper Kristalle erfüllt werden. Im Hinblick auf nichtlineare Prozesse in Glasfasern soll im folgenden nur der einfachste Fall eines isotropen Mediums und einer in x -Richtung linear polarisierten Ausgangswelle betrachtet werden. Unter diesen Voraussetzungen vereinfachen sich die $\chi^{(n)}$ Tensoren zu Skalaren. Da isotrope Materialien kein räumliches Inversionszentrum besitzen, sind bei ihnen alle geraden Ordnungen von $\chi^{(n)}$ aus Symmetriegründen gleich Null, was u. a. bedeutet, daß $\chi^{(2)}$ -Prozesse wie SFG oder DFG nicht ablaufen können. In diesem Fall dominiert der $\chi^{(3)}$ Term den nichtlinearen Teil der Polarisation. Betrachtet man eine optische Welle der Frequenz ω , so ist der nichtlineare Brechungsindex n_2 mit $\chi^{(3)}$ über die Beziehung

$$n_2 = \frac{3}{4n_0^2\epsilon_0 c} \text{Re}(\chi^{(3)}) \quad (2.22)$$

verknüpft. In dieser Gleichung wurde eine Frequenzabhängigkeit (Dispersion) von n_2 bzw. $\chi^{(3)}$ vernachlässigt, was für viele Materialien eine gültige Näherung ist. Bei einem $\chi^{(3)}$ -Prozeß erzeugen drei Wellen durch SFG bzw. DFG eine vierte Welle, weshalb man auch von Vierwellenmischen spricht. Betrachtet man einen fs-Laser mit einer bandbreitenbegrenzten Pulsdauer von 25 fs und einer Zentralwellenlänge von 800 nm, so ist seine Frequenzbreite nach Gleichung 2.3 etwa 40 THz und damit noch klein im Vergleich zu seiner Zentralfrequenz von 375 THz, d. h. in erster Näherung kann die Dispersion vernachlässigt werden. Phasenanpassung kann dadurch erreicht werden, daß man die Frequenz zweier Kammoden des Frequenzkamms durch SFG addiert und die Frequenz einer dritten Mode durch DFG von der Summenfrequenz abzieht. Die Frequenz der neu erzeugten vierten Welle liegt dann in der Nähe des ursprünglichen Frequenzkamms (siehe Abbildung 2.5). Da für diesen Bereich die Dispersion in erster Näherung vernachlässigt werden kann, ist die Phasenanpassungsbedingung erfüllt und die vierte Welle wird mit nicht verschwindender Effizienz gebildet. Je weiter die Frequenz der neuen Mode vom ursprünglichen Frequenzkamm entfernt ist, um so schlechter ist die Phasenanpassung erfüllt und um so kleiner ist die Intensität der neuen Mode. Für die Frequenzen der neu erzeugten Moden gilt

$$\omega_{fwm} = (\omega_{ce} + n_1 \omega_r) + (\omega_{ce} + n_2 \omega_r) - (\omega_{ce} + n_3 \omega_r) = \omega_{ce} + (n_1 + n_2 - n_3) \omega_r, \quad (2.23)$$

d. h. die Frequenz liegt auf dem Gitter, das durch den Originalkamm vorgegebenen ist (siehe Abbildung 2.5). Auf diese Weise wird der Originalkamm unter Beibehaltung der Kammstruktur um neue Moden erweitert.

²⁵Mit verstärkten ps-Lasern können bei einem einfachen Durchgang durch den Kristall SHG-Konversionseffizienzen von 80% erreicht werden. Im kontinuierlichen Fall ist dafür ein Überhöhungsresonator notwendig.

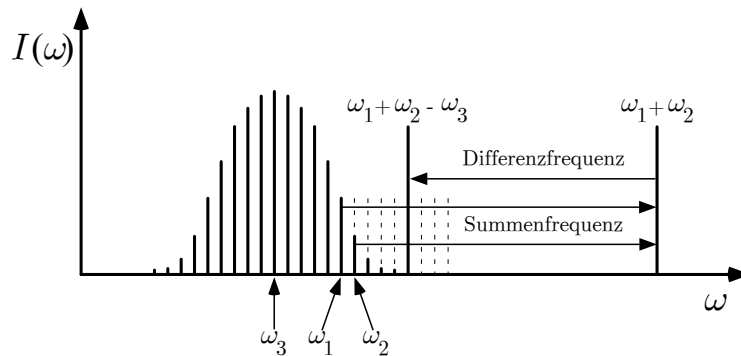


Abbildung 2.5: Erzeugung neuer Kammoden durch Vierwellenmischen. Addition und Subtraktion dreier Moden aus dem Originalkamm erzeugt neue Moden, die auf dem regelmäßigen Gitter des Originalkamms liegen.

Eine Erhöhung der Pulsintensität verstärkt die Selbstphasenmodulation bzw. das Vierwellenmischen und steigert dadurch die Breite des Kammspektrums. Die Pulsintensität kann z. B. erhöht werden, indem man den Strahl eines fs-Lasers in eine Einmodenglasfaser einkoppelt [Rei00a]. Durch die Verwendung von fs-Lasern kurzer Pulsdauer und niedriger Pulswiederholrate, d. h. hoher Pulsleistung, ist es seit kurzem möglich, das Spektrum eines fs-Lasers mit einer Einmodenglasfaser auf eine Oktave zu verbreitern [Dom04].²⁶ Eine niedrige Pulswiederholrate bringt aber für optische Frequenzmessungen zwei Nachteile mit sich: zum einen ist die Leistung des Lasers auf viele Moden verteilt, was das Signal-zu-Rausch-Verhältnis von Schwebungssignalen begrenzt, und zum anderen ist die Bestimmung der Modenzahl n schwieriger als bei Lasern einer hohen Pulswiederholrate (siehe Seite 31 ff). In diesem Fall wäre es also günstiger, nicht die Pulsleistung eines Lasers durch Erniebrigen der Pulswiederholrate zu erhöhen, sondern die Effektivität der Selbstphasenmodulation zu steigern. Dem ist aber bei Einmodenglasfasern durch die Gruppengeschwindigkeitsdispersion (GVD²⁷) $\partial^2\omega/\partial k^2$ eine Grenze gesetzt. Die Lösung dieses Problems kam durch ein neues Design von Glasfasern [Kni96, Ran00, Wad02], das es möglich gemacht hat, die GVD in einem Wellenlängenbereich um 800 nm herum zu kompensieren, was die Zentralwellenlänge der häufig verwendeten Ti:Saphir fs-Laser ist. Diese Fasern bestehen aus einem Kern aus Quarzglas, der einen Durchmesser von etwa $1\ \mu\text{m}$ hat und von einer Hülle hohler Kanäle umgeben ist, die mit Luft gefüllt sind. Abbildung 2.6 zeigt eine elektronenmikroskopische Aufnahme des Kernbereichs einer solchen mikrostrukturierten Glasfaser, die auch photonische Kristallfaser (PCF²⁸) genannt wird.²⁹ Durch den großen Brechungsindexunterschied von Glas zu Luft kann das Licht sehr effizient in der kleinen Kernregion geführt werden, wobei ein Teil des Lichtes als

²⁶In Referenz [Dom04] wurde ein Laser mit einer Pulsdauer von 10 fs und einer Pulswiederholrate von $\omega_r = 2\pi \cdot 24\ \text{MHz}$ verwendet.

²⁷engl. **Group Velocity Dispersion**

²⁸engl. **Photonic Crystal Fiber**

²⁹Die mikrostrukturierten Glasfasern, die bei unseren Experimenten zum Einsatz kamen, wurden uns freundlicherweise von der Arbeitsgruppe um Prof. P. St. J. Russel (University of Bath, Großbritannien) zur Verfügung gestellt.

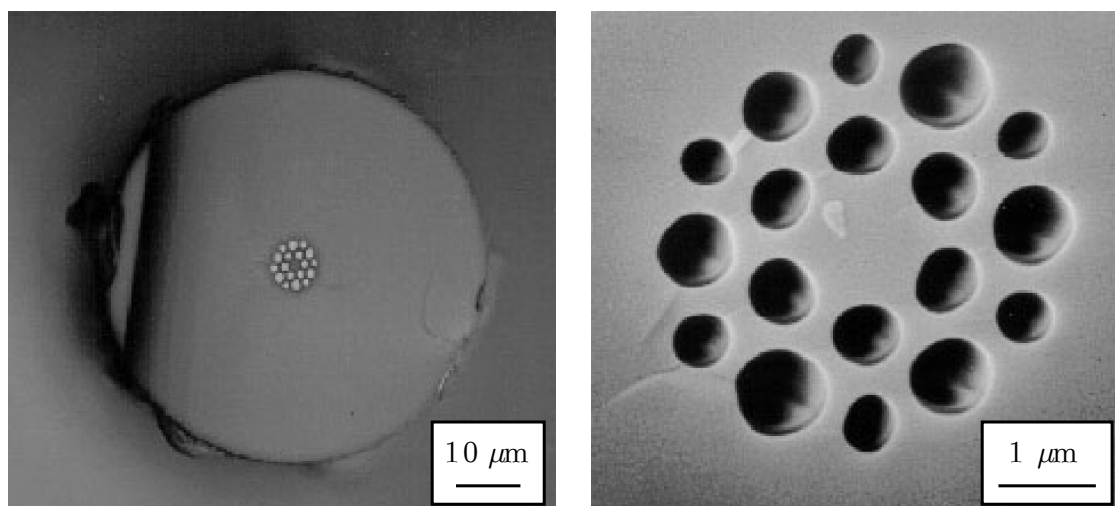


Abbildung 2.6: Schnitt durch den Kernbereich einer mikrostrukturierten Glasfaser, deren Gruppengeschwindigkeitsdispersion bei 800 nm verschwindet. Dadurch zerfließen die Pulse eines Ti:Saphir-Lasers langsamer, so daß die Selbstphasenmodulation in der Glasfaser ausreicht, einen Frequenzkamm auf eine volle Oktave zu verbreitern. Damit ist eine einfache Bestimmung von ω_{ce} möglich. Mit freundlicher Genehmigung von J. Knight (University of Bath, Großbritannien).

evaneszente Welle in der Kanalregion propagiert. Durch die Wahl des Kerndurchmessers, des Luftkanaldurchmessers und der Anordnung der Kanäle ist es möglich, die GVD in gewissen Grenzen einzustellen. Das Verschwinden der GVD bei 800 nm bewirkt, daß die Pulse eines Ti:Saphir-Lasers langsamer zerfließen und die SPM dadurch verstärkt wird. Im Frequenzraumbild bedeutet das, daß die Phasenanpassungsbedingung für FWM über einen größeren Frequenzbereich erfüllt werden kann. Bei theoretischen Untersuchungen hat sich jedoch gezeigt, daß SPM/FWM nicht der einzige Prozeß ist, der zu einer Verbreiterung des Spektrums führt, sondern daß die Aufspaltung von Solitonen höherer Ordnung ebenfalls dazu beiträgt [Hus01, Her02]. In vielen Fällen ist die Solitonenaufspaltung sogar der dominierende Prozeß. Sie äußert sich in einer starken Strukturierung des verbreiterten Spektrums (siehe Abbildung 2.7). Aufgrund der besonderen Dispersionseigenschaften der PCF kann das Spektrum eines fs-Lasers durch Solitonenaufspaltung und SPM/FWM auf über eine Oktave verbreitert werden, was die Bestimmung von ω_{ce} nach Abbildung 2.4 ermöglicht. Eine andere vorteilhafte Eigenschaft der PCF ist, daß sie über den gesamten Bereich einer Oktave nur die Propagation der TEM_{00} Mode zuläßt. In Abbildung 2.7 ist ein typisches Spektrum vor und nach einer PCF dargestellt. Die Form des verbreiterten Spektrums hängt dabei in starkem Maße von der Polarisation des fs-Lasers ab, was wahrscheinlich seine Ursache in der Anordnung der Luftkanäle hat, die den Kern umgeben. Ein Spektrum von einer Oktave läßt sich auch mit einer sogenannten getaperten³⁰ Monomodenfaser erreichen. Das ist eine Glasfaser, die nach Erhitzen in die Länge gezogen wurde, so daß sich ein Kern mit einem Durchmesser von wenigen μm ergibt. Interessanter

³⁰taper engl. sich verjüngen

Weise zeigt auch das Spektrum einer getaperten Glasfaser eine starke Abhängigkeit von der Polarisation des fs-Lasers.

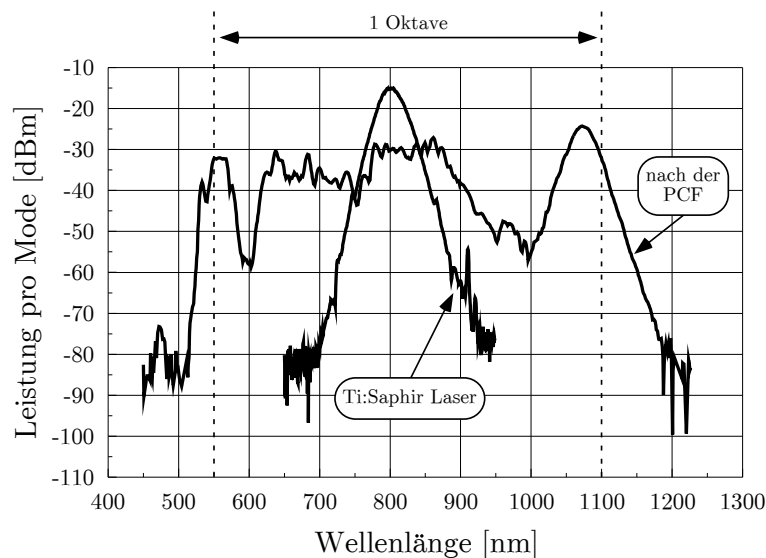


Abbildung 2.7: *Spektrum eines Ti:Saphir fs-Lasers vor und nach der Verbreiterung durch eine mikrostrukturierte photonische Kristallfaser (PCF). Die einzelnen Moden der Frequenzkämmen sind nicht aufgelöst. Die Pulswiederholrate betrug $\omega_r = 2\pi \cdot 800$ MHz. $\text{dBm} = \log(P/1 \text{ mW})$*

Experimente haben gezeigt, daß die spektrale Verbreiterung eines fs-Lasers mit einer PCF nicht in *jedem* Fall die Kammstruktur des Lasers erhält. Speziell mit einem Mira 900 System der Firma Coherent konnten bei einer spektralen Verbreiterung auf über eine Oktave keine Kammoden mehr detektiert werden [Hol01]. Das bedeutet, daß in der PCF auf inkohärente Weise neue Frequenzen erzeugt werden, die nicht auf dem regelmäßigen Frequenzgitter des fs-Lasers liegen und damit den Frequenzkamm „zerstören“. Dieses sogenannte Faserrauschen nimmt mit steigender Intensität der Pulse zu und wird bei konstanter Intensität und kürzeren Pulsen schwächer. Die Ursache für das verstärkte Rauschen konnte noch nicht abschließend geklärt werden; als mögliche Kandidaten werden jedoch Raman-Prozesse [Coe02] und die sogenannte Modulations-Instabilität [Tai86, Nak98] diskutiert.

Die spektrale Verbreiterung von Ti:Saphir-Lasern durch SPM/FWM auf über eine Oktave war bereits vor der Erfindung der PCF möglich. Weil aber die verwendeten Materialien wie z. B. Saphir nicht effizient genug waren, mußten die Pulse extern verstärkt werden. Da die mittlere Ausgangsleistung eines Ti:Saphir-Lasers bzw. -Verstärkers im Allgemeinen etwa 1 W beträgt, kann eine Verstärkung nur dadurch erreicht werden, daß man diese Leistung auf weniger Pulse verteilt, was zu einer Verringerung der Pulswiederholrate ω_r führt.³¹ Der geringe Modenabstand des daraus folgenden Frequenzkamms macht diesen für

³¹Das RegA-Verstärker-System der Firma Coherent hat eine typische Pulswiederholrate von $\omega_r \approx 2\pi \cdot 100$ kHz

optische Frequenzmessungen ungeeignet. Eine Möglichkeit, die Pulsleistung zu verstärken *ohne* die Pulswiederholrate zu verringern, besteht darin, die Pulse eines fs-Lasers in einem gesonderten längenangepaßten und dispersionskompensierten Resonator hoher Güte zu speichern und damit die Pulsleistung zu überhöhen.³² Dank der PCF ist diese Technik zur spektralen Verbreiterung aber nicht notwendig, sie könnte allerdings der Schlüssel zur Erzeugung hoher Harmonischer bei einer gleichzeitig hohen Pulswiederholrate sein, was die Anwendung der Frequenzkammtechnik für optische Frequenzmessungen bzw. Spektroskopie jenseits des sichtbaren Spektrums ermöglichen würde (siehe Abschnitt 6.2.2 auf Seite 124).

Ergänzend sei bemerkt, daß man ω_{ce} auch mit Frequenzkämmen messen kann, deren spektrale Breite kleiner als eine Oktave ist, was aber mit einem größeren experimentellen Aufwand verbunden ist. Wenn das Spektrum den a/b -ten Teil einer Oktave überdeckt, wobei $b > a$ sein soll, kann ω_{ce} analog zu Gleichung 2.17 bestimmt werden, indem man die b -te Harmonische des langwelligen Endes mit der a -ten Harmonischen des kurzwelligen Endes zur Schwebung bringt. Je schmaler der Kamm ist, um so mehr nichtlineare Prozesse müssen dabei verwendet werden [Tel99, Rei00a, Mor01, Ram02]. Eine andere Möglichkeit, ω_{ce} eines nicht oktavenbreiten Frequenzkamms zu bestimmen, besteht in der Verwendung von Intervallteilerstufen. Mit dieser Technik konnte 1999 zum ersten Mal die 1S-2S Frequenz relativ zu einer Cs-Uhr gemessen werden.

Will man ω_{ce} mit Hilfe eines Phasenregelkreises phasengenau mit einer Atomuhr verbinden, so ist es notwendig, aber nicht ausreichend, ω_{ce} messen zu können. Zusätzlich dazu muß man den Wert von ω_{ce} gezielt verändern können. Bei Versuchen hat sich gezeigt, daß ω_{ce} von der Leistung des Pumplasers abhängt, welche die maximale Pulsintensität im Laserresonator bestimmt.³³ Um diesen Effekt zu verstehen, soll im folgenden die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen Träger und Einhüllender beim Durchgang durch ein dispersives Medium der Länge l etwas näher untersucht werden. Nach Gleichung 2.14 gilt für die Phasenverschiebung

$$\Delta\varphi = \omega_{ce}T. \quad (2.24)$$

Im vereinfachten Bild eines Pulses mit konstanter Trägerfrequenz entsteht die Phasenverschiebung durch Unterschiede in der Gruppengeschwindigkeit v_g der Pulseinhüllenden und der Phasengeschwindigkeit v_p der Trägerwelle. Dieser Geschwindigkeitsunterschied führt zu einem Zeitunterschied Δt , der zur Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ proportional ist (siehe Abbildung 2.2 auf Seite 16):

$$\Delta\varphi = \omega_c\Delta t = \omega_c l \left(\frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_p} \right). \quad (2.25)$$

³²Die Erhöhung der Pulsleistung im fs-Laser selbst (z. B. durch Ersetzen des Auskoppelspiegels mit einem hochreflektierenden Spiegel) ist nur begrenzt möglich, da der Laserbetrieb bei zu hoher Pulsleistung instabil wird.

³³Zu einem gewissen Grad beeinflusst die Pumpleistung auch die Länge der Pulse.

Die Terme $1/v_g$ bzw. $1/v_p$ sind mit Hilfe des Brechungsindex n gegeben durch:

$$k = \frac{\omega n}{c} \quad \text{mit} \quad n(\omega, I) = n_0(\omega) + n_2 I \quad \text{und} \quad I = I(t) \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{v_g(\omega_c, I)} = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_c} = \frac{1}{c} \left\{ n_0(\omega_c) + n_2 I(t) + \omega_c \left. \frac{\partial n_0(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_c} + \omega_c \left. \frac{\partial [n_2 I(t)]}{\partial \omega} \right|_{\omega_c} \right\} \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{v_p(\omega_c, I)} = \left. \frac{k}{\omega} \right|_{\omega_c} = \frac{1}{c} [n_0(\omega_c) + n_2 I(t)]. \quad (2.28)$$

Dabei tritt das Problem auf, daß im letzten Term von Gleichung 2.27 die Frequenzableitung der zeitlich veränderlichen Größe $n_2 I(t)$ berechnet werden muß, was eine problematische Vermischung aus Frequenz- und Zeitraumbetrachtung darstellt. Das bedeutet, daß die Gleichungen 2.25 bis 2.28 die Verhältnisse in einem Kerrlinsen-modengekoppelten Laser nicht korrekt beschreiben. Um dieses Problem zu lösen, gehen die Autoren von Referenz [Hau01] von der nichtlinearen optischen Schrödingergleichung (NLSG) aus, mit deren Hilfe die Entstehung eines Solitons im Laserresonator beschrieben werden kann. Eine Analyse der Lösung der NLSG zeigt, daß in Gleichung 2.25 noch ein Term eingefügt werden muß, der explizit von der maximalen Pulsintensität I_p abhängt. Zur Berechnung von v_g bzw. v_p muß dabei der intensitätsunabhängige Teil des Brechungsindex $n_0(\omega)$ verwendet werden:

$$\Delta\varphi(I_p) = \omega_c l \left(\left. \frac{1}{v_g(\omega_c)} \right|_{I=0} - \left. \frac{1}{v_p(\omega_c)} \right|_{I=0} + B I_p \right) \quad (2.29)$$

$$\Delta\varphi(I_p) = \frac{\omega_c^2 l}{c} \left(\left. \frac{\partial n_0(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_c} + \frac{cB}{\omega_c} I_p \right). \quad (2.30)$$

B ist ein Koeffizient, der von den experimentellen Bedingungen abhängt. Damit ist die Abhängigkeit von ω_{ce} von der Pumpleistung nicht nur experimentell gezeigt, sondern auch theoretisch nachvollziehbar. In Referenz [Hau01] wurde allerdings nur der Einfluß des Kerreffekts auf den Phasenschlupf $\Delta\varphi$ untersucht. Andere Vorgänge, die ebenfalls eine Intensitätsabhängigkeit von $\Delta\varphi$ bewirken, sind die Dispersion von n_2 und der Ramaneffekt. Welcher der genannten Effekte dabei überwiegt, hängt von den experimentellen Bedingungen insbesondere der Pumpleistung ab, d. h. B ist selbst eine Funktion von I_p und kann sogar sein Vorzeichen wechseln, was auch experimentell beobachtet wird.

Eine andere Möglichkeit, $\Delta\varphi$ zu beeinflussen, besteht nach Gleichung 2.30 darin, die Menge des dispersiven Materials im Resonator (l) zu ändern, was mit Hilfe einer dünnen keilförmigen Glasplatte, die im Brewsterwinkel in den Strahlengang des Lasers eingefügt ist, auf kontinuierliche Weise geschehen kann (siehe Abbildung 2.8 auf Seite 30). Da die Resonatormode üblicherweise nicht in der Glasplatte fokussiert ist, kann der intensitätsabhängige Term in Gleichung 2.30 vernachlässigt werden. Mit Hilfe der Sellmeier-Gleichung des entsprechenden Materials [Dmi97] läßt sich dann $\left. \frac{\partial n_0(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_c}$ und damit $\Delta\varphi$ berechnen. Für einen 2 mm langen Ti:Saphir Kristall ergibt sich z. B. $\Delta\varphi \approx 54 \cdot 2\pi$ und

für $50\ \mu\text{m}$ Glas erhält man etwa eine Phasenverschiebung von 2π , wobei für Materialien mit normaler Dispersion wie Saphir oder Glas die Trägerwelle schneller läuft als die Einhüllende. Dabei geht $\Delta\varphi$, wie bereits erwähnt, nur modulo 2π in ω_{ce} ein.

Dadurch, daß man ω_{ce} messen und seinen Wert gezielt verändern kann, sind alle Bedingungen erfüllt, die nötig sind, um ω_{ce} über eine Phasenregelung mit einer Cs-Atomuhr zu verbinden. Die Feineinstellung und elektronische Regelung der Pumpleistung kann mit einem elektrooptischen Modulator (EOM) und einem polarisierenden Strahlteiler oder einem akustooptischen Modulator (AOM) bewerkstelligt werden. Eine Änderung der Pumpleistung bewirkt durch den nichtlinearen Brechungsindex $n_2 I$ auch eine geringfügige Änderung der effektiven Resonatorlänge L , d. h. die Regelmechanismen für ω_{ce} und ω_r sind nicht völlig unabhängig voneinander. Die Pumpleistung kann jedoch nicht über einen großen Bereich verändert werden, weil ansonsten der Pulsbetrieb des Lasers instabil wird. Dadurch läßt sich ω_{ce} nicht über den gesamten Bereich von $0 < \omega_{ce} < \omega_r$ verstellen. Für eine grobe Einstellung von ω_{ce} eignet sich dagegen die bereits erwähnte dünne keilförmige Glasplatte. Indem der Keil mehr oder weniger weit in den Laserstrahl geschoben wird, kann ω_{ce} über den gesamten Bereich eingestellt werden. Wegen der vergleichsweise großen Masse von Glaskeil und Verschiebetisch und der damit verbundenen Trägheit des Systems eignet sich diese Technik jedoch nicht zur elektronischen Phasenregelung von ω_{ce} . Die zusätzliche Dispersion, die durch den Glaskeil verursacht wird, muß bei der Kompensation der GVD mit berücksichtigt werden, d. h. im Falle eines prismenfreien Ringlasers sind eventuell zusätzliche Reflexionen an gechirpten Spiegeln notwendig. Da ein Verschieben des Keils auch die effektive Resonatorlänge L ändert, müssen ω_{ce} und ω_r durch wiederholte Justage der beiden Parameter eingestellt werden. Ist der Resonator eines fs-Lasers linear aufgebaut und besitzt ein Prismenpaar zur Kompensation der GVD, so kann der Wert von ω_{ce} auch durch Kippen des Endspiegels im dispersiven Arm des Resonators geändert werden [Rei99].

2.4 Experimenteller Aufbau und Messung optischer Absolutfrequenzen

Da die erwähnten Rauschprozesse in der PCF mit steigender Intensität der Pulse stärker werden, wurde für das folgende ein fs-Laser der Firma GigaOptics verwendet, der mit einer Pulswiederholrate von bis zu 1 GHz betrieben werden kann.³⁴ Die hohe Pulswiederholrate bzw. die daraus folgende niedrige Pulsintensität in der PCF hat für optische Frequenzmessungen drei Vorteile: die Rauschprozesse in der PCF sind schwach und zerstören nicht die Kammstruktur, die Leistung pro Mode ist groß, was für das SNR von Schwebungssignalen günstig ist, und der Modenabstand ist groß, was die Bestimmung der Modennummer n erleichtert. Zusätzlich dazu hat der GigaJet-Laser einen Ringresonator, der ihn unempfindlich auf Rückkopplungen macht. In Abbildung 2.8 ist der Aufbau des Lasers dargestellt. Der Resonator, in den keine wellenlängenselektiven Elemente eingebaut sind, ist ein doppelt gefalteter Ring, dessen Spiegel bis auf den Auskoppler gechirpt sind. Der

³⁴Modell GigaJet; der Laser wurde in einigen Punkten verändert.

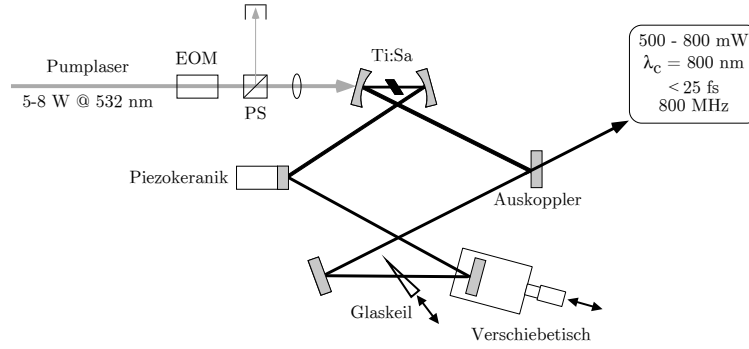


Abbildung 2.8: Skizze des fs-Ringlasers, der in dieser Arbeit verwendet wurde. Der Aufbau basiert auf dem Laser GigaJet der Firma GigaOptics [Bar99], wurde aber in einigen Punkten verändert. Alle Spiegel bis auf den Auskoppler sind geschirpte Spiegel. Die Kombination eines elektrooptischen Modulators (EOM) und eines polarisierenden Strahlteilers (PS) erlaubt die Einstellung der Pumpleistung und damit die Regelung von ω_{ce} . Der Glaskeil dient zur Grobeinstellung von ω_{ce} . Die Länge des Resonators und damit ω_r wird über den manuellen Verschiebetisch und die Piezokeramik eingestellt.

Ti:Saphir-Kristall, der hoch dotiert ist und deshalb nur eine Dicke von 2,2 mm hat, wird bei 532 nm mit 5-8 W eines frequenzverdoppelten Nd:Vanadat-Lasers (Coherent, Modell Verdi V10) gepumpt, was in einer mittleren Ausgangsleistung von 500-800 mW resultiert. Das Spektrum des Lasers ist etwa 30 nm (FWHM) breit und um 800 nm herum zentriert (siehe Abbildung 2.7 auf Seite 26). Die spezifizierte Pulslänge ist kleiner als 25 fs. Die Resonatorlänge wurde so gewählt, daß $\omega_r = 2\pi \cdot 800$ MHz ist. Um ω_r grob verstellen zu können, ist ein Spiegelhalter auf einem manuellen Verschiebetisch montiert. Die Feineinstellung und elektronische Regelung von ω_r geschieht dann mit einem Spiegel, der auf eine Piezokeramik aufgeklebt ist. Um ω_{ce} grob wählen zu können, ist ein dünner Keil aus Quarzglas in den Resonator eingefügt. Ein EOM mit Polstrahlteiler, der die Pumpleistung regelt, ermöglicht dann eine phasengenaue Kontrolle von ω_{ce} .

In Abbildung 2.9 ist ein typischer Aufbau zur Messung optischer Frequenzen mit einem fs-Laser dargestellt. Der Laser, dessen Polarisation mit einer Halbwellenplatte eingestellt werden kann, wird in eine mikrostrukturierte PCF eingekoppelt, durch die das Spektrum des Frequenzkamms auf über eine Oktave verbreitert wird. Ein Teil des Lichts, wird zur Messung der Pulswiederholfrequenz ω_r auf eine Photodiode geleitet. Ein Phasenregelkreis, dessen Funktionieren von einem Kontrollzähler überprüft wird, regelt die Resonatorlänge L über eine Piezokeramik so, daß ω_r und die Frequenz des Lokaloszillators ω_{LO_r} in Phase schwingen. Danach spaltet ein dichroitischer Strahlteiler den langwelligen Teil des Kammspektrums („rot“) vom kurzwelligen („blau“) ab. Der rote Anteil wird in einem nichtlinearen Kristall frequenzverdoppelt und mit einem Polstrahlteiler wieder mit dem blauen Anteil überlagert. Eine optische Verzögerungsstrecke gleicht die beiden Armlängen des sogenannten nichtlinearen Interferometers einander an. Mit einer Halbwellenplatte gefolgt von einem Polstrahlteiler werden die Polarisationen des blauen bzw. verdoppelten roten Anteils auf eine gemeinsame Achse projiziert und die Intensitäten der beiden Strah-

len einander angeglichen. Ein optischer Bandpaßfilter, der z. B. mit einem Gitter realisiert werden kann, filtert den spektralen Ausschnitt heraus, der beiden Strahlen gemeinsam ist. Anschließend wird mit einer Photodiode ω_{ce} gemessen (siehe Abbildung 2.4). Ein Phasenregelkreis, der die Pumpleistung regelt, stabilisiert ω_{ce} phasengenau auf die Lokaloszillatorfrequenz $\omega_{LO_{ce}}$. Die Wahl von $\omega_{LO_{ce}}$ richtet sich in der Praxis nach der Verfügbarkeit von Radiofrequenzfiltern passender Breite für die Filterung von ω_{ce} . Der auf diese Weise stabilisierte Frequenzkamm wird dann mit einem weiteren Polstrahlteiler mit dem Licht der unbekanntem Frequenz ω_{opt} überlagert. Mit einer dritten Photodiode wird schließlich die Schwebungsfrequenz ω_b gemessen, die sich zwischen ω_{opt} und der benachbarten Kammode ω_n ausbildet. Die Frequenz ω_{opt} des unbekanntem Lichts ergibt sich damit zu:

$$\omega_{opt} = n\omega_r \pm \omega_{ce} \pm \omega_b \quad (2.31)$$

Zur Bestimmung der Vorzeichen von ω_{ce} und ω_b sowie zur Festlegung von n müssen noch weitere Messungen unternommen werden. Zuerst betrachten wir das Vorzeichen von ω_b . Zu Anfang ist nicht klar, ob die unbekanntem Frequenz ω_{opt} kleiner oder größer ist als die benachbarte Kammode ω_n (siehe Abbildung 2.10). Um das herauszufinden, vergrößert man ω_{LO_r} um einen kleinen Betrag und beobachtet, ob ω_b größer oder kleiner wird. Wird ω_b beispielsweise kleiner, dann ist, wie in Abbildung 2.10 dargestellt, $\omega_{opt} > \omega_n$ und es gilt das + Zeichen. Um das Vorzeichen von ω_{ce} zu klären, betrachten wir das Frequenzspektrum des Photodiodensignals, das in Abbildung 2.11 skizziert ist. Stabilisiert man die Schwebung mit der kleinsten Frequenz auf den Lokaloszillator $\omega_{LO_{ce}}$ so sieht man, daß die Zuordnung nicht eindeutig ist. Diese Zweideutigkeit kann beseitigt werden, indem man $\omega_{LO_{ce}}$ in seinem Wert vergrößert und das Verhalten von ω_b beobachtet. Wird ω_b kleiner und ist $\omega_{opt} > \omega_n$, so hat man offensichtlich ω_{ce} stabilisiert und nicht $\omega_r - \omega_{ce}$ (siehe Abbildung 2.10), d. h. man muß in diesem Fall das + Zeichen wählen. Nachdem man auf diese Weise die Vorzeichen von ω_{ce} und ω_b bestimmt hat, muß man jetzt nur noch den Wert der ganzen Zahl n ermitteln. Dazu mißt man die ungefähre Frequenz von ω_{opt} mit einem interferometrischen Wellenlängenmeßgerät³⁵. Das Ergebnis der Messung ω'_{opt} wird in Gleichung 2.31 eingesetzt und diese nach n aufgelöst. Ist die Meßgenauigkeit von ω'_{opt} erheblich kleiner als ω_r , dann liegt die so berechnete Modenzahl sehr dicht bei dem gesuchten n .³⁶ Will man bei der Bestimmung von n mehr Sicherheit, so kann man eine zweite Messung mit einer unterschiedlichen Pulswiederholrate ω_r durchführen. Dadurch hat man nach Gleichung 2.31 zwei Ausdrücke für ω_{opt} . Bestimmt man nun alle Paare von Modennummern, die im Rahmen der Meßgenauigkeit die gleiche Frequenz ω_{opt} ergeben würden, so wird nur ein Paar mit der Messung des Wavemeters verträglich sein. Das sei an folgendem Beispiel erläutert. Angenommen man hat zwei Frequenzkämme mit unterschiedlichen Pulswiederholraten von 800 bzw. 801 MHz, bei denen es ein Modenpaar mit der gleichen Frequenz gibt. Da beide Zahlen keinen gemeinsamen Teiler haben, ist das nächste identische Modenpaar vom ersten $800 \cdot 801 \text{ MHz} = 640,8 \text{ GHz}$ entfernt. Diese Zweideutigkeit läßt sich selbst mit einem einfachen Wavemeter beseitigen.

Will man die eben beschriebene Methode für optische Frequenzmessungen höchster Ge-

³⁵engl. wavemeter

³⁶Da in unserem Fall $\omega_r \approx 2\pi \cdot 800 \text{ MHz}$ ist und kommerzielle Wavemeter eine Genauigkeit von 30 MHz erreichen, ist die Bestimmung von n sehr sicher.

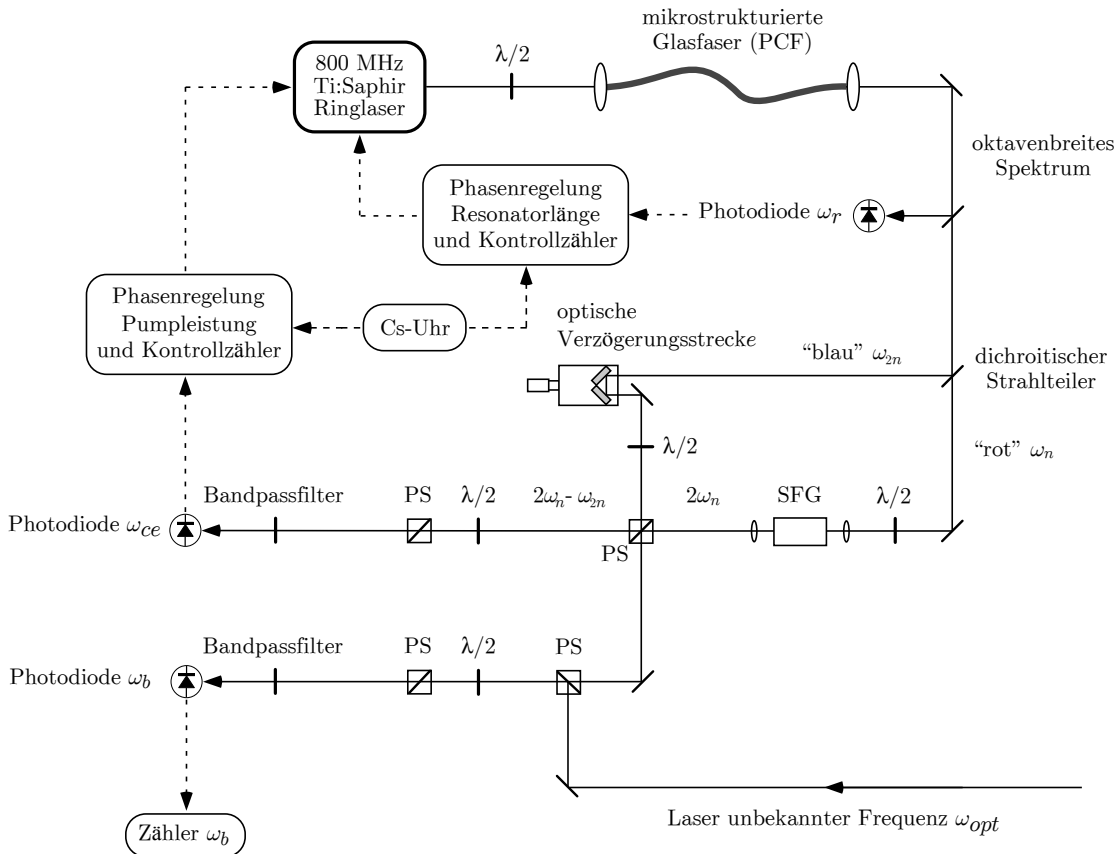


Abbildung 2.9: Typischer Aufbau zur Messung optischer Frequenzen mit einem fs-Laser. Nach der Kammverbreiterung in einer PCF wird ein Teil des Lichtes zur Messung von ω_r auf eine Photodiode gelenkt. Ein dichroitischer Spiegel spaltet den langwelligeren Anteil des Spektrums ab (ω_n , „rot“), der in einem nichtlinearen Kristall frequenzverdoppelt wird. Mit dem darauf folgenden Polstrahlteiler PS wird das frequenzverdoppelte langwellige Spektrum ($2\omega_n$) mit dem kurzwelligen Anteil (ω_{2n} , „blau“) überlagert und auf eine Photodiode geleitet, mit der ω_{ce} gemessen wird (siehe Abbildung 2.4 auf Seite 20). Die Frequenzen ω_r und ω_{ce} werden durch elektronische Regelkreise, die mit Kontrollzählern überprüft werden, phasengenau mit einer Cs-Atomuhr verbunden. Mit einer dritten Photodiode wird dann die Schwebungsfrequenz ω_b des Lichts der unbekanntes Frequenz ω_{opt} mit der benachbarten Mode des stabilisierten Frequenzkamms gemessen. $\lambda/2$ bezeichnet eine Halbwellenplatte. Optische Wege sind durchgezogen- und elektronische Wege unterbrochen gezeichnet.

nauigkeit einsetzen, so ist es notwendig, die Meßmethode auf mögliche in ihr liegende Fehler zu untersuchen. In Referenz [Ude99a] konnte die Regelmäßigkeit, d. h. die Konstanz des Modenabstands über das gesamte Spektrum, eines unverbreiterten fs-Frequenzkamms mit einer Genauigkeit von $3 \cdot 10^{-17}$ bestätigt werden. Außerdem wurde gezeigt, daß der Modenabstand mit einer Genauigkeit von $6 \cdot 10^{-16}$ der Pulswiederholrate entspricht. Durch die starke Verbreiterung des Frequenzkamms in einer mikrostrukturierten PCF könnte es aber sein, daß kleine Abweichungen von der regelmäßigen Kammstruktur auftreten. Solche Effekte können untersucht werden, indem man ω_r bzw. ω_{ce} von je zwei Frequenzkämmen auf

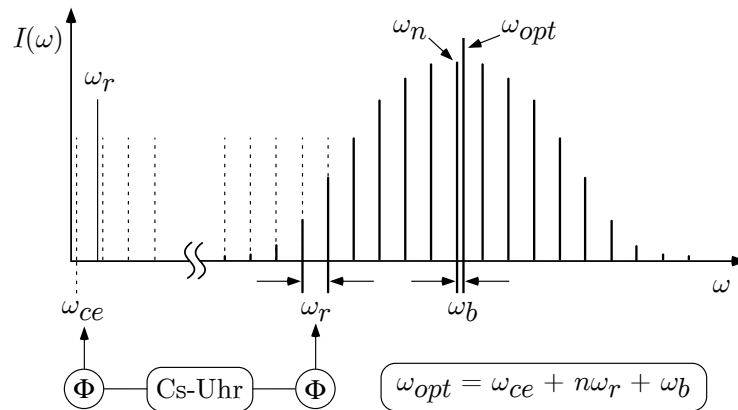


Abbildung 2.10: Messung einer optischen Frequenz ω_{opt} mit einem stabilisierten Frequenzkamm. Φ bezeichnet einen Phasenregelkreis.

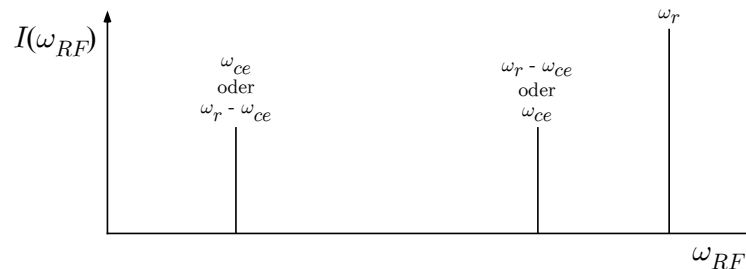


Abbildung 2.11: Radiofrequenz-Spektrum am Ausgang der Photodiode, mit der ω_{ce} gemessen wird. Zusätzlich zu ω_{ce} sieht man auch noch das Mischprodukt $\omega_r - \omega_{ce}$.

die gleiche Radiofrequenzreferenz³⁷ stabilisiert und untersucht, in wieweit sich die beiden optischen Frequenzkämme voneinander unterscheiden. Im Experiment konnte die Übereinstimmung zweier solcher Frequenzkämme mit einer Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-16}$ bestätigt werden [Hol00]. In einem anderen Experiment, bei dem zwei oktavenbreite Frequenzkämme auf eine gemeinsame *optische* Referenz stabilisiert wurden, konnte sogar eine Übereinstimmung von $3 \cdot 10^{-17}$ nachgewiesen werden [Did02]. Da die besten Cs-Uhren der Welt gegenwärtig eine relative Genauigkeit von etwas besser als $1 \cdot 10^{-15}$ aufweisen [Mar03], begrenzen die fs-Frequenzkämme nicht die Genauigkeit optischer Frequenzmessungen. Es ist interessant zu sehen, daß trotz intensiver Suche noch keine systematischen Effekte der Frequenzkammtechnik gefunden wurden.

In Tabelle 2.1 ist eine Auswahl optischer Frequenzen angegeben, die weltweit mit Hilfe der fs-Frequenzkammtechnik gemessen wurden. Bei den Messungen an Sr^+ , Hg^+ , Yb^+ , Ca und H wurde ein fs-Frequenzkamm nach Abbildung 2.4 auf eine Cs-Uhr stabilisiert. Da bei den Messungen an In^+ und I_2 noch kein oktavenbreiter Frequenzkamm zur Verfügung stand, wurde ein methanstabilmierter Helium-Neon-Laser bei $3,4 \mu\text{m}$ als sekundärer opti-

³⁷Es ist nicht notwendig, eine Cs-Uhr als Radiofrequenzreferenz zu benutzen, da die Eigenschaften der Referenz beim Vergleich der beiden Kämme untereinander nicht in Erscheinung treten (common mode rejection).

System	Übergang	Frequenz [Hz]	relative Genauigkeit	Institution Referenz
$^{88}\text{Sr}^+$	$5s\ ^2S_{1/2} \rightarrow 4d\ ^2D_{5/2}$	444 779 044 095 484, 6	$3, 4 \cdot 10^{-15}$	1, [Mar04]
$^{199}\text{Hg}^+$	$5d^{10}6s\ ^2S_{1/2} \rightarrow 5d^96s^2\ ^2D_{5/2}$	1 064 721 609 899 143	$1.0 \cdot 10^{-14}$	2, [Ude01]
$^{171}\text{Yb}^+$	$6s\ ^2S_{1/2} \rightarrow 5d\ ^2D_{3/2}$	688 358 979 309 312	$1.0 \cdot 10^{-14}$	3, [Ste01]
^1H	$1s\ ^2S_{1/2} \rightarrow 2s\ ^2S_{1/2}$	2 466 061 413 187 074	$1.4 \cdot 10^{-14}$	4, [Fis04a]
^{40}Ca	$4s^2\ ^1S_0 \rightarrow 4s4p\ ^3P_1$	455 986 240 949 158	$5.7 \cdot 10^{-14}$	2, [Ude01]
$^{115}\text{In}^+$	$5s^2\ ^1S_0 \rightarrow 5s5p\ ^3P_0$	1 267 402 452 899 920	$1.8 \cdot 10^{-13}$	4, [Zan00]
$^{127}\text{I}_2$	R(56) 32 – 0 : a_{10}	563 260 223 507 800	$2.0 \cdot 10^{-12}$	4, [Nev01]

Tabelle 2.1: Auswahl einiger optischer Frequenzen, die weltweit mit der Frequenzkammtechnik gemessen wurden. 1 NPL, 2 NIST, 3 PTB, 4 MPQ.

schers Standard verwendet [Bag97].³⁸ Die jeweiligen Frequenzlücken zwischen der vierten Harmonischen des He-Ne-Lasers (ca. 850 nm) und den interessierenden Frequenzen wurden dabei mit Hilfe eines fs-Frequenzkamms überbrückt, der mit einer Einmodenglasfaser verbreitert wurde. Die Messungen an H, Ca und I_2 wurden an einem Ensemble von Teilchen durchgeführt, während bei Sr^+ , Hg^+ , Yb^+ und In^+ ein einzelnes gespeichertes und lasergekühltes Ion spektroskopiert wurde. Da solche Systeme aufgrund ihrer geringen Systematiken Genauigkeiten im Bereich von 10^{-18} erwarten lassen, werden zukünftige absolute Frequenzmessungen wahrscheinlich durch die Ungenauigkeit der Cs-Uhren begrenzt sein.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die Möglichkeit, optische Frequenzen sehr genau messen zu können, große Auswirkungen auf die Längenmessung bzw. die Realisierung eines Metermaßstabs hat. Seit der Definition der Vakuumlichtgeschwindigkeit im Jahr 1983 kann eine Wellenlängenmessung im Vakuum durch die Messung einer optischen Frequenz ersetzt werden. Mit der Frequenzkammtechnik können (Wellen)Längenmessungen daher auf *einfache* Weise auf die Zeiteinheit Sekunde zurückgeführt werden, wodurch die große Genauigkeit von Cs-Atomuhren im Prinzip auch für Längenmessungen nutzbar wird. Ein Metermaßstab kann mit Hilfe eines Interferometers hergestellt werden, das mit einem Laser genau bekannter Frequenz betrieben wird. Aufgrund von Temperaturänderungen bzw. elastischen Verformungen des Maßstabs wird es aber kaum möglich sein, makroskopische Längenmessungen auf dem Genauigkeitsniveau von Cs-Atomuhren durchführen zu können.

³⁸Der He-Ne-Laser wurde während der 1S-2S Messung im Jahr 1999 [Nie00a] mit der transportablen Cs-Fontänenuhr FOM kalibriert.

2.5 Messung von optischen Frequenzverhältnissen

Die Zeit, die man benötigt, um den statistischen Fehler einer absoluten optischen Frequenzmessung nach Abschnitt 2.4 unter eine gewählte Grenze zu reduzieren, hängt von der Stabilität der verwendeten Radiofrequenz-(RF)-Referenz³⁹ und der Stabilität der zu messenden optischen Frequenz ab, wobei in vielen Fällen die Stabilität der RF-Referenz die Meßzeit bestimmt. Dieses Problem kann umgangen werden, indem man ein optisches Frequenzverhältnis mißt, denn ein Frequenzverhältnis ist naturgemäß einheitenlos und erfordert deshalb nicht die Rückführung auf eine Cs-Uhr, um die Zeiteinheit Sekunde darzustellen [Did01, Ste02]. Dadurch kann die hohe Stabilität optischer Oszillatoren ausgenutzt werden, um die Meßzeit zu verkürzen, die nötig ist, einen gewählten statistischen Fehler zu erreichen. In Abbildung 2.12 ist ein Frequenzkammaufbau skizziert, mit dem auf einfache Weise das Frequenzverhältnis zweier optischer Frequenzen ω_{opt_1} und ω_{opt_2} gemessen werden kann. Zuerst stabilisiert man ω_{ce} auf den k -ten Bruchteil von ω_r und regelt

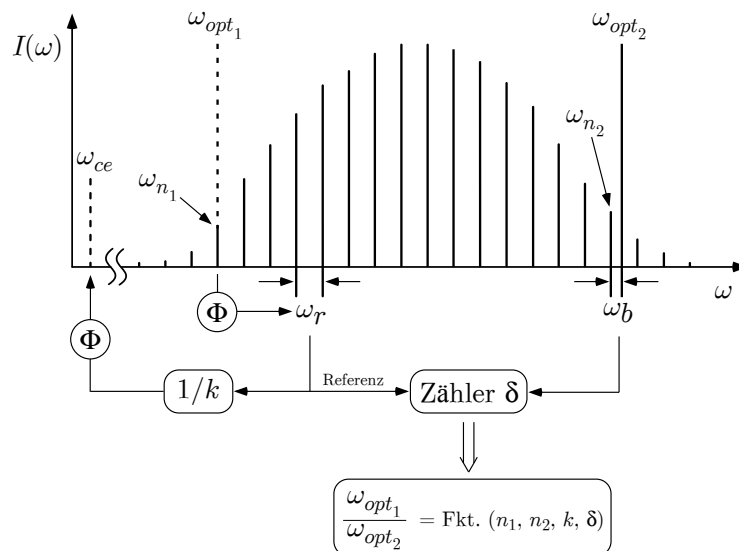


Abbildung 2.12: Schema zur Bestimmung des optischen Frequenzverhältnisses von ω_{opt_1} und ω_{opt_2} mit einem Frequenzkamm. Dazu wird zuerst ω_{ce} auf ω_r/k stabilisiert, wobei $k \geq 2$ eine ganze Zahl ist, und anschließend wird ω_{n_1} mit Hilfe von ω_r auf ω_{opt_1} stabilisiert. Aus der Messung von ω_b mit einem von ω_r referenzierten Zähler läßt sich dann das Frequenzverhältnis bestimmen. Φ bezeichnet einen Phasenregelkreis.

ω_r dann so, daß die Mode ω_{n_1} des Frequenzkamms mit ω_{opt_1} zusammenfällt. Die Frequenz ω_r/k mit $k = 2, 3, 4, \dots$ kann auf einfache Weise mit einem elektronischen Frequenzteiler⁴⁰ erzeugt werden. Aus technischen Gründen wird man es im Experiment bevorzugen, die Schwebungsfrequenz von ω_{n_1} und ω_{opt_1} nicht auf Null, sondern auf ω_r/l zu stabilisieren, wobei $l \geq 2$ eine ganze Zahl ist. Dadurch kann das $1/f$ -Rauschen unterdrückt werden und

³⁹Das können z. B. Cs-Uhren, Cs-kontrollierte Wasserstoffmaser oder GPS-kontrollierte Quarzoszillatoren sein.

⁴⁰engl. prescaler

man ist außerdem weniger empfindlich auf Leistungsschwankungen der Laser. Wegen der Übersichtlichkeit der Darstellung wird hier jedoch davon abgesehen. Schließlich wird die Schwebungsfrequenz ω_b zwischen ω_{opt_2} und der benachbarten Kammode ω_{n_2} mit einem Zähler gemessen, der mit ω_r referenziert ist. Aus den Beziehungen

$$\omega_{ce} = \omega_r/k \quad \text{und} \quad \omega_{opt_1} = \omega_{ce} + n_1\omega_r \quad (2.32)$$

ergibt sich:

$$\omega_{ce} = \omega_{opt_1} \frac{1}{kn_1 + 1} \quad \text{und} \quad \omega_r = \omega_{opt_1} \frac{1}{n_1 + \frac{1}{k}}. \quad (2.33)$$

Da der Zähler zur Messung von ω_b mit ω_r referenziert ist, gilt für das Meßergebnis δ die Beziehung $\delta = \omega_b/\omega_r$ bzw. $\omega_b = \delta\omega_r$. Das bedeutet für ω_{opt_2} :

$$\omega_{opt_2} = \omega_{ce} + n_2\omega_r + \omega_b = \omega_{opt_1} \frac{1}{kn_1 + 1} + n_2\omega_{opt_1} \frac{1}{n_1 + \frac{1}{k}} + \delta\omega_r. \quad (2.34)$$

Das Vorzeichen von ω_b wurde entsprechend Abbildung 2.12 gewählt. Mit Gleichung 2.33 ergibt sich dann für das optische Frequenzverhältnis:

$$\frac{\omega_{opt_2}}{\omega_{opt_1}} = \frac{n_1(1 + kn_2 + \delta k) + n_2 + \delta + \frac{1}{k}}{n_1(kn_1 + 2) + \frac{1}{k}}. \quad (2.35)$$

n_1 und n_2 sind ganze Zahlen der Größenordnung 10^6 , während k von der Größenordnung 10 ist. δ ist im Allgemeinen keine ganze Zahl.

Die Bestimmung von optischen Frequenzverhältnissen kann bei der Suche nach einer zeitlichen Änderung von Naturkonstanten von großer Bedeutung sein [Dzu99b, Dzu00]. Hängen die optischen Frequenzen ω_{opt_1} und ω_{opt_2} in unterschiedlicher Weise von einer Naturkonstanten ab, deren Wert sich mit der Zeit ändert, dann ist auch das Frequenzverhältnis eine Funktion der Zeit. Da man für die Messung eines optischen Frequenzverhältnisses nach Abbildung 2.12 keine RF-Referenz benötigt, ist man durch die hohe Stabilität und Genauigkeit optischer Oszillatoren sehr empfindlich auf zeitliche Änderungen des Frequenzverhältnisses.

2.6 Der Frequenzkamm als optisches Uhrwerk

In diesem Abschnitt soll beschrieben werden, wie ein optischer Frequenzkamm als Uhrwerk für eine neuartige optische Uhr verwendet werden kann, die gegenüber herkömmlichen Cs-Uhren eine deutlich höhere Genauigkeit und Stabilität erwarten läßt. Bevor am Ende des Abschnitts die experimentelle Realisierung eines fs-Uhrwerks beschrieben wird, sollen auf den folgenden Seiten zuerst wesentliche Eigenschaften moderner Uhren dargelegt werden.

2.6.1 Allgemeines zu Uhren

Genaue Uhren haben in unserer Zeit eine große Bedeutung. Man kann mit ihnen nicht nur Tests der physikalischen Grundlagenforschung durchführen, wie z. B. die allgemeine Relativitätstheorie überprüfen [Ves80] oder nach einer zeitlichen Änderung von Naturkonstanten suchen [Mar03], sondern sie finden auch in unserem Alltag wichtige Anwendungen. Als Beispiele dafür seien die Synchronisation von Telekommunikationsnetzwerken und das weltweite Navigationssystem GPS⁴¹ genannt. Eine gute Einführung in die Wissenschaft der Zeitmessung findet sich in Referenz [Agilent].

Die wesentlichen Bestandteile einer Uhr sind ein Oszillator, der möglichst gleichmäßig schwingt, und ein Zähler (Uhrwerk), der nach einer bestimmten Anzahl von Schwingungen, den Zeiger der Uhr um eine Einheit weiter stellt. Tabelle 2.2 zeigt eine Auswahl verschiedener Uhren, die im Laufe der Geschichte verwendet wurden. Der Trend zu einer größeren Anzahl von Schwingungen pro Sekunde des Oszillators ist deutlich zu erkennen. Schon lange ist bekannt, daß eine Uhr, deren Oszillator auf der Schwingung von Licht beruht, große Vorteile haben wird, aber erst seit wenigen Jahren besteht durch die fs-Frequenzkammtechnik die Möglichkeit, diese Schwingungen auf einfache Weise im Dauerbetrieb zählen zu können.

Art der Uhr	seit	Schwingungen/s
Sonnenuhr	3500 v.Chr.	1/86400
Pendeluhr	1656	1
Quarzuhr	1918	32 768
Cäsiumatomuhr	1955	9 192 631 770
optische Uhr	1999	2 466 061 413 187 103

Tabelle 2.2: *Verschiedene Arten von Uhren. Die Frequenz der Quarzuhr entspricht 2^{15} Hz. Als Beispiel für die Frequenz einer optischen Uhr wurde die 1S-2S Frequenz von Wasserstoff gewählt [Nie00a].*

Damit ein Uhrentyp von weltweitem Nutzen sein kann, müssen alle identisch aufgebauten Exemplare, so gut wie möglich die gleiche Taktfrequenz aufweisen. Daher leiten alle modernen Uhren höchster Genauigkeit ihre Frequenz aus einem atomaren Übergang ab.⁴² Der Oszillator besteht dabei aus einem schwingungsfähigen System, dessen Frequenz mit speziellen Techniken auf den jeweiligen atomaren Übergang stabilisiert ist. Im Radiofrequenzbereich werden dazu meist Schwingquarze verwendet und im optischen Spektralbereich sind es Laser. Fast alle Radiofrequenzuhren beziehen ihre Frequenz auf die Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands im ¹³³Cs-, ⁸⁷Rb- oder Wasserstoffatom. Im

⁴¹GPS hat dabei nicht nur große Bedeutung für die Navigation, sondern auch für internationale Uhrenvergleiche [Lar99].

⁴²Übergänge in Ionen oder Molekülen sind prinzipiell genauso geeignet.

optischen Spektralbereich ist die Vielfalt an sogenannten Uhrenübergängen größer. Der 1S-2S-Übergang im Wasserstoffatom ist nur ein Beispiel dafür.

Um die Qualität einer Uhr zu charakterisieren, werden die Begriffe Genauigkeit und Stabilität verwendet. Die Genauigkeit einer Uhr ist die Abweichung der Oszillatorfrequenz von der Frequenz des ungestörten atomaren Übergangs. Da es nicht möglich ist, einen völlig ungestörten Übergang zu realisieren, ist die Bestimmung der Genauigkeit nicht einfach. Hinweise auf die Genauigkeit einer Uhr kann man erhalten, indem man die Frequenzen zweier identisch aufgebauter Uhren miteinander vergleicht und die Betriebsparameter *einer* Uhr kontrolliert verändert. Zusätzlich dazu muß man noch systematische Effekte beachten, die die Frequenzen *beider* Uhren im gleichen Maß von der Idealfrequenz verschieben.⁴³ Die besten Cs-Uhren der Welt erreichen eine relative Genauigkeit von besser als $1 \cdot 10^{-15}$ [Mar03]. Das bedeutet, solche Uhren gehen in über 30 Millionen Jahren noch nicht einmal eine Sekunde falsch.

Die zweite wichtige Größe, welche die Qualität einer Uhr charakterisiert, ist ihre Stabilität. Sie beschreibt, wie sehr sich die Frequenz einer Uhr bei einer Serie von Messungen ändert. Dabei hängt die Stabilität von der Meßzeit bzw. Mittelungszeit eines einzelnen Datenpunktes ab. Hat man keinen Oszillator zur Verfügung, der stabiler als die zu testende Uhr ist, so vergleicht man auch hier zwei identisch aufgebaute Uhren miteinander.⁴⁴ In Abbildung 2.13 werden die Begriffe Genauigkeit und Stabilität anhand einiger typischer Frequenzverläufe veranschaulicht.

Die mathematische Beschreibung der Stabilität durch rms-Fluktuationen oder die Abweichung vom Mittelwert ist nicht günstig, weil diese Methoden divergieren, falls die Frequenz eines Oszillators in eine Richtung driftet. Aus diesem Grund wird die Stabilität einer Uhr im Allgemeinen durch ihre Allan-Varianz $\sigma_y(\tau)$ angegeben [Bar71]. Sei y eine zeitabhängige Größe und y_i mit $i = 1, \dots, M$ eine Reihe aufeinanderfolgender Messungen ohne Totzeit und mit der Mittelungszeit τ , dann ist $\sigma_y(\tau)$ definiert durch:

$$\sigma_y(\tau) \equiv \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{(y_{k+1} - y_k)^2}{2}. \quad (2.36)$$

Für die Auswertung einer Messung mit Totzeiten, das Zusammenfassen von Meßpunkten und den Einfluß von Filterbandbreiten sei auf die Referenzen [Bar71, Les83] verwiesen. Für kurze Mittelungszeiten τ nimmt die Stabilität eines Oszillators durch längeres Mitteln zu, d. h. die Allan-Varianz $\sigma_y(\tau)$ nimmt ab (siehe Abbildung 2.14). Ab einer gewissen Mittelungszeit wird die Stabilität durch längeres Mitteln aber nicht mehr besser. Der dann erreichte Wert von $\sigma_y(\tau)$ wird engl. noise floor genannt. Wann der noise floor erreicht wird und welchen Wert er hat sind wichtige Eckdaten eines Oszillators bzw. einer Uhr. Bei sehr langen Mittelungszeiten wird die Stabilität oft wieder schlechter, weil z. B. Betriebsparameter nicht ausreichend konstant gehalten werden können. Der Quarzoszillator in

⁴³Der Englische Ausdruck für diese Effekte ist *common mode rejection*.

⁴⁴Auch hier ist es notwendig, common mode rejection so weit wie möglich zu unterdrücken. Das gilt insbesondere für sehr lange Mittelungszeiten.

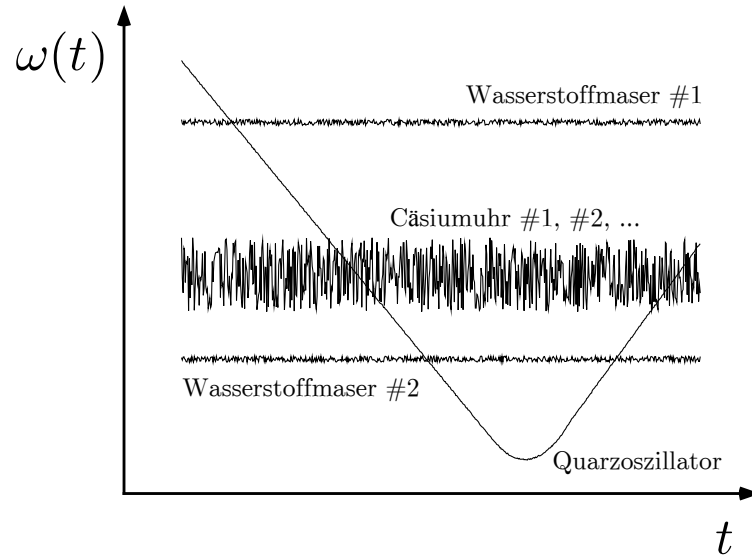


Abbildung 2.13: *Verschiedene Oszillatoren mit unterschiedlicher Genauigkeit und Stabilität. Wasserstoffmaser sind für mittlere und lange Mittelungszeiten sehr stabil, aber nicht genau. Cäsiumuhren dagegen sind genau, aber auf kurzen bis mittleren Zeitskalen nicht so stabil wie Wasserstoffmaser. Ein frei laufender Quarzoszillator schließlich ist weder genau noch langzeitstabil; für kurze Mittelungszeiten weist er dagegen eine hohe Stabilität auf, daher die glatte Kurve. Siehe auch Abbildung 2.14.*

Abbildung 2.14 ist ein gutes Beispiel dafür. Eine nützliche Eigenschaft der Allan-Varianz ist die Tatsache, daß die Steigung von $\sigma_y(\tau)$ in einer doppellogarithmischen Darstellung mit typischen Rauschprozessen in Verbindung gebracht werden kann [Bar71].

Die Stabilität eines Oszillators, der sich auf einen atomaren Übergang bezieht, ist durch die Güte des Übergangs $Q = \omega/\Delta\omega$ und das erreichbare Signal-zu Rausch-Verhältnis (SNR) bestimmt, wobei das SNR wiederum von der Anzahl N der Teilchen (Atome, Moleküle oder Ionen) und der Mittelungszeit τ abhängt:

$$\sigma_y(\tau) \sim \frac{1}{Q} \frac{1}{\text{SNR}(N, \tau)}. \quad (2.37)$$

Je größer die Güte und das SNR sind, um so besser ist erwartungsgemäß die Stabilität. Da optische Übergänge durch ihre hohen Frequenzen auch hohe Güten ausweisen können, ist es vorteilhaft, einen Oszillator bzw. eine Uhr auf einem optischen Übergang aufzubauen. Nach Gleichung 2.37 ist es außerdem wichtig, das SNR so groß wie möglich zu machen, wobei sich das Rauschen nur bis zur Grenze des sogenannten Quantenprojektionsrauschens (QPN⁴⁵) verringern läßt [Ita93]. Das quantenbegrenzte SNR ist proportional zu $\sqrt{N\tau}$, womit sich für die Allan-Varianz

$$\sigma_y^{QPN}(\tau) \sim \frac{1}{Q} \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad (2.38)$$

⁴⁵engl. quantum projection noise

ergibt. Für beste Stabilität ist es also vorteilhaft, möglichst viele Teilchen zu verwenden, wohingegen für beste Genauigkeit bevorzugt einzelne Teilchen spektroskopiert werden. Bei der Herleitung von Gleichung 2.38 in Referenz [Ita93] wurden die Teilchen als unkorreliert angenommen. Im Fall maximal verschränkter Teilchen kann man dagegen zeigen, daß sich die Allan-Varianz wie $1/(N\tau)$ verhält [Bol96, And04].

In Tabelle 2.3 ist eine Auswahl von hochstabilen Radiofrequenz-, Mikrowellen- und optischen Oszillatoren zusammengestellt. Das Stabilitätsverhalten einiger Oszillatoren ist in Abbildung 2.14 beispielhaft dargestellt.

Oszillator	Frequenzbereich	Referenz
GPS	Radiofrequenz	http://tycho.usno.navy.mil/gps.html
Quarz	Radiofrequenz	http://www.oscilloquartz.com
Cäsium-Uhr	Mikrowelle	[Bau03]
Rubidium-Uhr	Mikrowelle	[Pac62]
Wasserstoffmaser	Mikrowelle	[Gol60, Kle62, Kle65]
lineare Ionenfalle	Mikrowelle	[Tjo03]
kryogener Saphir-Resonator	Mikrowelle	[Cha00]
supraleitender Resonator	Mikrowelle	[Tur70, Ste75, Tur88]
CORE	optisch	[See97]
optischer ULE Resonator	optisch	[You99]
Sr Atome im optischen Gitter	optisch	[Kat03, Tak03]

Tabelle 2.3: Zusammenstellung verschiedener hochstabiler Oszillatoren, die in der Physik und Technik zum Einsatz kommen. CORE steht für „**C**ryogenic **O**ptical **R**esonator“ und ULE für „**U**ltra **L**ow **E**xpansion“, ein Spezialglas, das von der Firma Corning Inc. hergestellt wird.

Für eine Uhr ist Genauigkeit wichtiger als Stabilität, denn Stabilität kann man immer dadurch erhalten, daß man die Frequenz eines stabilen aber intrinsisch nicht genauen Oszillators⁴⁶ über lange Zeit mit einer genauen aber nicht so stabilen Cs-Uhr mißt. Auf diese Weise läßt sich Genauigkeit und Stabilität mit einander verbinden.

Dem Ideal eines ungestörten Oszillators kommen optische Übergänge in einzelnen lasergekühlten Ionen sehr nahe. Wenn man die Systematiken solcher Systeme untersucht, so stellt man fest, daß man diese auf einem Niveau kontrollieren können sollte, das eine relative Genauigkeit von 10^{-18} möglich werden läßt [Bec01, Raf00]. Im Vergleich zu den besten Cs-Uhren der Welt [Mar03] wäre dies eine 1 000 fache Verbesserung. Auch was die Stabilität anbelangt, können optische Oszillatoren Vorteile gegenüber denen im Radiofrequenzbereich haben (siehe z. B. Gleichung 2.37). Mit Hilfe eines gut isolierten Fabry-Pérot-Resonators konnte bei einer Mittelungszeit von einer Sekunde eine auf die Frequenz

⁴⁶Ein solcher Oszillator wird auch Schwungradoszillator (engl. flywheel oscillator) genannt. Ein Wasserstoffmaser ist ein gutes Beispiel dafür.

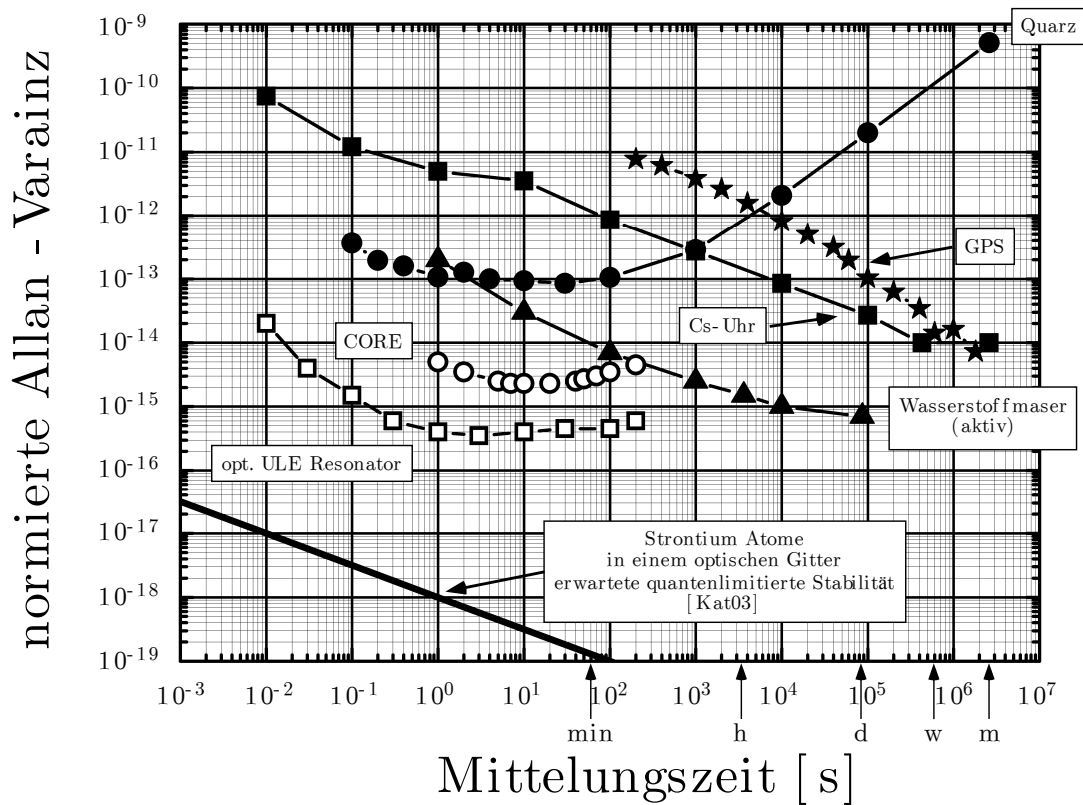


Abbildung 2.14: Typischer Verlauf der Allan-Varianz (auf die Frequenz normiert) einiger Oszillatoren aus Tabelle 2.3 als Funktion der Mittelungszeit τ . Radiofrequenz- bzw. Mikrowellenoszillatoren sind durch ausgefüllte Symbole gekennzeichnet und optische Oszillatoren durch unausgefüllte. Ab einer Mittelungszeit von 100 s macht sich die Frequenzdrift des speziellen Quarzoszillators von $\Delta\omega/\omega = 1.72 \cdot 10^{-11}/d$ bemerkbar. Quarz: Oscilloquartz OCXO 860743 #187 gemessene Stabilität; GPS: Hameg 8125 vs. HP 5071A (Option 001); Cs-Uhr: Hewlett-Packard 5071A (Option 001) spezifizierte Stabilität; Wasserstoffmaser: Quartzlock CH1-75B spezifizierte Stabilität; CORE [See97]; ULE Resonator [You99]. Einige der stabilsten Oszillatoren überhaupt (kryogener Saphir-Mikrowellenresonator [Cha00], supraleitender Niob-Mikrowellenresonator [Tur70, Ste75, Tur88] und Mikrowellen-Ionenstandard [Tjo03]) wurden der Übersichtlichkeit halber nicht in der Grafik dargestellt. Ihre Stabilität erreicht Werte von wenigen 10^{-16} .

normierte Allan-Varianz von $3 \cdot 10^{-16}$ demonstriert werden (siehe ULE-Resonator in Abbildung 2.14) [You99]. Dieser Wert sollte mit der Stabilität von Quarzoszillatoren verglichen werden, die 10^{-13} in einer Sekunde Mittelungszeit kaum unterschreiten. Das bedeutet, daß man im optischen Bereich Oszillatoren bauen kann, die sowohl hohe Genauigkeit als auch hohe Stabilität in sich vereinen. Da man bis vor einigen Jahren die Schwingungen von Licht nur sehr aufwendig zählen konnte, fehlte zum Bau einer sogenannten optischen Uhr mit überlegener Genauigkeit und Stabilität lediglich ein zuverlässiges d. h. einfaches

Uhrwerk, mit dem man die Uhr ohne großen Aufwand einige Stunden und länger betreiben konnte. Dieses Problem wurde durch die fs-Frequenzkammtechnik gelöst (siehe Abschnitt 2.6.2).

Die schon erwähnten optischen Einzelionenstandards sind von großem Interesse, weil sie die höchsten Genauigkeiten versprechen. Da man aber nur ein Teilchen zur Verfügung hat, ist das SNR so klein, daß die erwartete relative Genauigkeit von 10^{-18} erst nach einer Mittelungszeit von typischerweise einigen Monaten erreicht wird. Dazu benötigt man einen stabilen Schwungradoszillator, der innerhalb der Mittelungszeit seine Frequenz so gut wie möglich beibehält. Der Bau eines solchen hochstabilen optischen Oszillators ist eine große Herausforderung. Eine andere Möglichkeit besteht darin, nicht *ein* Teilchen zu verwenden, sondern viele Teilchen. Dazu verwendet man üblicherweise neutrale Atome, die in einer magnetooptischen Falle gefangen sind [Wil02]. Durch die größere Teilchenzahl kann im Vergleich mit den Einzelionenstandards ein größeres SNR erreicht werden, so daß die Anforderungen an den Schwungradoszillator erheblich reduziert sind. Dieser Vorteil wird allerdings durch eine geringere erreichbare Genauigkeit erkauft, da die Atome untereinander wechselwirken können. Im Moment ist noch nicht abzusehen, welcher Typ optischer Uhren (ein Teilchen oder viele Teilchen) sich am Ende durchsetzen wird. Eine Möglichkeit, die Vorteile beider Methoden miteinander zu verbinden, besteht darin, einzelne Atome in den Feldmaxima eines optischen Gitters zu speichern. Die Atome sind dann weit genug voneinander entfernt, um sich nicht gegenseitig zu stören, und die Anzahl der Atome von einigen Millionen ist groß genug, um in einer Sekunde Mittelungszeit eine Stabilität von etwa 10^{-18} zu erreichen [Kat03, Tak03].

Aus der Vielzahl optischer Übergangsfrequenzen stechen diejenigen des Wasserstoffatoms bzw. wasserstoffähnlicher Ionen dadurch hervor, daß sie sich mit der Theorie der Quantenelektrodynamik berechnen lassen. Damit wäre eine mathematische Verknüpfung der Zeiteinheit Sekunde mit fundamentalen Naturkonstanten möglich.

2.6.2 Experimentelle Realisierung eines fs-Uhrwerks

In Abbildung 2.15 ist ein Schema dargestellt, nach dem ein optisches fs-Uhrwerk realisiert werden kann [Did01]. Dabei wird die Frequenz eines optischen Oszillators mit Hilfe eines fs-Frequenzkamms durch Teilung mit einer großen Zahl in den Radiofrequenzbereich übertragen, wo sie gezählt bzw. via Kabel oder Satellit verbreitet werden kann. Dazu wird ω_{ce} mit Hilfe eines elektronischen Frequenzteilers auf den k -ten Bruchteil von ω_r stabilisiert, wobei $k \geq 2$ eine natürliche Zahl ist. Anschließend wird die n -te Mode des Frequenzkamms durch Regeln von ω_r auf die Frequenz ω_{opt} des optischen Oszillators stabilisiert. Wie in Abschnitt 2.5 so wird man es auch hier im Experiment bevorzugen, die Schwebungsfrequenz von ω_{opt} und ω_n nicht auf Null, sondern auf ω_r/l zu stabilisieren, wobei $l \geq 2$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist. Wegen der Übersichtlichkeit der Darstellung wird hier wieder darauf verzichtet. Daraus folgt:

$$\omega_{ce} = \frac{1}{k}\omega_r \quad \text{und} \quad \omega_{opt} = \omega_{ce} + n\omega_r. \quad (2.39)$$

Damit ergibt sich für ω_r :

$$\omega_r = \frac{1}{n + \frac{1}{k}} \cdot \omega_{opt}. \quad (2.40)$$

Die Pulswiederholrate ω_r ist damit über einen Faktor, der sich aus ganzen Zahlen zusammensetzt, phasengenau mit ω_{opt} verbunden, womit es möglich sein sollte, die Genauigkeit und Stabilität des optischen Oszillators in den RF-Bereich zu übertragen. Der Frequenzkamm ist dabei ein optisches Getriebe, das die schnellen Schwingungen von ω_{opt} in die zählbaren Radiofrequenzschwingungen von ω_r umsetzt.

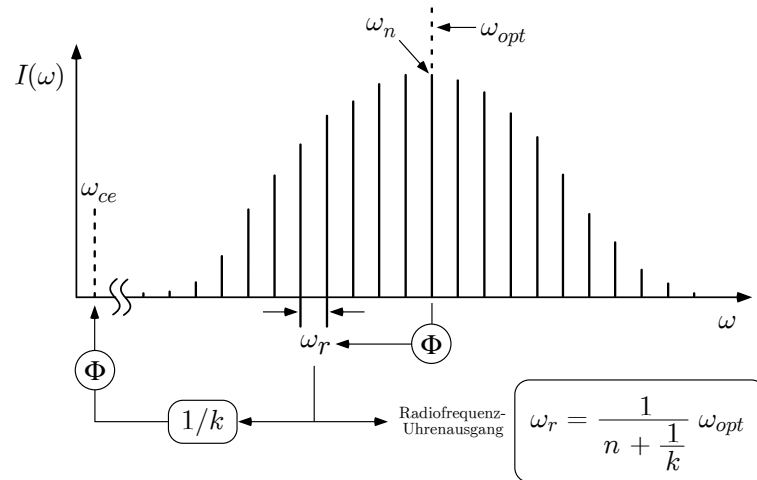


Abbildung 2.15: Der fs-Frequenzkamm als optisches Uhrwerk. Die Frequenz ω_{opt} eines genauen und stabilen optischen Oszillators wird in die zählbare und leicht zu verbreitende Radiofrequenz ω_r umgewandelt. Φ bezeichnet einen Phasenregelkreis.

Im Zusammenhang mit optischen Uhren sei abschließend auf ein offenes Problem hingewiesen. Durch den Vergleich zweier fs-Frequenzkämme, die auf eine gemeinsame optische Referenz stabilisiert waren, konnte in den Moden der Frequenzkämme bei einer Mittelungszeit von einer Sekunde eine Stabilität von $6 \cdot 10^{-16}$ demonstriert werden [Did02], die wahrscheinlich durch die Phasenregel Elektronik bzw. die Detektion der Schwebungssignale begrenzt war. Da beide Kämme auf die gleiche optische Referenz stabilisiert waren, beschreibt dieser Wert lediglich die Stabilität eines fs-Uhrwerks und nicht die Stabilität einer optischen Uhr. Dennoch ist diese Messung wichtig, denn sie zeigt die maximale Stabilität, die man mit optischen Uhren erreichen kann (vergleiche Abbildung 2.14 auf Seite 41). Im Vergleich mit der erwarteten Stabilität des Sr-Standards [Kat03, Tak03] muß die ohnehin schon hohe Stabilität des fs-Uhrwerks offensichtlich noch weiter verbessert werden.

Man würde nun erwarten, daß man die im optischen Bereich nachgewiesene Stabilität ebenso auch im RF-Bereich messen kann, indem man die Pulswiederholraten beider Laser vergleicht. Das ist aber bisher noch nicht gelungen. Bei einem Experiment, in dem die Pulswiederholrate eines fs-Lasers mit zwei verschiedenen Photodioden gemessen wurde, konnte „nur“ eine relative Stabilität von $3 \cdot 10^{-15}$ in einer Sekunde Mittelungszeit nachgewiesen

werden [Iva03a]. Ist eine optische Referenz stabiler, so ist die Stabilität einer optischen Uhr dadurch begrenzt. Der Stabilitätsunterschied zwischen dem optischen Bereich und dem RF-Bereich hat seine Ursache im Detektionsprozeß der Pulswiederholrate. Durch die niedrigere Frequenz von ω_r wirken sich Störungen dabei stärker auf die relative Genauigkeit aus als das bei optischen Frequenzen der Fall ist. Solche Störungen sind beispielsweise Änderungen in der Lichtleistung, der Polarisation und der Strahlrichtung. Sie führen zu Phasenverschiebungen im RF-Signal einer Photodiode und täuschen dadurch einen Frequenzunterschied vor [Iva03a].⁴⁷ Zusätzlich dazu kommt es wegen der hohen Pulsintensität zu Sättigungseffekten, die die elektrische Pulsform beeinflussen [Wil92, Lin97, Pao99]. Ein Weg, die Probleme, die mit der Verwendung einer Photodiode verbunden sind, zu umgehen, besteht möglicherweise darin, einen Quarzoszillator als Detektor zu verwenden, dessen Eigenfrequenz ungefähr mit der zu detektierenden Pulswiederholrate übereinstimmt. Die auf den Quarz auftreffenden Lichtpulse könnten dessen Frequenz durch Injektionskopplung⁴⁸ mit der Pulswiederholrate synchronisieren, wobei die Kopplung entweder über den Impulsübertrag der Photonen oder durch thermische Effekte erfolgen kann. Eine andere Möglichkeit besteht vielleicht in der Anwendung der elektrooptischen Abtastung⁴⁹ [Kim04]. Zukünftige Experimente werden zeigen müssen, ob sich mit diesen Methoden die Stabilität der Pulswiederholraten-Detektion erhöhen läßt.

2.7 Anwendungen im Zeitraum

In den zurückliegenden Abschnitten wurden die Anwendungen stabilisierter fs-Frequenzkämme in der optischen Frequenzmetrologie beschrieben. In diesem abschließenden Abschnitt soll daher noch in kurzer Form auf Anwendungen im Zeitraum eingegangen werden.

Betrachtet man einen Modellpuls, wie er durch

$$E(t) = e^{-t^2/2\tau^2} \cos(\omega_c t + \varphi) \quad (2.41)$$

gegeben ist, dann sieht man, daß das elektrische Feld des Pulses in Abhängigkeit der Träger-Einhüllenden-Phase φ unterschiedliche Spitzenwerte hat (siehe Abbildung 2.16). Ein sogenannter Cosinus- bzw. -Cosinuspuls hat den größten Spitzenwert und ein Sinus- bzw. -Sinuspuls den kleinsten.⁵⁰ Benutzt man solche Pulse, um damit nichtlineare Prozesse zu treiben, so sollte die Intensität der nichtlinearen Produkte von φ abhängen. Um solche Effekte im Experiment nachweisen zu können, müssen einige Bedingungen erfüllt sein. Damit eine Änderung von φ zu einer deutlichen Änderung der Maximalfeldstärke führt, müssen die Pulse sehr kurz und intensiv sein. Zum anderen muß der untersuchte Effekt von einer hohen Potenz der elektrischen Feldstärke abhängen, damit sich bereits kleine Änderungen der Maximalfeldstärke meßbar auswirken können.

⁴⁷Ein Richtwert für die leistungsabhängige Phasenverschiebung ist 1 ps/mW.

⁴⁸engl. injection locking

⁴⁹engl. electrooptic sampling

⁵⁰Die Energie der Pulse $\int E(t)^2 dt$ hängt nach Gleichung 2.41 *auch* von φ ab. Sollen alle Pulse die gleiche Energie haben, so muß die Amplitude der Pulseinhüllenden korrigiert werden. Diese Korrektur ist aber sehr klein und ändert nicht die φ -Abhängigkeit der Spitzenfeldstärke.

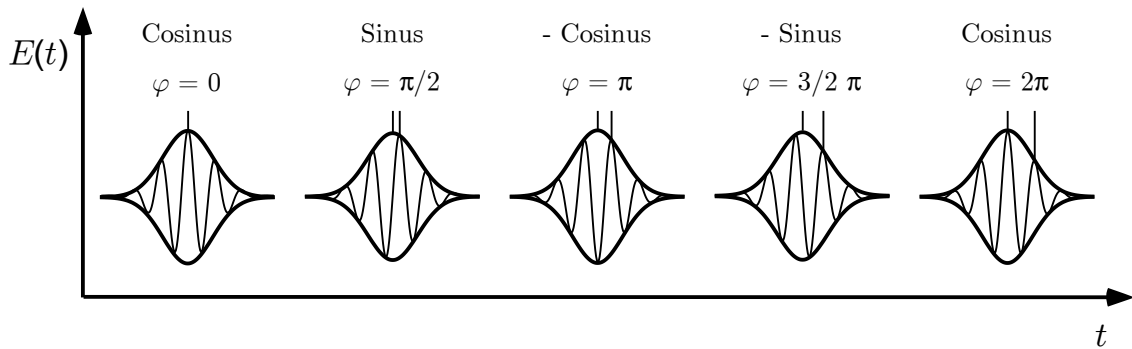


Abbildung 2.16: Das elektrische Feld eines kurzen Pulses in Abhängigkeit von φ . Ein Cosinuspuls kann nichtlineare Effekte stärker treiben als ein Sinuspuls, weil bei ihm das elektrische Feld einen größeren Spitzenwert hat.

Die Erzeugung hoher Harmonischer eines Lichtfeldes (HHG⁵¹) in einem Edelgasstrahl [Chr97, Cha97, Bal03], die above-threshold Photoionisation (ATI) [Ago79, Pau01] oder der Mehrphotonen-Photoeffekt [Dom04] sind Beispiele für solche stark nichtlinearen Effekte. Der Nachweis der φ -Abhängigkeit ist dann am überzeugendsten, wenn man φ kontrolliert verändert und daraufhin eine Änderung der Intensität nichtlinearer Produkte beobachten kann. Dazu benötigt man ein Lasersystem, das einen Pulszug intensiver *identischer* Pulse mit einstellbarem φ liefert.

Ein Pulszug aus identischen Pulsen kann mit Hilfe einer geeigneten Phasenstabilisierung von ω_{ce} erzeugt werden. Betrachtet man den Pulszug eines fs-Lasers mit stabilisiertem $\omega_{ce} \neq 0$, so haben benachbarte Pulse wegen $\Delta\varphi \neq 0$ einen unterschiedlichen Verlauf des elektrischen Feldes. Wie man aber leicht sieht, kann in diesem Pulszug ein Unter-Pulszug enthalten sein, der aus identischen Pulsen besteht. Sei z. B. $\Delta\varphi = \pi/2$, dann ist jeder vierte Puls identisch. Das kann nach Gleichung 2.14 erreicht werden, indem man ω_{ce} auf $\omega_r/4$ stabilisiert. Ein Pulszug identischer Pulse kann dann erzeugt werden, indem man jeden $m \cdot 4$ -ten Puls aus dem so stabilisierten Originalpulszug herausfiltert, wobei m eine natürliche Zahl ist.⁵²

In der Arbeitsgruppe von Prof. F. Krausz an der Technischen Universität Wien (jetzt am MPQ) wurde mit dieser Stabilisierungsmethode ein Lasersystem aufgebaut, mit dem erstmalig durch Einstellen der Träger-Einhüllenden-Phase φ dessen Einfluß auf einen nichtlinearen Prozeß (hier die HHG) nachgewiesen werden konnte [Bal03].⁵³ Zentraler Bestandteil des Lasersystems war ein fs-Oszillator mit einer Pulswiederholrate von $\omega_r = 2\pi \cdot 80$ MHz, dessen Offsetfrequenz auf $\omega_{ce} = \omega_r/4 = 2\pi \cdot 20$ MHz stabilisiert wurde, d. h. jeder vierte Puls des Pulszugs war identisch. Die Pulswiederholrate wurde dann durch 80 000 geteilt, um mit der resultierenden Frequenz von 1 kHz einen Pulspicker und einen gütegeschalteten Pumplaser anzusteuern, mit dessen Hilfe jeder 80 000-te Puls des Oszil-

⁵¹ engl. **H**igh **H**armonic **G**eneration

⁵²Auf die Möglichkeit, einen identischen Pulszug durch DFG zu erzeugen, wird in Kapitel 3 eingegangen.

⁵³Siehe zu diesem Thema auch [Pau01, Pau03]

lators verstärkt wurde. Da 80 000 durch 4 teilbar ist, weisen alle verstärkten Pulse den gleichen Verlauf des elektrischen Feldes auf. Damit ist $\Delta\varphi = 0$, aber φ selbst ist noch nicht bekannt. Mit spektraler Interferometrie [Lep95, Meh00, Kak01, Bal02b] kann φ relativ zu einem unbekanntem aber festen Wert φ_0 gemessen werden. Die Kontrolle von $\varphi - \varphi_0$ erfolgt dann mit einer langsamen Phasenregelung, die zusätzlich zur schnellen ω_{ce} Regelung die Pumpleistung des Oszillators kontrolliert. Details zu diesem Experiment können in Referenz [Bal03] nachgelesen werden. Neben dem überzeugenden Nachweis der φ -Abhängigkeit nichtlinearer Prozesse gestattet das Lasersystem zusammen mit dem φ -empfindlichen Prozeß erstmalig die Kontrolle *aller* Parameter eines modengekoppelten Lasers.

3. Offsetfreie Frequenzkämme und Genauigkeit nichtlinearer Prozesse

Ein offensichtliches Problem bei den bisher vorgestellten Frequenzkämmen ist die Offsetfrequenz f_{ce} ,¹ die stabilisiert werden muß, sofern man nicht ausschließlich optische Frequenzdifferenzen messen will. Ein offsetfreier Frequenzkamm, dessen $f_{ce} = 0$ ist, kann mit Hilfe von Differenzfrequenzmischung (DFG) erzeugt werden [Bal02a, Ude02, Zim04]. Betrachtet man zwei Moden der Frequenz f_{n_1} und f_{n_2} , so entsteht durch den DFG-Prozeß² eine dritte Mode mit der Frequenz:

$$f_{n_2} - f_{n_1} = (f_{ce} + n_2 f_r) - (f_{ce} + n_1 f_r) = (n_2 - n_1) f_r \quad \text{mit} \quad n_2 > n_1. \quad (3.1)$$

Sind bei der Differenzfrequenzbildung nicht nur zwei Moden beteiligt sondern zwei Frequenzkämme mit den Zentralfrequenzen f_1 und f_2 ($f_2 > f_1$), so entsteht ein neuer Frequenzkamm bei $f_2 - f_1$, dessen Breite durch die Phasenanpassung gegeben ist und typischerweise einige nm beträgt. Die Frequenzen der Moden des DFG-Kamms sind nach Gleichung 3.1 durch

$$f_{n_d} = n_d f_r \quad (3.2)$$

gegeben, wobei n_d Element der natürlichen Zahlen ist. Damit ist der DFG-Kamm offsetfrei und alle Moden sind exakte Vielfache der Puls wiederholrate f_r . Betrachtet man Abbildung 2.15 auf Seite 43, so fällt auf, daß die Realisierung eines Uhrwerks mit einem DFG-Kamm deutlich einfacher ist, weil die Phasenregelung wegfällt, die f_{ce} kontrolliert. In diesem Fall gilt für f_r als RF-Uhrenaussgang einfach $f_r = f_{opt}/n$. Ein optisches Uhrwerk, das auf einem DFG-Kamm aufbaut, sollte aus zwei Gründen die Stabilität eines optischen Oszillators besser in den RF-Bereich übertragen können als ein Frequenzkamm mit nicht verschwindendem f_{ce} : zum einen fallen die Schwankungen in f_{ce} weg, die durch die begrenzte Bandbreite der Phasenregelung auftreten, und zum anderen kann die Pumpleistung, die auch f_r beeinflusst,³ dazu verwendet werden, die Bandbreite der f_r -Phasenregelung zu erhöhen, wodurch technisches Rauschen in f_r stärker unterdrückt werden kann. Diese Vorteile scheinen auf den ersten Blick nicht besonders wichtig zu sein, aber im Anbetracht der extremen Stabilität, die von optischen Uhren erreicht werden kann (siehe Abbildung 2.14 auf Seite 41), wird es notwendig sein, das fs-Uhrwerk so einfach und stabil wie möglich zu gestalten. Als Nachteil eines DFG-Kamms kann seine geringe spektrale Breite angesehen werden, die aber nicht ins Gewicht fällt, falls der

¹Die Verwendung der Kreisfrequenz ω war in Kapitel 2 für viele Herleitungen sinnvoll, weil sie eine kompaktere Schreibweise vieler Beziehungen gestattete. Um aber bei den Frequenzangaben in den experimentellen Kapiteln 3 und 5 eine Verwechslung zwischen Frequenz und Kreisfrequenz zu verhindern, wird von jetzt ab nur noch die Frequenz f verwendet. Es gilt: $\omega = 2\pi \cdot f$.

²Phasenanpassung wird hier und im folgenden vorausgesetzt.

³Siehe Seite 29.

DFG-Kamm als optisches Uhrwerk für einen festen Uhrenübergang verwendet wird. DFG eröffnet außerdem die Möglichkeit, einen Frequenzkamm im infraroten Spektralbereich bei Wellenlängen $> 2,3 \mu\text{m}$ zu erzeugen. Dieser Bereich ist bisher nicht durch spektrale Verbreiterung von Ti:Saphir-Lasern oder Erbium dotierten Faserlasern zugänglich. Als Beispiele seien Frequenzmessungen an CO_2 -Lasern bei $10,6 \mu\text{m}$ und methanstabilisierten He-Ne-Lasern bei $3,4 \mu\text{m}$ genannt.

Wie die folgenden zwei Beispiele zeigen, können offsetfreie Frequenzkämme auch ohne DFG erzeugt werden. Dabei müssen jedoch einige Nachteile in Kauf genommen werden. Eine Möglichkeit besteht darin, f_{ce} auf einen ganzzahligen Bruchteil f_r/k der Puls wiederholrate zu stabilisieren und dann jeden k -ten Puls aus dem Pulszug auszuwählen. Diese Technik wurde bereits in Abschnitt 2.7 beschrieben. Wenn z. B. $f_r = 800 \text{ MHz}$ ist und $k = 4$, dann hat der sich ergebende Pulszug einen Modenabstand von 200 MHz und eine Offsetfrequenz von Null. Der Modenabstand wäre damit noch groß genug, um bei einer Schwebungsmessung die Modennummer n auf einfache Weise bestimmen zu können. Ein offensichtlicher Nachteil dieser Methode ist die durch die Auswahl der Pulse verringerte Leistung des Pulszugs. Alternativ dazu kann man auch in den kurzwelligen Arm des nichtlinearen Interferometers einen akustooptischen Modulator einfügen, den man mit der Frequenz f_a treibt. Bei der Überlagerung beider Arme des Interferometers erhält man dann nicht f_{ce} sondern $f_{ce} - f_a$. Stabilisiert man diese Frequenz auf $f_r - f_a$, so wird $f_{ce} = f_r$ bzw. $f_{ce} = 0$ [Jon00]. Beide Methoden haben den Nachteil, daß nach wie vor ein Phasenregelkreis zum stabilisieren von f_{ce} bzw. $f_{ce} - a$ notwendig ist. Durch die begrenzte Bandbreite der Phasenregelungen *schwankt* die Offsetfrequenz daher um den Sollwert von $f_{ce} = 0$. Im Gegensatz dazu ist bei DFG-Kämmen, abgesehen von eventuellen Fehlern nichtlinearer Prozesse, die in diesem Kapitel noch behandelt werden, automatisch $f_{ce} = 0$ garantiert.

3.1 Experimenteller Aufbau und Ergebnisse

Um einen DFG-Kamm zu erzeugen und seine Integrität zu testen, wurde folgender Aufbau verwendet, der in Abbildung 3.1 dargestellt ist. Fokussiert man den Strahl des fs-Lasers, dessen Aufbau in Abbildung 2.8 auf Seite 30 dargestellt ist, in eine 5-30 cm lange PCF, deren Kerndurchmesser $1,6 \mu\text{m}$ beträgt, so wird das Spektrum des Lasers auf über eine Oktave verbreitert (siehe Abbildung 3.2), wobei das Spektrum bei 473 nm bzw. 946 nm Maxima aufweist. Bei den folgenden Messungen sowie der Messung der $1S-2S$ Frequenz wurde eine PCF verwendet, die wegen der Form ihrer Luftkanäle *cobweb-Faser* genannt wird.⁴ Der Frequenzkamm des fs-Lasers nach der PCF ($f_{n_o} = f_{ce} + n_o f_r$) wird im folgenden dazu verwendet, in einem nichtlinearen KNbO_3 -Kristall durch Summenfrequenzmischung (SFG) bzw. Differenzfrequenzmischung (DFG) zwei neue Frequenzkämme zu erzeugen. Abweichend zu Abbildung 2.9 auf Seite 32 ist der KNbO_3 -Kristall zu diesem Zweck außerhalb des Interferometers angeordnet. Mit einem dichroitischen Strahlteiler wird der blaue Anteil des oktavenbreiten Spektrums (ca. 473 nm) vom infraroten

⁴engl. cobweb - Spinnennetz

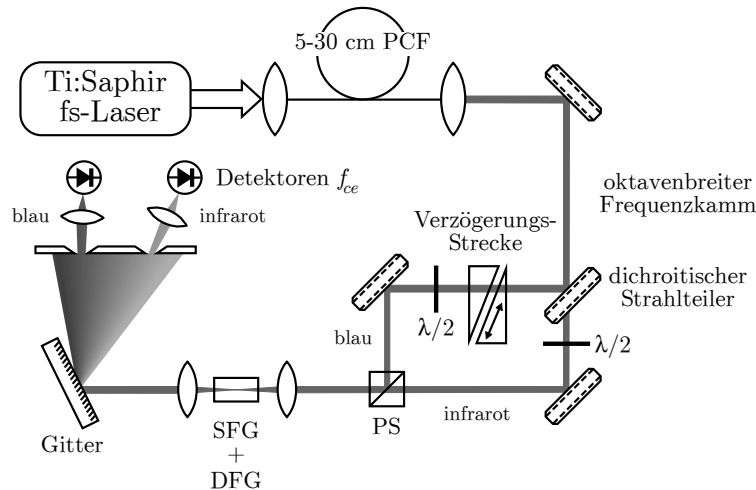


Abbildung 3.1: *Experimenteller Aufbau zur Erzeugung eines offsetfreien DFG-Kamms. Der fs-Laser und die PCF erzeugen einen Frequenzkamm, der Strahlung bei 946 nm und 473 nm enthält. Blaue Moden um 473 nm und infrarote Kammoden um 946 nm werden mit senkrecht aufeinander stehenden Polarisierungen in einen nichtlinearen Kristall fokussiert. Dabei sind zwei Prozesse phasenangepaßt: SFG ($946\text{ nm} + 946\text{ nm} \rightarrow 473\text{ nm}$) erzeugt einen Kamm um 473 nm mit der Offsetfrequenz $2f_{ce}$ und DFG ($473\text{ nm} - 946\text{ nm} \rightarrow 946\text{ nm}$) erzeugt einen offsetfreien Kamm um 946 nm. Die zwei neu erzeugten Kämmen erzeugen Schwebungssignale mit dem Originalkamm, deren Frequenz f_{ce} ist, sofern keine Fehler beim SFG- bzw. DFG-Prozess auftreten. PS bezeichnet einen polarisierenden Strahlteiler.*

Teil (ca. 946 nm) trennt, um später mit einem polarisierenden Strahlteiler wieder mit ihm vereinigt zu werden. Durch eine Verzögerungsstrecke, die in den blauen Strahlengang eingefügt ist, werden Laufzeitunterschiede kompensiert, die in der PCF entstanden sind. Der KNbO_3 -Kristall ist in einem Winkel geschnitten, der die Phasenanpassung des SFG-Prozesses $946\text{ nm} + 946\text{ nm} \rightarrow 473\text{ nm}$ ermöglicht. Zusätzlich dazu ist auch der DFG-Prozess $473\text{ nm} - 946\text{ nm} \rightarrow 946\text{ nm}$ phasenangepaßt. Das bedeutet, in dem Kristall entsteht sowohl ein SFG-Kamm bei 473 nm, dessen Offsetfrequenz $2f_{ce}$ beträgt (siehe Abbildung 2.4 auf Seite 20), als auch ein offsetfreier DFG-Kamm bei 946 nm. Beide neu erzeugten Frequenzkämme generieren mit dem Originalkamm je ein Schwebungssignal, das die Frequenz f_{ce} hat. Das ist aber nur dann der Fall, wenn beim SFG- bzw. DFG-Prozess entweder keine oder exakt dieselbe Abweichung von den erwarteten Frequenzen auftritt. In Tabelle 3.1 sind der Übersicht halber noch einmal alle beteiligten Frequenzkämme mit ihren Kammgleichungen und spektralen Positionen zusammengefaßt. Nach dem Verlassen des Kristalls haben sowohl der DFG-Kamm und der infrarote Originalkamm als auch der SFG-Kamm und der blaue Originalkamm die gleiche Polarisation. Aus diesem Grund ist es im Gegensatz zu Abbildung 2.9 auf Seite 32 nicht notwendig, eine Halbwellenplatte und einen polarisierenden Strahlteiler zur Projektion der Polarisation zu verwenden. Der DFG-Kamm hat für typische Parameter des Experiments eine Leistung pro Mode in der Größenordnung von 100 nW. An dieser Stelle sei erwähnt, daß 946 nm als Wellenlänge des

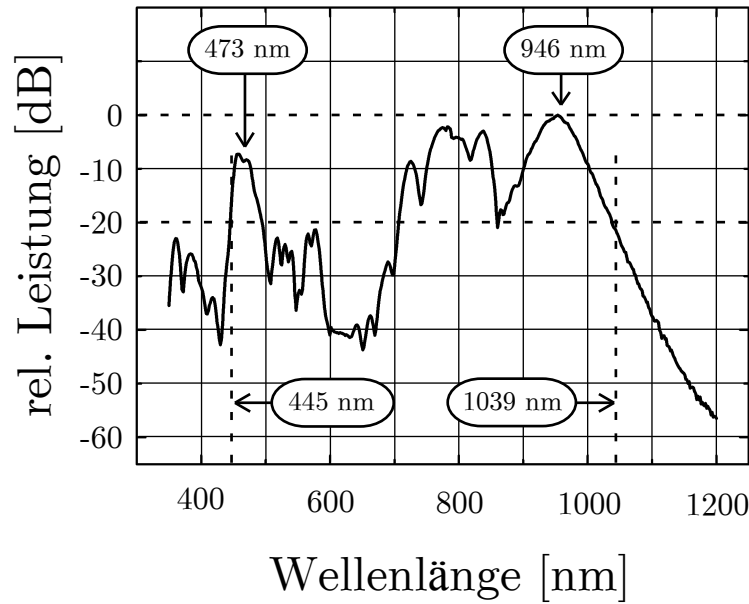


Abbildung 3.2: *Spektrum des fs-Lasers nach der PCF (cobweb-Faser; Kerndurchmesser 1,6 μm).*

	Original-Kamm	SFG-Kamm	DFG-Kamm
spektraler Bereich [nm]	946-473	473	946
nichtlinearer Prozeß [nm]		946 + 946 \rightarrow 473	473 - 946 \rightarrow 946
Kamm-Gleichung	$f_{n_o} = f_{ce} + n_o f_r$	$f_{n_s} = 2f_{ce} + n_s f_r$	$f_{n_d} = n_d f_r$

Tabelle 3.1: *Wellenlängen des SFG- bzw. DFG-Prozesses und die sich ergebenden Kammgleichungen. n_o , n_s und n_d sind die Modennummern des Originalkamms und des SFG- bzw. DFG-Kamms.*

DFG-Kamms nur deshalb gewählt wurde, um einen Vergleich mit dem Originalkamm zu ermöglichen. Im Prinzip hätte jede Wellenlänge > 946 nm ebenso erreicht werden können.

Um die Integrität des DFG-Kamms zu testen und eventuelle Fehler im SFG- bzw. DFG-Prozeß aufzuspüren, wurde die Schwebung zwischen Original-Kamm und SFG-Kamm bei 473 nm auf 64 MHz phasenstabilisiert und die Schwebung zwischen Original-Kamm und DFG-Kamm bei 946 nm mit drei Frequenzzählern⁵ analysiert (Redundanz). Dazu wurde die Schwebung bei 64 MHz mit zwei Lokaloszillatoren auf 9 MHz bzw. 5 MHz gemischt. Die Ansteuerung der Zähler ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Es wurden Messungen mit 1, 3, 10, 30, 100 und 300 s Torzeit durchgeführt. Die Pulswiederholrate f_r war während der Messung nicht stabilisiert, weil f_{ce} bei freilaufendem f_r zuverlässiger stabilisiert werden konnte. Schwankungen in f_r haben auf die Messung von f_{ce} keine Auswirkung.

Durch die Verwendung mehrerer Zähler war es möglich, fehlerhafte Meßpunkte auszor-

⁵Hewlett-Packard 53131A und 53132A

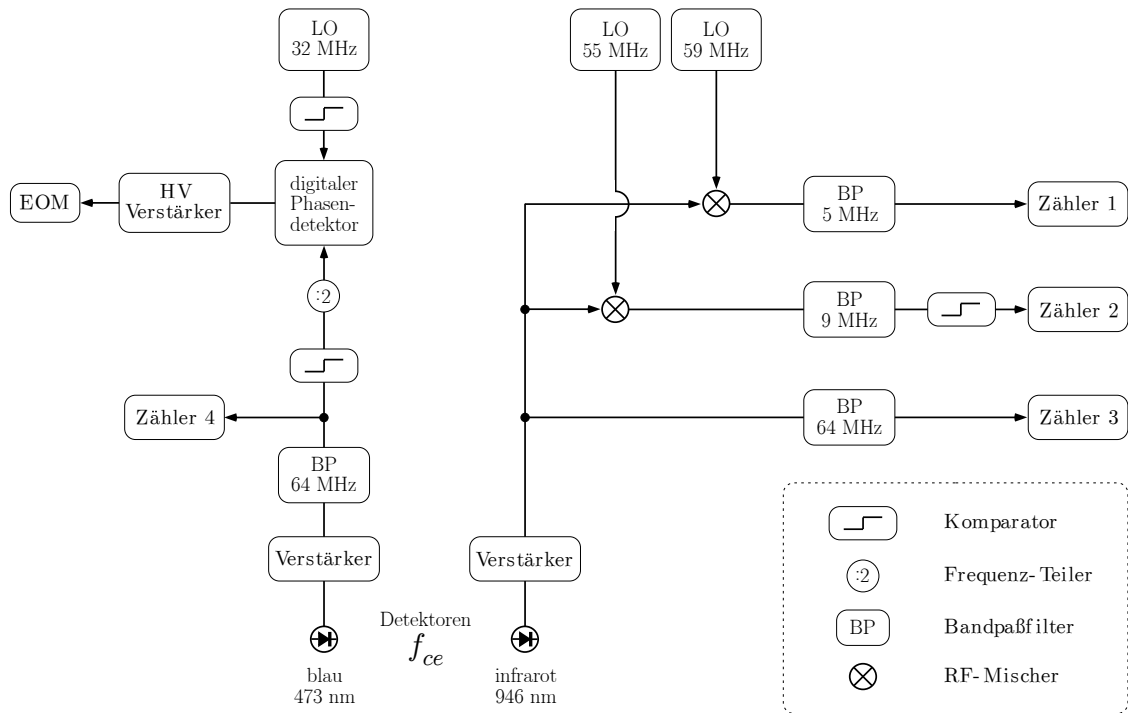


Abbildung 3.3: Elektronischer Aufbau zum Stabilisieren (Zählen) der f_{ce} -Schwebung im blauen (infraroten) Spektralbereich. Alle Zähler und Lokaloszillatoren (LO) werden von einer Cs-Uhr referenziert (Hewlett-Packard 5071A (Option 001)). Die Funktionsweise des digitalen Phasendetektors ist in Referenz [Pre95] erläutert. Ein Komparator wandelt ein sinusförmiges Signal in ein Rechtecksignal um (siehe Seite 53).

tieren. Von vorne herein wurden alle Meßpunkte verworfen, bei denen der Kontrollzähler der f_{ce} -Phasenregelung (Zähler 4) eine größere Abweichung von 64 MHz anzeigte als 0,1 Hz bezogen auf eine Torzeit von 1 s. Bei längeren Torzeiten wurde diese Schwelle entsprechend $0,1 \text{ s}/(\text{Torzeit}/\text{s})$ verringert. Zusätzlich dazu wurden alle Messungen aussortiert, bei denen sich die Frequenzen von Zähler 1 – 5 MHz, Zähler 2 – 9 MHz und Zähler 3 – 64 MHz um mehr als $0,1 \text{ Hz}/(\text{Torzeit}/\text{s})$ voneinander unterschieden. Weil der systematische Fehler der verwendeten Zähler proportional zur gezählten Frequenz ist, wurden nur die Ergebnisse von Zähler 1 (5 MHz) für die letztendliche Auswertung verwendet. Die Zähler 2 und 3 dienten bei dieser Messung lediglich zur Kontrolle von Zähler 1. Eine typische Meßserie von f_{ce} bei 946 nm ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Eine Frequenz von < 5 MHz konnte wegen der Breite des zu zählenden Signals und des $1/f$ -Rauschens nicht verwendet werden. Der systematische Fehler der Zähler ist weiterhin umgekehrt proportional zur Torzeit τ , weshalb es günstig ist, große Torzeiten zu wählen. Ein weiteres Argument für große Torzeiten ist die Tatsache, daß sich Rauschen⁶ bei phasenkohärenten Prozessen statistisch wie $1/\tau$ mittelt, wohingegen sich der Fehler vom Mittelwert bei einer Meßserie von n Einzelmessungen nur wie $1/\sqrt{n}$ verringert. Es ist also besser, eine zur Verfügung

⁶genauer: weißes Phasenrauschen

stehende Meßzeit auf weniger Meßpunkte mit größerer Torzeit zu verteilen. Diese Aussage trifft allerdings nur für Messungen mit *Totzeit* zu. Verwendet man Zähler ohne Totzeit, so können benachbarte Meßpunkte kleiner Torzeit immer ohne Verluste zu einem Meßpunkt größerer Torzeit zusammengefaßt werden.

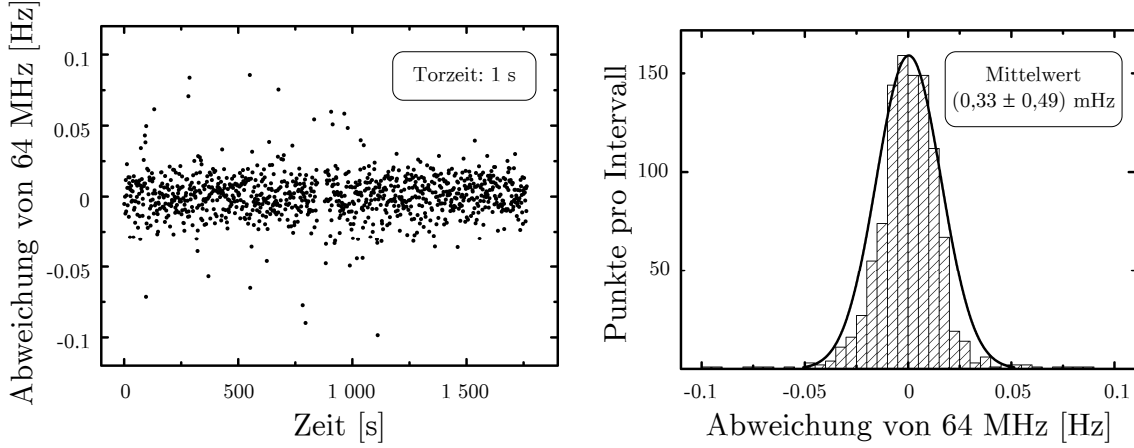


Abbildung 3.4: *Typisches Ergebnis einer Meßserie. Die Schwebungsfrequenz des SFG-Kamms mit dem Originalkamm bei 473 nm wurde auf 64 MHz stabilisiert, während die Schwebungsfrequenz zwischen Originalkamm und DFG-Kamm bei 946 nm mit einem Zähler analysiert wurde. Die Schwebungsfrequenz wurde zum Zählen auf 5 MHz gemischt (siehe Abbildung 3.3). Die Verteilung der gemessenen Frequenzen läßt sich gut durch eine Normalverteilung beschreiben.*

Das Ergebnis des f_{ce} -Frequenzvergleichs ist in Tabelle 3.2 zusammengefaßt. Die gewichtete mittlere Abweichung der f_{ce} -Schwebungsfrequenz bei 946 nm von der Frequenz des Lokalszillators der Phasenregelung betrug lediglich $(0,21 \pm 2,1) \mu\text{Hz}$. Bezieht man diese Abweichung auf die Frequenz des DFG Kamms (946 nm \rightarrow 317 THz), so entspricht das einer relativen Abweichung der Moden des DFG-Kamms von ihrer erwarteten Position von $(0,66 \pm 6,6) \cdot 10^{-21}$.

Wie in Spalte 3 von Tabelle 3.2 zu sehen ist, war die Frequenzmessung durch den systematischen Fehler des Zählers begrenzt. Deshalb wurde versucht, die Genauigkeit des Frequenzvergleichs durch Messung der relativen Phase der beiden Schwebungen zu erhöhen. Üblicherweise verwendet man dazu einen Mischer als Phasendetektor. Durch die Verwendung nichtlinearer Bauteile (Dioden) erzeugt ein Mischer das Produkt zweier Eingangswellen $S_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ und $S_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$:

$$S_1(t) \cdot S_2(t) = \frac{A_1 A_2}{2} \{ \cos [(\omega_1 + \omega_2) t + \varphi_1 + \varphi_2] + \cos [(\omega_1 - \omega_2) t + \varphi_1 - \varphi_2] \}. \quad (3.3)$$

Ist ω_1 identisch bzw. *fast* identisch mit ω_2 und verwendet man einen Tiefpaßfilter, um den Summenfrequenzanteil zu unterdrücken, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$S_1(t) \cdot S_2(t) = \frac{A_1 A_2}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.4)$$

Torzeit [s]	mittl. Abweichung von 64 MHz [μ Hz]	syst. Fehler [μ Hz]	Gesamtfehler [μ Hz]	Anzahl der Meßpunkte
1	$+360 \pm 290$	500	580	1871
3	$+22 \pm 73$	170	190	1728
10	$-4,2 \pm 6,6$	50	50	1012
30	$+4,1 \pm 6,2$	17	18	198
100	$+8,4 \pm 2,6$	5	5,6	51
300	$+1,6 \pm 1,6$	1,7	2,3	13

$$\begin{aligned}
 \text{Abw. von 64 MHz (gew. Mittel)} &= (0,21 \pm 2,1) \mu\text{Hz} \\
 \text{rel. Genauigkeit bezogen auf 946 nm} &= (0,66 \pm 6,6) \cdot 10^{-21} \\
 \text{gesamte Meßzeit} &= 8 \text{ h } 55 \text{ m } 15 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Tabelle 3.2: Gesamtergebnis des f_{ce} -Frequenzvergleichs. Der angegebene systematische Fehler (Spalte 3) ist der „worst case“ systematische Fehler des Hewlett-Packard 53132A Zählers bei einer Frequenz von 5 MHz. Der Gesamtfehler (Spalte 4) ist das geometrische Mittel aus dem statistischen Fehler (Spalte 2) und dem systematischen Fehler.

Das Ausgangssignal eines Mischers ist also bei konstanten Amplituden A_1 , A_2 ein Maß für die relative Phase der beiden Eingangswellen. Ändern sich dagegen die Amplituden, so wird eine Phasenverschiebung vorgetäuscht, was sich teilweise dadurch verhindert läßt, daß der Mischer im Bereich der Sättigung betrieben wird. Da die Lichtleistung wegen Instabilitäten der PCF-Einkopplung zeitlich nicht konstant war, wurde nach einer Meßmethode gesucht, die weniger stark von Amplitudenschwankungen beeinflusst wird als ein Mischer. Dazu wurde ein XOR-Gatter⁷ verwendet, dessen Signale von einem Tiefpaß gefiltert wurden [HH]. Die Funktionsweise dieses Phasendetektors ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Da ein XOR-Gatter digitale Signale benötigt, wurden die beiden f_{ce} Schwebungen zuerst mit einem Komparator in Rechtecksignale umgewandelt. Ein Komparator hat zwei Schwellspannungen: ist die angelegte Spannung *größer* als die *obere* Schwellspannung, so wird TTL high ($> 2,4 \text{ V}$) ausgegeben; ist sie *kleiner* als die *untere* Schwellspannung, wird TTL low ($< 0,7 \text{ V}$) ausgegeben. Wegen der maximalen Frequenz, die das verwendete XOR-Gatter verarbeiten kann, wurden die Frequenzen der erzeugten Rechtecksignale noch durch 4 geteilt. Dazu wurden je zwei flankengesteuerte D-Flipflops verwendet. Der gesamte Aufbau zur Phasenmessung ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Die Versorgungsspannung des XOR-Gatters war dabei auf eine Referenzdiode stabilisiert.

Leistungsabhängige Phasenverschiebungen können bei diesem Aufbau auch auftreten, und zwar bei den Komparatoren, die die sinusförmigen Schwebungssignale in Rechtecksignale umwandeln. Ab den Komparatoren hat man dann nur noch TTL-Signale mit konstanter Amplitude. Um den elektronischen Aufbau auf Leistungsabhängigkeiten hin zu über-

⁷Exklusives Oder-Gatter; engl. Exclusive Or; Fairchild Semiconductor 74F86.

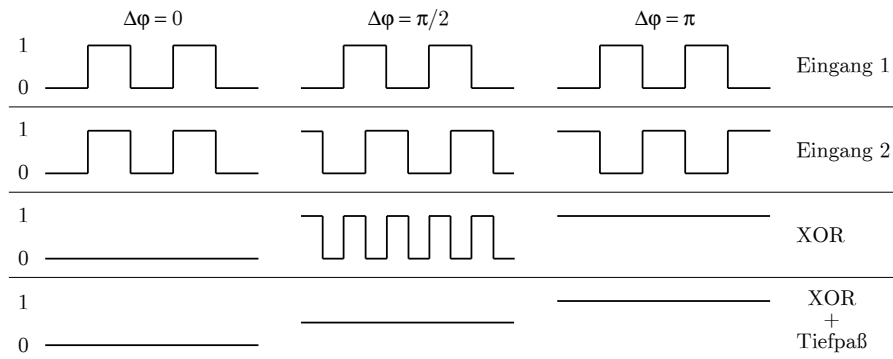


Abbildung 3.5: Funktionsweise eines XOR-Phasendetektors. Eine logische 1 (TTL high, $> 2,4 \text{ V}$) wird vom XOR-Gatter nur dann ausgegeben, wenn an genau einem der Eingänge eine logische 1 anliegt. In allen anderen Fällen wird eine logische 0 ausgegeben (TTL low, $< 0,7 \text{ V}$).

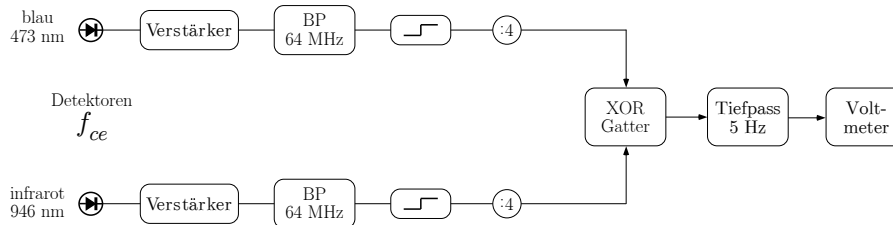


Abbildung 3.6: Elektronischer Aufbau zur Messung der relativen Phase der beiden f_{ce} -Schwebungen bei 946 nm bzw. 473 nm .

prüfen, wurde mit einem Frequenzgenerator ein 64 MHz Signal erzeugt und über einen Leistungsteiler an die Eingänge der Komparatoren angelegt (siehe Abbildung 3.6). Die relative Phase als Funktion der Leistung des Frequenzgenerators ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Diese Phasenverschiebung ist dabei nur der residuelle Effekt einer *gleichzeitigen* Leistungsänderung in beiden Kanälen. Eine stärkere Phasenverschiebung kann erwartet werden, wenn nur die an *einem* Komparator anliegende Leistung geändert wird. Das war aber experimentell leider nicht überprüfbar, weil es nicht möglich war, die Leistung eines Signals zu ändern, ohne dessen Phase auf einem Niveau von 10^{-3} Zyklen zu beeinflussen.

Um den Gesamtaufbau auf weitere systematische Effekte hin zu überprüfen, wurde der Einfluß der Temperatur des SFG/DFG-Kristalls auf die relative Phase der beiden f_{ce} -Schwebungen untersucht. Zwei beispielhafte Messungen dazu sind in Abbildung 3.8 dargestellt. Vor jeder Messung wurde die Justage optimiert, so daß vergleichbare Bedingungen herrschten. Dennoch änderte sich sowohl die Größe als auch das Vorzeichen von $\partial\varphi/\partial T$.⁸ Offenbar ist der Effekt stark von der Justage des optischen Aufbaus abhängig.

⁸Es wurden diejenigen Messungen ausgewählt, bei denen der Effekt besonders deutlich zu sehen war. Bei anderen Messungen war der Effekt schwächer.

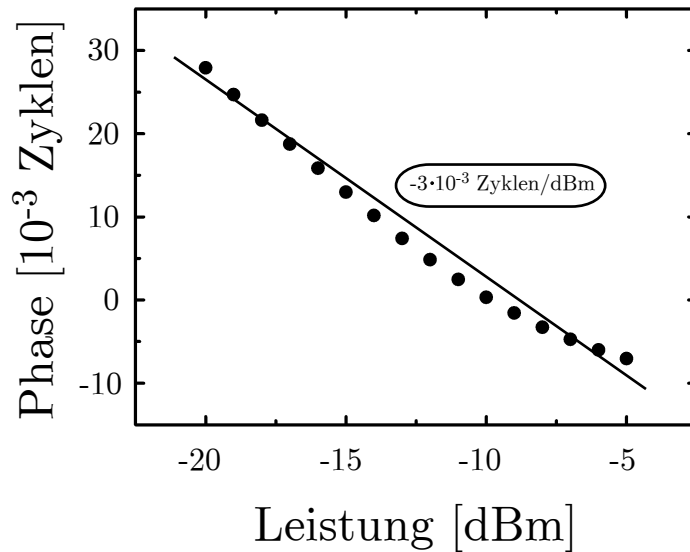


Abbildung 3.7: Leistungsabhängige Phasenverschiebung beim Detektionsprozeß der relativen Phase. Das 64 MHz Signal eines Frequenzgenerators wurde mit unterschiedlicher Leistung über einen Leistungsteiler an die Komparatoren in Abbildung 3.6 gegeben.

Die Phasenverschiebung ist dabei etwa 10 mal größer als man vom Längenausdehnungskoeffizient bzw. temperaturabhängigen Brechungsindex eines KNbO_3 -Kristalls her erwarten würde. Die Ursache dieses Effekts konnte nicht abschließend geklärt werden. Um den Einfluß der Kristalltemperatur auf die Phasenmessungen zu minimieren, wurde sie aktiv auf $25 \pm 0.1^\circ\text{C}$ stabilisiert.

Eine typische Phasenmessung ist in Abbildung 3.9 (links) dargestellt. Der mittlere Frequenzunterschied δf kann durch Anpassen einer Geraden an die Phasenwerte bestimmt werden. Die Testmessung in Abbildung 3.9 (links) scheint einen Unterschied der angelegten Frequenzen von $0,2 \mu\text{Hz}$ zu ergeben, der aber nicht echt sein kann, weil bei dieser Messung Signale *gleicher* Frequenz an die Eingänge beider Komparatoren angelegt wurden (siehe Abbildung 3.6). Diese Signale können leicht mit einem Synthesizer und einem Leistungsteiler erzeugt wurden. Der scheinbare Frequenzunterschied von $0,2 \mu\text{Hz}$ ist daher als obere Grenze der Meßgenauigkeit aufzufassen. Die eingezeichnete Gerade des f_{ce} Vergleichs deutet einem Frequenzunterschied der beiden Schwebungen von $7,7 \mu\text{Hz}$ an. Diese Phasendrift würde nach Abbildung 3.7 einer gleichzeitigen Leistungsänderung von weniger als 2 dB in 12,5 Minuten entsprechen, was im Bereich der experimentellen Parameter liegt. Der Frequenzunterschied wird daher wahrscheinlich von einer Änderung der Lichtleistung vorgetäuscht.

Falls bei einer Phasenmessung keine Zyklen verloren gehen, was für alle in dieser Arbeit vorgestellten Phasenmessungen gegeben war, so läßt sich aus den Daten die Allan-Varianz der f_{ce} -Schwebung bei 946 nm relativ zu der bei 473 nm berechnen. Dazu verwendet man

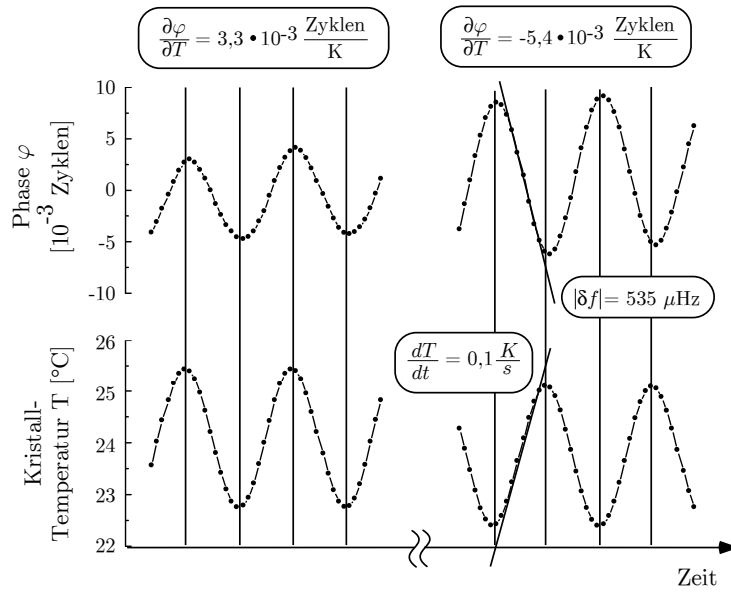


Abbildung 3.8: Phase φ der f_{ce} -Schwebung im infraroten Spektralbereich relativ zur f_{ce} -Schwebung im blauen Spektralbereich als Funktion der Temperatur des SFG/DFG-Kristalls. Vor jeder Messung wurde die Justage optimiert. Trotz vergleichbarer Bedingungen änderte sich die Größe und das Vorzeichen von $\partial\varphi/\partial T$. Die Natur dieses offenbar justageabhängigen Effektes konnte leider noch nicht geklärt werden.

Gleichung 2.36 auf Seite 38 und

$$f_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2\pi(t_{i+1} - t_i)} = y_i. \quad (3.5)$$

In diesem Fall ist es zulässig, benachbarte Meßpunkte zu mitteln, um dadurch eine Messung größerer Torzeit zu simulieren [Les83] (siehe dazu Seite 102). Die Allan-Varianz, die man mit den Daten aus Abbildung 3.9 (links) berechnet, ist in Abbildung 3.9 (rechts) dargestellt. Für eine Torzeit τ von 1 s ergibt sich eine auf die Frequenz des DFG-Kamms normierte Allan-Varianz von unter $2 \cdot 10^{-18}$, die wie $1/\tau$ abfällt, wie man es für kohärente Signale mit weißem Phasenrauschen erwartet. Die Abweichung von der Geraden bei langen Mittelungszeiten geht auf die Phasendriften zurück.

Die gemessene Allan-Varianz (Abbildung 3.9, rechts oben) spiegelt Rauschprozesse wieder, die bei der Erzeugung des SFG- bzw. DFG-Kamms *und* der Detektion bzw. Signalverarbeitung der Schwebungsfrequenzen auftreten.⁹ Das Frequenzrauschen des Originalkamms tritt bei dieser Messung nicht in Erscheinung. Desweiteren werden fast alle Längenänderungen, die durch Temperaturänderungen hervorgerufen werden und einen Frequenzunterschied der beiden f_{ce} -Schwebungen vortäuschen können, durch den f_{ce} -Phasenregelkreis ausgeglichen. Das gleiche gilt für Phasenverschiebungen, die durch die

⁹Fluktuationen, die in beiden nichtlinearen Prozessen genau gleich auftreten, heben sich heraus und können so nicht gemessen werden.

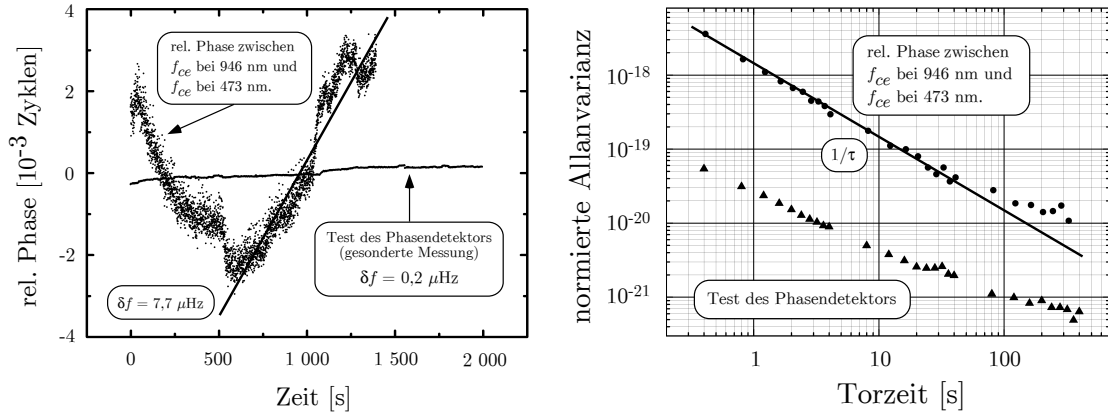


Abbildung 3.9: (Links) Phase der f_{ce} -Schwebung im infraroten Spektralbereich relativ zur f_{ce} -Schwebung im blauen Spektralbereich und Test des Meßsystems. (Rechts) Auf die optische Frequenz des DFG-Kamms ($946 \text{ nm} \rightarrow 317 \text{ THz}$) normierte Allan-Varianz der links dargestellten Daten.

temperaturabhängige Dispersion der mikrostrukturierten Glasfaser entstehen. Lediglich eine Änderung des Weglängenunterschieds vom KNbO_3 -Kristall zu den beiden Detektoren wird nicht durch den Phasenregelkreis kompensiert. Hat man beispielsweise einen Weglängenunterschied von 1 m , eine Temperaturänderung von 1 K/h , einen Längenausdehnungskoeffizienten von $2,4 \cdot 10^{-5}/\text{K}$ (Aluminium) und eine Frequenz von 64 MHz , so folgt daraus eine Frequenzänderung von etwa $1,5 \text{ nHz}$, die im Vergleich mit den Phasendriften in Abbildung 3.9 bzw. den Fehlern in Tabelle 3.2 vernachlässigt werden kann. Die hohe Unempfindlichkeit des optischen Aufbaus gegen Längenänderungen ist die Voraussetzung für die hohe Meßgenauigkeit, die in diesem Experiment erreicht werden konnte.

Die Ergebnisse der Phasenmessungen im Hinblick auf einem eventuellen Frequenzunterschied der f_{ce} Schwebungen sind in Tabelle 3.3 zusammengefaßt. Der mittlere Frequenzunterschied δf jeder Messung wurde dabei durch die Anpassung einer Geraden an die gemessenen Phasenwerte bestimmt. Die trotz der Driften relativ gute Übereinstimmung des Mittelwertes aller Messungen mit dem Ergebnis aus Tabelle 3.2 ist überraschend, aber wohl eher zufälliger Natur. Obwohl ein XOR-Phasendetektor verwendet wurde, haben die Phasenschwankungen, die wahrscheinlich durch Änderungen der Lichtleistung hervorgerufen wurden, eine Verbesserung des Fehlers im Vergleich zu den vorangegangenen Zählermessungen verhindert. Für die folgenden Überlegungen zur Genauigkeit nichtlinearer Prozesse wird daher das Ergebnis aus Tabelle 3.2 verwendet. In einem verbesserten Aufbau kann man den leistungsabhängigen Phasenverschiebungen dadurch vorbeugen, daß man die Lichtleistung im infraroten bzw. blauen Pfad nach dem Kristall stabilisiert. Darauf mußte aber wegen des festen Termins der anstehenden Wasserstoffmessung verzichtet werden (siehe Kapitel 5 ab Seite 81).

Die durchgeführten Phasenmessungen haben gezeigt, daß bei optischen Frequenzmessungen höchster Genauigkeit (z. B. für den Vergleich von Frequenzkammgeneratoren bzw. optischen Uhren) großen Wert auf die Konstanz möglichst vieler experimenteller Größen

Nummer der Messung	δf [μHz]	Meßzeit [s]
1	$0,5 \pm 0,4$	266
2	$0,5 \pm 0,4$	270
3	$0,3 \pm 0,5$	257
4	$-2,0 \pm 0,1 < 0$	739
5	$1,75 \pm 0,06 > 0$	1395
6	$85,0 \pm 0,6 > 0$	249
7	$-21,4 \pm 0,6 < 0$	285
8	$18,6 \pm 0,8 > 0$	231
9	$3,5 \pm 0,3 > 0$	428
Mittelwert	$(10 \pm 10) \mu\text{Hz}$	4120

Tabelle 3.3: Frequenzunterschied δf der beiden f_{ce} -Schwebungen im infraroten bzw. blauen Spektralbereich gemessen mit dem elektronischen Aufbau aus Abbildung 3.6. Der teilweise sehr deutliche Frequenzunterschied wird wahrscheinlich durch Leistungsschwankungen vorgetäuscht. Der ungewichtete Mittelwert aller Messungen ist $(10 \pm 10) \mu\text{Hz}$. Schließt man Messung 6 von der Auswertung aus, so ist der ungewichtete Mittelwert $(0,2 \pm 4,0) \mu\text{Hz}$. Diese Ergebnisse sind trotz der starken Driften vergleichbar mit denen aus Tabelle 3.2, aber nicht genauer.

gelegt werden muß. Die Lichtleistung ist dabei nur ein solcher Parameter, andere wichtige Größen sind die Strahlrichtung [Iva03a] bzw. die Temperatur des Aufbaus (siehe Abbildung 3.8). Was diese Punkte anbelangt, so sind Frequenzkammgeneratoren auf der Basis modengekoppelter Faserlaser den Ti:Saphir Systemen wahrscheinlich überlegen, so daß man sich durch einen Vergleich von zwei Fasersystemen einen genaueren Test der Frequenzkammtechnik erhofft (siehe Abschnitt 6.3 auf Seite 125).

3.2 Interpretation der Meßergebnisse

In diesem Abschnitt werden, die Meßergebnisse im Hinblick auf die Genauigkeit des SFG- bzw. DFG-Prozesses ausgewertet. Das heißt, es wird die Frage untersucht, in wie weit die beobachtete Frequenz nichtlinearer Produkte mit der erwarteten Frequenz übereinstimmt. Derartige Abweichungen von der Theorie nichtlinearer Prozesse bzw. letztendlich der Maxwell'schen Theorie des Elektromagnetismus scheinen auf den ersten Blick, sehr unwahrscheinlich zu sein. Wenn Abweichungen auftreten, werden sie mit Sicherheit sehr klein sein, weil ansonsten optische fs-Frequenzkammgeneratoren, bei denen nichtlineare Prozesse ausgenutzt werden, nicht auf einem Niveau von 10^{-16} übereinstimmen könnten [Hol00, Did02].¹⁰ Ob es aber auf einem Niveau von z. B. 10^{-20} immer noch keine Abwei-

¹⁰Es könnte natürlich auch der unwahrscheinliche Fall eintreten, daß zwei unabhängige fs-Frequenzkammgeneratoren mit großer Genauigkeit *denselben* Fehler machen.

chungen gibt, ist eine offene Frage. Berücksichtigt man lediglich die nichtlineare Polarisation von Medien, so ist man geneigt, diese Frage zu verneinen. Es sind aber durchaus Prozesse vorstellbar, die zu einer solchen Abweichung führen können. Denkbar ist z. B. die Kopplung von Gitterschwingungen (Phononen) an die optischen Felder, wodurch die Energie der Photonen erhöht oder erniedrigt werden kann. Dieser Prozeß steht dabei *nicht* im Widerspruch zur quantenmechanischen Theorie des Elektromagnetismus, er erfordert aber eine konsequente Anwendung derselben auch auf scheinbar unwahrscheinliche Prozesse. Die hohe Meßgenauigkeit, die durch die fs-Frequenzkammtechnik ermöglicht wird, erlaubt es, auch solchen subtilen Fragestellungen nachzugehen.

Um die Meßergebnisse auch auf eine mögliche Unregelmäßigkeit des Originalkamms hin auswerten zu können, wird die Frequenz seiner Moden folgendermaßen angesetzt:

$$f_{n_o} = f_{ce} + n_o f_r + \delta(n_o). \quad (3.6)$$

$\delta(n_o)$ ist eine beliebige Funktion, die eine eventuelle Abweichung der Modenfrequenz vom erwarteten Wert beschreibt. Für den SFG- bzw. DFG-Prozeß werden nach Referenz [Wyn95] die Abweichungsfunktionen $\delta_{SFG}(f_1, f_2)$ und $\delta_{DFG}(f_1, f_2)$ eingeführt:

$$f_{SFG}(f_1, f_2) = f_1 + f_2 + \delta_{SFG}(f_1, f_2) \quad \text{und} \quad (3.7)$$

$$f_{DFG}(f_1, f_2) = f_1 - f_2 + \delta_{DFG}(f_1, f_2) \quad \text{mit} \quad f_1 > f_2. \quad (3.8)$$

Im Falle der SFG sind f_1 und f_2 Frequenzen entsprechend 946 nm und im Falle der DFG sind f_1 und f_2 Frequenzen entsprechend 473 nm und 946 nm. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß sich die Abweichungsfunktionen innerhalb der Bandbreite der Prozesse nicht ändern. Die Frequenzen f_{SFG} bzw. f_{DFG} der Moden des SFG- bzw. DFG-Kamms ergeben sich dann zu

$$f_{SFG}(n_o) = 2f_{ce} + 2n_o f_r + 2\delta(n_o) + \delta_{SFG}(f_{946}, f_{946}) \quad \text{und} \quad (3.9)$$

$$f_{DFG}(n_o) = n_o f_r + \delta(2n_o) - \delta(n_o) + \delta_{DFG}(f_{473}, f_{946}). \quad (3.10)$$

Damit findet man für die beiden Schwebungsfrequenzen mit dem Originalkamm:

$$f_{ce,SFG}(n_o) = f_{ce} + 2\delta(n_o) - \delta(2n_o) + \delta_{SFG}(f_{946}, f_{946}) \quad \text{und} \quad (3.11)$$

$$f_{ce,DFG}(n_o) = f_{ce} + 2\delta(n_o) - \delta(2n_o) - \delta_{DFG}(f_{473}, f_{946}). \quad (3.12)$$

Im Experiment hat man $f_{ce,SFG}$ auf 64 MHz stabilisiert und $f_{ce,DFG}$ mit einem Zähler gemessen (siehe Abbildung 3.3). Dabei hat man allerdings nicht *ein* $f_{ce,SFG}(n_o)$ stabilisiert, sondern den Mittelwert aus allen Beiträgen, die nach der Bandbreite des SFG-Prozesses möglich sind. Bei einer Bandbreite von 3 nm bei 473 nm und einer Pulswiederholrate von 800 MHz tragen etwa 5 000 Beiträge zum Mittelwert bei. Entsprechendes gilt für die Messung von $f_{ce,DFG}$. Vergleicht man die Beziehungen 3.11 und 3.12 mit dem Ergebnis aus Tabelle 3.2, so erhält man:

$$\delta_{SFG}(f_{946}, f_{946}) + \delta_{DFG}(f_{473}, f_{946}) = 0,21 \pm 2,1 \mu\text{Hz}. \quad (3.13)$$

Wenn man die Unabhängigkeit des SFG- vom DFG-Prozeß voraussetzt, kann man aus Gleichung 3.13 folgern, daß die beiden nichtlinearen Prozesse mit einer relativen Genauigkeit von besser als $6,6 \cdot 10^{-21}$ operieren.¹¹ Das ist eine 100-fache Verbesserung gegenüber den Resultaten aus Referenz [Ste02] (siehe Abschnitt 3.3). Aus Gleichung 3.13 geht auch hervor, daß sich alle Terme herausheben, die eine Unregelmäßigkeit des Originalkammes beschreiben, weshalb darüber keine Aussage gemacht werden kann.

3.3 Vergleich mit anderen Experimenten

Zur Genauigkeit nichtlinearer Prozesse wurden bisher nur wenige Experimente durchgeführt. In frühen Experimenten (1962) wurde die Genauigkeit der SHG durch den Vergleich der n -ten Beugungsordnung der Fundamentalen mit der $2n$ -ten Ordnung der SHG getestet [Abe62, Boy62]. Damit konnte eine relative Genauigkeit von wenigen 10^{-6} erreicht werden.

In einem moderneren Experiment, dessen Aufbau in Abbildung 3.10 dargestellt ist, wurden Diodenlaser und Schwebungstechniken verwendet, um die Genauigkeit der SFG zu überprüfen [Wyn95]. Dazu wurde zunächst ein Diodenlaser auf eine Komponente der Cs D_2 Linie bei 852 nm stabilisiert. Dann wurde ein zweiter Diodenlaser relativ zum ersten in einem Frequenzabstand von $\Delta f = 830$ MHz phasenstabilisiert. Beide Laser wurden in einen KNbO₃ Kristall fokussiert, der für die SHG bzw. SFG von 852 nm Licht phasenangepaßt ist. In dem nichtlinearen Kristall wird nicht nur die SHG von Laser 1 und Laser 2 erzeugt (SFG₁₁ und SFG₂₂), sondern auch die Summenfrequenz SFG₁₂. Die Schwebungsfrequenz von SFG₁₁ und SFG₁₂ wurde mit einer Photodiode nachgewiesen, mit $830 \text{ MHz} + 0,5 \text{ Hz}$ gemischt und anschließend mit einem FFT¹²-Spektrumanalysator gemessen. Führt man wie auf Seite 59 die Abweichungsfunktion δ_{SFG} ein und entwickelt diese in eine Taylorreihe um die Frequenz von Laser 1, so erhält man in erster Ordnung für die vom Spektrumanalysator gemessene Frequenz f_{FFT} :

$$f_{FFT} = 0,5 \text{ Hz} + \varepsilon \cdot 830 \text{ MHz}. \quad (3.14)$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$\varepsilon \equiv \frac{\partial}{\partial f_a} \delta_{SFG}(f_a, f_b) = \frac{\partial}{\partial f_b} \delta_{SFG}(f_a, f_b) \quad (3.15)$$

verwendet, welche die Frequenzabhängigkeit von δ_{SFG} beschreibt.¹³ Jede Abweichung von f_{FFT} von $0,5 \text{ Hz}$ testet damit ε . Mit diesem Experiment konnte gezeigt werden, daß *frequenzabhängige* Terme in δ_{SFG} kleiner als $2,3 \cdot 10^{-13}$ sein müssen, während *frequenzunabhängige* Fehlerterme nicht überprüft werden konnten.

Das in Abbildung 3.11 dargestellte Experiment verwendet einen fs-Frequenzkammgenerator, um die Genauigkeit der SHG zu testen. Mit zwei Photodioden werden die Schwebungs-

¹¹Eventuelle Fehler von Radiofrequenz-Mischprozessen (siehe Abbildung 3.3 auf Seite 51) können an dieser Stelle vernachlässigt werden. Das gleiche gilt auch für die in Abschnitt 3.3 vorgestellten Experimente.

¹²engl. **F**ast **F**ourier **T**ransformation

¹³Die Schwebungsfrequenz von SFG₂₂ und SFG₁₂ führt ebenso auf Gleichung 3.14.

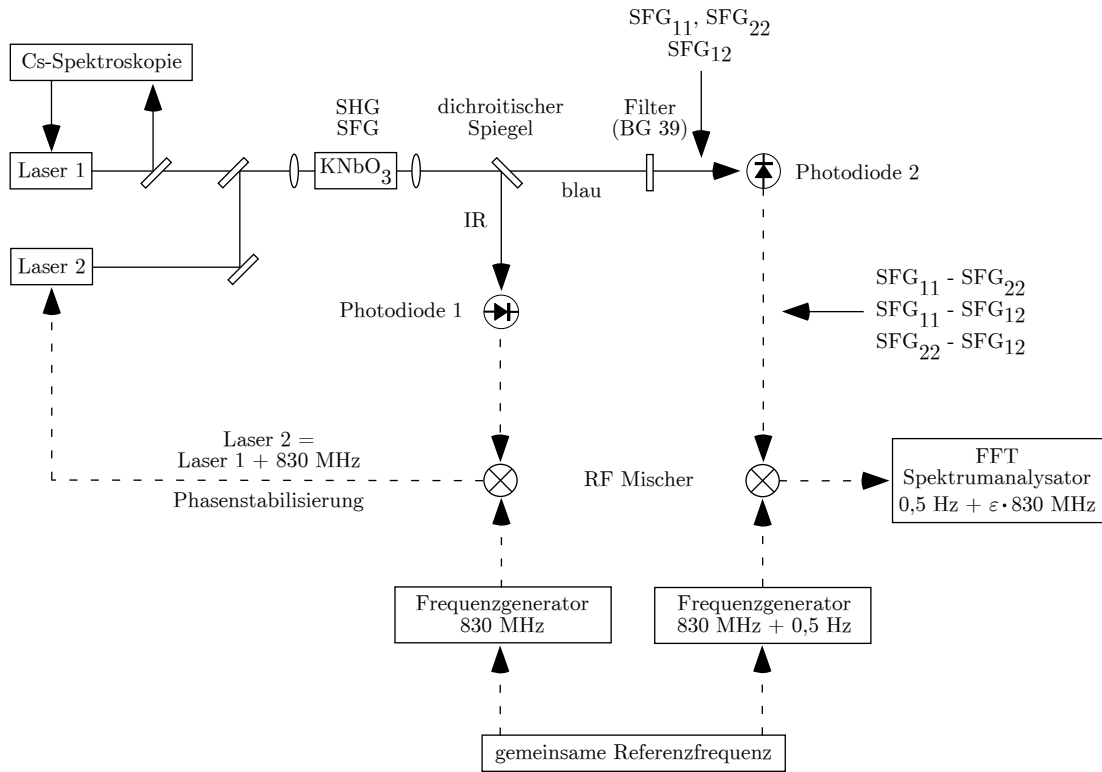


Abbildung 3.10: Experimenteller Aufbau zur Bestimmung der Genauigkeit der SHG nach Referenz [Wyn95]. Optische Pfade sind durchgezogen gezeichnet und elektronische Pfade sind unterbrochen.

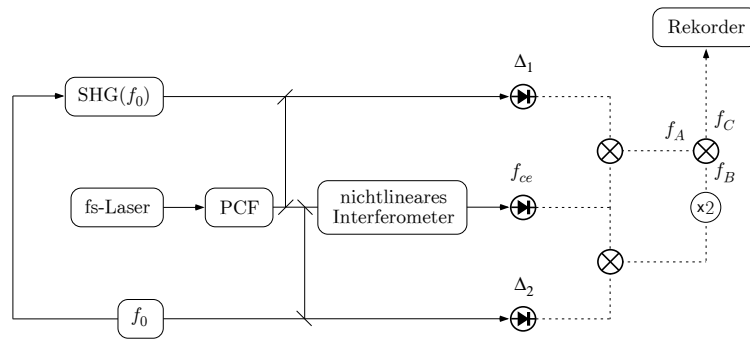


Abbildung 3.11: Experimenteller Aufbau zur Bestimmung der Genauigkeit der SHG nach Referenz [Ste02]. Optische Pfade sind durchgezogen gezeichnet und elektronische Pfade sind unterbrochen.

frequenzen Δ_1 und Δ_2 gemessen, die zwischen der SHG eines Lasers ($SHG(f_0)$) bzw. der Fundamentalen f_0 und einem oktavenbreiten Frequenzkamm entstehen:

$$SHG(f_0) = f_{ce} + 2nf_r + \Delta_1 \quad \text{und} \quad (3.16)$$

$$f_0 = f_{ce} + nf_r + \Delta_2. \quad (3.17)$$

Mit drei Mischern und einer RF-Frequenzverdopplung¹⁴ werden dann die folgenden Frequenzen erzeugt:

$$f_A = \Delta_1 + f_{ce}, \quad (3.18)$$

$$f_B = 2 \cdot (\Delta_2 + f_{ce}) \quad \text{und} \quad (3.19)$$

$$f_C = f_A - f_B = SHG(f_0) - 2f_0. \quad (3.20)$$

Mit dieser Technik konnte folgendes Ergebnis für das Frequenzverhältnis von SHG und Fundamentaler erzielt werden [Ste02]:

$$\frac{SHG(f_0)}{f_0} - 2 = (1 \pm 1.4) \cdot 10^{-18}. \quad (3.21)$$

Ein gemeinsames Problem aller vorgestellten Experimente zur Genauigkeit nichtlinearer Prozesse, ist die so genannte *common mode rejection*. Damit wird der Umstand beschrieben, daß der Vergleich zweier Meßgrößen, die beide einer *gleichartigen* Störung ausgesetzt sind, keinen Rückschluß mehr auf die Störung selbst zuläßt, weil diese sich in beiden Meßgrößen auf gleiche Weise widerspiegelt. Aus diesem Grund ist man bei dem in Abbildung 3.10 dargestellten Experiment [Wyn95], bei dem zwei Summenfrequenzen miteinander verglichen werden, lediglich auf frequenzabhängige Terme der Abweichungsfunktion δ_{SFG} empfindlich. Auch im Experiment, das in Abbildung 3.11 dargestellt ist [Ste02], werden zwei Summenfrequenzmischungen miteinander verglichen. Die erste ist die SHG von f_0 und die zweite ist im nichtlinearen Interferometer zur Bestimmung von f_{ce} enthalten. Man sollte daher denken, daß man auch in diesem Experiment lediglich auf frequenzabhängige Terme der Abweichungsfunktion δ_{SFG} empfindlich ist. Die Autoren von Referenz [Ste02] argumentieren aber, daß die Fehlermechanismen der beiden Summenfrequenzmischungen als unabhängig voneinander anzusehen sind, weil in einem Fall mehrere 1 000 Kammoden beteiligt sind und im anderen Fall nur eine einzelne Frequenz.

Bei dem in dieser Arbeit durchgeführten Experiment (siehe Abschnitt 3.1) wurden eine SFG und eine DFG mit Hilfe eines oktavenbreiten Frequenzkamms miteinander verglichen. Common mode rejection kann bei diesem Experiment nur dann auftreten, wenn man annimmt, daß die Fehlermechanismen von SFG und DFG derart korreliert sind, daß sich beide Fehler exakt aufheben. Denkt man z. B. an die Photon-Phonon-Streuung als mögliche Ursache für Frequenzabweichungen, so erscheint eine solche Korrelation wegen der unterschiedlichen Ausgangssituationen der Prozesse (SFG: 2 Photonen mit je 946 nm; DFG: ein Photon 473 nm und ein Photon 946 nm) als sehr unwahrscheinlich. Obwohl eine derartige Korrelation nicht völlig ausgeschlossen werden kann, ist es naheliegend, die beiden Fehlermechanismen als unabhängig voneinander anzusehen, wodurch ein Test von δ_{SFG} bzw. δ_{DFG} insgesamt und nicht nur der frequenzabhängigen Teile möglich ist.

¹⁴Dafür wurde ein *direct digital synthesis* (DDS) Schaltkreis mit 48 Bit Auflösung verwendet, dessen Ungenauigkeit vernachlässigt werden kann.

Um eventuelle Fehlermechanismen des SFG- bzw. DFG-Prozesses getrennt voneinander zu untersuchen, könnte man jeden Prozeß in einem eigenen Kristall durchführen.¹⁵ Dadurch hätte man aber das Problem, daß einige *optische* Weglängenänderungen, die durch Temperaturschwankungen auftreten können, *nicht* mehr durch den f_{ce} -Phasenregelkreis ausgeglichen werden. Da die Wellenlänge von Licht sehr viel kleiner ist als die von RF-Signalen, müßte man einen großen Aufwand treiben, damit solche unerwünschten Effekte nicht die Meßgenauigkeit begrenzen.

Die im Rahmen dieser Arbeit erzielten Ergebnisse zur Genauigkeit nichtlinearer Prozesse wurden in *Optics Letters* **29**, 310 (2004) veröffentlicht (siehe Anhang C auf Seite 139).

¹⁵Dadurch ist man natürlich nicht vollständig vor common mode rejection geschützt, denn möglicherweise kommt es in beiden Kristallen zu genau derselben Abweichung.

4. Zeitliche Veränderung von Naturkonstanten

Die Frage nach einer zeitlichen Veränderung von fundamentalen Naturkonstanten hat in den letzten Jahren großes Interesse hervorgerufen, weil Theorien, die eine quantisierte Beschreibung der Gravitation ermöglichen und damit Kandidaten für eine Theorie aller Wechselwirkungen sind, solche zeitlichen Änderungen zulassen [Dam03, Uza03]. Darüber hinaus gab es erste experimentelle Hinweise auf eine zeitliche Änderung von α [Web01, Mur03] und m_p/m_e [Iva03b]). Darauf folgenden Messungen ist es allerdings bisher nicht gelungen, die in [Web01, Mur03] gemessenen Effekte zu reproduzieren [Qua04, Sri04]. Ein breiter Überblick zum Thema der zeitlichen Veränderung von Naturkonstanten findet sich in Referenz [Uza03].

Fundamentale Naturkonstanten sind Parameter einer Theorie, die sich innerhalb der Theorie selbst nicht berechnen lassen, sondern experimentell bestimmt werden müssen. In diesem Zusammenhang ist beispielsweise die Masse eines ^{133}Cs Atoms im Grundzustand, obwohl konstant, nicht als *fundamentale* Naturkonstante zu bezeichnen, die Elektronenmasse dagegen schon. Welche der Naturkonstanten als fundamental angesehen werden, hängt offenbar vom gegenwärtigen physikalischen Weltbild ab und kann sich daher, wie das Beispiel der Feinstrukturkonstante zeigt, mit der Zeit ändern. Die beste Beschreibung der physikalischen Realität, die wir im Moment kennen, ist das sogenannte Standardmodell der Teilchenphysik (elektroschwache und starke Wechselwirkung) zusammen mit der Allgemeinen Relativitätstheorie (Gravitation). Dieser Theorienverbund enthält beispielsweise 20 fundamentale Naturkonstanten. Die meisten davon sind Massen von Teilchen. Wenn in einer Theorie freie Parameter existieren, ist das oft ein Hinweis auf die Unvollständigkeit dieser Theorie. Es besteht daher die Hoffnung, daß man die numerischen Werte von Naturkonstanten mit Hilfe einer allgemeineren Theorie berechnen kann. Um Hinweise auf die übergeordnete Theorie zu erhalten, wurde von einigen Physikern versucht, mathematische Ausdrücke für Naturkonstanten zu finden, die mit ihren experimentellen Werten im Einklang sind. Solche numerologischen Argumente inspirierten u. a. J. C. Maxwell dazu, die Theorien der elektrischen- und magnetischen Wechselwirkung zu vereinigen. Aber nicht immer waren solche „Zahlenspielerien“ von Erfolg gekrönt; ein bekanntes Beispiel dafür ist der Versuch von A. Eddington, den Wert der Feinstrukturkonstante α auszurechnen. Es könnte aber auch sein, daß sich in den Naturkonstanten die Anfangs- bzw. Randbedingungen unseres Universums widerspiegeln. Wenn das der Fall ist, dann besteht kaum Hoffnung, elegante mathematische Ausdrücke für die Naturkonstanten zu finden, in denen nur Zahlen wie π , e , 2 , $\sqrt{2}$, \dots auf einfache Weise miteinander verknüpft sind.

Naturkonstanten können in zwei Klassen eingeteilt werden: einheitenlose Konstanten und solche mit Einheiten. Einheitenlose Konstanten wie z. B. die Feinstrukturkonstante α

sind dabei von besonderem Interesse, weil ihr Zahlenwert offensichtlich unabhängig vom gewählten System der Einheiten ist.

Die ersten, die die Frage aufgeworfen haben, ob Naturkonstanten einer zeitlichen Änderung unterliegen, waren E. A. Milne und P. A. M. Dirac [Mil37, Dir37]. Dirac hat 1937 in seiner *large number hypothesis* LNH vermutet, daß die Gravitationskonstante G vom Alter des Universums und damit von der Zeit abhängt. Dazu hat Dirac zwei einheitenlose Ausdrücke N_1 und N_2 betrachtet, die einen sehr großen numerischen Wert haben: das Verhältnis aus der Coulomb-Kraft F_C zwischen Proton und Elektron und deren gravitativer Kraft F_G und das Verhältnis aus dem Alter des Universums t_u und einer *atomaren* Zeitskala t_a , die aus den Naturkonstanten e , m_e und c_0 gebildet werden kann. Die atomare Zeitskala $t_a = e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c_0^3)$ ist gerade die Zeit, die das Licht benötigt, um die Länge eines klassischen Elektronenradius $r_0 = e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c_0^2)$ zu durchlaufen. Dabei ist G die

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{F_C}{F_G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{G m_e m_p} \approx 2 \cdot 10^{39} \\ N_2 &= \frac{t_u}{t_a} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{t_u}{e^2/(m_e c_0^3)} \approx 5 \cdot 10^{40} \end{aligned}$$

Gravitationskonstante, m_e und m_p die Massen von Elektron und Proton, c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit, e die Elementarladung und ϵ_0 die elektrische Feldkonstante.¹ Für das Alter des Universums von 13,7 Milliarden Jahren wurden die Ergebnisse der WMAP-Mission verwendet.² Dirac war der Ansicht, daß großen Zahlen wie z. B. $N_1 \approx 2 \cdot 10^{39}$ oder der Masse des Universums in Einheiten der Protonenmasse $\approx 10^{78}$, die in einer physikalischen Theorie vorkommen, keine Bedeutung zukommt, sondern daß diese sich schreiben lassen als $\gamma_1 \cdot N_2$, $\gamma_2 \cdot N_2^2$, \dots , wobei sich die „einfachen“ numerischen Vorfaktoren γ_i aus einer alles umfassenden Theorie ableiten lassen. Den numerischen Faktoren γ_i , von denen erwartet wird, daß sie in der Größenordnung von 1 sind, kommt dabei die eigentliche physikalische Bedeutung zu. Für N_1 würde das $N_1 = \gamma_1 \cdot N_2$ bedeuten, wobei $\gamma_1 \approx 0,04$ eine Zahl ist und daher insbesondere nicht von der Zeit abhängt. Da das Alter des Universums t_u eine zeitlich ansteigende Größe ist, muß die Gravitationskonstante G bei als konstant angenommenen c_0 , e , m_e , m_p und ϵ_0 mit der Zeit kleiner werden. Die Wahl, welche der Naturkonstanten als zeitlich unveränderlich angenommen werden, ist offensichtlich willkürlich. Nimmt man die LNH ernst, so folgt daraus eine zeitliche Änderung der Gravitationskonstante von $\dot{G}/G \approx -10^{-10}$ pro Jahr. Obwohl eine zeitliche Änderung von G in dieser Größenordnung mittlerweile experimentell ausgeschlossen werden kann (siehe Tabelle IV auf Seite 55 in Referenz [Uza03]) und die LNH sehr spekulativ ist, so hat sie dennoch den Anstoß zu einer großen Zahl experimenteller und theoretischer Untersuchungen zum Thema der zeitlichen Veränderung fundamentaler Naturkonstanten gegeben (siehe [Uza03]).

Die Messung der zeitlichen Änderung *einheitenbehafteter* Naturkonstanten (wie z. B. der Elementarladung $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ C) unterliegt anders als bei einheitenlosen Konstanten

¹Es gilt: $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$ und $\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A².

²1937, als Dirac seine LNH formulierte, wurde allgemein $t_u \approx 2 \cdot 10^9$ Jahre bzw. $N_2 \approx 7 \cdot 10^{39}$ angenommen.

einem konzeptionellen Problem. Falls eine zeitliche Veränderung erfolgreich und reproduzierbar gemessen wurde, kann man nicht unterscheiden, ob sich die Naturkonstante selbst verändert hat oder die physikalische Einheit, die mit ihr verbunden ist, oder beide. Ein besonders drastisches Beispiel dafür sind absolute Massenmessungen. Die Masseneinheit Kilogramm ist die einzige Einheit, die auch heute noch durch ein Artefakt (Urkilogramm) und nicht durch eine atomare Größe festgelegt ist. Da das Urkilogramm einer regelmäßigen Reinigung unterzogen wird, ändert sich seine Masse geringfügig, d. h. sie ändert sich *nicht*, weil sie definiert ist, aber eine relativ zu ihr gemessene Masse z. B. die Elektronenmasse m_e *erscheint* daher zeitabhängig. So gesehen, ist nur die zeitliche Änderung *einheitenloser* Naturkonstanten bzw. Verhältnissen von Naturkonstanten überhaupt einer Messung zugänglich. Die Feinstrukturkonstante α (siehe Abschnitt 4.1) und das Massenverhältnis von Proton und Elektron $\mu_0 = m_p/m_e = 1\,836,152\,672\,61(85)$ (CODATA 2002) fanden und finden in diesem Zusammenhang besondere Beachtung.

Würde eine zeitliche Änderung von Naturkonstanten experimentell bestätigt werden, so hätte dies weitreichende Konsequenzen für die Physik wie wir sie heute kennen, weil das sogenannte Einstein'sche Äquivalenzprinzip (EEP³) eine zeitliche Veränderung nichtgravitativer Naturkonstanten wie z. B. der Feinstrukturkonstante α verbietet. Das EEP ist das Grundgerüst aller metrischen Gravitationstheorien inklusive der allgemeinen Relativitätstheorie und damit von grundlegender Bedeutung; es besteht aus den folgenden drei Annahmen:

- Universalität des freien Falls (UFF)

In einem Gravitationsfeld durchlaufen alle strukturlosen punktförmigen Teilchen, die am gleichen Ort mit der gleichen Geschwindigkeit starten, den gleichen Weg.

- lokale Lorentz-Invarianz (LLI)

Das Ergebnis jeder nichtgravitativen Messung ist unabhängig von der Geschwindigkeit des Bezugssystems, in dem das Labor ruht.

- lokale Positions-Invarianz (LPI)

Das Ergebnis jeder nichtgravitativen Messung ist unabhängig vom Ort und der Zeit innerhalb des Bezugssystems.

Betrachtet man LLI und LPI als gültig, so ist jede zeitliche Veränderung nichtgravitativer Naturkonstanten verboten. Der experimentelle Nachweis einer solchen zeitlichen Veränderung wäre somit ein Hinweis auf *neue Physik*.

Eine zeitliche Veränderung von Naturkonstanten muß dabei nicht notwendiger Weise linear mit der Zeit verlaufen. Andere Möglichkeiten, die in diesem Zusammenhang diskutiert werden, sind ein asymptotisches Verhalten oder eine Oszillation. Da man kein Modell für die zeitliche Veränderung hat, müssen alle Möglichkeiten in Betracht gezogen werden.

³engl. Einstein equivalence principle

4.1 Die Feinstrukturkonstante α

Da sich die folgenden Abschnitte intensiver mit der zeitlichen Veränderung der Feinstrukturkonstante beschäftigen, sind an dieser Stelle einige Informationen zu ihr zusammengetragen.

Die Feinstrukturkonstante wurde 1917 von A. Sommerfeld eingeführt, um die Feinstrukturaufspaltung des Wasserstoffspektrums aufgrund der Spin-Bahn-Wechselwirkung beschreiben zu können. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c_0} \approx \frac{1}{137} \quad (4.1)$$

$$\alpha^{-1} = 137,03599911(46) \quad \text{CODATA 2002} \quad (4.2)$$

Der CODATA⁴-Wert hat eine relative Genauigkeit von $3,3 \cdot 10^{-9}$. Später wurde klar, daß die so definierte Feinstrukturkonstante nicht nur eine spektroskopische Hilfsgröße ist, sondern vielmehr die Kopplungskonstante der elektromagnetischen Wechselwirkung. Ein wichtiger Aspekt für diese Arbeit ist die Tatsache, daß die Feinstrukturkonstante eine einheitenlose Zahl ist, deren zeitliche Veränderung nach dem vorher gesagten einer Messung zugänglich ist.

Die relative Genauigkeit des CODATA 2002 Wertes legt nahe, daß man mit zwei Messungen von α im Abstand eines Jahres eine Empfindlichkeit von bestenfalls $\sqrt{2} \cdot 3,3 \cdot 10^{-9}/\text{Jahr} \approx 5 \cdot 10^{-9}/\text{Jahr}$ erreichen kann. Für den Nachweis einer zeitlichen Änderung ist eine Absolutmessung von α aber nicht notwendig. Dafür ist es ausreichend, eine Größe, die auf definierte Weise von α abgehängt, im Laufe der Zeit zu messen. Wegen der hohen Meßgenauigkeit eignet sich dazu besonders die Messung von Frequenzen bzw. Frequenzverhältnissen im Radiofrequenzbereich und, dank der Frequenzkammtechnik, auch im optischen Spektralbereich. Mit solchen Frequenzvergleichen können Empfindlichkeiten für eine relative zeitliche Änderung von α im Bereich von $10^{-15}/\text{Jahr}$ erreicht werden (siehe Abschnitt 5.4 auf Seite 113).

Experimente an Teilchenbeschleunigern haben gezeigt, daß α von der Energie der betrachteten Prozesse abhängt. So ist bei einer Energie von 91 GeV $\alpha^{-1} \approx 128$ [Pes95, Bur01]. Im Gegensatz dazu wird im Rahmen dieser Arbeit die Feinstrukturkonstante lediglich im Grenzwert verschwindender Energie betrachtet.

Die Feinstrukturkonstante hat viele Physiker fasziniert, weil sie die drei fundamentalen Konstanten e , h und c_0 in sich vereint, die in den Theorien des Elektromagnetismus, der Quantenmechanik und der Relativitätstheorie von großer Bedeutung sind. Etwas pathetisch gesprochen kann man die Feinstrukturkonstante deshalb als ein Destillat der modernen Physik bezeichnen.

⁴Engl. **Committee on Data** for Science and Technology; homepage <http://www.codata.org>; CODATA bestimmt aus allen experimentellen Ergebnissen die wahrscheinlichsten Werte der Naturkonstanten und der dazugehörigen Fehler.

Falls eine zeitliche Änderung von α nachgewiesen würde, stellt sich die Frage, welche der drei Konstanten e , h oder c_0 für diese Änderung verantwortlich ist. Dabei kann sich natürlich auch mehr als eine Konstante ändern. Von vielen Physikern wird aber angenommen, daß h und c_0 nicht von der Zeit abhängen und daher fundamentale *Konstanten* im eigentlichen Sinne sind, weshalb eine zeitliche Änderung von α eine zeitliche Änderung von e widerspiegeln würde. Wie bereits erwähnt, ist diese Vermutung experimentell nicht überprüfbar, weil die drei Konstanten mit Einheiten behaftet sind. Besonders kompliziert ist der Fall der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 , deren Wert seit 1983 definiert ist und sich daher nicht mit der Zeit ändern kann. Statt einer Änderung von c_0 würde man daher Änderungen mit ihr verbundener Größen, wie z. B. von Längenmaßstäben, beobachten.

Es gab in der Geschichte viele ernsthafte Versuche, einen mathematischen Ausdruck für die Feinstrukturkonstante α zu finden. Diese Bemühungen entsprangen dem Glauben, daß α im Rahmen einer unbekannteren übergeordneten Theorie keine Naturkonstante mehr ist, sondern berechnet werden kann. Die Feinstrukturkonstante war und ist aber auch Anziehungspunkt für Numerologen, die ohne physikalische Motivation einen Reiz in der Entwicklung einfacher Formeln für α sehen. Einige bemerkenswerte Ausdrücke für α sind in Tabelle 4.1 zusammengestellt. Keiner dieser Ausdrücke ist jedoch mit dem CODATA-Wert von 2002 verträglich.

Autor	$\alpha^{-1} = \dots$	$\frac{\alpha^{-1} - \alpha_0^{-1}}{\alpha_0^{-1}}$	Referenz
Lewis 1914	$8\pi\left(\frac{8\pi^5}{15}\right)^{1/3} = 137,348\dots$	$2,3 \cdot 10^{-3}$	[Kra03]
Eddington 1929	$\frac{16^2-16}{2} + 16 = 136$	$-7,6 \cdot 10^{-3}$	[Edd35]
Heisenberg	$2^4 3^3 \frac{1}{\pi} = 137,509\,87\dots$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	[Fri02]
Wyler 1969	$\frac{8\pi^4}{9} \left(\frac{\pi^5}{2^4 5!}\right)^{-1/4} = 137,036\,08\dots$	$6,1 \cdot 10^{-7}$	[Wyl69]
Reilly 1971	$4\pi^3 + \pi^2 + \pi = 137,036\,30\dots$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	[Phy71]
Giaever 1971	$(5/2)^{1/2} 2^{3/2} e^4 = 137,03597\dots$	$-1,7 \cdot 10^{-7}$	[Phy71]
Weisstein 2003	$44\pi - \cos^{-1}(e^{-1}) = 137,036\,00\dots$	$6,4 \cdot 10^{-8}$	[WWW]
Plouffe 1999	$96(e^{1/2} + 2^{1/3})^{1/3} = 137,035\,999\,777\dots$	$4,9 \cdot 10^{-9}$	[Plo99]
Gilson 2001	$\frac{\pi}{29 \cos(\frac{\pi}{137}) \tan(\frac{\pi}{137 \cdot 29})} = 137,035\,999\,787\dots$	$4,9 \cdot 10^{-9}$	[Gil01]

Tabelle 4.1: *Einige Versuche, die Feinstrukturkonstante α mathematisch zu berechnen. $e = 2,718\,281\,828\,459\dots$ ist die Euler'sche Zahl und $\alpha_0^{-1} = 137,035\,999\,11(46)$ ist der CODATA-Wert von 2002, der eine relative Genauigkeit von $3,3 \cdot 10^{-9}$ besitzt.*

4.2 Experimentelle Methoden zur Suche einer zeitlichen Veränderung von Naturkonstanten

Bei der experimentellen Suche nach einer zeitlichen Veränderung von Naturkonstanten geht man im allgemeinen so vor, daß man eine physikalische Größe $\Theta(\gamma_1, \dots, \gamma_n, t)$ betrachtet, die in einer bestimmten Weise von verschiedenen Naturkonstanten γ_i mit ($i = 1, \dots, n$) abhängt. Dabei werden alle γ_i als zeitabhängige Größen betrachtet. Eine wiederholte Messung von Θ zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 führt auf $\Delta\Theta/\Delta t$ mit $\Delta t = t_1 - t_2$. Das Problem ist nun, von $\Delta\Theta/\Delta t$ auf die zeitlichen Änderungen $\Delta\gamma_i/\Delta t$ der *einzelnen* Naturkonstanten γ_i im Zeitraum Δt zu schließen. Betrachtet man nur *eine* Größe Θ , so ist das nur dann möglich, wenn man Annahmen über die zeitliche Änderung der Naturkonstanten γ_i macht. Die radikalste Annahme ist dabei, daß alle Konstanten bis auf eine *nicht* von der Zeit abhängen. Im Abschnitt 5.4 ab Seite 113 wird jedoch gezeigt werden, wie man durch eine Kombination mehrerer Messungen die zeitliche Änderung *einzelner* Naturkonstanten bestimmen kann, *ohne* einschränkende Annahmen machen zu müssen.

Aufgrund der Bedeutung einer zeitlichen Änderung von Naturkonstanten für die Physik im Ganzen wird mit vielen unterschiedlichen Methoden danach gesucht, die sich grob in drei Bereiche einteilen lassen:

- Atomphysik: Quasar-Absorptionsspektroskopie⁵, Uhrenvergleiche, Untersuchungen zum kosmischen Mikrowellenhintergrund, ...
- Kernphysik: Kernerntstehung, α - und β -Zerfall, Lebensdauern, Wirkungsquerschnitte, Häufigkeiten und Verhältnisse von Isotopen (Oklo-Reaktor), ...
- Gravitationsphysik: Sternentstehung, Tests zur Universalität des freien Falls (UFF), ...

Vermutet man eine *lineare* Veränderung der Naturkonstanten mit der Zeit, so sind neben der Forderung, daß Θ eine starke Abhängigkeit von der interessierenden Naturkonstante γ_i haben soll, zwei weitere Eigenschaften für eine Messung wünschenswert:

- eine große Zeitspanne Δt zwischen den beiden Messungen⁶ und
- eine hohe Meßgenauigkeit der zu messenden Größe Θ .

⁵Auch *molekulare* Übergänge können mit der Quasar-Absorptionsspektroskopie untersucht werden. Weil die Massen von Proton und Elektron in die Rotations- bzw. Schwingungsübergänge des H_2 -Moleküls eingehen, lassen sich aus dessen Absorptionslinien Informationen über eine zeitliche Änderung des Massenverhältnisses von Proton und Elektron gewinnen [Iva03b].

⁶Bei einem *oszillatorischen* Verhalten der Frequenz $f \gg 1/\Delta t$ ist eine große Zeitspanne allerdings von Nachteil. Messungen mit einer größeren Zeitaufösung sind in diesem Fall günstiger (siehe Tabelle 4.2).

Der erste Punkt wird in idealer Weise durch astronomische Beobachtungen verwirklicht. Eine Methode, die in den letzten Jahren spektakuläre Ergebnisse geliefert hat, ist die astronomische Absorptionsspektroskopie, die das Licht entfernter Quasare untersucht, das auf dem Weg zur Erde in interstellaren Gaswolken teilweise absorbiert wurde. Die Zeitdifferenz zwischen Absorption und Nachweis auf der Erde kann einige Milliarden Jahre betragen [Mur03, Iva03b, Qua04, Sri04]. Einen großen Zeitunterschied nutzt man auch bei der Analyse des sogenannten *Oklo-Reaktors* aus [Shl76, Dam96, Fuj00]. Das ist eine Ansammlung natürlicher Kernreaktoren, die vor ca. 2 Milliarden Jahren am Ort der heutigen Oklo-Mine in Gabun (Afrika) aktiv waren. Durch die während der Reaktor-Phase abgelaufenen Kernreaktionen wurde die Häufigkeit einiger Isotope (^{149}Sm , $^{155,157}\text{Gd}$) meßbar verändert. Diese Häufigkeitsänderungen können berechnet werden, wenn man die Reaktorbedingungen und die *damaligen* Werte der Naturkonstanten verwendet. Eine andere kernphysikalische Methode bestimmt die Lebensdauer langlebiger Isotope (^{187}Re), die man in Meteoriten finden kann, und leitet damit den Wert der Feinstrukturkonstanten vor ca. 4,6 Milliarden Jahren her [Oli04].

Den zweiten Punkt nutzen Labormessungen aus. Da Frequenzen bzw. Zeitintervalle am genauesten gemessen werden können, sind Uhrenvergleiche die Methode der Wahl. Dank der Frequenzkammtechnik können die Frequenzen der zu vergleichenden Uhren sowohl dem Mikrowellen- bzw. Radiofrequenzbereich als auch dem optischen Spektralbereich angehören. Die im Vergleich zu astronomischen Methoden sehr viel größere Meßgenauigkeit wird dabei durch eine relativ kleine Zeitdifferenz von 1-10 Jahren erkauft, die aber im Falle einer schnellen Schwingung nicht von Nachteil ist. Wie in Tabelle 4.2 gezeigt ist, sind die erreichbaren Empfindlichkeiten von astronomischen Beobachtungen bzw. Labormessungen auf eine lineare zeitliche Änderung von Naturkonstanten aber durchaus vergleichbar. Labormessungen haben gegenüber astronomischen Beobachtungen den entscheidenden Vorteil, daß sie eine gute Kontrolle systematischer Effekte ermöglichen. Darüber hinaus haben sie eine größere Zeitauflösung, wodurch auch schnellere Änderungen von Naturkonstanten nachgewiesen werden können. Es ist jedoch möglich, daß sich Naturkonstanten lediglich vor langer Zeit geändert haben und dies heute nicht mehr tun. In diesem Fall muß man Methoden anwenden, die eine große Zeitspanne überblicken, was nur bei astronomischen- bzw. geologischen Messungen der Fall ist.

Im folgenden werden Quasar-Absorptionsspektroskopie und Uhrenvergleiche eingehender behandelt. Beide Methoden nutzen die Abhängigkeit atomarer Übergangsfrequenzen von der Feinstrukturkonstante aus, um eine zeitliche Veränderung derselben nachzuweisen.⁷

4.2.1 Elektromagnetische Übergangsfrequenzen als Funktion der Feinstrukturkonstanten

Die Frequenz atomarer-, ionischer- und molekularer Übergänge ist eine Funktion mehrerer Naturkonstanten darunter auch die Feinstrukturkonstante α . Im folgenden sollen lediglich Übergänge in Atomen bzw. atomaren Ionen betrachtet werden. Je nach dem, ob es

⁷ α ist nicht die einzige Naturkonstante, deren zeitliche Änderung man mit den beiden Methoden untersuchen kann, aber auf α darauf soll im folgenden der Schwerpunkt liegen.

Quasar-Absorptionsspektroskopie	Uhrenvergleiche
$\Delta\alpha$ vor 10^{10} Jahren	$\Delta\alpha$ heute
Δt groß (10^{10} Jahre)	Δt klein (10 Jahre)
rel. Genauigkeit 10^{-6}	rel. Genauigkeit 10^{-15}
Empfindlichkeit 10^{-16} pro Jahr	Empfindlichkeit 10^{-16} pro Jahr
nur „langsame“ Änderungen	auch „schnelle“ Änderungen
phys. Bedingungen in Gaswolken?	definierte Bedingungen
schlechte Kontrolle von systematischen Effekten (interstellare Gaswolken)	gute Kontrolle von systematischen Effekten (Labor)
komplizierte Auswertung	einfache Auswertung

Tabelle 4.2: *Experimentelle Suche nach einer zeitlichen Veränderung der Feinstrukturkonstante α : Quasar-Absorptionsspektroskopie vs. Uhrenvergleiche. Uhrenvergleiche bieten in einigen Punkten Vorteile.*

sich um Übergänge zwischen Hauptquantenzahlen (h), Feinstruktur- (fs) oder Hyperfeinstrukturübergänge (hfs) handelt, ist die Abhängigkeit der Übergangsfrequenz von den Naturkonstanten unterschiedlich. In der folgenden Liste sind die Abhängigkeiten in führender Ordnung angegeben [Sav56,Pre95a,Dzu99a]:

$$f_h = A_h R_\infty c_0 \cdot F_{rel,h}(Z\alpha) \quad (4.3)$$

$$f_{fs} = A_{fs} R_\infty c_0 \cdot \alpha^2 F_{rel,fs}(Z\alpha) \quad (4.4)$$

$$f_{hfs} = A_{hfs} R_\infty c_0 \cdot \alpha^2 F_{rel,hfs}(Z\alpha) \cdot \frac{\mu}{\mu_B} \quad (4.5)$$

Dabei ist Z die Kernladungszahl und A_h , A_{fs} und A_{hfs} sind numerische Ausdrücke, in denen lediglich Quantenzahlen und keine Naturkonstanten enthalten sind. μ/μ_B ist das magnetische Moment des jeweiligen Kerns in Einheiten des Bohr'schen Magnetons $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ und R_∞ ist die Rydbergkonstante, die folgendermaßen definiert ist:

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c_0} = \frac{m_e e^2}{4\varepsilon_0 h^2} \cdot \alpha \quad (4.6)$$

$$R_\infty = 10\,973\,731,568\,525\,(73)\,\text{m}^{-1} \quad \text{CODATA 2002.} \quad (4.7)$$

In den Termen $F_{rel,\dots}(Z\alpha)$ werden relativistische Korrekturen und Vielteilcheneffekte zusammengefaßt, die eine weitere Abhängigkeit von α enthalten. Sowohl A_{\dots} als auch $F_{rel,\dots}$ ist von dem betrachteten Übergang abhängig. Für das Wasserstoffatom in Bohr'scher Näherung gilt beispielsweise $A_h = \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}$ und $F_{rel,h}(\alpha) = 1$. Im Fall von Mehrelektronenatomen sind die Verhältnisse erwartungsgemäß komplizierter. In den Referenzen [Dzu99a, Dzu99b, Dzu00, Fla04] wird die Berechnung der Korrekturen beschrieben und

konkrete Zahlenwerte für bestimmte Übergänge angegeben. Molekulare Rotations- bzw. Schwingungsübergänge weisen im Vergleich zu den aufgeführten Übergängen eine zusätzliche Abhängigkeit vom Verhältnis m_p/m_e der Protonen- und Elektronenmasse auf [Tho75].

Jede Messung einer Einheiten-behafteten Größe ist allgemein die Bestimmung der zu messenden Größe in *Einheiten* des Standards, der bei der Messung zum Vergleich herangezogen wird. Das bedeutet: das Ergebnis einer jeden Messung ist eine einheitenlose Zahl, die gerade das Verhältnis der zu messenden Größe und des verwendeten Standards darstellt. Auf diese Weise ist auch jede Frequenzmessung das Verhältnis zweier Frequenzen: der zu messenden Frequenz und der Bezugsfrequenz, wobei als solche oft die Frequenz einer Cs-Uhr verwendet wird. Da die Zeiteinheit Sekunde seit 1967 mit Cs-Uhren dargestellt wird, tragen solche Frequenzvergleiche bzw. alle diejenigen, die sich auf die Cs-Frequenz zurückführen lassen, die Einheit Hz (Absolutfrequenzmessungen). Aus den Gleichungen 4.3, 4.4 und 4.5 lassen sich nun drei Arten von Verhältnissen bilden:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\text{Hauptquantenübergang oder Feinstrukturübergang}}{\text{Hauptquantenübergang oder Feinstrukturübergang}} = \text{Fkt}(\alpha), \\
 (2) \quad & \frac{\text{Hauptquantenübergang oder Feinstrukturübergang}}{\text{Hyperfeinübergang}} = \text{Fkt}\left(\frac{\mu}{\mu_B}, \alpha\right), \\
 (3) \quad & \frac{\text{Hyperfeinübergang}}{\text{Hyperfeinübergang}} = \text{Fkt}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}, \alpha\right).
 \end{aligned}$$

μ , μ_1 und μ_2 sind dabei die magnetischen Momente der jeweiligen Kerne. Bei der Verhältnissbildung heben sich die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 und die Rydbergkonstante R_∞ heraus, so daß sich ihre zeitliche Änderung bei keiner Frequenzmessung bemerkbar machen kann. Die Verhältnisse der ersten Kategorie sind Funktionen von α allein. Eine zeitliche Beobachtung derselben gibt deshalb *direkt* Aufschluß über eine zeitliche Änderung von α . Die Verhältnisse der zweiten Kategorie sind Funktionen von α und μ/μ_B , so daß man durch die Beobachtung *eines* dieser Verhältnisse lediglich Informationen über die Änderung einer *Kombination* von α und μ/μ_B erhält. Wie in Abschnitt 5.4 auf Seite 113 noch gezeigt werden wird, kann die gleichzeitige Messung *zweier* Frequenzverhältnisse der zweiten Kategorie, deren relativistische Korrekturen unterschiedlich sind und die sich auf den selben Hyperfeinübergang beziehen, Aufschluß über eine zeitliche Veränderung von α und μ/μ_B geben. Bei der dritten Kategorie schließlich ist α und das Verhältnis zweier Kernmomente beteiligt. Für die Auswertung gilt das gleiche wie bei der zweiten Kategorie. In der Quasar-Absorptionsspektroskopie werden Frequenzverhältnisse der ersten Kategorie ausgewertet während in Laborexperimenten bis heute nur Frequenzverhältnisse der zweiten und dritten Kategorie untersucht wurden.

4.2.2 Quasar-Absorptionsspektroskopie

Quasare⁸ sind Galaxien am Rande des Universums, die starke Quellen elektromagnetischer Strahlung sind. Ihr Spektrum kann dabei von den Radiowellen bis in den Röntgenbereich reichen. Ihre extreme Leuchtkraft erklärt man sich durch die Gegenwart eines massiven schwarzen Loches im Zentrum der Galaxie, das die es umgebende Materie in sich aufsaugt. Bei ihrem Sturz in das schwarze Loch wird die Materie durch Reibung so stark aufgeheizt, daß die ausgesandte Temperaturstrahlung eine Leuchtkraft von mehreren Milliarden Sonnen erreichen kann. Auf dem Weg zur Erde durchquert das Licht des Quasars interstellare Gaswolken, wo je nach Zusammensetzung ein Teil absorbiert wird.⁹ Auf der Erde wird das Licht mit großen Teleskopen aufgesammelt und mit Spektrographen analysiert (analog den Fraunhofer'schen Absorptionslinien). Weil sich die Gaswolken von der Erde entfernen, sind die Absorptionslinien zu größeren Wellenlängen hin verschoben. Diese Rotverschiebung wird durch den Parameter $z = f_0/f - 1$ beschrieben, dabei ist f die beobachtete Frequenz der Absorptionslinie und f_0 die Frequenz, die man bei einem Absorptionsexperiment auf der Erde beobachtet. Mit der Urknalltheorie und einem gemäß der Hubble-Konstante expandierendem Universum läßt sich aus der Rotverschiebung z auf den Abstand der Gaswolke von der Erde schließen. Schließlich kann mit der Lichtgeschwindigkeit berechnet werden, vor wievielen Jahren die Absorption stattgefunden hat. Je größer die Rotverschiebung ist, umso weiter blickt man in die Vergangenheit und damit in die Frühzeit des Universums zurück. Um den rotverschobenen Absorptionslinien Übergänge zuzuordnen, sucht man nach vertrauten Mustern im Absorptionsspektrum und betrachtet Frequenz- bzw. Wellenlängenverhältnisse. Haben zwei Absorptionslinien die gleiche Rotverschiebung, so kürzt sich diese bei der Verhältnisbildung heraus. Ein Vergleich mit Literaturwerten, gestattet dann die Zuordnung der Übergänge und die Bestimmung der Rotverschiebung z , d. h. des Zeitpunktes t_{abs} der Absorption. Den Wert von α zur Zeit t_{abs} kann man schließlich bestimmen, indem man aus den gemessenen Absorptionsfrequenzen gleicher Rotverschiebung (gleiche Gaswolke) Frequenzverhältnisse der ersten Kategorie bildet (siehe Aufstellung auf Seite 73). Geeignet ist z. B. das Frequenzverhältnis eines Feinstrukturübergangs und eines Hauptquantenübergangs. Nach den Gleichungen 4.4 und 4.3 ist das Verhältnis proportional zu α^2 .¹⁰ Da man Absorptionslinien, die für diese Methode geeignet sind, in Alkali-ähnlichen Doublets findet, heißt sie Alkali-Doublet-Methode oder kurz AD-Methode [Var96, Mur01b].

Eine Erweiterung der AD-Methode, die Many-Multiplet-Methode oder MM-Methode genannt wird, berücksichtigt über die Alkali-ähnlichen Doublets hinaus noch weitere Absorptionslinien, wodurch die Empfindlichkeit für eine zeitliche Änderung von α gesteigert werden kann und systematische Effekte besser abgeschätzt werden können [Dzu99a, Dzu99b, Web01, Mur03, Qua04, Sri04].

In Tabelle 4.3 sind einige der aktuellsten Ergebnisse zur zeitlichen Änderung der Feinstrukturkonstante zusammengefaßt. Darin sind neben Arbeiten der Quasar-Absorptions-

⁸engl. **Quasi-Stellar Radio Source**

⁹Auch Quasar-Emissionslinien können untersucht werden [Bah04].

¹⁰Die Rotverschiebung hebt sich heraus.

spektroskopie auch kernphysikalische Untersuchungen (Oklo-Reaktor und Lebensdauer-messungen von langlebigen Radionukliden in Meteoriten) enthalten. Die neusten Ergebnisse von Uhrenvergleichen im Labor finden sich in Tabelle 4.4 auf Seite 78.

Referenz	$[\alpha(t_1) - \alpha(t_2)]/\alpha(t_1)$ [10^{-6}]	Zeitraum $\Delta t = t_1 - t_2$ [10^9 Jahre]	lineare Drift $\dot{\alpha}/\alpha$ [10^{-16} pro Jahr]
Quasar-Absorptionsspektroskopie			
[Mur03]	$+5,7 \pm 1,0 \neq 0$	3 - 12	$+6,4 \pm 1,4 \neq 0$
[Qua04]	$-0,1 \pm 1,7$	ca. 8	$-0,13 \pm 2,1$
[Sri04]	$+0,6 \pm 0,6$	4 - 11	$+0,22 \pm 0,62$
Lebensdauer von ^{187}Re			
[Oli04]	$-0,8 \pm 0,8$	4,6	$-1,7 \pm 1,7$
[Oli04] GUT	$-0,025 \pm 0,055$	4,6	$-0,054 \pm 0,12$
Oklo-Reaktor			
[Fuj00] 1	$-0,004 \pm 0,016$	2	$-0,02 \pm 0,08$
[Fuj00] 2	$0,098 \pm 0,008 \neq 0$	2	$0,49 \pm 0,04 \neq 0$
[Lam04]	$-0,045_{-0,007}^{+0,015} \neq 0$	2	$-0,225_{-0,035}^{+0,075} \neq 0$
[Oli02] GUT	$0 \pm 0,0005$	2	$0 \pm 0,0025$

Tabelle 4.3: Zusammenstellung verschiedener Ergebnisse zur zeitlichen Veränderung der Feinstrukturkonstanten α in einem Zeitintervall $\Delta t = t_1 - t_2 > 0$. Die Zeit t_1 bezieht sich auf die Gegenwart und t_2 auf die Vergangenheit, wobei die Zeitachse beim Urknall beginnt. Die lineare Drift kann näherungsweise durch $\dot{\alpha}/\alpha \approx [\alpha(t_1) - \alpha(t_2)](t_1 - t_2)^{-1} \alpha(t_1)^{-1}$ berechnet werden. In den astronomischen Veröffentlichungen wurde $\Delta\alpha = \alpha(t_2) - \alpha(t_1)$ verwendet. Die Vorzeichen wurden entsprechend der hier verwendeten Definition angepaßt. Die Fehlerangaben beziehen sich auf ein Vertrauensintervall von $\pm 1\sigma$. Aus Referenz [Qua04] wurde das Ergebnis der MM-Methode ausgewählt. Die Messungen in Referenz [Fuj00] sind mit zwei Ergebnissen (1,2) verträglich, wobei [Fuj00] 1 als das wahrscheinlichere gilt. Mit GUT sind Auswertungen markiert, die eine vereinheitlichte Theorie voraussetzen (siehe Seite 77).

Das aufsehenerregende Ergebnis aus Referenz [Mur03], das eine signifikant kleinere Feinstrukturkonstante vor ca. 10 Milliarden Jahren nahelegt, konnte dabei *nicht* durch unabhängige Beobachtungen bestätigt werden [Qua04, Sri04]. Um Klarheit zu schaffen, sind weitere astronomische Beobachtungen mit höherer Genauigkeit notwendig. Besonders

wichtig wird es sein, systematische Fehler weiter zu verringern. Quellen systematischer Fehler sind u. a. die genaue Kalibrierung des Spektrometers und Annahmen bezüglich der Homogenität und Isotopenverteilung der interstellaren Gaswolken. Betrachtet man die astronomischen Beobachtungen aus [Qua04, Sri04] zusammen mit den Lebensdauermessungen an ^{187}Re [Oli04] und der Analyse des Oklo-Reaktors aus Referenz [Fuj00] 1, so kommt man zum Schluß, daß sich α in den letzten 10 Milliarden Jahren wahrscheinlich nicht geändert hat bzw. daß Änderungen zu klein sind, um mit der heutigen Meßgenauigkeit nachgewiesen werden zu können.¹¹ Dieses Ergebnis läßt mehrere Interpretationen zu: zum einen könnte α zeitlich konstant sein, es könnte aber auch sein, daß α sich einem asymptotischen Wert angenähert hat oder sich im Maximum bzw. Minimum einer Schwingung befindet.

Im Falle des Oklo-Reaktors kann eine von Null verschiedene Drift von α allerdings nicht gänzlich ausgeschlossen werden ($\dot{\alpha}/\alpha = (4,9 \pm 0,4) \cdot 10^{-17}/\text{Jahr}$ [Fuj00] 2). Das mit Null verträgliche Resultat wird aber als das wahrscheinlichere angesehen. Generell muß das Ergebnis der Re Lebensdauermessung bzw. die Analyse des Oklo-Reaktors mit Vorsicht betrachtet werden, da in beide Arbeiten Annahmen eingehen, die das zeitliche Verhalten der Kopplungskonstanten der starken- bzw. schwachen Wechselwirkung betreffen. In die Auswertung zum Oklo-Reaktor gehen zusätzlich noch Annahmen über experimentelle Parameter der Kernspaltung ein, wie z. B. die Energieverteilung der Neutronen. Abhängig davon erhalten [Shl76, Dam96, Fuj00] ein mit Null verträgliches Ergebnis für $\dot{\alpha}/\alpha$ während in [Lam04] eine Drift von $\dot{\alpha}/\alpha = (-2,25_{-0,35}^{+0,75}) \cdot 10^{-17}/\text{Jahr}$ errechnet wird, die mit 6σ Signifikanz von Null verschieden ist. Im Gegensatz zu [Mur03] hat $\dot{\alpha}/\alpha$ nach [Lam04] eine negative Steigung, wobei zu beachten ist, daß sich beide Arbeiten auf unterschiedliche Zeiträume beziehen. Setzt man die Gültigkeit großer vereinheitlichter Theorien (GUT) voraus, nach denen es Korrelationen zwischen den möglichen zeitlichen Änderungen von Naturkonstanten gibt (siehe Abschnitt 4.3 ab Seite 77), so können manche Obergrenzen deutlich reduziert werden (siehe [Oli04] GUT, [Oli02] GUT). Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß $\Delta\alpha/\alpha$ die eigentlich gemessene Größe ist. Aussagen über $\dot{\alpha}/\alpha$ setzen eine lineare Drift voraus. In Abbildung 4.1 sind die Ergebnisse aus Tabelle 4.3 zur Veranschaulichung graphisch dargestellt.

4.2.3 Uhrenvergleiche im Labor

Bei Uhrenvergleichen macht man sich die große Meßgenauigkeit zu nutze, die man mit Radiofrequenz- bzw. optischen Standards erreichen kann. Relative Genauigkeiten von $< 10^{-15}$ konnten bereits demonstriert werden [Mar03]. Der Nachteil ist eine vergleichsweise kleine Zeitspanne in der Größenordnung von einigen Jahren. Ein Vergleich zweier optischer Standards, deren Frequenzverhältnis der ersten Kategorie angehört (siehe Seite 73) und daher nur von α abhängt, kann mit Hilfe eines optischen Frequenzkamms durchgeführt werden (siehe Seite 35), wurde aber bisher nicht realisiert. Bei allen bisher

¹¹Auch die Ergebnisse aus Abschnitt 5.4 legen diese Vermutung nahe.

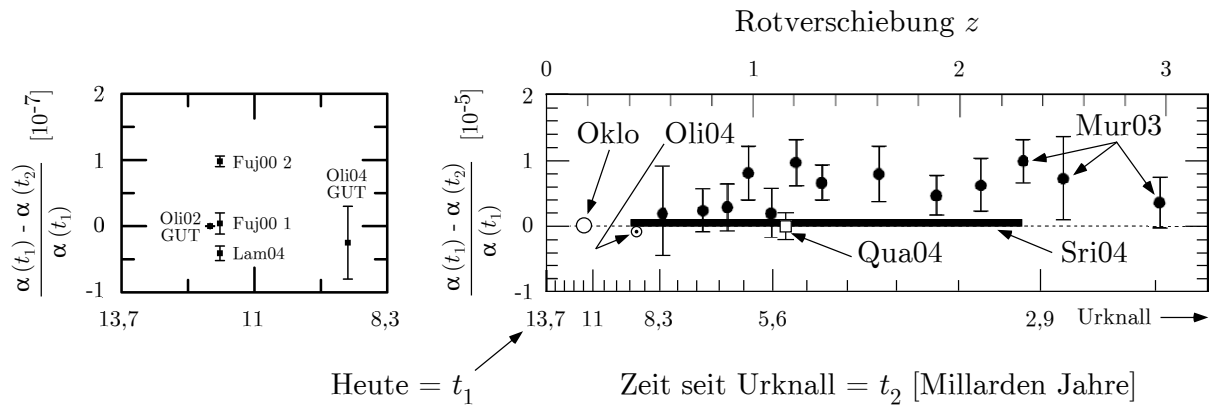


Abbildung 4.1: Bildliche Darstellung der Ergebnisse aus Tabelle 4.3. Der rechte Graph wurde aus [Mur03] entnommen und um die anderen Arbeiten ergänzt. Die Ergebnisse zum Oklo-Reaktor und [Oli04] GUT sind links vergrößert dargestellt. Das Symbol von [Oli04] und der horizontale Balken, der [Sri04] repräsentiert, beinhalten bereits die Fehler der Messungen. Der Fehlerbalken von [Oli02] GUT wurde zur besseren Darstellung etwas nach links verschoben. Die sich teilweise widersprechenden Resultate machen weitere Untersuchungen nötig.

durchgeführten Uhrenvergleichen waren Radiofrequenzuhren beteiligt. Da sich Radiofrequenzuhren auf einen Hyperfeinübergang beziehen,¹² sind die Frequenzverhältnisse nicht nur von α , sondern auch von kernmagnetischen Momenten abhängig (Kategorie (2) und (3)). Deshalb sind Aussagen über zeitliche Änderungen *einzelner* Naturkonstanten mit lediglich *einem* zeitlich getrennten Uhrenvergleich nicht möglich.

In Tabelle 4.4 sind die aktuellsten Uhren- bzw. Frequenzvergleiche zusammengestellt. Die Ergebnisse legen nahe, daß sich die beteiligten Naturkonstanten gegenwärtig nicht ändern. Betrachtet man die Ergebnisse jedoch *einzelnen*, so muß dieser Schluß nicht stimmen, denn es könnten sich in den beobachteten Größen auch Driften verschiedener Konstanten gegenseitig kompensiert haben. Die Idee ist nun, mehrere Uhrenvergleiche gleichzeitig durchzuführen und gemeinsam auszuwerten, um damit *separate* Informationen über die zeitliche Änderung der Feinstrukturkonstante und der kernmagnetischen Momente zu erhalten. Siehe dazu Abschnitt 5.4 ab Seite 113.

4.3 Zeitliche Änderung von Naturkonstanten im Rahmen einer GUT

Eines der großen Ziele in der Physik ist die einheitliche Beschreibung aller in der Natur vorkommenden Kräfte durch eine einzige Wechselwirkung. Im Rahmen großer vereinheitlichter Theorien (GUT) wird erwartet, daß die drei effektiven Kopplungskonstanten

¹²In diesem Zusammenhang werden nur diejenigen Standards als Uhren bezeichnet, die ihre Frequenz auf einen atomaren-, ionischen- oder molekularen Übergang beziehen. Schwingquarze bzw. Resonatoren sind in diesem Sinne keine Uhren.

Oszillatoren	ungefährer Zeitraum	getestete Größe $\dot{\gamma}/\gamma$ [10^{-16} /Jahr]	Referenz
RF H vs. RF Hg ⁺	1994: 140 Tage	$w + 2,3x = 0 \pm 370$	[Pre95a]
RF Rb vs. RF Cs	1998 - 2003	$z - 0,5x = 0,2 \pm 7,0$	[Mar03]
opt. Hg ⁺ vs. RF Cs	2001 - 2003	$y + 6,0x = 2 \pm 70$	[Biz03]
opt. Yb ⁺ vs. RF Cs	2000 - 2003	$y + 1,9x = 12 \pm 44$	[Pei04]
opt. H vs. RF Cs	1999 - 2003	$y + 2,8x = 32 \pm 63$	[Fis04a]

Tabelle 4.4: Zusammenstellung von Uhrenvergleichen zum Nachweis einer zeitlichen Änderung von Naturkonstanten. Dabei bedeuten $x = \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha$, $y = \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{Cs}}{\mu_B}$, $z = \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{Rb}}{\mu_{Cs}}$ und $w = \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_H}{\mu_{Hg}}$ (siehe Gleichung 5.13 auf Seite 113). Die Ergebnisse legen nahe, daß sich die Konstanten gegenwärtig nicht ändern. Alle Radiofrequenzuhren beziehen sich auf Hyperfeinübergänge während die optischen Übergänge Hauptquantenübergänge sind. Die letzten drei Zeilen sind Vergleiche der Cs Hyperfeinaufspaltung mit optischen Übergängen, die mit der fs-Frequenzkammtechnik durchgeführt wurden. Das Ergebnis einer kombinierten Auswertung der vier aktuellsten Uhrenvergleiche findet sich in Tabelle 5.5 auf Seite 119.

$\alpha_{em} = \alpha$, α_s und α_w der elektromagnetischen-, starken- und schwachen Wechselwirkung, die jeweils eine eigene Energieabhängigkeit aufweisen (für α_{em} siehe z. B. [Bur01]), bei einer bestimmten Energie E_{GUT} zu einer einzigen Kopplungskonstante α_{GUT} verschmelzen. Für Energien $> E_{GUT}$ werden alle drei Wechselwirkungen alleine durch α_{GUT} beschrieben. Die Vereinigung der Wechselwirkungen wird für Energien von $E_{GUT} \approx 10^{16}$ GeV erwartet. In Abbildung 4.2 ist das erwartete Verhalten skizziert. Zeitliche Änderungen von α_{em} , α_w bzw. α_s sind bei konstanter Abhängigkeit der Kopplungskonstanten von der Energie (konstante Geradensteigungen) miteinander verbunden, weil die Werte aller Kopplungskonstanten bei der Energie E_{GUT} gerade α_{GUT} ist [Tay88, Cal02a, Cal02b, Lan02, Den03]. Das bedeutet, eine zeitliche Änderung der Kopplungskonstanten läßt sich als die Konsequenz einer zeitlichen Änderung des Vereinheitlichungspunktes verstehen. Für eine solche Änderung sind verschiedene Szenarien denkbar:

- (1) E_{GUT} ändert sich mit der Zeit bei konstantem α_{GUT} ,
- (2) α_{GUT} ändert sich mit der Zeit bei konstantem E_{GUT} oder
- (3) sowohl E_{GUT} als auch α_{GUT} ändern sich mit der Zeit.

Für Szenario (1) und (2) finden X. Calmet und H. Fritzsch unter Verwendung einer supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells,¹³ daß sich magnetische Kernmo-

¹³Symmetriegruppe: SU(5) mit N=1 Supersymmetrie

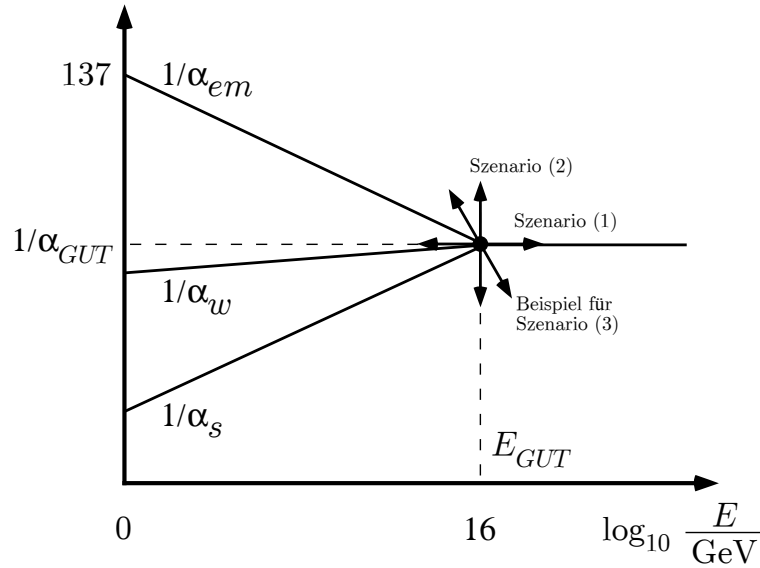


Abbildung 4.2: Vereinfachte Darstellung der Energieabhängigkeit der Kopplungskonstanten α_{em} , α_s und α_w im Rahmen vereinheitlichter Theorien. Zeitliche Änderungen der Kopplungskonstanten sind über den Vereinheitlichungspunkt miteinander verbunden.

mente μ_n und Kernmassen m_n verhalten wie [Cal02a, Cal02b]:

$$\text{Szenario (1)} \quad - \frac{\dot{\mu}_n}{\mu_n} = \frac{\dot{m}_n}{m_n} \approx -31 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \quad (4.8)$$

$$\text{Szenario (2)} \quad - \frac{\dot{\mu}_n}{\mu_n} = \frac{\dot{m}_n}{m_n} \approx +39 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}. \quad (4.9)$$

Bei der Herleitung wurde eine zeitliche Änderung der Elektronenmasse m_e vernachlässigt. Das Minuszeichen vor $\dot{\mu}_n/\mu_n$ stammt von der Beziehung

$$\mu_n \sim \frac{1}{m_n} \quad (4.10)$$

Aus den Gleichungen 4.8 bzw. 4.9 folgt, daß eine zeitliche Änderung von α mit einer sehr viel stärkeren Änderung von Kernmassen bzw. kernmagnetischen Momenten verbunden ist (Verstärkungsfaktor -31 bzw. $+39$). Falls die zugrundeliegende Theorie zutrifft, wäre es also sinnvoller nach einer zeitlichen Änderung von Kernmassen bzw. Kernmomenten zu suchen als nach einer Änderung von α . Im Fall von Szenario (3) können sich allerdings Effekte gegenseitig kompensieren, so daß der Verstärkungsfaktor dort vom Betrag her sehr viel kleiner ausfallen kann. Verwendet man keine Supersymmetrie, so fallen die Verstärkungsfaktoren betragsmäßig etwa 8 mal größer aus.¹⁴ Szenario (1) wird von X. Calmet und H. Fritzsch aufgrund der Ausdehnung des Universums als das wahrscheinlichste angenommen. Die Ergebnisse 4.8 und 4.9 haben das bereits angesprochene Problem, daß die zeitliche Änderung einheitenbehafteter Größen (μ_n und m_n) gemessen werden muß.

¹⁴Für die Symmetriegruppe $SO(10)$ ohne Supersymmetrie findet man für Szenario (1) einen Faktor von etwa -235 statt -31 [Cal02b].

Betrachtet man Szenario (1) und setzt voraus, daß das Bohr'sche Magneton $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ *nicht* von der Zeit abhängt, so findet man mit Gleichung 4.8

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_n}{\mu_B} = 31 \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha. \quad (4.11)$$

Dabei wurde zur Vereinfachung der Schreibweise die Beziehung $\frac{\dot{\xi}}{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \ln \xi$ verwendet. Ändert sich α mit der Zeit, so sollte sich nach den Gleichungen 4.3 und 4.5 auf Seite 72 die Frequenz eines Hyperfeinübergangs schneller mit der Zeit ändern als die eines Hauptquantenübergangs. Wie bereits angesprochen, ist das Ergebnis einer Frequenzmessung das *Verhältnis* zweier Frequenzen. Für das Verhältnis der 1S-2S Frequenz in atomarem Wasserstoff f_H und der Cs Hyperfeinaufspaltung f_{Cs} (Absolutfrequenzmessung) findet man z. B.

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{f_H}{f_{Cs}} = -\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{Cs}}{\mu_B} - 2,3 \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha \approx -34 \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha. \quad (4.12)$$

Der erste Teil dieser Gleichung wird in Abschnitt 5.4 ab Seite 113 hergeleitet. Eine Änderung von α bewirkt also nach Szenario (1) eine ca. 34 mal stärkere Änderung der 1S-2S Frequenz in Hz. Wegen der Definition der Sekunde, ist eine Änderung von f_{Cs} prinzipiell nicht meßbar. Die gesamte Zeitabhängigkeit wird im Experiment daher auf f_H übertragen.

Die Beobachtung einer Korrelation nach den oben genannten Szenarien wäre für die vereinheitlichten Theorien von großer Bedeutung, weil man dadurch einen starken Hinweis auf ihre Gültigkeit erhalten würde. Eine direkte Überprüfung der Vereinheitlichung ist aufgrund der hohen Energien von $\approx 10^{16}$ GeV nicht möglich.¹⁵ Anhand der Größe der Verstärkungsfaktoren könnte man dann eventuell auch feststellen, ob supersymmetrische Teilchen in der Natur existieren oder nicht. Wegen der freien Parameter vereinheitlichter Theorien würde es aber trotz einer beobachteten Korrelation schwerfallen, klare Aussagen zu treffen. In Abschnitt 5.4.3 ab Seite 118 wird beschrieben, was man von experimenteller Seite her über eine Korrelation von $\dot{\alpha}/\alpha$ mit $\dot{\mu}_n/\mu_n$ bzw. \dot{m}_n/m_n aussagen kann.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß die Obergrenze für eine zeitliche Änderung der Feinstrukturkonstante, wie man sie aus der Analyse des Oklo-Reaktors bzw. langlebiger Radionuklide erhält, um mehr als eine Größenordnung verringert werden kann, wenn man eine korrelierte zeitliche Änderung der Kopplungskonstanten nach dem Vorbild vereinheitlichter Theorien annimmt [Oli02, Oli04].

¹⁵Der am CERN im Bau befindliche Large Hardron Collider (LHC) wird bei der Kollision von Pb⁸²⁺ Ionen eine Schwerpunktsenergie von etwa $1 \cdot 10^6$ GeV erreichen.

5. Messung der $1S$ - $2S$ Frequenz des Wasserstoffatoms

Die große Bedeutung des Wasserstoffatoms für die physikalische Grundlagenforschung insgesamt wurde bereits in der Einleitung hervorgehoben. In diesem Kapitel wird nun die Messung der $1S$ - $2S$ Frequenz in atomarem Wasserstoff relativ zu einer Cs-Fontänenuhr beschrieben. Zwei Messungen in einem zeitlichen Abstand gestatten dabei Aussagen über die gegenwärtige zeitliche Änderung einer linearen Kombination der Feinstrukturkonstanten α und des magnetischen Moments des Cs-Kerns in Einheiten des Bohr'schen Magneton μ_{Cs}/μ_B . Der Vergleich zweier $1S$ - $2S$ Messungen mit zeitlich getrennten Frequenzmessungen anderer optischer Übergänge ermöglicht darüber hinaus die Bestimmung der gegenwärtigen zeitlichen Änderung von α und μ_{Cs}/μ_B alleine. Dabei müssen keine Annahmen über zeitliche Änderungen anderer Naturkonstanten gemacht werden [Fis04a, Pei04].

Die Frequenzmessung des $1S$ - $2S$ Übergangs im Jahr 2003 wurde in Zusammenarbeit mit M. Fischer, N. Kolachevsky, M. Abgrall und J. Grünert durchgeführt, wobei M. Fischer und N. Kolachevsky (damals beide am MPQ) das Wasserstoffspektrometer bzw. M. Abgrall und J. Grünert (damals beide am BNM-SYRTE) die transportable Cs-Fontänenuhr FOM bedient haben. Die optische Frequenzmessung wurde vom Autor dieser Arbeit durchgeführt.

5.1 Auswahlregeln und Übergänge

Da der $1S$ - und der $2S$ -Zustand die gleiche Parität haben, kann der $1S$ - $2S$ Übergang nicht mit *einem* Photon angeregt werden, wohingegen eine Anregung mit *zwei* Photonen der halben Wellenlänge möglich ist. Für einen Zweiphotonen-Übergang gelten die folgenden allgemeinen Auswahlregeln:

$$\Delta L = 2 \quad \text{oder} \quad (5.1)$$

$$\Delta L = 0 \quad \text{mit} \quad \Delta F = 0 \quad \text{und} \quad \Delta m_F = 0. \quad (5.2)$$

Die erste Auswahlregel gestattet z. B. Übergänge von S - nach D -Zuständen, während die zweite Auswahlregel die erlaubten Übergänge zwischen Zuständen gleicher Drehimpulsquantenzahl L beschreibt (z. B. der $1S$ - $2S$ Übergang). Kommen beide Photonen aus entgegengesetzten Richtungen, so ist der beobachtete Übergang frei vom Dopplereffekt erster Ordnung [Vas70]. In Abbildung 5.1 ist das Energieniveauschema des $1S$ - $2S$ Übergangs in Abhängigkeit von einem äußeren Magnetfeld B dargestellt. Da die Steigungen der jeweiligen $m_F = \pm 1$ -Komponenten gleich groß sind, hängen die Frequenzen der beiden

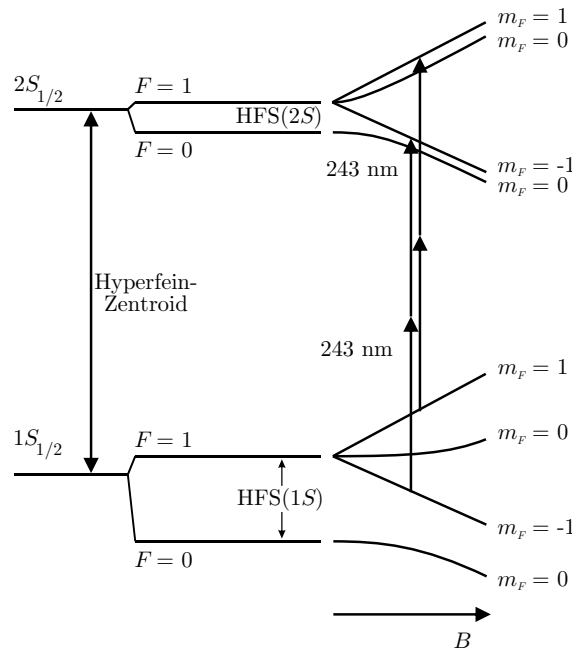


Abbildung 5.1: *Energieniveauschema des 1S-2S Übergangs im äußerem Magnetfeld B . Die Steigungen der jeweiligen $m_F = \pm 1$ -Komponenten sind gleich groß, so daß die Frequenzen der $(1S, F = 1, m_F = \pm 1) \rightarrow (2S, F = 1, m_F = \pm 1)$ -Übergänge nicht vom äußerem Magnetfeld abhängen. HFS bezeichnet die Hyperfeinstrukturaufspaltung der jeweiligen Energieniveaus.*

$(1S, F = 1, m_F = \pm 1) \rightarrow (2S, F = 1, m_F = \pm 1)$ Übergänge nicht vom äußeren Magnetfeld B ab.¹ Diese Übergänge werden im folgenden kurz als der 1S-2S Übergang bezeichnet. Die Frequenzen der beiden nach Auswahlregel 5.2 noch verbleibenden Übergänge $(1S, F = \pm 1, m_F = 0) \rightarrow (2S, F = \pm 1, m_F = 0)$ hängen dagegen vom Wert des Magnetfeldes ab. Damit diese Übergänge die Spektroskopie des 1S-2S Übergangs nicht stören, wird im Experiment ein kleines Magnetfeld von etwa 5 Gauß angelegt und so die magnetfeldabhängigen Übergänge vom 1S-2S Übergang getrennt.

Als Ergebnis der Frequenzmessung wird dabei nicht die Frequenz des 1S-2S Übergangs angegeben, sondern seine sogenannte Zentroidfrequenz, die die hypothetische Übergangsfrequenz bei „ausgeschalteter“ Hyperfein-Wechselwirkung ist. Sie kann berechnet werden als die Übergangsfrequenz zwischen den *Schwerpunkten* der jeweiligen Hyperfeinniveaus. Wegen der drei $m_F = -1, 0, +1$ Unterzustände der $F = 1$ Niveaus gehen diese mit dem dreifachen Gewicht in die Berechnung der Schwerpunkte ein. Die Zentroidfrequenz des 1S-2S Übergangs errechnet sich aus der gemessenen Frequenz durch Addition von

¹QED Rechnungen ergeben, daß die beiden Übergänge doch eine sehr schwache und unterschiedliche Magnetfeldabhängigkeit aufweisen [Bet77]. Für den 1S-2S Übergang folgt daraus eine Aufspaltung von 37 Hz/Gauß bezogen auf 121,6 nm, wobei der Schwerpunkt der beiden Übergänge erhalten bleibt. Bei einem angelegten Magnetfeld von 5 Gauß (siehe Text) ergibt sich eine Aufspaltung von 185 Hz, die bisher experimentell nicht aufgelöst werden konnte.

$\Delta f_{Zentroid}$ [Sob92]:

$$\Delta f_{Zentroid} = \frac{1}{4}f_{HFS}(1S) - \frac{1}{4}f_{HFS}(2S). \quad (5.3)$$

Dabei ist f_{HFS} die Hyperfeinstrukturaufspaltung des jeweiligen Niveaus. Setzt man

$$\begin{aligned} f_{HFS}(1S) &= 1\,420\,405\,751,766\,7(9) \text{ Hz} \quad [\text{Ess71}] \quad \text{und} \\ f_{HFS}(2S) &= 177\,556\,860(16) \text{ Hz} \quad [\text{Kol04}] \end{aligned}$$

in obige Gleichung ein, so erhält man:

$$\Delta f_{Zentroid} = 310\,712\,223(4) \text{ Hz}. \quad (5.4)$$

5.2 Experimenteller Aufbau der 1S-2S Frequenzmessung

Das Wasserstoffexperiment sowie das benachbarte Frequenzkammlabor werden seit dem Ende der 80er Jahre in der Arbeitsgruppe von Prof. T. W. Hänsch am MPQ kontinuierlich betrieben. Viele Doktoranden haben in dieser Zeit die Experimente ständig verbessert und damit die Meßgenauigkeit in die Höhe getrieben. Viele Details, auf die ich hier nicht eingehen kann, sind in ihren Doktorarbeiten beschrieben.² Der experimentelle Aufbau der 1S-2S Frequenzmessung gliedert sich grob in drei Teile:

- dem **Wasserstoffspektrometer** bestehend aus
 - dem stabilen Spektroskopielaser und
 - der Vakuumanlage, in der der kalte Wasserstoffatomstrahl erzeugt wird,
- dem optischen **Frequenzkamm**, mit dem die Frequenz des Spektroskopielasers gemessen wird,
- und der **Cäsium-Fontänenuhr FOM**, die als Referenz für den Frequenzkamm dient.

In Abbildung 5.2 ist ein Überblick des experimentellen Aufbaus zu sehen.

²Die Doktoranden am Wasserstoffexperiment waren bzw. sind bis zur Fertigstellung dieser Arbeit in zeitlicher Reihenfolge: C. Zimmermann, R. Kallenbach, M. Weitz, F. Schmidt-Kaler, D. Leibfried, A. Huber, B. Gross, M. Niering, M. Fischer und P. Fendel. Die Doktoranden im Frequenzkammlabor waren bzw. sind: Th. Andreae, W. König, R. Wynands, Th. Udem, J. Reichert, R. Holzwarth, der Autor, Ch. Gohle und M. Herrmann. Alle Doktorarbeiten wurden bzw. werden an der Ludwig-Maximilians-Universität in München angefertigt.

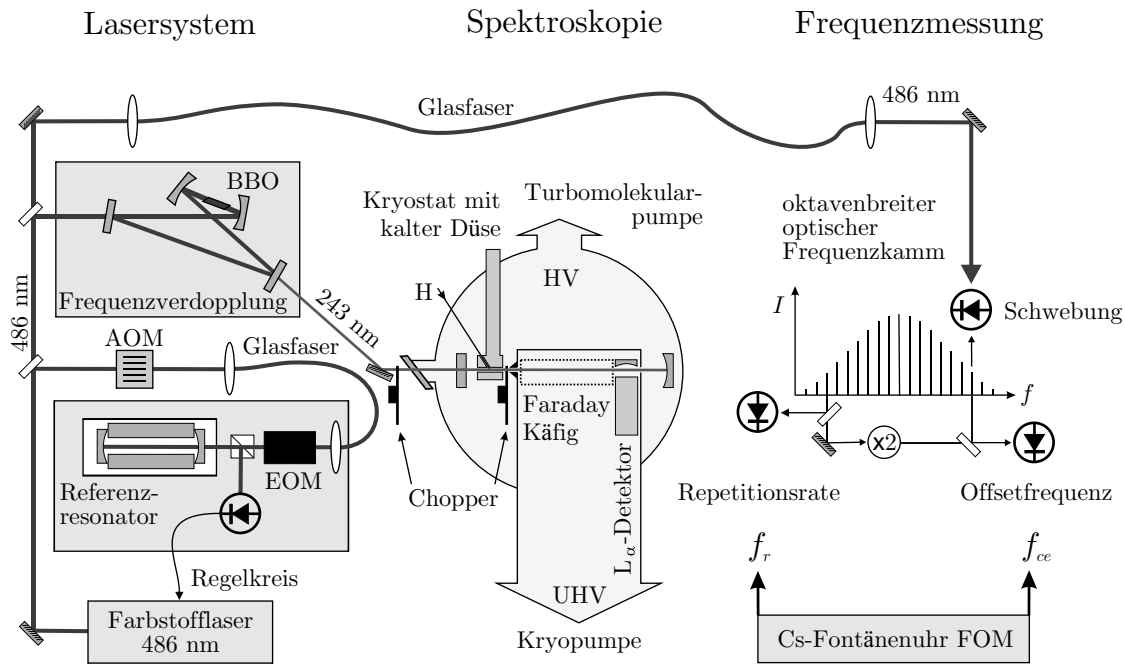


Abbildung 5.2: Gesamtaufbau der 1S-2S Frequenzmessung in atomarem Wasserstoff im Jahr 2003. Der Übergang wird mit zwei Photonen eines verdoppelten Farbstofflasers angeregt und die Fluoreszenz mit einem Photomultiplier nachgewiesen. Um die Linienbreite zu verringern, ist der Farbstofflaser auf einen Referenzresonator stabilisiert. Mit einem akustooptischen Modulator (AOM) kann die Frequenz des Lasers verändert und die Resonanz dadurch abzufahren werden. Die Chopper gestatten dabei einen verzögerten Nachweis der Fluoreszenz und damit die Untersuchung langsamer Atome (siehe Seite 87). Die Frequenz des Farbstofflasers wird schließlich mit einem fs-Frequenzkammgenerator gemessen, der auf eine Cs-Fontänenuhr stabilisiert ist. HV bzw. UHV stehen für den Hoch- bzw. Ultrahochvakuumbereich der Spektroskopiekammer und EOM bezeichnet einen elektrooptischen Modulator.

5.2.1 Wasserstoffspektrometer

Das Lasersystem zur Spektroskopie des 1S-2S Übergangs in atomarem Wasserstoff basiert auf einem Farbstofflaser, dessen Licht eine Wellenlänge von etwa 486 nm hat. In den Resonator sind Stillelemente eingebaut, mit denen die Frequenz des Lasers geändert werden kann, darunter ein Galvoplättchen, ein auf eine Piezokeramik aufgeklebter Spiegel und ein elektrooptischer Modulator (EOM). Damit wird die Frequenz des Farbstofflasers nach dem Pound-Drewer-Hall Verfahren auf eine Mode eines thermisch und akustisch gut isolierten Referenzresonators stabilisiert [Dre83, Pou47]. Die Spiegelsubstrate und der Abstandhalter des Referenzresonators sind aus ULE³ gefertigt, einer Glaskeramik, dessen spezifizierte relative Längenausdehnung $\Delta L/L$ im Temperaturbereich von 5-35 °C ledig-

³engl. Ultra Low Expansion; Hersteller: Corning Inc.

lich $\pm 3 \cdot 10^{-8}/\text{K}$ ist.⁴ Das Licht des Farbstofflasers wird dann in einem β -Bariumborat-Kristall (BBO) frequenzverdoppelt ($2 \cdot 486 \text{ nm} \rightarrow 243 \text{ nm}$). Um die Ausbeute der Verdopplung zu erhöhen, wird das Licht des Farbstofflasers in einem Resonator überhört, dessen Länge mit dem Hänsch-Couillaud Verfahren der Wellenlänge des Farbstofflasers angepaßt wird [Hän80]. Um den dipolverbotenen aber zweiphotonen erlaubten 1S-2S Übergang dopplernfrei anzuregen, benötigt man zwei gegenläufige Photonen mit 243 nm Wellenlänge ($2 \cdot 243 \text{ nm} \rightarrow 121,6 \text{ nm}$). Da die Anregungsrate eines Zweiphotonenübergangs $\sim I^2$ ist, benötigt man eine möglichst hohe Intensität des anregenden Lichtes, weshalb das frequenzverdoppelte Licht des Farbstofflasers innerhalb des Vakuumtanks mit einem weiteren Resonator überhört wird.⁵ Mit einem akustooptischen Modulator (AOM) zwischen Farbstofflaser und Referenzresonator kann die Frequenz des Farbstofflasers geändert und damit der 1S-2S Übergang abgefahren werden. Um die Frequenz des Farbstofflasers grob auf ein Viertel der 1S-2S Übergangsfrequenz abzustimmen bzw. die entsprechende longitudinale Mode des Referenzresonators zu finden, wird ein Wellenlängenmeßgerät und ein Tellur-Sättigungsspektrometer verwendet. Aufgrund seiner Rotations- und Schwingungsfreiheitsgrade hat das Tellurmolekül Te_2 vergleichbar dem Iodmolekül I_2 eine Vielzahl von Übergängen, deren Wellenlängen im Gegensatz zum Iodmolekül auch im blauen Spektralbereich anzutreffen sind. Diese Übergänge können als Orientierungsmarken verwendet werden.

Der atomare Wasserstoff wird mit einer Radiofrequenzgasentladung aus molekularem Wasserstoff erzeugt. Der atomare- und Reste von molekularem Wasserstoff entweichen durch eine etwa 4 mm lange Kupferdüse, die mit einem He-Durchflußkryostat gekühlt wird, in die Vakuumapparatur. Die minimale Temperatur der Düse und des mit ihr thermalisierten Wasserstoffs beträgt ungefähr 5 K. Der Durchmesser der Düse mißt ca. 1-1,5 mm und der daraus resultierende Fluß an atomarem Wasserstoff ist etwa $5 \cdot 10^{17}$ Teilchen pro Sekunde. Um die Wechselwirkungszeit zwischen dem Licht und den Atomen zu maximieren, wird der Wasserstoffatomstrahl räumlich mit der Mode des Überhöhungsresonators Licht überlagert.

Die Wechselwirkungszone zwischen dem Licht und den Wasserstoffatomen ist durch einen Faradaykäfig von äußeren elektrischen Feldern abgeschirmt. Um nachzuweisen, ob Atome in den 2S-Zustand angeregt wurden, wird in der Nachweiszone ein elektrisches Feld angelegt, so daß der 2S-Zustand mit dem 2P-Zustand mischt, der aufgrund seiner kurzen Lebensdauer quasi sofort durch Abstrahlung eines Lyman- α -Photons in den 1S-Grundzustand zerfällt. Die Lyman- α -Photonen, deren Wellenlänge etwa 121,6 nm beträgt, werden dann mit einem Photomultiplier nachgewiesen. Damit das Nachweisfeld in der Wechselwirkungszone nicht zu einem statischen Stark-Effekt führt, sind beide Be-

⁴In diesem Temperaturbereich hat der Längenausdehnungskoeffizient sogar eine Nullstelle. Weiterhin ist wichtig, daß temperaturunabhängige Alterungseffekte die Länge L kontinuierlich und nicht wie bei ZERODUR (Schott AG) sprunghaft ändern. Die Alterungseffekte sind bei ULE mit $\Delta L/L \approx 3 \cdot 10^{-9}/\text{Jahr}$ etwa 10 mal kleiner als bei ZERODUR [NIST].

⁵Wie in Abbildung 5.5 auf Seite 91 gezeigt ist, hat eine höhere Intensität den Nachteil, daß die 1S-2S Frequenz stärker verschoben wird. Um diesen Effekt zu korrigieren, wird bei verschiedenen Lichtleistungen gemessen und zu Null extrapoliert.

reiche durch eine Blende galvanisch gut voneinander getrennt. Die in Abbildung 5.2 eingezeichneten Chopper ermöglichen den verzögerten Nachweis der Photonen und damit die Untersuchung der in der Geschwindigkeitsverteilung vorhandenen langsamen Atome (siehe Seite 87). Dadurch können systematische Effekte verringert werden. Der von der übrigen Vakuumkammer getrennte Wechselwirkungs- und Nachweisbereich wird mit einer Kryopumpe auf Drücke von $2\cdot 3\cdot 10^{-8}$ mbar evakuiert,⁶ während der restliche Bereich der Vakuumapparatur mit einer Turbomolekularpumpe auf etwa 10^{-5} mbar abgepumpt wird.

5.2.2 Systematiken

In diesem Kapitel werden die bekannten systematischen Effekte der 1S-2S Spektroskopie beschrieben. Der erste Effekt, der betrachtet werden soll, ist der Dopplereffekt zweiter Ordnung, der auch relativistischer-, quadratischer- oder transversaler Dopplereffekt genannt wird. Dazu werden zuerst einige allgemeine Überlegungen zum Dopplereffekt angestellt. Bewegt sich ein Atom mit der Geschwindigkeit \vec{v} und dem Winkel φ relativ zum Wellenzahlvektor \vec{k} des Lichtes,⁷ so erscheint einem Beobachter im Laborsystem die Frequenz einer Absorptionslinie f_L um einen gewissen Betrag von der Frequenz f_R eines im Laborsystem *ruhenden* Atoms verschoben. Dieser Effekt läßt sich nur mit Hilfe der speziellen Relativitätstheorie *vollständig* verstehen. Für f_L als Funktion von v , φ und f_R gilt [BS]:

$$\begin{aligned} f_L &= f_R \cdot \frac{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}{1 - (v/c_{ph}) \cos(\varphi)} \\ &= f_R \cdot \left[1 + \cos(\varphi) \frac{v}{c_{ph}} + \cos^2(\varphi) \frac{v^2}{c_{ph}^2} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dabei ist c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit und c_{ph} die Phasengeschwindigkeit der betrachteten Lichtwelle. Diese Unterscheidung wird bei der Betrachtung eines Zweiphotonenübergangs noch wichtig werden. Bei einem Einphotonenübergang im Vakuum kann $c_{ph} = c_0$ gesetzt werden. Der Nenner $1 - (v/c_{ph}) \cos(\varphi)$ bewirkt je nach Wahl von φ eine geometrische Verlängerung ($-90^\circ < \varphi < 90^\circ$) oder Verkürzung ($90^\circ < \varphi < 270^\circ$) in der Abfolge der Wellenfronten (betrachtet im Ruhesystem des Atoms). Im ersten Fall erscheint f_L gegenüber f_R blau- und im zweiten Fall rot verschoben. Der Zähler $\sqrt{1 - v^2/c_0^2}$ führt hingegen unabhängig von φ *immer* zu einer Rotverschiebung von f_L . Die physikalische Ursache für diesen Term ist die relativistische Zeitdehnung im bewegten Atom. Pro Zeitintervall „sieht“ das Atom mehr Lichtschwingungen, weshalb dem Atom das Licht zu größeren Frequenzen hin verschoben erscheint, was sich im Laborsystem durch eine Rotverschiebung der Übergangsfrequenz bemerkbar macht.⁸ Der Term $\sim v/c_{ph}$ in der Reihenentwicklung wird Dopplereffekt erster Ordnung genannt und die Terme $\sim v^2/c_{ph}^2$

⁶Der Vakuummeßkopf befand sich direkt oberhalb der Kryopumpe. Im Bereich des Wasserstoffatomstrahls ist der Druck wahrscheinlich größer.

⁷ \vec{v} , \vec{k} und φ werden im Laborsystem gemessen, in dem die Lichtquelle ruht.

⁸Am Rande sei bemerkt, daß das Licht im Ruhesystem des Atoms aus einem anderen Winkel φ' erscheint (Abberation). Es gilt: $\cos(\varphi') = [\cos(\varphi) - (v/c_{ph})]/[1 - (v/c_{ph}) \cos(\varphi)]$. Die Winkel 0° und 180° sind dabei invariant.

und $\sim v^2/c_0^2$ beschreiben den Dopplereffekt zweiter Ordnung. Betrachtet man den 1S-2P Übergang (Lyman- α ; 121,6 nm), eine Geschwindigkeit von 290 m/s (5 K) und $\varphi = 0$, so errechnet man eine Blauverschiebung von 2,4 GHz. Ist $\varphi = 90^\circ$, so verschwinden die Terme $\sim v^2/c_{ph}^2$ und $\sim v^2/c_0^2$. Der experimentelle Nutzen dieser Methode wird aber dadurch begrenzt, daß man rechte Winkel nicht mit der nötigen Genauigkeit einstellen kann.

Hat man einen Zweiphotonenübergang wie den 1S-2S Übergang, so kann man den Dopplereffekt erster Ordnung vollständig unterdrücken, indem man entgegengesetzt laufende Photonen gleicher Frequenz verwendet [Vas70, Cag73, Lev74, Hän74]. In diesem Fall findet man:

$$f_L = f_R \cdot \sqrt{1 - v^2/c_0^2} = f_R \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} + O\left(\frac{v^4}{c_0^4}\right) \right]. \quad (5.6)$$

Diese Beziehung erhält man aus Gleichung 5.5 mit der Überlegung, daß entgegengesetzt laufende Wellen gleicher Frequenz eine stehende Welle ausbilden, deren Phasengeschwindigkeit unendlich ist, so daß $v/c_{ph} = 0$ wird.⁹ Die Gegenläufigkeit der Photonen kann dabei durch einen Resonator hoher Güte sichergestellt werden. Gleichung 5.6 ist unabhängig vom Winkel φ , dessen Wert man daher frei wählen kann. Experimentell ist es günstig, die sich bewegenden Atome und das anregende Licht räumlich zu überlagern ($\varphi = 0, \pi$), weil dann der Übergang am stärksten getrieben werden kann und die noch zu erwähnende Durchflugsverbreiterung am kleinsten ist. Für Wasserstoffatome einer Temperatur von 5 K ist die Frequenzverschiebung durch den Dopplereffekt zweiter Ordnung etwa 1,2 kHz, was deutlich größer ist als die angestrebte Meßgenauigkeit von < 50 Hz.¹⁰ Durch den Dopplereffekt zweiter Ordnung und die Geschwindigkeitsverteilung¹¹ der Atome ist die im Laborsystem beobachtete Absorptionslinie des 1S-2S Übergangs nicht nur verbreitert und von der Ruhfrequenz verschoben, sondern sie weist auch eine asymmetrische Linienform auf. Um den Dopplereffekt zweiter Ordnung zu reduzieren,¹² kann man entweder die Geschwindigkeit *aller* Atome im Atomstrahl erniedrigen (z. B. durch Kühlen der Düse) oder *nur* die Fluoreszenz der in der Geschwindigkeitsverteilung vorhandenen langsamen Atome nachweisen. Beide Methoden kommen beim Wasserstoffspektrometer zum Einsatz.

In Abbildung 5.3 ist der Einfluß der Düsentemperatur auf das Spektrum des 1S-2S Übergangs dargestellt. Bei Temperaturen von < 10 K friert molekularer Wasserstoff an der Düse aus, was zu einer erhöhten Rekombination von atomarem Wasserstoff führt. Deshalb ist die Zählrate des Spektrums bei 7 K kleiner als man im Vergleich mit den anderen Spektren erwarten würde.

Die Fluoreszenz langsamer Atome kann nachgewiesen werden, indem man das 243 nm Licht blockiert und erst nach einer gewissen Verzögerungszeit τ die 2P-1S Photonen

⁹Setzt man in Gleichung 5.5 $c_{ph} = c_0$ und versucht Gleichung 5.6 dadurch herzuleiten, daß man die Beiträge für 0° und 180° addiert, so erhält man $f_L = f_R \cdot (1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} + \dots)$ und *nicht* Gleichung 5.6.

¹⁰Effekte der Ordnung v^4/c^4 oder höher tragen mit weniger als einem Hz zur beobachteten Frequenz bei und können daher im Moment noch vernachlässigt werden.

¹¹Die Geschwindigkeitsverteilung ist in erster Näherung eine Maxwell-Boltzmann-Verteilung.

¹²Eine vollständige Unterdrückung wie beim Dopplereffekt erster Ordnung ist nicht möglich.

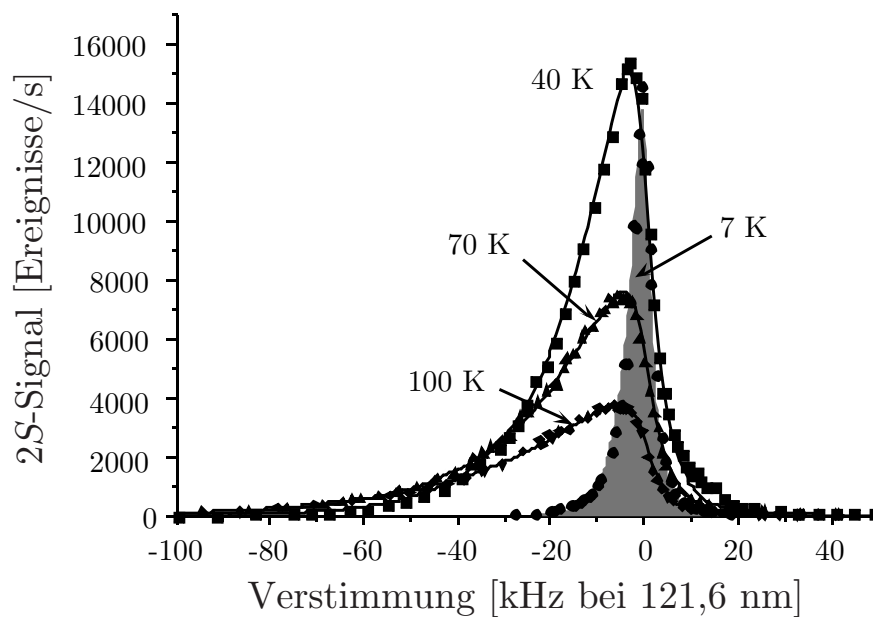


Abbildung 5.3: Die 1S-2S Resonanz als Funktion der Düsentemperatur. Auf der y-Achse ist die Anzahl der 2P-1S Fluoreszenzereignisse aufgetragen. Mit sinkender Temperatur und damit abnehmendem Dopplereffekt zweiter Ordnung wird die Linie schmaler, symmetrischer und die Frequenz des Linienmaximums verschiebt sich zu höheren Frequenzen.

nachweist, die dann von Atomen stammen müssen, deren Geschwindigkeit kleiner l/τ ist, wobei l der Abstand zwischen Düse und Photomultiplier ist. Diese Technik wurde von D. Leibfried und A. Huber im Rahmen ihrer Doktorarbeiten entwickelt [Lei95, Hub97]. Mit einem Zerhacker¹³, der außerhalb des Vakuumtanks angebracht ist, wird das 243 nm Licht periodisch blockiert (siehe Abbildung 5.2 auf Seite 84). Wenn der Chopper das Licht blockiert, beginnt zeitgleich das Auslesen der Zählereignisse des Photomultipliers, wobei die Fluoreszenzereignisse mit einem 12-Kanal-Zähler zeitaufgelöst nachgewiesen werden. Der Chopper wird mit einer Frequenz von 160 Hz betrieben, d. h. die Dauer einer Anregungs- bzw. Nachweisphase ist etwa 3 ms lang. Die Nachweisphase ist in 12 Zeitintervalle unterteilt, deren Ereignisse als Funktion der Laserfrequenz abgespeichert werden. Die einzelnen Zeitintervalle entsprechen unterschiedlichen Verzögerungszeiten τ des Nachweises der 2P-1S Fluoreszenz bezogen auf das Blockieren des 243 nm Lichts. Je größer die Verzögerungszeit ist, umso mehr langsame Wasserstoffatome tragen zur Fluoreszenz bei, weil die schnellen Atome die Nachweiszone bereits wieder verlassen haben. Die Spektren mit der größten Verzögerungszeit zeigen dementsprechend die geringste Dopplerverschiebung zweiter Ordnung.¹⁴ Dieser Vorteil wird aber bei steigender Verzögerung mit einer fallenden Zählrate erkauft, weil der Anteil der langsamen Wasserstoffatome im Geschwin-

¹³engl. chopper

¹⁴Die größte Verzögerung, die bei der 1S-2S Messung im Jahr 2003 verwendet wurde, war 2,2 ms, was einer Geschwindigkeit der Atome von < 52 m/s und einem verbleibenden Dopplereffekt zweiter Ordnung von < 37 Hz bzw. $< 1,5 \cdot 10^{-14}$ bezogen auf 121,6 nm entspricht.

digkeitsspektrum entsprechend auch kleiner wird. Um zu verhindern, daß schnelle Atome, die nach dem Blockieren des Lichts weiterhin aus der Düse entweichen, die angeregten langsamen Atome aus dem Atomstrahl verdrängen, befindet sich dicht hinter der Düse ein weiterer Chopper, der kurz nach dem Blockieren des Lichts auch den Atomstrahl blockiert. Die Voraussetzung dafür, daß diese Technik angewendet werden kann, ist die lange Lebensdauer des 2S-Zustandes von etwa 0,14 s. Dadurch ist gewährleistet, daß praktisch keine der angeregten Wasserstoffatome auf dem Weg von der Düse zum Detektor durch spontane Emission in den 1S-Grundzustand zerfallen.

Ein weiterer Effekt, der das Spektrum des 1S-2S Übergangs verbreitert aber *nicht* verschiebt, ist die sogenannte Durchflugsverbreiterung [Lei95]. Die Atome haben auf ihrem Weg zwischen Düse und Nachweisbereich nur eine kurze Zeit Δt , um mit dem Licht zu wechselwirken, das im Überhöhungsresonator gespeichert ist. Über die Energie-Zeit-Unschärfe $\Delta E \Delta t = \text{const}$ ist Δt mit einer Energieunschärfe $\Delta E = h \Delta f$ und damit einer Frequenzunschärfe Δf verbunden. Kalte Atome und der verzögerte Fluoreszenznachweis helfen, die Durchflugsverbreiterung zu verringern. Die schmalsten jemals gemessenen 1S-2S Spektren wurden von M. Fischer im Rahmen seiner Doktorarbeit beobachtet. Die volle Breite bei halber Höhe betrug lediglich 968 Hz bezogen auf 121,6 nm.¹⁵ Das entspricht einer rel. Auflösung von $3,9 \cdot 10^{-13}$. Typische Halbwertsbreiten *ohne* Verzögerung sind etwa 4 kHz (Düsentemperatur 5 K).

In Abbildung 5.4 ist eine 1S-2S Linie als Funktion der Verzögerungszeit τ dargestellt. Die Spektren der Verzögerungszeit τ enthalten dabei *alle* Ereignisse, die nach der jeweiligen Verzögerungszeit nachgewiesen wurden. Das bedeutet, daß z. B. das Spektrum, das zur Verzögerungszeit 1400 μs gehört, auch diejenigen Zählereignisse enthält, die in den Spektren der Verzögerungszeiten 1600 μs , 1800 μs , \dots dargestellt sind. Die Spektren werden mit steigender Verzögerung schmaler, symmetrischer und die Verschiebung von der Ruhfrequenz nimmt ab. Die 12 Spektren unterschiedlicher Verzögerungszeit, die man pro Scan über die 1S-2S Resonanz erhält, werden dazu verwendet, um mit Hilfe einer Fitprozedur¹⁶ 7 Parameter eines aufwendigen Linienformmodells zu bestimmen, das von A. Huber im Rahmen seiner Doktorarbeit entwickelt wurde [Hub97, Hub99, Nie00b]. Von den 7 Parametern modellieren 4 die Geschwindigkeitsverteilung, einer den Wasserstofffluß, ein weiterer berücksichtigt zusätzliche Verbreiterungen und der letzte schließlich ist die Frequenz des 1S-2S Übergangs bei Geschwindigkeit $v = 0$. Die Genauigkeit des Huber'schen Linienformmodells wird in [Fis04b] mit ± 20 Hz bezogen auf 121,6 nm bzw. 2 466 THz angegeben.

Von M. Haas und U. Jentschura¹⁷ wurde nach der Messung im Jahr 2003 ein alternatives Linienformmodell entwickelt, das eine andere Geschwindigkeitsverteilung zugrunde legt als das Huber'sche Modell. Werden die Spektren aller Verzögerungszeiten ausgewertet,

¹⁵Die Verzögerung war 1410 μs und die Düsentemperatur 5 K.

¹⁶Siehe die durchgezogenen Linien in den Abbildungen 5.3 und 5.4.

¹⁷Beide sind in der Arbeitsgruppe von Ch. Keitel am Max-Planck-Institut für Kernphysik in Heidelberg tätig.

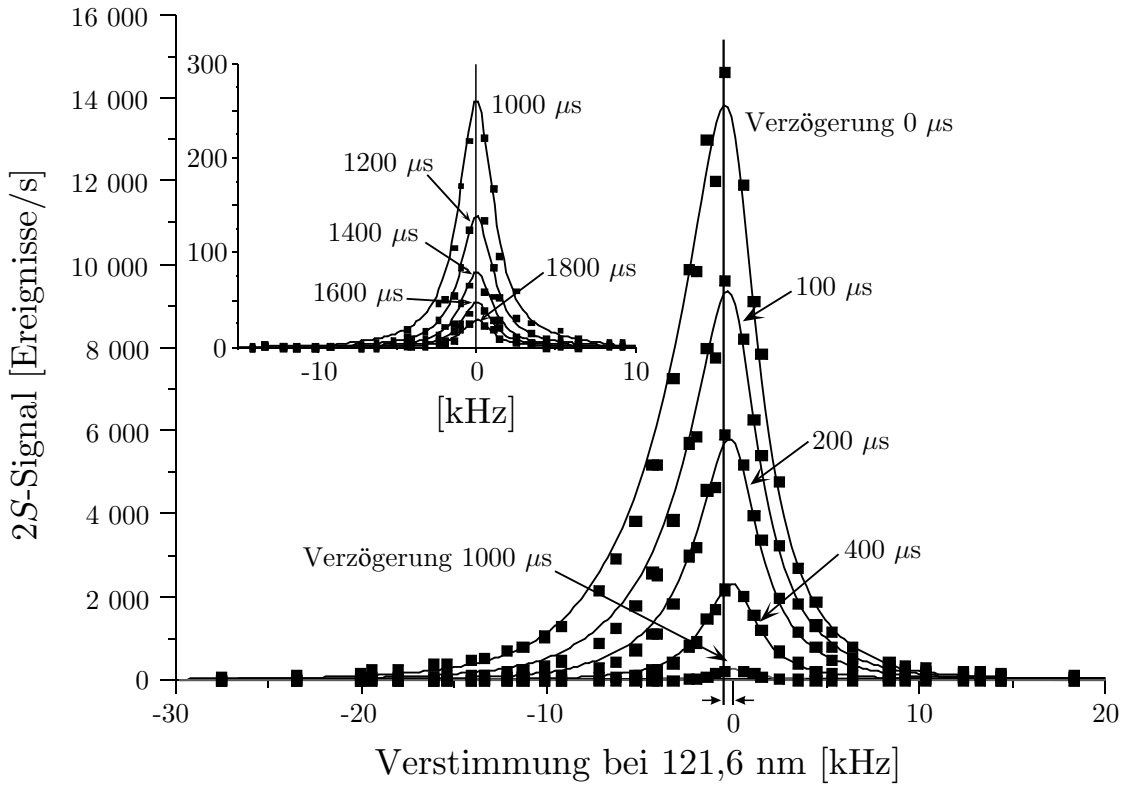


Abbildung 5.4: Die 1S-2S Resonanz als Funktion der Verzögerungszeit τ . Mit steigendem τ nimmt der Anteil der langsamen Atome zu, weshalb die Spektren mit der größten Verzögerung die geringste Dopplerverschiebung zweiter Ordnung und die kleinste Durchflugsverbreiterung aufweisen. Die Spektren für $\tau \geq 1000 \mu\text{s}$ sind links oben vergrößert dargestellt. Die Düsentemperatur betrug 7K .

so kommen beide Linienformmodelle im Rahmen der statistischen Fehler zu dem gleichen Ergebnis. Werden beim alternativen Linienformmodell dagegen nur die Spektren mit Verzögerungen $\geq 1210 \mu\text{s}$ zur Auswertung herangezogen, so wird die Qualität der Anpassungen besser, es ergibt sich aber eine höhere Frequenz [Jen03]. Das deutet darauf hin, daß die im Experiment vorliegende Geschwindigkeitsverteilung durch das Modell noch nicht gut genug modelliert wird. Daher wurde für die Auswertung der Messungen weiterhin das Huber'sche Modell verwendet.

Ein weiterer systematischer Effekt, der bei der Auswertung der Wasserstoffspektren berücksichtigt werden muß, ist die sogenannte AC-Stark Verschiebung, welche die Wasserstoffspektren linear mit der Lichtintensität zu kürzeren Wellenlängen hin verschiebt [Bea86]. Um sie zu korrigieren, wird mit unterschiedlichen Lichtleistungen gemessen und die mit dem Linienformmodell ermittelten Ruhefrequenzen zu verschwindender Intensität hin extrapoliert (siehe Abbildung 5.5).

Die sogenannte Rückstoßverschiebung muß bei der Auswertung der 1S-2S Spektren nicht

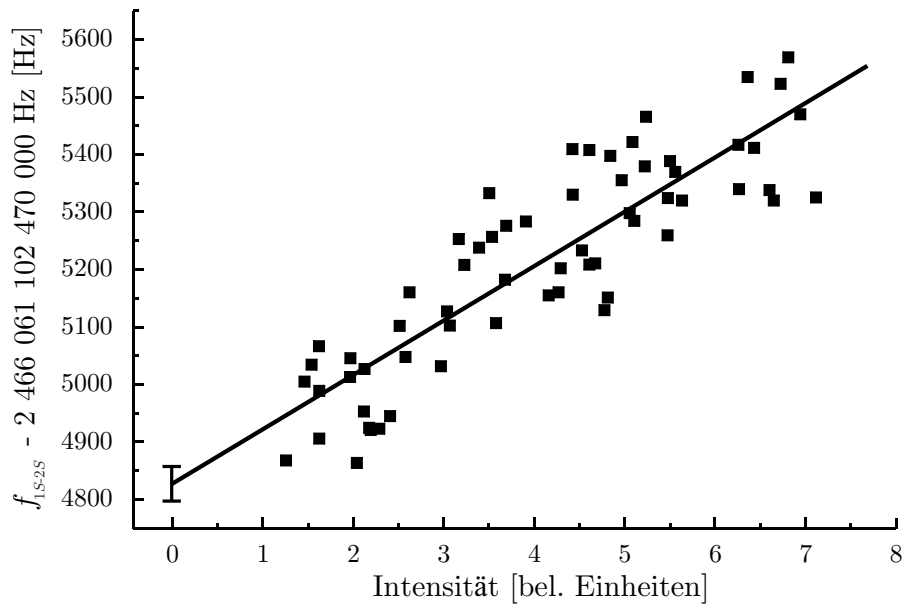


Abbildung 5.5: Der AC-Stark Effekt bewirkt eine Blauverschiebung der Wasserstoffspektren, die linear mit der Lichtintensität ist. Um ihm zu kompensieren, werden die Frequenzen, die man bei unterschiedlichen Lichtleistungen mit dem Linienformmodell ermittelt hat, zu verschwindender Intensität hin extrapoliert. Die gezeigten Daten wurden am 18.2.2003 während der Messung mit der Cs-Fontänenuhr aufgenommen.

berücksichtigt werden, weil sie durch die Gegenläufigkeit der beiden Photonen auf einen vernachlässigbaren Wert von < 1 Hz verringert ist. Im Vergleich dazu beträgt die Rückstoßverschiebung des 1S-2P Übergangs etwa 13 MHz.

In Tabelle 5.1 sind alle *bekannt* systematischen Effekte zusammengefaßt, die bei der Auswertung der 1S-2S Spektren berücksichtigt werden müssen.¹⁸ Bei der gebotenen Kürze dieses Abschnittes konnten nicht alle Effekte einzeln behandelt werden. Für diese Effekte sei deshalb auf die Doktorarbeit von M. Fischer verwiesen [Fis04b]. Die angegebenen Verschiebungen der 1S-2S Frequenz beziehen sich auf die experimentellen Bedingungen der Messung im Jahr 2003 und müssen zur gemessenen Frequenz von $\approx 2\,466$ THz hinzugezählt werden, die man als Mittelwert der AC-Stark-Extrapolationen der einzelnen Meßtage erhält (siehe Abschnitt 5.2.6 ab Seite 106 und Abbildung 5.12 auf Seite 107). Das gesamte Fehlerbudget der 1S-2S Frequenzmessung einschließlich der Fehler der AC-Stark-Extrapolation, der Cs-Fontänenuhr und des Linienformmodells findet man in Tabelle 5.4 auf Seite 109.

¹⁸Diese Liste muß keineswegs vollständig sein, denn es mag noch unbekannt Systematiken geben (siehe Abschnitt 5.3.1 ab Seite 110).

Effekt	Wirkung	Korrektur $f_{1S-2S} - f_{exp}$	Referenz
Dopplereffekt zweiter Ordnung	Verschiebung Verbreiterung	Linienformmodell	[BS]
Durchflugsverbreiterung	Verbreiterung	Linienformmodell	[Lei95]
DC-Stark Effekt	Verschiebung	0 ± 5 Hz	[Bet77]
AC-Stark Effekt	Verschiebung	Extrapolation	[Bea86]
Ionisation	Verbreiterung	Linienformmodell	[Hub97]
Wechselwirkung mit dem Hintergrundgas	Verschiebung	0 ± 2 Hz	[McI89]
Stöße im Atomstrahl	Verschiebung	0 ± 10 Hz	[Nie00b] [Fis04b]
gekrümmte Wellenfronten	Verschiebung	0 ± 1 Hz	[Bor97]
Schwarzkörperstrahlung	Verschiebung	0 ± 1 Hz	[Far81]
Stark Effekt aufgrund von Magnetfeldern	Verschiebung	< 1 Hz	[Bet77]
Aufspaltung der Linie im Magnetfeld	Verbreiterung	Linienformmodell	[Bet77]

Tabelle 5.1: Bekannte systematische Effekte, die bei der Auswertung der Wasserstoffspektren berücksichtigt werden müssen. Alle Effekte, die nur zu einer Verbreiterung der Linie führen, sind im Prinzip im Linienformmodell berücksichtigt. Die Genauigkeit des Linienformmodells wird in [Fis04b] mit ± 20 Hz angegeben. Um den wahren Wert der 1S-2S Frequenz zu erhalten, müssen die angegebenen Verschiebungen zur experimentell ermittelten Frequenz f_{exp} hinzugezählt werden. f_{exp} erhält man als Mittelwert der AC-Stark-Extrapolationen der einzelnen Meßtage (siehe Abschnitt 5.2.6 ab Seite 106 und Abbildung 5.12 auf Seite 107).

5.2.3 Änderungen des Wasserstoffspektrometers im Vergleich zu 1999

Von M. Fischer wurden während seiner Doktorarbeit einige Änderungen am Wasserstoffspektrometer durchgeführt, die zu einer Verringerung des Meßfehlers im Jahr 2003 geführt haben. Die wichtigsten sind im folgenden aufgelistet.

- **differentielle Pumpstufe**

Durch einen Hintergrundgasdruck von etwa 10^{-6} mbar kam es bei der Messung im Jahr 1999 zu einer Druckverschiebung der 1S-2S Frequenz von 10 ± 10 Hz bei

121,6 nm. Zusätzlich dazu führt ein hoher Hintergrundgasdruck zu einer bevorzugten Verringerung langsamer Atome im Gasstrahl, weil diese längere Zeit mit dem Hintergrundgas wechselwirken können als schnelle Atome. Um beide Effekte zu verringern, wurde eine differentielle Pumpstufe aufgebaut. Die Kryopumpe in Abbildung 5.2 evakuiert jetzt ausschließlich die Wechselwirkungs- und Nachweiszone, während der Rest der Vakuumapparatur von einer Turbomolekularpumpe evakuiert wird. Der Druck, der jetzt in der Wechselwirkungszone erreicht wird, ist $2\text{-}3\cdot 10^{-8}$ mbar,¹⁹ was nach [McI89] einer Druckverschiebung von < 1 Hz entspricht. Auch die Fluoreszenz langsamer Atome hat sich 2003 bei gleicher Düsentemperatur erhöht.

- **schwächer gekrümmte Wellenfronten**

Durch die Krümmung der Wellenfronten im Überhöhungsresonator des 243 nm Lichts kann es nach [Bor97] zu einer Verschiebung der 1S-2S Frequenz kommen. Dieser Effekt wurde 1999 zu 0 ± 10 Hz bei 121,6 nm abgeschätzt. Um diesen Effekt zu verringern, wurde ein Überhöhungsresonator mit schwächer gekrümmten Wellenfronten aufgebaut, so daß die zu erwartende Verschiebung auf 0 ± 1 Hz reduziert werden konnte.

- **neuer Referenzresonator**

Durch Temperaturschwankungen und Alterungseffekte ist die Frequenz eines Referenzresonators zeitlichen Schwankungen unterworfen, die man innerhalb eines nicht zu großen Zeitintervalls mit einer einfachen Funktion modellieren kann.²⁰ Jede Abweichung der Frequenz vom gewählten Modell macht sich dabei als Fehler in der Frequenzmessung bemerkbar. Um diese irreguläre Drift zu reduzieren, wurde ein neuer Referenzresonator aufgebaut, der schwingungsmäßig wie thermisch aufwendig von seiner Umgebung isoliert ist. Die Spiegelsubstrate und der Abstandshalter sind aus ULE gefertigt, während beim alten Resonator ZERODUR verwendet wurde. Die Vorteile von ULE gegenüber ZERODUR sind vor allem geringere und gleichmäßigere Alterungseffekte. Die Drift des neuen Resonators ist < 1 Hz/s und die Linienbreite ist bei einer Mittelungszeit von 2 s < 100 Hz. Beide Angaben beziehen sich auf 486 nm. Die Finesse des Resonators ist etwa 90 000.

Abgesehen von diesen Verbesserungen wurden die 1S-2S Frequenzmessungen der Jahre 1999 und 2003 identisch durchgeführt und ausgewertet.

5.2.4 Frequenzkammaufbau 2003

Die Frequenz des 1S-2S Übergangs wird in zwei Stufen gemessen: in der ersten Stufe wird die Frequenz des Übergangs relativ zu einer longitudinalen Mode des ULE-Referenzresonators bestimmt und in der zweiten Stufe wird die Frequenz dieser longi-

¹⁹Der Druck wurde 1999 und 2003 direkt oberhalb der Kryopumpe gemessen. Im Bereich des Gasstrahls kann er höher sein.

²⁰2003 wurde die Resonatorfrequenz für Zeitintervalle von 500 s durch eine quadratische Funktion modelliert, 1999 durch ein Polynom dritten Grades.

tudinalen Mode mit Hilfe eines fs-Frequenzkammgenerators gemessen, der auf eine Cs-Fontänenuhr stabilisiert ist. Durch dieses zweistufige Verfahren ist es möglich, die hohe Kurzzeitstabilität des Referenzresonators, mit der besseren Langzeitstabilität und Genauigkeit der Cs-Fontänenuhr zu verbinden. Der Referenzresonator ist sozusagen ein stabiles optisches „Schwungrad“, dessen Frequenz mit der Fontänenuhr bestimmt werden muß.

In Abbildung 5.6 ist der optische Aufbau zur Frequenzmessung des Farbstofflasers bei 486 nm dargestellt. Wie bei den Messungen zum DFG-Kamm ist der SHG/SFG-Kristall *außerhalb* der interferometerartigen Anordnung plazierte. Das lag daran, daß der Aufbau, der sich bereits bei den Messungen in Abschnitt 3 bewährt hatte, möglichst wenig abgeändert werden sollte. Ein Nachteil dieser Anordnung ist die aufgrund des Walkoffs im SFG-Kristall schwierigere Überlagerung der beiden blauen Strahlen. Von Vorteil ist dagegen, daß beide Strahlen den Kristall mit derselben Polarisation verlassen, so daß eine Projektion mit $\lambda/2$ -Platte und Polarisationsstrahlteiler eingespart werden kann. Da die Phasenregelung der Pulswiederholrate f_r der kritischste Punkt des Frequenzkammaufbaus ist,²¹ muß großen Wert auf eine möglichst hohe Reinheit des f_r -Signals gelegt werden. Dazu gehört es auch, daß Leistungsschwankungen vermieden werden müssen, weil diese einen sich ändernden Wert von f_r vortäuschen können. Solche Leistungsschwankungen können z. B. durch Instabilitäten bei der Einkopplung in die PCF auftreten. Um dies zu verhindern, wurde das Licht zum Nachweis von f_r im Gegensatz zur Abbildung 2.9 auf Seite 32 *vor* der PCF abgezweigt.²² Dabei muß man sicher stellen, daß der fs-Laser und das Licht nach der PCF, das letztendlich für die Frequenzmessung verwendet wird, die gleiche Pulswiederholrate aufweisen. Leichte Abweichungen gegenüber f_r des fs-Lasers sind z. B. durch eine sich langsam ausdehnende PCF denkbar. In einer Testmessung, die vor der 1S-2S Frequenzmessung durchgeführt wurde, konnte gezeigt werden, daß beide Pulswiederholraten um weniger als $1 \cdot 10^{-15}$ voneinander abweichen.

Das Licht des Farbstofflasers wurde mit einer single mode Glasfaser vom Wasserstofflabor zum Frequenzkamlabor geleitet. Auf die Kompensation von Längenänderungen der Faser, die durch Temperaturänderungen oder Schall hervorgerufen werden, wurde verzichtet, weil in einer Testmessung gezeigt werden konnte, daß typische Frequenzverschiebungen bei einer Meßzeit von einer Stunde lediglich $-0,3 \pm 1,7$ Hz bezogen auf 486 nm betragen, was einer relativen Frequenzänderung von $(-0,5 \pm 2,8) \cdot 10^{-15}$ entspricht. Da die Lufttemperatur im Wasserstofflabor mit einer Klimaanlage auf etwa $\pm 0,5$ C° stabilisiert war, kann bei einer längeren Meßzeit eine weitere Verringerung dieser Frequenzverschiebung auf vernachlässigbare Werte erwartet werden. Die Temperatur im Frequenzkamlabor war dagegen nicht stabilisiert. Durch die geringe Wärmelast kann der stetige Temperaturanstieg konservativ mit $+4$ C° in 12 Stunden abgeschätzt werden. Die damit zu erwartende Frequenzverschiebung von $< 0,1$ Hz ist vernachlässigbar. Das Frequenzrauschen des Farbstofflasers wird durch kurzzeitige Längenänderungen der Glasfaser (Schall) zwar vergrößert, ist aber im Vergleich zur Instabilität der Cs-Fontänenuhr zu vernachlässigen.

Nach dem Kollimationsobjektiv standen auf der Seite des Frequenzkamlabors typischer-

²¹Multiplikation mit $n \approx 1 \cdot 10^6$

²²Zum Nachweis wurde ein Reflex des Glaskeils verwendet, der sich im fs-Laser befindet.

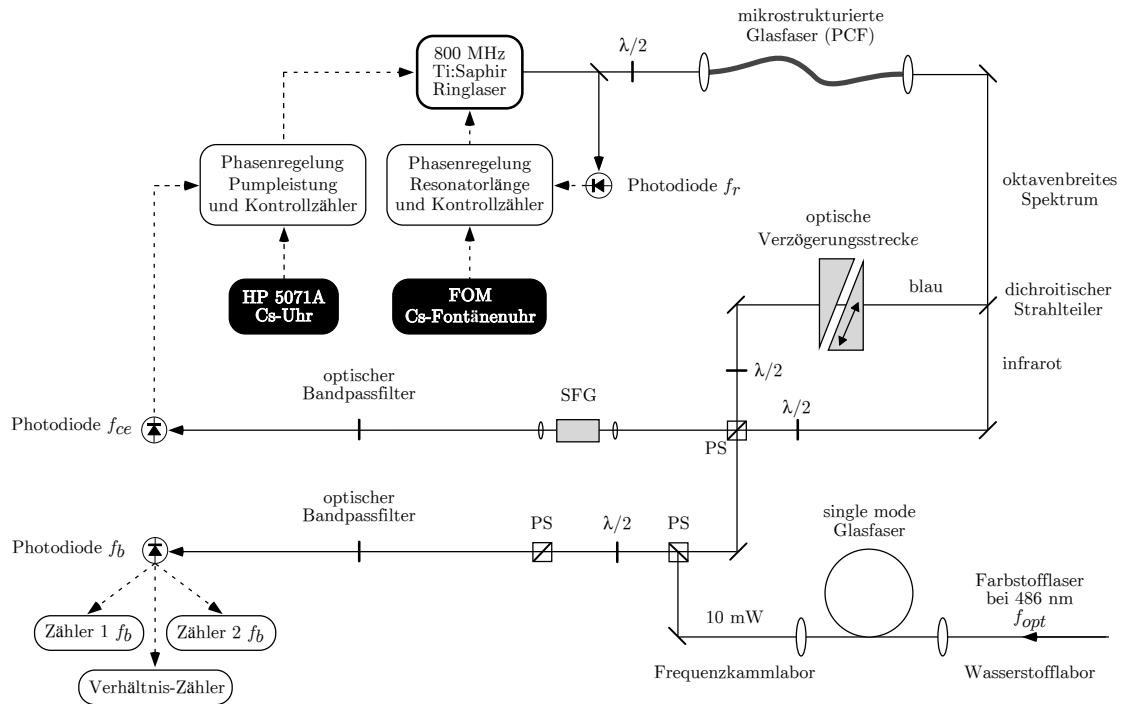


Abbildung 5.6: *Optischer Aufbau zur Messung der Frequenz des Farbstofflasers bei 486 nm. Das Licht des Farbstofflasers wurde mit einer single mode Glasfaser vom Wasserstofflabor zum FrequenzkammLabor geleitet. Der skizzierte Aufbau weicht von Abbildung 2.9 auf Seite 32 in der Position des Kristalls außerhalb des Interferometers und der Detektion von f_r vor der PCF ab. Die Cs-Fontänenuhr kontrolliert lediglich die Pulswiederholrate, alle anderen Lokaloszillatoren oder Zähler werden mit einer HP 5071A Cs-Uhr referenziert. Optische Wege sind durchgezogen- und elektronische Wege unterbrochen gezeichnet.*

weise 10 mW blauen Lichts für die Frequenzmessung zur Verfügung. Die Signal-zu-Rausch-Verhältnisse von f_{ce} und der Schwebungsfrequenz f_b von Farbstofflaser und Frequenzkamm betragen mindestens 40 dB, meistens jedoch 50 dB in 300 kHz Auflösungsbandbreite. Die Phasenregelkreise von f_{ce} und f_r wurden mit Kontrollzählern auf Verluste von Zyklen²³ überprüft. Die Pulswiederholrate wurde während der Wasserstoffmessung mit zwei unterschiedlichen elektronischen Anordnungen (Konfiguration 1 und 2) stabilisiert, die in Anhang B.1 beschrieben sind. Mit der zweiten Konfiguration, die an 9 von 12 Tagen verwendet wurde, hatte das Radiofrequenzspektrum der Schwebung zwischen Farbstofflaser und Frequenzkamm eine Breite von etwa 2 MHz.²⁴ Als Lokaloszillator für die Pulswiederholrate wurde *kein* Synthesizer verwendet, sondern eine Radiofrequenzkette, welche die Frequenz des Quarzoszillators der Cs-Fontänenuhr ver-80-fachte ($80 \cdot 10 \text{ MHz} = 800 \text{ MHz}$), wodurch die Stabilität der Cs-Fontänenuhr ohne Verluste in den optischen Bereich übertragen werden konnte. Vor der 1S-2S Frequenzmessung wurde sichergestellt, daß bei der

²³engl. cycle slips

²⁴Die Auflösungsbandbreite des verwendeten Hameg 5010 Spektrumanalysators war 300 kHz und die Bildwiederholrate 43 Hz.

gehen, weichen die Ergebnisse bei einer gezählten Frequenz von 35,7 MHz im Mittel um 5,6 Hz voneinander ab (Torzeit 1 s). Dieser Wert ist klein im Vergleich zu den Schwankungen von Meßpunkt zu Meßpunkt, die etwa 100 Hz betragen, so daß durch die Mittelung der Zähler kein wesentlicher Vorteil entsteht. Da der mittlere Frequenzunterschied beider Zähler > 1 Hz ist, läßt sich damit nicht sicher feststellen, ob einer der Zähler einen Zyklus verloren hat und somit eine fehlerhafte Frequenzmessung vorliegt. Wenn der Frequenzunterschied allerdings wesentlich größer als 5,6 Hz ist (z. B. > 60 Hz), so kann der Meßpunkt als fragwürdig angesehen werden. Um sicher zu stellen, daß beide f_b -Zähler keinen Zyklus verlieren, wurde mit einem dritten Zähler das Frequenzverhältnis aus dem Photodiodensignal und dem mit einem Komparator in ein Rechtecksignal umgewandelten Photodiodensignal bestimmt. Die Gründe dafür, daß ein Zähler Zyklen verliert, sind ein zu kleines Signal-zu-Rausch-Verhältnis und/oder eine zu niedrige Leistung des Signals. Falls die Signal-zu-Rausch-Verhältnisse und die Leistungspegel an beiden Kanälen des Verhältniszahlers ein fehlerfreies Zählen ermöglichen, so zeigt dieser das Verhältnis 1 an, andernfalls eine Zahl, die deutlich davon abweicht. Wenn das Verhältnis zu 1 bestimmt wurde, kann man davon ausgehen, daß auch die beiden f_b -Zähler fehlerfrei gearbeitet haben.²⁵ Dieser Test beruht darauf, daß beide Signale, die an den Kanälen des Verhältniszahlers anliegen, zwar die gleiche Frequenz haben, aber ansonsten unterschiedlich sind. Wären die Eingänge des Verhältniszahlers und die beiden Signale *identisch*, so würde *immer* ein Verhältnis von 1 angezeigt werden. Die Unterschiedlichkeit beider Signale wurde deshalb durch Einfügen eines Komparators in einen Signalweg garantiert. Im Gegensatz zum Vergleich zweier Zähler, ist die Synchronisation zweier Kanäle *eines* Zählers kein Problem.

Nach der Bestimmung der Vorzeichen von $f_b \approx 35,7$ MHz und $f_{ce} = 40$ MHz und Ermittlung der Modenummer $n = 770\,644$ war die Frequenz des Farbstofflasers f_{dye} gegeben durch:

$$f_{dye} = n \cdot f_r + f_{ce} + f_b = 770\,644 \cdot 800 \text{ MHz} + 40 \text{ MHz} + f_b. \quad (5.7)$$

Für die Frequenz des 1S-2S Übergangs ergibt sich dann insgesamt:

$$f_{1S-2S} = 4 \cdot f_{dye}. \quad (5.8)$$

Mit Abbildung 5.8 findet man für die Mode f_{cavity} des Referenzresonators

$$f_{cavity} = f_{dye} + 2f_{AOM} - \frac{1}{2} f_{LO, Faser-AOM}. \quad (5.9)$$

Der AOM wurde zur Verstimmung des Farbstofflasers verwendet (Scan über die 1S-2S Resonanz), während der Faser-AOM zur Kompensation von Längenänderungen der Glasfaser diente.²⁶

²⁵Die Schwebung an den Eingängen der beiden f_b -Zähler hatte während der Messung eine Leistung von maximal +1 dBm und minimal -9 dBm. Das Rauschen hatte eine Leistung von -50 dBm (Auflösungsbandbreite 300 kHz). Die Leistung an den Eingängen des Verhältniszahlers war immer kleiner als an denen der f_b -Zähler.

²⁶Längenänderungen der Glasfaser, die durch Schall oder Temperaturänderungen hervorgerufen werden, führen zu Phasenverschiebungen des Laserlichts und damit zu einer Vergrößerung der Linienbreite.

den Frequenzunterschied δf der beiden f_b -Zähler wurden nur Werte < 60 Hz zugelassen. Der Stabilisierungs-Indikator des Referenzresonators schließlich war ein digitales Signal: TTL-high bedeutete, daß der Farbstofflaser während der gesamten Torzeit auf den Referenzresonator stabilisiert war. Falls nach der Anwendung aller Ausschlußkriterien noch Punkte übrig waren, die deutlich außerhalb des Rauschbandes lagen, so wurden diese per Hand aussortiert. Um zu garantieren, daß die Torzeit der f_b -Zähler von der Torzeit der Kontrollzähler überdeckt wird, wurde diese etwas *größer* als eine Sekunde gewählt und die Kontrollzähler *vor* den f_b -Zählern gestartet und *nach* ihnen gestoppt.

In Tabelle 5.2 ist zur Veranschaulichung aufgeführt, wieviele Meßpunkte pro Kriterium aussortiert wurden. Die Tatsache, daß lediglich 5 von über 90 000 Punkten per Hand gelöscht werden mußten, zeigt die hohe Effizienz der Auswahlkriterien. Dabei lag der Frequenzpunkt, der noch am ehesten mit den Messungen verträglich war, bereits mehr als 10σ vom Rauschband entfernt.

effektive Meßzeit		> 60, 5 h
Zeit pro Meßpunkt		ca. 2,4 s
Anzahl der Meßpunkte		90 301
Kriterium	Punkte	%
f_r	97	0,1
f_{ce}	2 835	3,1
Verhältnis	6 592	7,3
δf	6 766	7,5
Farbstoff	11 657	12,9
gesamt	15 405	17,1
per Hand	5	0,006

Tabelle 5.2: Anzahl der aussortierten Punkte während der gesamten Meßzeit. Bei vielen Meßpunkten trafen mehrere Kriterien zu, so daß die Gesamtzahl der aussortierten Punkte kleiner ist als die Summe der einzelnen Kriterien. Lediglich 5 Punkte von über 90 000 wurden nicht als fehlerhaft erkannt. „Farbstoff“ steht für den Stabilisierungs-Indikator des Farbstofflasers.

In Abbildung 5.9 ist die absolute Frequenz der verwendeten Resonatormode während der gesamten Meßzeit von 12 Tagen dargestellt. Das unregelmäßige Verhalten geht auf Temperaturschwankungen des Resonators zurück. Selbst bei konstanten äußeren Bedingungen ändert sich die Frequenz der Resonatormode aufgrund von Alterungseffekten in der ULE Glaskeramik (Kristallisation). Bei wiederholten Messungen der 1S-2S Frequenz relativ zum Resonator wurde von M. Fischer über einen Zeitraum von mehr als 400 Tagen eine langsame Drift der Resonatorfrequenz von 0,24 Hz/s bezogen auf 121,6 nm beobachtet. Dieser Wert ist etwas größer als die Steigung der Ausgleichsgeraden in Abbildung 5.9. Wie in der Abbildung auch zu sehen ist, kann die Frequenzdrift während eines Meßtages wesentlich größer sein als durch die Ausgleichsgerade angedeutet ist. Als Beispiel dafür

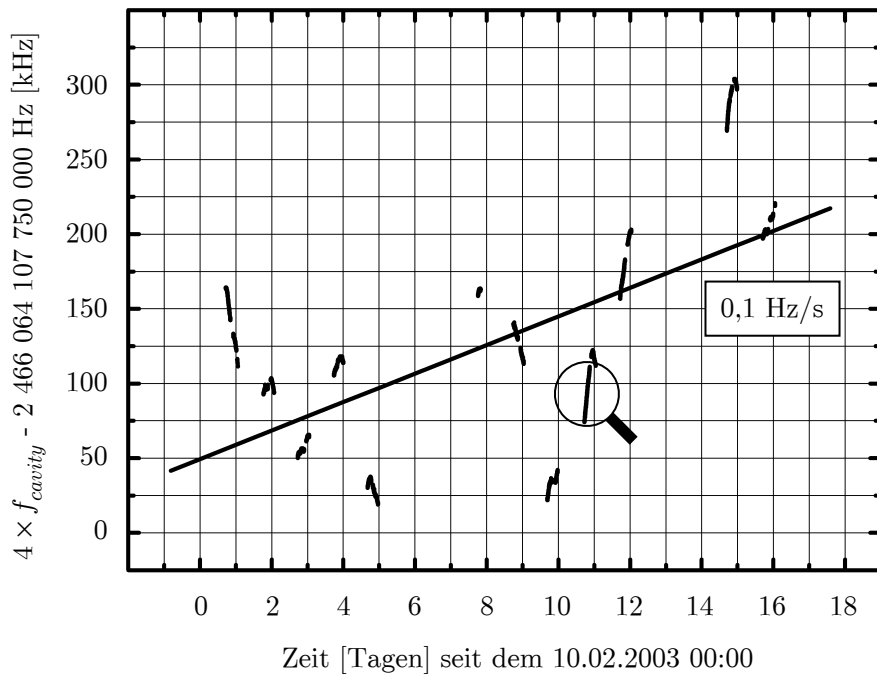


Abbildung 5.9: Absolute Frequenz der verwendeten Mode des Referenzresonators während der gesamten Meßzeit. Die Frequenz wurde mit vier multipliziert, um besser mit $f_{1S-2S} = 2\,466\,061\,102\,474\,851\,(25) \text{ Hz}$ vergleichen zu können. In der Ausgleichsgeraden mag man einen Langzeittrend erahnen. Der mit der Lupe markierte Bereich ist in Abbildung 5.10 vergrößert dargestellt.

ist in Abbildung 5.10 eine besonders lange und zusammenhängende Messung der Resonatorfrequenz dargestellt. Zum Vergleich wurde der Abbildung eine Resonatormessung hinzugefügt, bei welcher der Frequenzkamm auf die HP 5071A Cs-Uhr des Frequenzkamm Labors in Verbindung mit einem externen hochstabilen Quarzoszillator stabilisiert war. Die Schwankungen auf kurzer Zeitskala können den beiden Cs-Uhren zugeordnet werden, während die langsamen Änderungen (Drift) durch den Referenzresonator hervorgerufen werden. Streng genommen folgt diese Aufteilung nicht aus unseren Daten, weil nur die *kombinierte* Stabilität von Uhr und Resonator gemessen wurde. Durch unabhängige Messungen der Uhrenstabilitäten durch die Hersteller wird diese Zuordnung jedoch gerechtfertigt. Man erkennt, daß die Frequenz des Referenzresonators mit der Fontänenuhr in der gleichen Meßzeit wesentlich genauer bestimmt werden kann als mit der HP-Uhr. Der eingezeichnete Zusammenhang $\sigma_y(\tau) = 1,3 \cdot 10^{-13} / \sqrt{\tau}$, wobei τ die Mittelungszeit in Sekunden ist, entspricht der unabhängig gemessenen Stabilität der Cs-Fontänenuhr [Abg03]. Das heißt, bis zu einer Torzeit von etwa 10 s ist der Referenzresonator stabiler als die Fontänenuhr (ausgefüllte Kreise) und erst ab einer Mittelungszeit von $> 50 \text{ s}$ läßt sich die Drift des Resonators nicht mehr durch eine quadratische Funktion annähern (offene Kreise). Die eingezeichnete konstante Funktion beschreibt die Stabilität des externen Quarzoszillators, der mit einer Zeitkonstante von etwa 1 000 s an die HP-Uhr phasenstabi-

Referenz-Resonator relativ zu:

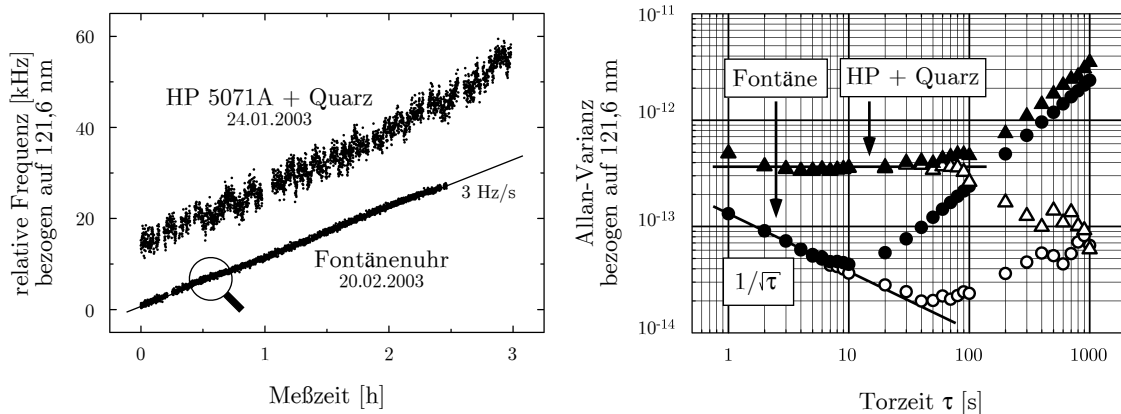


Abbildung 5.10: (Links) Relative Frequenz des Referenzresonators bezogen auf 121,6 nm. Der Frequenzkamm war einmal auf die Cs-Fontänenuhr FOM und das andere mal auf die HP 5071A-Uhr in Verbindung mit einem hochstabilen externen Quarz stabilisiert. Der mit der Lupe markierte Bereich ist in Abbildung 5.11 gesondert dargestellt. (Rechts) Allan-Varianzen der links dargestellten Daten. Kreise beziehen sich auf die Fontänenuhr und Dreiecke auf die HP-Uhr. Ausgefüllte Symbole entsprechen den links dargestellten Messungen während man offene Symbole nach Abzug des quadratischen Anteils der Drift erhält. Das dargestellte $1/\sqrt{\tau}$ Verhalten kann der Fontänenuhr zugeordnet werden. Ab einer Mittelungszeit von ca. 50 s machen sich bei dieser Messung Driften höherer Ordnung bemerkbar. Der waagerechte Verlauf der Allan-Varianz bei der Messung des Referenzresonators relativ zur HP-Uhr geht auf den verwendeten Quarzoszillator zurück.

lisiert war.²⁹ Nicht nur die im Vergleich zur HP-Uhr bessere Stabilität der Fontänenuhr ist für die 1S-2S Frequenzmessung wichtig, sondern auch ihre höhere Genauigkeit. Während man bei der Fontänenuhr nur etwa 5 Stunden mitteln muß, um ihre Frequenz mit einer relativen Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-15}$ zu kennen, benötigt man bei der HP-Uhr in Verbindung mit einer Kalibrierung durch das GPS-Zeitsignal fast einen Monat um eine Genauigkeit von lediglich $1 \cdot 10^{-14}$ zu erreichen.³⁰ Im Allan-Varianz Diagramm in Abbildung 5.10 sieht man, daß sich die Frequenz des Referenzresonators nicht für *beliebig* lange Zeiten durch eine quadratische Funktion beschreiben läßt. Das ist umso mehr der Fall, je länger die betrachtete Messung ist. Im Fall der Fontänenuhr war die Messung etwa 2,5 Stunden bzw. 9 000 s lang. Für kürzere Zeitintervalle von 500 s Länge beschreibt eine quadratische Funktion die Resonatorfrequenz dagegen sehr gut. Um das zu zeigen, wurde aus Abbildung 5.10 ein 500 s langes Intervall mit besonders starker Krümmung ausgewählt und in Abbildung 5.11 gesondert dargestellt. Im driftkorrigierten Allan-Varianz Diagramm, für

²⁹Der Quarz hat eine spezifizierte Stabilität von $1 \cdot 10^{-13}$ für Mittelungszeiten von 1-30 s. Die beobachtete Abweichung davon konnte nicht abschließend geklärt werden.

³⁰Diese Angaben beziehen sich auf einen Hameg 8125 GPS-Empfänger. Die Ankunftszeiten des GPS-Zeitsignals wurden *nicht* mit einem Ionosphärenmodell korrigiert und der Zeitunterschied zwischen der GPS-Zeit und UTC, der für jeden Tag veröffentlicht ist, wurde ebenfalls *nicht* berücksichtigt (siehe Abbildung 2.14 auf Seite 41).

dessen Berechnung eine quadratische Funktion von den Meßdaten abgezogen wurde, ist nur die Instabilität der Fontänenuhr zu erkennen. Das bedeutet, daß die Resonatordrift in einem Zeitintervall von 500s durch eine quadratische Funktion bestmöglich beschrieben wird. Kompliziertere Modelle würden eine höhere Stabilität der Fontänenuhr voraussetzen. Die Anpassung eines Polynoms zweiten Grades an die Frequenzdaten entspricht dabei der Mittelung der Fontänenuhr über einen Zeitraum von 500s mit Hilfe des Referenzresonators. Mit dieser Methode ist es im Prinzip möglich, die Frequenz des Resonators für jeden Datenpunkt mit einer Genauigkeit von $1,3 \cdot 10^{-13} / \sqrt{500} \approx 6 \cdot 10^{-15}$ anzugeben. Im Experiment wird es sicherlich immer Abweichungen von einer quadratischen Drift geben, aber die Anpassung eines Polynoms dritten oder höheren Grades würde nur dann Sinn machen, wenn beim driftkorrigierten Allan-Varianz Diagramm in Abbildung 5.11 eine Abweichung von der Stabilität der Fontänenuhr erkennbar wäre.

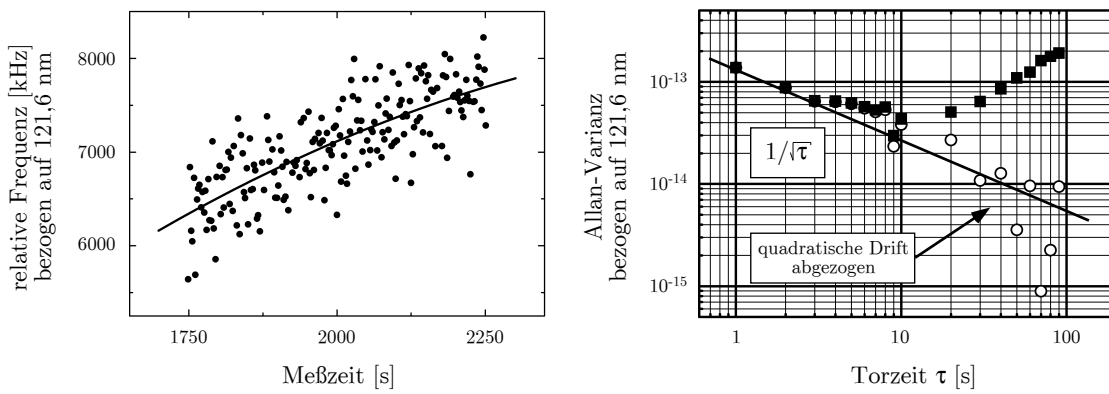


Abbildung 5.11: (Links) Frequenzmessung des Referenzresonators in einem Zeitintervall von 500 s relativ zur Cs-Fontänenuhr FOM. Die Streuung von Punkt zu Punkt wird durch die Instabilität der Fontänenuhr hervorgerufen während die langsame Drift seine Ursache in Längenänderungen des Referenzresonators hat. Die Frequenzdrift läßt sich gut durch eine quadratische Funktion beschreiben. (Rechts) Allan-Varianz der links dargestellten Daten. Ausgefüllte Kreise markieren die Allen-Varianz der Rohdaten während für die offenen Kreise eine quadratische Drift des Referenzresonators korrigiert wurde. In der Allan-Varianz der korrigierten Daten ist keine Abweichung von der Stabilität der Fontänenuhr zu erkennen (durchgezogene Linie).

Die Torzeit der in den Abbildungen 5.10 und 5.11 dargestellten Frequenzmessungen war 1 s. Um die Allen-Varianz auch für Torzeiten > 1 s berechnen zu können, wurden benachbarte Meßpunkte gemittelt, um so neue Meßpunkte mit größerer Torzeit zu simulieren. Diese Methode kann zu Fehlern führen, falls die Totzeit zwischen benachbarten Meßpunkten ungleich Null ist [Les83], was bei den dargestellten Messungen immer der Fall war.³¹ Zum einen kann der Absolutwert der so berechneten „Allan-Varianz“ falsch sein, es kann

³¹Zum einen hatten die verwendeten Zähler eine Totzeit und zum anderen wurden aus den Datensätzen fehlerhafte Punkte herausgelöscht, so daß die Totzeit keineswegs konstant und teilweise auch größer als die Torzeit war.

sogar vorkommen, daß der funktionale Zusammenhang dieser „Allan-Varianz“ mit der Torzeit τ ein anderer ist, als wenn die Allan-Varianz korrekt berechnet wird. Ob das der Fall ist, hängt vom vorherrschenden Rauschprozeß ab. Im Falle der Fontänenuhr dominiert weißes Frequenzrauschen ($\sigma_y(\tau) \sim 1/\sqrt{\tau}$), für das gezeigt werden kann, daß sich die funktionale Abhängigkeit und die Absolutwerte beim Zusammenfügen von Meßdaten nicht ändern [Les83]. Das bedeutet, daß in diesem Fall die Mittelung benachbarter Meßpunkte zulässig ist, sofern man vorher aus den Daten den Einfluß des Referenzresonators herausgerechnet hat. In allen anderen Fällen sind die berechneten Allan-Varianzen für $\tau > 1$ s lediglich als Schätzwert anzusehen.

Um die überlegene Kurzzeitstabilität des Referenzresonators mit der besseren Langzeitstabilität der Fontänenuhr zu verbinden, wurde die Frequenzachse der 1S-2S Spektren folgendermaßen bestimmt. Zuerst wurde mit dem Frequenzkamm die Frequenz f_{dye} des Farbstofflasers als Funktion der Zeit gemessen und die Frequenz f_{cavity} der Resonatormode mit Gleichung 5.9 berechnet. Dann wurde für jedes aufgenommene Spektrum der 1S-2S Resonanz ein Zeitintervall von 500 s Länge bestimmt, das um das zeitliche Auftreten der Resonanz zentriert war. Für jedes Zeitintervall wurde eine quadratische Funktion an die berechneten Frequenzen des Resonators angepaßt, die seine gemittelte Frequenz als Funktion der Zeit beschreibt. Zeitintervalle > 500 s wurden zur Bestimmung der Resonatorfrequenz nicht verwendet, weil dann bereits Abweichungen von einer quadratischen Drift auftreten können bzw. ein komplizierteres Modell für die Resonatorfrequenz nötig wäre. Im letzten Schritt wurde mit Hilfe des Polynoms und Gleichung 5.9 die gemittelte Frequenz des Farbstofflasers für jeden Meßpunkt errechnet.

Würde man die Frequenz des Farbstofflasers nicht auf den Referenzresonator stabilisieren, sondern auf eine Mode des Frequenzkamms, der von der Fontänenuhr kontrolliert wird, so ist die zu erwartende Linienbreite des Farbstofflasers so groß, daß sie die erreichbare Auflösung der Wasserstoffspektren begrenzen würde.

5.2.4.1 Frequenzkammaufbau 1999

Da 1999 noch kein oktavenbreiter Frequenzkamm zur Verfügung stand, war der Aufwand, den man zur Messung optischer Frequenzen treiben mußte, um einiges höher als 2003. Als Frequenzkammgenerator wurde damals ein *Mira-900* fs-Laser der Firma *Coherent* verwendet, dessen Spektrum mit einer single mode Glasfaser verbreitert wurde. Das Spektrum reichte etwa von 850 nm bis 972 nm. Um trotz dieses relativ „schmalen“ Spektrums die Offsetfrequenz f_{ce} messen zu können, wurde eine Intervallteilerstufe und einige Frequenzverdopplungen eingesetzt. Details zum Aufbau, der im Jahr 1999 zur Messung der 1S-2S Frequenz eingesetzt wurde, finden sich in [Rei00a] und der Doktorarbeit von J. Reichert [Rei00b]. An dieser Stelle sei die große Vereinfachung des neuen Aufbaus lediglich mit einigen Zahlen belegt:

Frequenzkamm	1999	2003
Laser	8	1
SHG/SFG	5	1
Phasenregelkreise	7	2

Tabelle 5.3: *Einige Zahlen, welche die Vereinfachung des Frequenzkammaufbaus im Jahr 2003 im Vergleich zu 1999 anschaulich belegen.*

5.2.5 Cs-Fontänenuhr

Die Messung der 1S-2S Frequenz wurde 2003 wie auch 1999 in Zusammenarbeit mit den Gruppen um A. Clairon am BNM-SYRTE bzw. C. Salomon an der ENS durchgeführt. Die mobile Cs-Fontänenuhr FOM [Abg03], die als Referenz des fs-Frequenzkammgenerators diente, wurde dabei von Michel Abgrall und Jan Grünert von Paris nach Garching transportiert, dort aufgebaut und während der 12 Meßtage 2003 bedient. Die Funktionsweise von Fontänenuhren wird im folgenden kurz erläutert.

Alle Cs-Atomuhren stabilisieren einen Lokaloszillator, der meistens auf einem Quarz basiert, mit Hilfe des Ramsey-Verfahrens auf die Grundzustandshyperfeinaufspaltung von ^{133}Cs ($F = 4, m_F = 0 \rightarrow F = 3, m_F = 0$), deren Frequenz etwa 9,2 GHz beträgt [Bau03]. Die *Stabilität* der Uhr hängt von der Breite der zentralen Ramsey-Resonanz, dem Signal-zu-Rausch-Verhältnis, der Konstanz der Betriebsparameter der Uhr und der Stabilität des Lokaloszillators ab, während die erreichbare *Genauigkeit* davon abhängt, wie gut die Systematiken verstanden sind und wie gut diese kontrolliert werden können. Die Breite der zentralen Ramsey-Resonanz ist $\sim 1/t$, wobei t die Zeit ist, welche die Atome zwischen den beiden Ramsey-Zonen verbringen. Bei einem thermischen Atomstrahl der Temperatur $T \approx 130^\circ\text{C}$ ist die mittlere Geschwindigkeit der Cs-Atome etwa 200 m/s, was bei einem Abstand der beiden Wechselwirkungszonen von 1 m einer Flugzeit von $t \approx 5$ ms entspricht. Fängt und kühlt man die Cs-Atome in einer magnetooptischen Falle (MOT³²), so kann man Temperaturen von $2\ \mu\text{K}$ bzw. Geschwindigkeiten von 11 mm/s erreichen, was bei einer Strecke von 1 m einer Flugzeit von 91 s entsprechen würde. Solche langen Flugzeiten können aber experimentell nicht genutzt werden, weil die Cs-Atome im Schwerfeld der Erde herunterfallen. Durch eine „springbrunnenartige“ Bewegung der kalten Atome kann die Flugzeit im Vergleich zu thermischen Quellen dennoch deutlich gesteigert werden. Dazu verstellt man die Frequenz der MOT-Strahlen, die parallel bzw. antiparallel zur Richtung der Fallbeschleunigung g orientiert sind, derart, daß ein Impuls auf die Atome übertragen wird, dessen Richtung der Erdanziehungskraft entgegengesetzt ist. Schaltet man danach die Laser aus, so bewegen sich die Atome auf einer ballistischen Bahn zuerst nach oben und dann wieder nach unten. Plaziert man wenig oberhalb der magnetooptischen Falle einen Mikrowellenresonator, so passieren die Atome diesen beim hinauffliegen bzw. herunterfallen je ein mal. Da die Bewegung der Atome einer Fontäne gleicht, werden diese Uhren Cs-Fontänenuhren genannt. Mit der Ramsey-Methode kann man dann wie im Fall eines thermischen Atomstrahls einen Lokaloszillator auf den Referenzübergang

³²engl. magneto-optical trap

stabilisieren. Die wechselwirkungsfreie Flugzeit liegt jetzt aber im Bereich von 1 s, so daß die Breite der zentralen Ramsey-Resonanz sehr viel kleiner ist, als bei thermischen Atomstrahlen, was eine bessere Stabilisierung des Lokaloszillators ermöglicht. Zusätzlich dazu sind alle systematischen Effekte, die von der Temperatur der Atome abhängen, entsprechend reduziert. Eine weitere Steigerung der wechselwirkungsfreien Flugzeit kann durch „Ausschalten“ der Erdanziehungskraft erreicht werden. Dazu muß sich die Uhr im freien Fall bzw. auf einer Erdumlaufbahn befinden. Diese Strategie wird von den Weltraummissionen ACES³³ und PARCS³⁴ verfolgt.

Die Genauigkeit der FOM Fontänenuhr wurde in der Doktorarbeit von Michel Abgrall zu $8 \cdot 10^{-16}$ bestimmt [Abg03]. FOM wurde vor und nach der Wasserstoffmessung mit der stationären Cs-Fontänenuhr FO2 des BNM-SYRTE / ENS in Paris verglichen, ohne daß eine signifikante Abweichung festgestellt werden konnte. Der Frequenzvergleich von FOM mit der Cs-Fontänenuhr CSF1 der PTB, der unmittelbar vor der Wasserstoffmessung durchgeführt wurde, ergab dagegen einen relativen Frequenzunterschied von wenigen 10^{-15} , dessen Erklärung noch aussteht [Abg04]. Für die Frequenzmessung im Jahr 2003 wurde die Genauigkeit von FOM daher konservativ mit $\pm 2 \cdot 10^{-15}$ angenommen. Die Genauigkeit der 1S-2S Frequenzmessung wird dadurch aber nicht begrenzt. Die Stabilität von FOM wird durch $1,3 \cdot 10^{-13} / \sqrt{\tau}$ beschrieben, wobei τ die Mittelungszeit in Sekunden ist (siehe Abbildung 5.11 auf Seite 102). Um die Pulswiederholrate des fs-Lasers zu stabilisieren, wurde die Frequenz des 10 MHz Uhrenquarzes mit einer Radiofrequenzkette auf 800 MHz multipliziert.

Alle wichtigen Parameter von FOM werden während ihres Betriebs gemessen, um damit die Frequenzabweichung vom ungestörten Cs-Hyperfeinübergang bestimmen zu können. Bei der Messung 2003 war die relative Frequenz von FOM etwa $2 \cdot 10^{-14}$ zu groß. Diese Abweichung, deren Hauptbeiträge auf den quadratischen Zeemaneffekt und die Schwarzkörperstrahlung zurückgehen, erscheint sehr groß, ist aber so genau bekannt, daß sich die Frequenz von FOM prinzipiell mit einer relativen Genauigkeit von $< 10^{-15}$ angeben läßt. Wenn die Frequenz von FOM zu hoch ist, bedeutet das, daß die von FOM realisierte Sekunde³⁵ zu kurz ist. Dadurch werden zu wenige optische Zyklen gezählt und die gemessenen optischen Frequenzen müssen deshalb um $2 \cdot 10^{-14}$ zu *größeren* Frequenzen hin korrigiert werden. Ein Parameter der Uhr, der *nicht* korrigiert werden mußte, war die Gravitationsrotverschiebung von etwa $10^{-16}/\text{m}$, die für Garching etwa $5 \cdot 10^{-14}$ beträgt. Das ist deshalb der Fall, weil sich die Cs-Uhr und die „Wasserstoff-Uhr“ auf der gleichen Höhe befanden und daher *beide* Uhren verglichen mit einer Uhr auf dem Geoid eine zu niedrige Frequenz hatten. Das bei der 1S-2S Messung eigentlich bestimmte Frequenz*verhältnis* beider Uhren ist unabhängig von der Gravitationsrotverschiebung.

³³engl. **A**tomic **C**lock **E**nsemble in **S**pace

³⁴engl. **P**rietary **A**tomic **R**eference **C**lock in **S**pace

³⁵Die FOM-Sekunde ist 9 192 631 770 Schwingungsperioden der Hyperfeinfrequenz von FOM lang.

5.2.6 Ablauf der Messung 2003

In diesem Abschnitt sollen noch einmal alle wesentlichen Schritte zusammengefaßt werden, die schlußendlich zum Wert der 1S-2S Frequenz für $v = 0$ und verschwindender Lichtleistung führen.

- Mit dem AOM wird die Frequenz des Farbstofflasers verändert, der auf den Referenzresonator stabilisiert ist, und so Spektren der 1S-2S Resonanz aufgenommen. Für jeden Frequenzpunkt des AOMs ist die Zählrate der 2P-1S Fluoreszenz relativ zur Frequenz des Referenzresonators als Funktion der Verzögerungszeit τ und der Lichtleistung p im Überhöhungsresonator bekannt (siehe Abbildung 5.4 auf Seite 90).
- Mit dem auf die Fontänenuhr stabilisierten Frequenzkamm wird für jedes aufgenommene Spektrum der Frequenzverlauf des Referenzresonators bestimmt. Das geschieht durch Anpassen einer quadratischen Funktion an die Frequenzdaten f_{cavity} in einem Intervall von 500s Länge, das um das zeitliche Auftreten der Resonanz zentriert ist (siehe Abbildung 5.11 auf Seite 102). Mit dieser quadratischen Funktion ist die gemittelte Frequenz des Resonators und damit auch f_{dye} als Funktion der Zeit bekannt.
- Mit dem Linienformmodell wird für jedes Spektrum die Frequenz des Übergangs für die Geschwindigkeit $v = 0$ der Atome bestimmt und damit der Dopplereffekt zweiter Ordnung korrigiert. Die 1S-2S Frequenz ist jetzt als Funktion der Lichtleistung p im Überhöhungsresonator bekannt.
- Die mit dem Linienformmodell bestimmten Übergangsfrequenzen werden mit den Korrekturen der Cs-Fontänenuhr berichtigt (siehe Abschnitt 5.2.5 ab Seite 104).
- Um die AC-Stark-Verschiebung zu berücksichtigen, werden die korrigierten Übergangsfrequenzen aller Spektren eines Meßtages zu verschwindender Lichtleistung hin extrapoliert (siehe Abbildung 5.5 auf Seite 91).
- Die extrapolierten Frequenzen der 12 Meßtage werden gemittelt (siehe Abbildung 5.12 auf Seite 107).
- Dieses Ergebnis wird schließlich noch bezüglich der verbleibenden systematischen Effekte korrigiert (siehe Tabelle 5.1 auf Seite 92).
- Zum Schluß wird mit den gut bekannten Hyperfeinaufspaltungen des 1S- und 2S-Zustandes die Zentroidfrequenz des 1S-2S Übergangs berechnet (siehe Gleichungen 5.3 und 5.4 auf Seite 83).

5.3 Meßergebnisse 2003 und Vergleich mit 1999

In Abbildung 5.12 ist das Ergebnis der AC-Stark Extrapolation der einzelnen Meßtage der Jahre 1999 und 2003 dargestellt. Die Mittelung der Meßtage wurde in beiden Fällen *ohne* Gewichtung mit den Fehlerbalken durchgeführt.

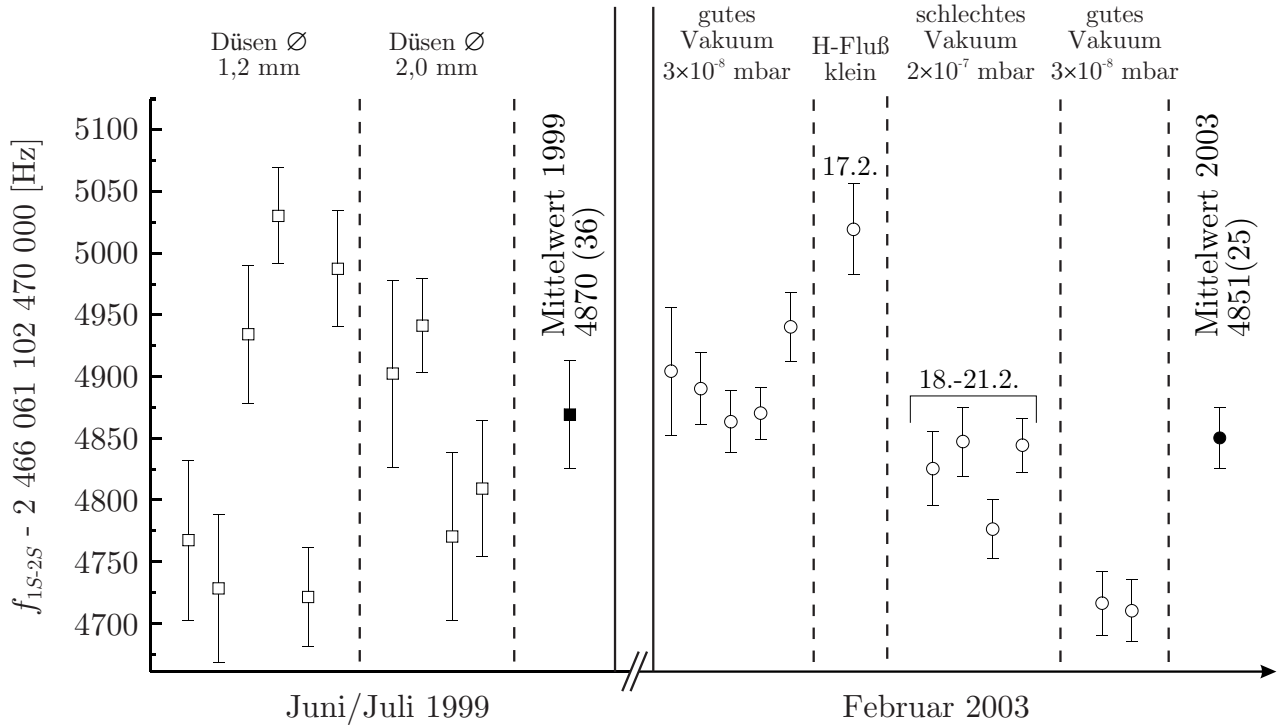


Abbildung 5.12: Ergebnisse der AC-Stark Extrapolation der einzelnen Meßtage der Jahre 1999 und 2003. Die angegebenen Mittelwerte wurden ohne Gewichtung mit den Fehlerbalken berechnet. 1999 wurde der Düsendurchmesser variiert, um die Abhängigkeit von f_{1S-2S} vom Druck im Gasstrahl zu testen, und 2003 wurde bei unterschiedlichen Hintergrundgasdrücken gemessen, um die Druckverschiebung aufgrund des Hintergrundgases zu überprüfen.

Bei beiden Messungen wurde das Wasserstoffspektrometer auf systematische Effekte hin überprüft, indem die experimentellen Bedingungen variiert wurden. Dabei wurde der Einfluß des Wasserstoff-Hintergrundgases und des Wasserstoffdrucks im Gasstrahl untersucht. Im Jahr 1989 wurde mit einer Messung an einer Wasserstoff-Gaszelle die Druckverschiebung Δf_p^{1S-2S} der $1S-2S$ Frequenz in einem Bereich von 0,1 bis 0,8 mbar zu

$$\Delta f_p^{1S-2S} = (-8 \pm 2) \text{ MHz/mbar bei } 121,6 \text{ nm} \quad (5.10)$$

bestimmt [McI89]. Dabei muß Δf_p^{1S-2S} von der gemessenen Frequenz abgezogen werden, um die ungestörte $1S-2S$ Frequenz zu erhalten. Hierbei stellt sich die Frage, inwieweit diese Beziehung auf eine Atomstrahlapparatur übertragen werden kann. Um die Druckverschiebung zu beschreiben, unterscheidet man bei einer Atomstrahlapparatur oft zwei

Mechanismen: die Wechselwirkung der Atome im Atomstrahl untereinander und die Wechselwirkung der Atome im Atomstrahl mit denen des Hintergrundgases. Im ersten Fall ist der Druck im Atomstrahl wichtig und im zweiten Fall der Hintergrundgasdruck. Für beide Druckverschiebungen erwartet man einen Zusammenhang ähnlich Gleichung 5.10. Obwohl eine strenge Trennung dieser Mechanismen wahrscheinlich nicht möglich ist, wird dieses Bild im folgenden beibehalten.

Da der Druck im Atomstrahl nicht direkt gemessen werden kann, wurde 1999 mit zwei unterschiedlichen Düsendurchmessern (1,2 und 2 mm) gearbeitet, wobei sich im Fall des kleineren Durchmessers ein höherer Druck im Bereich der Düse³⁶ einstellte. Ein Unterschied in der Frequenz des $1S$ - $2S$ Übergangs beider Datensätze konnte 1999 aber nicht festgestellt werden. Bei Messungen zur $2S$ -Hyperfeinaufspaltung im Jahr 2003 konnte die Druckverschiebung im Atomstrahl von M. Fischer und N. Kolachevsky zu $0(10)$ Hz bestimmt werden [Kol04, Fis04b], was mit der Messung aus dem Jahr 1999 konsistent ist. Dieser Fehler (keine Frequenzverschiebung) wurde deshalb *auch* in das Fehlerbudget der Daten aus dem Jahr 1999 aufgenommen (siehe Tabelle 5.4). In Referenz [Nie00a] ist dieser Fehler *nicht* enthalten.

Um die Abhängigkeit der $1S$ - $2S$ Frequenz vom Hintergrundgasdruck zu überprüfen, wurde die Frequenzmessung im Jahr 2003 bei Drücken von $2 \cdot 10^{-7}$ bzw. $3 \cdot 10^{-8}$ mbar durchgeführt. Verwendet man zur Abschätzung Gleichung 5.10, so ergeben sich daraus Druckverschiebungen von 1,6 und 0,24 Hz bzw. ein Frequenzunterschied von etwa 1,4 Hz. In den einzelnen Datensätzen des Jahres 2003 konnte im Rahmen der Meßfehler keine Frequenzverschiebung festgestellt werden. Die Meßfehler waren allerdings zu groß, um einen Unterschied von 1,4 Hz auflösen zu können. Am 17.2.2003 gab es ein Leck in der Wasserstoffzuleitung, was zu einer drastischen Verringerung des Wasserstoffflusses an diesem Tag geführt hat. Dieser Punkt wurde aber nicht von der Auswertung ausgeschlossen, weil die Messung im Jahr 1999 gezeigt hat, daß eine Änderung des Flusses nicht notwendiger Weise auch zu einer meßbaren Frequenzverschiebung führt. Außerdem wurden nach der Absolutfrequenzmessung Testmessungen relativ zum Referenzresonator durchgeführt, bei denen der Wasserstofffluß in einem weiten Bereich verändert wurde, ohne daß dabei eine Frequenzverschiebung festgestellt werden konnte.

Betrachtet man nur die Größe der täglichen Fehlerbalken, so stellt die Messung aus dem Jahr 2003 eine Verbesserung zu 1999 dar. Aber aufgrund der Streuung der Tageswerte, die sich 2003 nicht verbessert hat, ist der Mittelwert nur unwesentlich genauer. Die Mittelwerte wurden wegen der Streuung der Datenpunkte *ohne* Gewichtung mit den Fehlerbalken der Tageswerte errechnet.³⁷ Die Streuung der Meßdaten, die größer ist, als man es mit Gauß'scher Statistik erwarten würde, ist ein Hinweis darauf, daß mindestens ein systematischer Effekt existiert, der während der Messungen nicht ausreichend kontrolliert bzw. konstant gehalten wurde. In Abschnitt 5.3.1 ab Seite 110 werden mögliche Ursachen für die erhöhte Streuung der Meßdaten diskutiert.

³⁶Der Druck vor der Düse wurde konstant gehalten.

³⁷In Referenz [Nie00a] wurde fälschlicherweise behauptet, daß der dort angegebene Mittelwert mit den Fehlerbalken der Tageswerte gewichtet sei, obwohl er *ohne* Gewichtung errechnet wurde.

Die Endergebnisse und Fehlerbudgets der Messungen 1999 und 2003 sind in Tabelle 5.4 zusammengefaßt. Der in Referenz [Nie00a] angegebene Fehler der Zentroidfrequenz ist mit 46 Hz um 1 Hz größer als er in Tabelle 5.4 angegeben ist. Das liegt daran, daß sich der Fehler der Hyperfeinkorrektur $\Delta f_{\text{Zentroid}}$ durch die Messungen in Referenz [Kol04] von 13 Hz auf 4 Hz verringert hat.³⁸

	$f_{1S-2S,1999}$ [Hz]	$\sigma_{1S-2S,1999}$ [Hz]	$f_{1S-2S,2003}$ [Hz]	$\sigma_{1S-2S,2003}$ [Hz]
AC-Stark Extrapolation				
−2 466 061 102 474 000 Hz	870	36	851	25
verbleibende Systematiken der Wasserstoffspektroskopie				
Hintergrundgasdruck	10	10	0	2
DC-Stark Effekt	0	5	0	5
Schwarzkörperstrahlung	0	1	0	1
Stehwelleneffekte	0	10	0	1
Druckverschiebung im Strahl	0	10	0	10
Linienformmodell	0	20	0	20
Intensitätsmessung	0	1	0	0
Fehler der Frequenzmessung				
Cs-Fontänenuhr	0	5	0	5
Frequenzkamm	0	< 0,1	0	< 0,1
1S-2S insgesamt [Hz]				
−2 466 061 102 474 000 Hz	880	45	851	34
1S-2S Zentroidfrequenz [Hz]				
−2 466 061 413 187 000 Hz	103	45	074	34
$\Delta f/f$	$1,8 \cdot 10^{-14}$		$1,4 \cdot 10^{-14}$	

Tabelle 5.4: *Ergebnisse der Frequenzmessungen des $(1S, F = 1, m_F = \pm 1) \rightarrow (2S, F = 1, m_F = \pm 1)$ Übergangs der Jahre 1999 und 2003. Der Gesamtfehler ist die quadratische Summe der AC-Stark Extrapolation und der verbleibenden Systematiken bzw. Fehlerquellen. Die Zentroidfrequenz errechnet sich aus dem Gesamtergebnis durch Addition der Hyperfeinkorrektur $\Delta f_{\text{Zentroid}} = 310\,712\,223(4)$ Hz (siehe Abschnitt 5.1 ab Seite 81).*

Der Unterschied der beiden 1S-2S Zentroidfrequenzen beträgt $\Delta f_{1S-2S}^Z = f_{1S-2S}^Z(2003) - f_{1S-2S}^Z(1999) = -29(57)$ Hz. Bei einer Zeitspanne von $\Delta t = 44$ Monaten zwischen den

³⁸In [Nie00a] und dieser Arbeit wurde für die Hyperfeinaufspaltung des 1S-Zustandes der Wert aus [Ess71] verwendet, dessen Fehler vernachlässigt werden kann. Die Hyperfeinaufspaltung des 2S-Zustandes wurde in [Nie00a] Referenz [Heb56] (Fehler 50 Hz) und in dieser Arbeit [Kol04] (Fehler 16 Hz) entnommen.

beiden Messungen bedeutet das eine relative zeitliche Frequenzveränderung von

$$\frac{\Delta f_{1S-2S}^Z}{f_{1S-2S}^Z \Delta t} = (-3, 2 \pm 6, 3) \cdot 10^{-15} / \text{Jahr}. \quad (5.11)$$

Da beide Messungen bis auf geringfügige Details³⁹ *identisch* durchgeführt und ausgewertet wurden, ist die relative zeitliche Frequenzänderung weitgehend unempfindlich gegen eventuell unberücksichtigte systematische Effekte.⁴⁰

Mit Hilfe der 1S-2S Frequenz und anderen Übergangsfrequenzen⁴¹ in atomarem Wasserstoff bzw. Deuterium können die 1S-, 2S-Lambverschiebungen beider Atome und die Rydbergkonstante R_∞ bestimmt werden [Bir01]. An diesen Werten und insbesondere ihren Fehlern ändert sich durch die neue 1S-2S Frequenzmessung nichts, weil die Auswertung nicht durch den Fehler der 1S-2S Messung begrenzt ist. Die Rydbergkonstante ist von großem metrologischen Interesse, weil sie die Naturkonstanten m_e , e , ϵ_0 , h und c_0 miteinander verbindet und gleichzeitig mit einer hohen relativen Genauigkeit von $6,7 \cdot 10^{-12}$ bekannt ist. Sie wird deshalb als „Eckpfeiler“ in den CODATA-Ausgleichsrechnungen verwendet.

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c_0} = 10\,973\,731,568\,525\,(73) \text{ m}^{-1} \quad \text{CODATA 2002}$$

Mit Hilfe der 1S-Lambverschiebung E_L^{1S} in Wasserstoff können QED-Rechnungen mit der physikalischen Realität verglichen werden:

$$\begin{array}{lll} E_L^{1S}(\text{QED}) & 8\,172\,807\,(42) \text{ kHz} & [\text{Mel00}, \text{Pac01}] \\ E_L^{1S}(\text{Experiment}) & 8\,172\,840\,(22) \text{ kHz} & [\text{Bir01}]. \end{array}$$

Das heißt, QED-Korrekturen⁴² und Experiment stimmen mit einer relativen Genauigkeit von etwa $6 \cdot 10^{-6}$ überein. Bei den QED-Rechnungen wurde der Protonenladungsradius $r_p = 0,862(12) \text{ fm}$ aus Referenz [Sim80] verwendet, dessen Genauigkeit die Präzision von $E_L^{1S}(\text{QED})$ begrenzt. Benutzt man andere Literaturwerte für r_p [Han63, Mer96], so wird die Übereinstimmung von Theorie und Experiment schlechter. Um diese unbefriedigende Situation zu klären, wird am *Paul-Scherrer-Institut* in Villigen/Schweiz ein Experiment zur Bestimmung des Protonenladungsradius vorbereitet, bei dem die 2S-2P Lambverschiebung in myonischem Wasserstoff gemessen werden soll. Aufgrund der hohen Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Myons im Kern (Proton), ist die Frequenz des Übergangs stark vom Protonenladungsradius abhängig [Poh01].

5.3.1 Analyse der Daten Streuung

Um die Ursache für die Streuung der Tageswerte von 1999 und 2003 zu finden, wurde die Frequenz der AC-Stark Extrapolation der einzelnen Meßtage als Funktion von experimentellen Parametern dargestellt, die während der beiden Messungen mitgemessen wurden.

³⁹Siehe Abschnitt 5.2.3 auf Seite 92.

⁴⁰Die Streuung der Meßdaten deutet auf solche Systematiken hin.

⁴¹1S-3S, 2S-2P, 2S-4P, 2S-4S/D, 2S-6S/D, 2S-8S/D und 2S-12D

⁴²Der angegebene Wert ist die Summe von E_L^{1S} aus [Pac01] und der Vakuumpolarisation durch Hadronen und Myonen [Mel00].

Solche Parameter waren z. B. die Uhrzeit, der Hintergrundgasdruck und die Temperatur der Düse. In den Daten von 1999 war dabei kein Zusammenhang erkennbar. Im Gegensatz dazu läßt sich in den Frequenzen von 2003 eine lineare Abhängigkeit von der Düsentemperatur erahnen (siehe Abbildung 5.13).

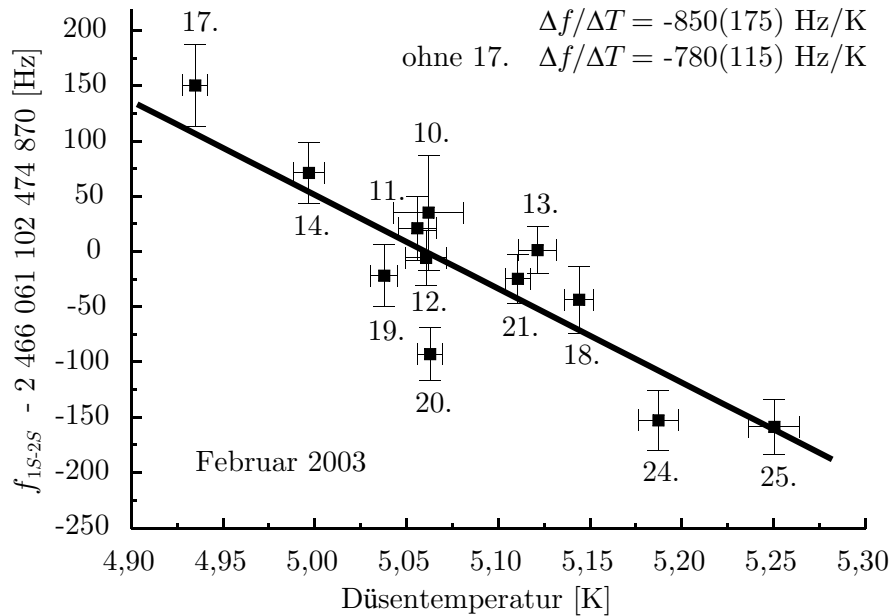


Abbildung 5.13: *Frequenz der AC-Stark Extrapolation der einzelnen Meßtage als Funktion der mittleren Düsentemperatur. Das Datum des jeweiligen Meßtages ist ebenfalls angegeben. Die Steigung $\Delta f/\Delta T$ der Ausgleichsgeraden ändert sich nicht signifikant, wenn man den Meßpunkt vom 17.3.2003, als es ein Leck in der Wasserstoffzuleitung gab, von der Auswertung ausschließt.*

Bei konstantem Heliumverbrauch des Durchflußkryostaten wird die Temperatur der Düse durch die Wärmelast des Wasserstoffflusses bestimmt, der wiederum durch Wechselwirkung im Atomstrahl die 1S-2S Frequenz verschieben kann. Eine Änderung des Wasserstoffflusses könnte also eine Frequenzverschiebung als Funktion der Düsentemperatur erklären. Wenn man vom 17. Februar 2003 absieht, wo es ein Leck in der Zuleitung zur Düse gab, wurde aber immer mit möglichst konstantem Wasserstofffluß gearbeitet. Der Ausschluß dieses Datenpunktes führt zu keiner wesentlichen Änderung des Zusammenhangs. Um dieser Korrelation weiter nachzugehen, wurde von M. Fischer nach der Absolutfrequenzmessung der Wasserstofffluß in einem großen Bereich geändert und die 1S-2S Frequenz relativ zum Referenzresonator gemessen. Dabei wurde zwar eine Änderung der Düsentemperatur als Funktion des Flusses festgestellt, aber *keine* signifikante Änderung der Frequenz gemessen.

Eine weitere Möglichkeit, die Temperatur der Düse zu beeinflussen, besteht in der Änderung des Abstandes zwischen Düse und Skimmer. Ein Skimmer ist eine scharfkantige

kegelförmige Metallhülse, die hinter der Düse angebracht ist und den zentralen Teil des Atomstrahls „herausschneidet“. Da der Skimmer, der im Wärmekontakt mit der Vakuumapparatur ist, durch den Atomstrahl gekühlt wird, liegt seine Temperatur zwischen der des Atomstrahls und der Raumtemperatur. Wenn der Abstand des Skimmers zur Düse vergrößert wird, sind zwei Effekte denkbar: zum einen wird die Wärmestrahlung der Vakuumapparatur (Raumtemperatur) schlechter durch den Skimmer abgeschirmt, was zu einer Erhöhung der Düsentemperatur führt, und zum anderen vergrößert sich der Abstand einer „Wärmequelle“, was die Temperatur herabsetzt. Um festzustellen, welcher Effekt überwiegt und wie stark er sich auswirkt, wurde der Abstand des Skimmers von 4,5 mm auf 6,5 mm vergrößert⁴³ und die 1S-2S Frequenz relativ zum Referenzresonator gemessen. Dabei erhöhte sich die Temperatur der Düse um 0,067(2) K und es wurde eine Frequenzverschiebung von 67(17) Hz zu tieferen Frequenzen hin beobachtet. Diese Werte sind mit der Ausgleichsgeraden in Abbildung 5.13 konsistent. Falls die Frequenzänderung linear mit der Abstandsänderung verknüpft ist, würde allerdings eine Abstandsänderung von fast 9 mm benötigt, um das Verhalten in Abbildung 5.13 erklären zu können, was experimentell ausgeschlossen ist.

Da kein weiterer *realistischer* Prozeß denkbar ist, der die Temperatur der Düse bei konstantem Heliumverbrauch beeinflussen könnte, wird angenommen, daß der Zusammenhang in Abbildung 5.13 von zufälliger Natur ist. Diese Vermutung wird auch dadurch unterstützt, daß man bei der Messung im Jahr 1999 *keinen* Zusammenhang zwischen Düsentemperatur und 1S-2S Frequenz feststellen konnte.

Zusätzlich zu den bisher beschriebenen Tests wurde die Abhängigkeit der 1S-2S Frequenz von der Mikrowellenleistung der Wasserstoff-Gasentladung und einer Verstimmung des Mikrowellenresonators untersucht, aber in beiden Fällen kein Einfluß auf die Frequenz festgestellt. Außerdem wurden die Daten aus dem Jahr 2003 von M. Haas und U. Jentschura mit ihrem alternativen Linienformmodell für eine um 2 mm entlang der Resonatorachse verschobene Düse ausgewertet, ohne daß jedoch ein signifikanter Effekt beobachtet werden konnte.

Eine mögliche Erklärung für die Streuung der Daten, die aber weitgehend unabhängig von der Temperatur der Düse ist, ist ein nicht vollständig kompensierter Dopplereffekt erster Ordnung im Überhöhungsresonator des 243 nm Lichts, der z. B. durch Abweichungen von der Rotations-Symmetrie bezüglich der optischen Achse hervorgerufen werden kann. Bereits ein linearer Dopplereffekt von lediglich $10^{-7}v/c$, wobei v/c bei 5 K etwa 10^{-6} ist, kann die beobachtete Streuung der Meßdaten erklären. Da der Überhöhungsresonator jeden Meßtag mindestens einmal justiert wurde, könnte die Streuung dadurch hervorgerufen worden sein. Weil der Dopplereffekt erster Ordnung die Frequenz jedoch erhöhen *und* erniedrigen kann, wird erwartet, daß sich der Effekt bei n wiederholten Messungen statistisch wie $1/\sqrt{n}$ verringert und zu *keiner* systematischen Verschiebung führt, was eine Auswertung wie in den Jahren 1999 bzw. 2003 rechtfertigen würde. Die Symmetrie der Resonatormode könnte beispielsweise mit einem Resonator *höherer* Finesse

⁴³4,5 mm war der Abstand bei der Absolutfrequenzmessung 2003.

gesteigert werden, was den verbleibenden Dopplereffekt erster Ordnung verringern und außerdem den Einsatz von Diodenlasersystemen ermöglichen würde (siehe Abschnitt 6.1 ab Seite 123).

Um die Ursache für die Streuung der Meßdaten zu finden, werden weitere Messungen gegen eine stabile Radiofrequenzreferenz wie z. B. eine Fontänenuhr oder ein Wasserstoffmaser notwendig sein. Eine stabile *optische* Referenz könnte dazu ebenfalls verwendet werden.

5.4 Obergrenzen für zeitliche Veränderungen von Naturkonstanten

In diesem Abschnitt werden die beiden 1S-2S Frequenzmessungen von 1999 und 2003 auf eine zeitliche Änderung von Naturkonstanten hin untersucht. Dabei wird gezeigt, wie man mit Frequenzvergleichen verschiedenartiger Uhren Obergrenzen für eine zeitliche Änderung von Naturkonstanten bestimmen kann, die weitgehend unabhängig von Modellannahmen sind.

5.4.1 Zeitliche Veränderung von α und μ_{Cs}/μ_B

Da die 1S-2S Frequenz f_H relativ zu einer Cs-Uhr gemessen wurde,⁴⁴ also in Einheiten der Cs-Hyperfeinaufspaltung f_{Cs} , ist das Frequenzverhältnis f_H/f_{Cs} diejenige Größe, die 1999 bzw. 2003 eigentlich gemessen wurde. Betrachtet man ihre relative zeitliche Änderung, so erhält man mit 5.11:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}(f_H/f_{Cs})}{f_H/f_{Cs}} = (-3, 2 \pm 6, 3) \cdot 10^{-15}/\text{Jahr} \quad \text{von 1999 bis 2003.} \quad (5.12)$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \ln \xi \quad (5.13)$$

läßt sich dieses Ergebnis auch in folgender Form angeben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{f_H}{f_{Cs}} \right) = (-3, 2 \pm 6, 3) \cdot 10^{-15}/\text{Jahr.} \quad (5.14)$$

Diese Gleichung setzt voraus, daß sich f_H/f_{Cs} im Zeitraum von 1999 bis 2003 *linear* mit der Zeit geändert hat. Im folgenden wird die Abhängigkeit der relativen zeitlichen Änderung von f_H/f_{Cs} von den Naturkonstanten bestimmt. Dazu wird allgemein das Frequenzverhältnis eines Hauptquantenübergangs und eines Hyperfeinübergangs untersucht. Nach Gleichung 4.3 bzw. 4.5 gilt:

$$f_h = A_h \cdot R_\infty c_0 \cdot F_{rel,h}(\alpha) \quad \text{und} \quad (5.15)$$

$$f_{hfs} = A_{hfs} \cdot R_\infty c_0 \cdot \frac{\mu}{\mu_B} \cdot \alpha^2 F_{rel,hfs}(\alpha). \quad (5.16)$$

⁴⁴daher die Einheit Hz

Damit findet man:

$$\frac{f_h}{f_{hfs}} = \frac{A_h}{A_{hfs}} \cdot \frac{\mu_B}{\mu} \cdot \alpha^{-2} \frac{F_{rel,h}(\alpha)}{F_{rel,hfs}(\alpha)}. \quad (5.17)$$

Man beachte, daß R_∞ und c_0 bei der Verhältnisbildung herausfallen, so daß keine Aussage über die zeitliche Änderung dieser Naturkonstanten möglich ist.⁴⁵ Die Faktoren A_h und A_{hfs} sind numerische Ausdrücke, die nur von den Quantenzahlen der betrachteten Übergänge abhängen und somit nicht zeitabhängig sind. Die relative zeitliche Änderung von f_h/f_{hfs} ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{f_h}{f_{hfs}} \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{\mu}{\mu_B} \right) - \\ &\left\{ 2 - \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{rel,h} \right) + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{rel,hfs} \right) \right\} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha \end{aligned} \quad (5.18)$$

Dabei wurde beim ersten Term auf der rechten Seite die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{1}{\xi} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \ln \xi \quad (5.19)$$

verwendet. Die relative zeitliche Änderung von f_h/f_{hfs} ist also eine lineare Funktion der relativen zeitlichen Änderungen von μ/μ_B und α . In Referenz [Dzu99a] sind die relativistischen Korrekturen für ausgewählte Übergänge berechnet worden. Im Fall von f_H bzw. f_{Cs} findet man für die Klammerausdrücke auf der rechten Seite:

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{rel,H} \approx 0 \quad \text{und} \quad \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{rel,Cs} \approx 0,8. \quad (5.20)$$

Damit vereinfacht sich Gleichung 5.18 zu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{f_H}{f_{Cs}} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{\mu_{Cs}}{\mu_B} \right) - 2,8 \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha. \quad (5.21)$$

Setzt man $x \equiv \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha = \dot{\alpha}/\alpha$ und $y \equiv \frac{\partial}{\partial t} \ln (\mu_{Cs}/\mu_B)$ so erhält man schlußendlich im Vergleich mit Gleichung 5.14

$$y + 2,8x = (3,2 \pm 6,3) \cdot 10^{-15}/\text{Jahr} \quad \text{von 1999 bis 2003.} \quad (5.22)$$

Das heißt, die relative zeitliche Änderung der 1S-2S Frequenz gemessen mit einer Cs-Uhr verknüpft die relative zeitliche Änderung der beiden einheitenlosen Naturkonstanten μ_{Cs}/μ_B und α miteinander. Mit dieser Gleichung alleine kann man, ohne Annahmen zu machen, noch *keine* Aussage über die relative zeitliche Änderung von μ_{Cs}/μ_B oder α machen. Dazu ist ein weiterer Frequenzvergleich eines optischen Standards mit einer Cs-Uhr nötig, dessen Frequenzverhältnis auf andere Weise von x bzw. y abhängt als es bei f_H/f_{Cs} der Fall ist.

⁴⁵Eine Betrachtung der zeitlichen Änderung dieser Größen hätte ohnehin das konzeptionelle Problem, daß R_∞ bzw. c_0 mit Einheiten behaftet sind (siehe Abschnitt 4 ab Seite 65). In Referenz [Pei04] wird dagegen die zeitliche Veränderung des einheitenlosen *numerischen* Wertes von $R_\infty c$ betrachtet.

Ein solcher Frequenzvergleich wurde in den Jahren 2000-2002 in den Gruppen von L. Hollberg und J. Bergquist am NIST in Boulder/Colorado/USA durchgeführt [Ude01, Biz03]. Dort wurde mit Hilfe eines fs-Frequenzkamms die Frequenz f_{Hg} des elektrischen Quadrupolübergangs $5d^{10}6s^2\ ^2S_{1/2}$ ($F = 0, m_F = 0$) \rightarrow $5d^96s^2\ ^2D_{5/2}$ ($F = 2, m_F = 0$) eines einzelnen lasergekühlten $^{199}\text{Hg}^+$ Ions mit der Frequenz einer Cs-Uhr verglichen. Für die relative zeitliche Änderung von f_{Hg}/f_{Cs} ergab sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{f_{Hg}}{f_{Cs}} \right) = (-0,2 \pm 7,0) \cdot 10^{-15} / \text{Jahr}. \quad (5.23)$$

Die Abhängigkeit von $\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{f_{Hg}}{f_{Cs}} \right)$ von den Naturkonstanten μ_{Cs}/μ_B und α erhält man nach Gleichung 5.18 durch Einsetzen der relativistischen Korrekturterme [Dzu99a]

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{rel,Cs} \approx 0,8 \quad \text{und} \quad \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{rel,Hg} \approx -3,2. \quad (5.24)$$

Mit den Abkürzungen x und y erhält man schließlich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{f_{Hg}}{f_{Cs}} \right) = -y - 6,0x = (-0,2 \pm 7,0) \cdot 10^{-15} / \text{Jahr}. \quad (5.25)$$

Wie bei der Wasserstoffmessung, so sind auch hier die relativen zeitlichen Änderungen von μ_{Cs}/μ_B bzw. α mit der relativen zeitlichen Änderung von f_{Hg}/f_{Cs} verknüpft. Die Verknüpfung unterscheidet sich aber von der in Gleichung 5.21. Betrachtet man die beiden Beziehungen 5.21 und 5.25 zusammen, so erhält man ein System von zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und y :

$$\text{Wasserstoff von 1999 bis 2003:} \quad y + 2,8x = (3,2 \pm 6,3) \cdot 10^{-15} / \text{Jahr}$$

$$\text{Quecksilber von 2000 bis 2002:} \quad y + 6,0x = (0,2 \pm 7,0) \cdot 10^{-15} / \text{Jahr}. \quad (5.26)$$

Die Mittelwerte von x und y bestimmt man durch Lösen des Gleichungssystems für die Mittelwerte der Messungen. Unter den Voraussetzungen, daß beide Messungen statistisch unabhängig voneinander sind und die Meßdaten jeweils einer Gauß-Verteilung genügen, kann man die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung anwenden, um damit die Fehler in x und y zu bestimmen. Die Ergebnisse sind [Fis04a]:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha = (-0,9 \pm 2,9) \cdot 10^{-15} / \text{Jahr} \\ y &= \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{Cs}}{\mu_B} = (0,6 \pm 1,3) \cdot 10^{-14} / \text{Jahr}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Beide Driftraten sind mit 0 verträglich. In diese Ergebnisse gehen *lediglich* die Annahmen ein, daß sich die beiden Frequenzverhältnisse f_H/f_{Cs} und f_{Hg}/f_{Cs} in den Zeitintervallen der jeweiligen Messungen linear mit der Zeit verändert haben. Es wurden insbesondere keine Annahmen über das zeitliche Verhalten von α , μ_{Cs}/μ_B oder anderer Naturkonstanten

gemacht bzw. Korrelationen zwischen Naturkonstanten vorausgesetzt. Streng genommen gelten die Ergebnisse 5.27 nur im überlappenden Zeitbereich beider Messungen. Im folgenden wird jedoch die Linearität der gemessenen Frequenzverhältnisse mit der Zeit immer für das gesamte Zeitintervall angenommen.

Ein dritter Frequenzvergleich wurde in den Jahren 2001 und 2003 in der Gruppe um Ch. Tamm an der PTB in Braunschweig durchgeführt. Dort wurde mit einem fs-Frequenzkamm die Frequenz f_{Yb} des elektrischen Quadrupolübergangs $6s\ ^2S_{1/2} (F=0, m_F=0) \rightarrow 5d\ ^2D_{3/2} (F=2, m_F=0)$ eines einzelnen lasergekühlten $^{171}\text{Yb}^+$ Ions relativ zu einer Cs-Uhr gemessen [Ste01, Pei04]. Die relative zeitliche Änderung von f_{Yb}/f_{Cs} war dabei $(-1, 2 \pm 4, 4) \cdot 10^{-15}/\text{Jahr}$. Mit der relativistischen Korrektur aus [Dzu99a]

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{rel,Yb} \approx 0,9 \quad (5.28)$$

erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{f_{Yb}}{f_{Cs}} \right) = -y - 1,9x = (-1, 2 \pm 4, 4) \cdot 10^{-15}/\text{Jahr}. \quad (5.29)$$

Diese Gleichung bildet zusammen mit den Gleichungen 5.26 ein System von drei Gleichungen mit den zwei Unbekannten x und y . Durch die dritte Messung kann der Fehler von x und y im Vergleich zu Ergebnis 5.27 noch etwas reduziert werden. Da man jetzt ein „überbestimmtes“ Gleichungssystem hat, ist die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte und deren Fehler etwas aufwendiger. Dennoch lassen sich auch für den allgemeinen Fall von N Frequenzvergleichen Formeln dazu angeben, die in Anhang B.2 hergeleitet sind. Man erhält als Ergebnis [Pei04]:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha = (-0, 3 \pm 2, 0) \cdot 10^{-15}/\text{Jahr} \\ y &= \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{Cs}}{\mu_B} = (2, 4 \pm 6, 8) \cdot 10^{-15}/\text{Jahr}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Stellt man die Ergebnisse der f_H/f_{Cs} , f_{Hg}/f_{Cs} und f_{Yb}/f_{Cs} Frequenzmessungen (siehe Gleichungen 5.21, 5.25 und 5.29) in einem Graph mit den Achsen x und y dar (siehe Abbildung 5.14), so werden die Messungen durch Streifen repräsentiert. Die Breite der Streifen entspricht der Genauigkeit der Experimente und die Steigung der Streifen ist der Multiplikationsfaktor von $x = \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha$. Die Fläche mit dem dunkelsten Grauton in Abbildung 5.14 ist mit allen drei Messungen verträglich. Die wahrscheinlichsten Werte für x und y sowie deren Fehler können mit den Gleichungen B.7 und B.8 aus Anhang B.2 bestimmt werden. Durch weitere Frequenzvergleiche (neue Streifen mit anderer Steigung) bzw. höhere Meßgenauigkeit (schmalere Streifen) kann der experimentell erlaubte Bereich in Abbildung 5.14 weiter eingengt werden. Ein vierter Streifen kann in näherer Zukunft durch eine wiederholte Messung der Frequenz f_{Sr} des $5s\ ^2S_{1/2} \rightarrow 4d\ ^2D_{5/2}$ Übergangs in einem einzelnen gespeicherten und lasergekühlten $^{88}\text{Sr}^+$ Ion relativ zu einer Cs-Uhr erwartet werden [Mar04]. Der relativistische Korrekturterm ist $\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{rel,Sr} \approx +0,43$ [Dzu99a], was einer Steigung des Streifens von $-2,37$ entspricht. Damit liegt die Steigung zwischen der des Yb- und H-Streifens. Eine Gerade mit der entsprechenden Steigung ist in

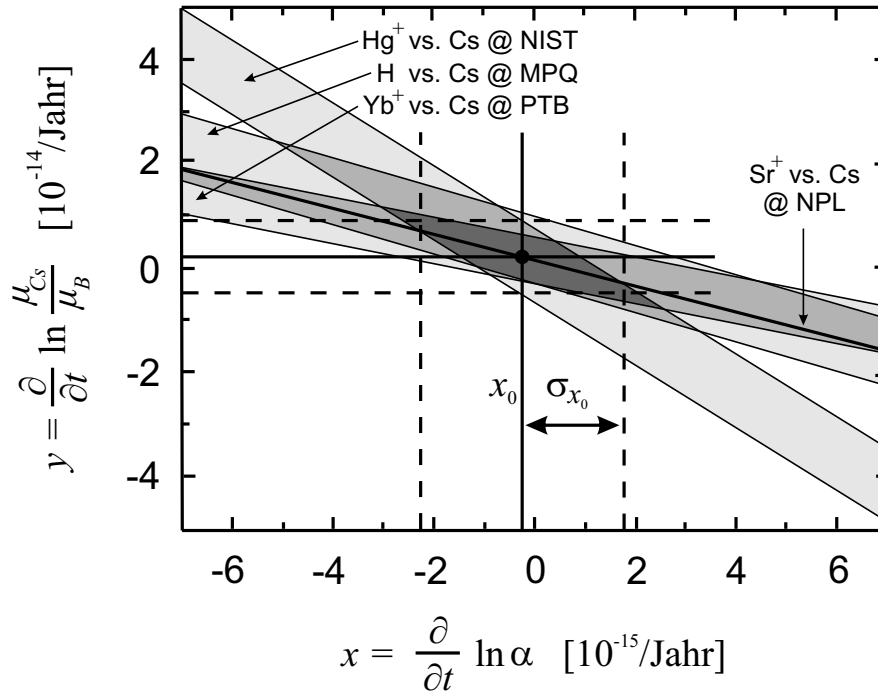


Abbildung 5.14: Bildliche Darstellung der f_H/f_{Cs} , f_{Hg}/f_{Cs} und f_{Yb}/f_{Cs} Frequenzmessungen. Die Breite der Streifen ($2\sigma_i$) spiegelt die Genauigkeit des jeweiligen Experiments wieder und die Steigung ist der Multiplikationsfaktor vor $\frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha$ in den Gleichungen 5.21, 5.25 bzw. 5.29 (siehe Gleichung B.2). Die wahrscheinlichsten Werte x_0 und y_0 sowie die entsprechenden Fehler σ_{x_0} und σ_{y_0} können mit den Formeln B.7 und B.8 aus Anhang B.2 bestimmt werden. Die durchgezogene Gerade hat die Steigung einer f_{Sr}/f_{Cs} Frequenzmessung und ist von $(0,0)$ verschoben, um durch (x_0, y_0) zu verlaufen.

Abbildung 5.14 eingezeichnet. Für die Verringerung der Fehler wären Frequenzvergleiche mit einer *positiven* Steigung der Streifen besonders wichtig. Solche Übergänge sind aber noch nicht gefunden worden.

5.4.2 Zeitliche Veränderung von μ_{Rb}/μ_{Cs} und μ_{Rb}/μ_B

In den Gruppen um A. Clairon am BNM-SYRTE und C. Salomon an der ENS beide in Paris/Frankreich wurden von 1998-2003 die Frequenzen f_{Rb} und f_{Cs} der Grundzustandshyperfeinaufspaltungen im ^{87}Rb bzw. ^{133}Cs Atom miteinander verglichen [Mar03]. Dazu wurden mehrere Fontänenuhren verwendet: eine transportable Cs Fontänenuhr (FOM), eine ortsfeste Cs Fontäne (FO1) und eine ortsfeste Doppelfontäne (DF), die mit Cs oder Rb betrieben werden kann. Die relative zeitliche Änderung von f_{Rb}/f_{Cs} konnte dabei zu $(0,2 \pm 7,0) \cdot 10^{-16}/\text{Jahr}$ bestimmt werden. Mit Hilfe der relativistischen Korrekturen für f_{Rb} und f_{Cs} [Dzu99a]

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{rel,Rb} \approx 0,3 \quad \text{und} \quad \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{rel,Cs} \approx 0,8 \quad (5.31)$$

und Gleichung 4.5 auf Seite 72 läßt sich die relative zeitliche Änderung von f_{Rb}/f_{Cs} wie folgt darstellen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{f_{Rb}}{f_{Cs}} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{Rb}}{\mu_{Cs}} - 0,5 \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha = (0,2 \pm 7,0) \cdot 10^{-16} / \text{Jahr}. \quad (5.32)$$

Mit dem Ergebnis für $\frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha$ aus dem vorherigen Abschnitt (Gleichungen 5.30) erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{Rb}}{\mu_{Cs}} = (-0,13 \pm 1,20) \cdot 10^{-15} / \text{Jahr}, \quad (5.33)$$

wobei wieder die statistische Unabhängigkeit der Experimente und eine Gauß-Verteilung der Daten vorausgesetzt wurden. Weiterhin gilt

$$\frac{\mu_{Rb}}{\mu_{Cs}} = \frac{\mu_{Rb}}{\mu_B} \left(\frac{\mu_{Cs}}{\mu_B} \right)^{-1} \quad (5.34)$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{Rb}}{\mu_{Cs}} = \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{Rb}}{\mu_B} - \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{Cs}}{\mu_B} \quad (5.35)$$

Mit dieser Beziehung und den Ergebnissen für $\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{Rb}}{\mu_{Cs}}$ und $\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{Cs}}{\mu_B}$ (Gleichungen 5.33 und 5.30) kann man

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{Rb}}{\mu_B} = (2,3 \pm 6,9) \cdot 10^{-15} / \text{Jahr} \quad (5.36)$$

bestimmen.

5.4.3 Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse

In Tabelle 5.5 sind die Ergebnisse zur zeitlichen Änderung von Naturkonstanten zusammengefaßt, die mit Hilfe der Frequenzvergleiche erzielt wurden. Im betrachteten Zeitraum von 1998-2003 sind alle Driften mit Null verträglich.⁴⁶

Es ist wichtig hervorzuheben, daß in diese Ergebnisse abgesehen von der zeitlichen Linearität der gemessenen Frequenzverhältnisse im betrachteten Zeitraum *keine* Modellannahmen über die zeitliche Änderung von Naturkonstanten eingehen. Insbesondere werden keine Annahmen über Korrelationen von zeitlichen Änderungen gemacht, wie sie z. B. von großen vereinheitlichten Theorien vorhergesagt werden. Die hier vorgestellten Ergebnisse unterscheiden sich dadurch insbesondere von den Analysen des Oklo-Reaktors, die eine starke Modellabhängigkeit aufweisen.

Kernmagnetische Momente wie beispielsweise μ_{Cs}/μ_B , μ_{Rb}/μ_B oder μ_{Rb}/μ_{Cs} werden von der elektromagnetischen Kopplungskonstante aber auch von den Kopplungskonstanten der starken- bzw. schwachen Wechselwirkung bestimmt. Da der genaue Zusammenhang

⁴⁶Wird die Linearität der gemessenen Frequenzverhältnisse mit der Zeit auch für einen größeren Zeitbereich als gültig angenommen, so läßt sich der Geltungsbereich der Ergebnisse entsprechend ausdehnen.

Naturkonstante γ einheitenlos	$\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = \frac{\partial}{\partial t} \ln \gamma$ [$10^{-15}/\text{Jahr}$]
α	$-0,3 \pm 2,0$
μ_{Cs}/μ_B	$2,4 \pm 6,8$
μ_{Rb}/μ_B	$2,3 \pm 6,9$
μ_{Rb}/μ_{Cs}	$-0,1 \pm 1,2$

Tabelle 5.5: Ergebnisse zur Drift von Naturkonstanten im Zeitraum von 1998-2003. Alle relativen zeitlichen Änderungen sind mit Null verträglich. $\dot{\gamma}/\gamma > 0$ bedeutet größere Werte für γ in der Zukunft.

zwischen den Kopplungskonstanten und den Kernmomenten aber nicht bekannt ist, kann mit den Ergebnissen aus Tabelle 5.5 noch *nicht* auf die zeitliche Konstanz der Kopplungskonstanten der starken- bzw. schwachen Wechselwirkung selbst geschlossen werden. Die Nullergebnisse für die kernmagnetischen Momente könnten z. B. auch mit einer gegenseitigen Kompensation verschiedener zeitlicher Änderungen erklärt werden.

Man könnte argumentieren, daß die Abhängigkeit der Übergangsfrequenzen f_H , f_{Hg} , f_{Yb} , f_{Cs} und f_{Rb} von den Naturkonstanten α , μ_{Cs}/μ_B und μ_{Rb}/μ_B mit einer Theorie berechnet wurde, in der die Naturkonstanten nicht von Anfang an als zeitabhängig angenommen wurden. Eine mögliche Konsequenz wäre, daß die Gleichungen 4.3, 4.4 und 4.5 auf Seite 72 bzw. die berechneten relativistischen Korrekturen nicht die korrekte Abhängigkeit von den Naturkonstanten wiedergeben. Ein solches Szenario ist vorstellbar, aber die Abweichungen sollten klein sein, weil von jeder übergeordneten Theorie, die u. a. eine eventuelle Zeitabhängigkeit der Naturkonstanten beschreibt, angenommen wird, daß sie alle heutigen Theorien als Grenzfälle enthält. Außerdem sind die Anforderungen an die Genauigkeit der relativistischen Korrekturen F_{rel} nicht besonders hoch, weil die Meßgenauigkeit, mit der die relative zeitliche Änderung der Frequenzverhältnisse bestimmt wurde, mehr als 100% beträgt. Eine Änderung der relativistischen Korrekturen von beispielsweise 10% würde die Ergebnisse daher nur unwesentlich verändern. Es ist also nicht zu befürchten, daß eine Auswertung der Meßergebnisse im Rahmen einer allgemeineren Theorie zu qualitativ anderen Ergebnissen führt.

Es wurde bei der Auswertung der Daten *nicht* explizit angenommen, daß die Naturkonstanten räumlich konstant sind. Da die einzelnen Frequenzvergleiche an verschiedenen geographischen Orten auf der Erde und zu verschiedenen Zeiten durchgeführt wurden, was unterschiedlichen Positionen der Erde relativ zum Mikrowellenhintergrund entspricht, sind die Messungen nicht nur auf *zeitliche* Änderungen der Naturkonstanten empfindlich sondern auch auf *räumliche* Änderungen. Im Prinzip könnten die Null-Ergebnisse also auch durch eine gegenseitige Kompensation dieser beiden Effekte erklärt werden. Aufgrund der Bewegung der Erde ist in diesem allgemeinen Fall keine experimentelle Aussage über eine

alleinige zeitliche Änderung von Naturkonstanten möglich.

In Abbildung 5.15 soll $\frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha$ aus Tabelle 5.5 mit den Ergebnissen aus Tabelle 4.3 (Seite 75) verglichen werden. Dazu ist an dieser Stelle noch einmal der rechte Teil von Abbildung 4.1 wiedergegeben. Der mit den Uhrenvergleichen verträgliche Bereich (diese Arbeit) ist durch zwei Geraden bzw. eine graue Fläche markiert. Dabei wurde eine lineare Zeitabhängigkeit von α angenommen. Die unterschiedlichen Arbeiten zum Oklo-Reaktor sind wie bereits

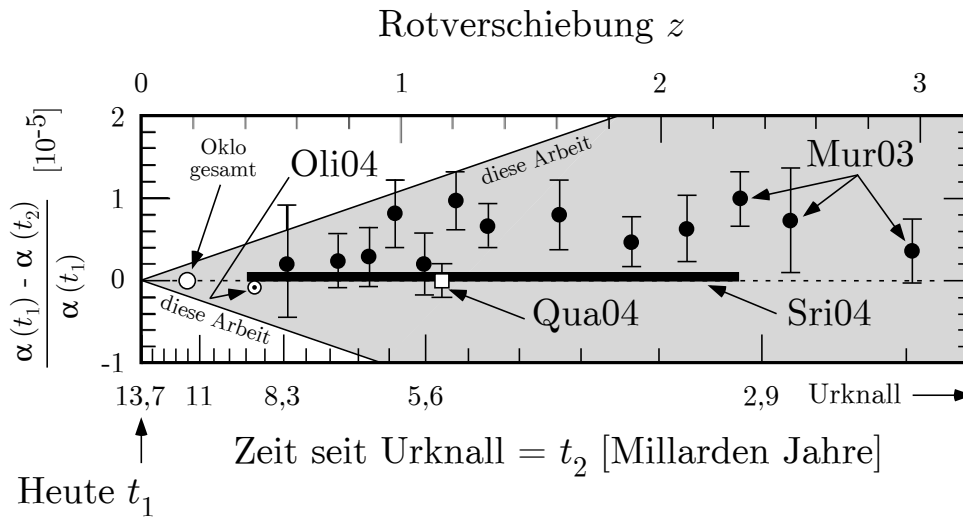


Abbildung 5.15: Vergleich der Ergebnisse zur zeitlichen Änderung von α . Die graue Fläche ist mit den Uhrenvergleichen (diese Arbeit) verträglich. Dabei wurde ein lineares zeitliches Verhalten von α angenommen. „Oklo gesamt“ ist die Zusammenfassung aller Untersuchungen zum Oklo-Reaktor (siehe Text). In der Summe der Ergebnisse ist es wahrscheinlich, daß sich α in den letzten 10 Milliarden Jahren nicht geändert hat bzw. daß diese Änderung zu klein war, um sicher nachgewiesen zu werden. Der Urknall ist der Ursprung der Zeitachse.

erwähnt sehr modellabhängig. Um dennoch verlässliche Obergrenzen für eine Drift von α zu erhalten, werden alle Ergebnisse aus Tabelle 4.3 zu einem zusammengefaßt, dessen Fehlerbalken alle Resultate beinhaltet: $\Delta\alpha/\alpha(\text{Oklo, gesamt}) = (0,25 \pm 1) \cdot 10^{-7}$. Der Fehlerbalken ist etwa 10 mal kleiner als der Durchmesser des Symbols in Abbildung 5.15. Da die Ergebnisse aus Referenz [Mur03] durch vergleichbare Untersuchungen [Qua04, Sri04] nicht bestätigt werden konnten, erscheint es sehr wahrscheinlich, daß die zeitliche Änderung von α , falls sie überhaupt existiert, zu klein ist, um mit der im Moment erreichbaren Genauigkeit nachgewiesen werden zu können. Das kann bedeuten, daß α zeitlich stabil ist, es ist aber auch möglich, daß α sich einem asymptotischen Wert angenähert hat bzw. sich im Extremum einer Schwingung befindet. Um eine Entscheidung zu treffen, sind weitere Untersuchungen mit verbesserter Genauigkeit notwendig.

Vergleicht man die Genauigkeit der hier präsentierten Labormessungen mit denen von astronomischen Beobachtungen, so ist man, verglichen mit den Resultaten aus [Sri04]

(Fehler $0,62 \cdot 10^{-16}$ /Jahr), noch etwa eine Größenordnung weniger sensitiv auf eine lineare zeitliche Änderung der Feinstrukturkonstanten α . In der näheren Zukunft ist bei Labormessungen jedoch in zweierlei Hinsicht eine Steigerung der Empfindlichkeit zu erwarten: zum einen steigt die Genauigkeit der Messungen durch einen größeren Zeitabstand, was auf natürliche Weise geschehen wird, und zum anderen wird durch einen direkten Vergleich von optischen Frequenzen mit einem fs-Frequenzkamm (Frequenzverhältnis) eine höhere Meßgenauigkeit erwartet, die bis in den Bereich von 10^{-18} reichen kann.⁴⁷ Beide Tatsachen werden dafür sorgen, daß Labormessungen, was die Empfindlichkeit auf eine *lineare* zeitliche Änderung betrifft, in naher Zukunft zu einer ernstzunehmenden Alternative zu astronomischen Beobachtungen werden. Ein wichtiger Vorteil von Labormessungen ist dabei die gute Kontrolle systematischer Effekte. Es sei an dieser Stelle aber noch einmal betont, daß sich beide Methoden im Falle einer *nichtlinearen* Drift ergänzen, weil sie $\Delta\alpha/\alpha$ zu unterschiedlichen Zeiten messen.

Rückblickend auf Abschnitt 4.3 ab Seite 77 soll jetzt der Frage nachgegangen werden, inwieweit man im Experiment eine *Korrelation* der zeitlichen Änderungen von Naturkonstanten beobachten kann, wie sie von vereinheitlichten Theorien (GUT) vorhergesagt wird. Von besonderem Interesse sind hierbei $\dot{\alpha}/\alpha$ im Vergleich zu $\dot{\mu}_n/\mu_n$ bzw. \dot{m}_n/m_n (siehe Abschnitt 4.3 ab Seite 77). Setzt man voraus, daß sich μ_B bzw. m_e nicht mit der Zeit ändern, dann können die Korrelationen aus den Gleichungen 4.8 bzw. 4.9 von μ_n und m_n auf μ_n/μ_B und m_p/m_e übertragen werden, was die experimentell untersuchten Größen sind.

Die Überprüfung einer Korrelation zeitlicher Veränderungen erfordert, daß mindestens eine Größe signifikant von Null verschieden gemessen wurde. Daher sind die Ergebnisse der Uhrenvergleiche (siehe Tabelle 5.5) weder dazu geeignet, die Idee einer großen Vereinheitlichung zu beweisen noch sie zu widerlegen. Über von Null verschiedene zeitliche Änderungen von α bzw. m_p/m_e wurde dagegen in den Referenzen [Mur03] bzw. [Iva03b] berichtet. Interpretiert man die Ergebnisse von [Mur03] als lineare Drift von

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha = (-6,4 \pm 1,4) \cdot 10^{-16}/\text{Jahr},$$

so erwartet man nach Szenario (1) bzw. Gleichung 4.8 eine relative zeitliche Änderung des Massenverhältnisses m_p/m_e von

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{m_p}{m_e}(GUT) = (20 \pm 6) \cdot 10^{-15}/\text{Jahr},$$

was mit den als lineare Drift gedeuteten Beobachtungen von [Iva03b]

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{m_p}{m_e}(Exp) = (3,0 \pm 2,4) \cdot 10^{-15}/\text{Jahr}$$

nicht übereinstimmt. $\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{m_p}{m_e}(GUT)$ hat zwar das gleiche Vorzeichen wie die Messung, aber die 2σ -Fehlerbalken überdecken sich nicht. Für den Verstärkungsfaktor -31 wurde

⁴⁷Besonders vielversprechend ist der Vergleich zweier optischer Frequenzen in ein und demselben lasergekühlten Ion.

dabei ein Fehler von 20% angenommen. Des weiteren stimmt die nach [Mur03] und Szenario (1) erwartete zeitliche Änderung der relativen Kernmomente μ_{Cs}/μ_B bzw. μ_{Rb}/μ_B nicht innerhalb des 1σ -Fehlers mit dem Ergebnis der Labormessungen aus Tabelle 5.5 überein. Diese Diskrepanzen könnten darauf hindeuten, daß Szenario (3), bei dem der Verstärkungsfaktor kleiner ausfallen kann, die Realität besser beschreibt als Szenario (1). Andere Möglichkeiten sind, daß die astronomischen Beobachtungen von [Mur03] nicht korrekt sind (siehe [Qua04, Sri04]) oder daß eine lineare Drift eine zu starke Vereinfachung darstellt.

Da LLI bzw. LPI, die zusammengenommen eine zeitliche- und räumliche Änderung von nichtgravitativen Naturkonstanten verbieten, im Rahmen dieser Arbeit nicht als gültig angenommen wurden, gäbe es bei einem positiven Nachweis einer zeitlichen Änderung zwei Interpretationsmöglichkeiten: zum einen kann dies als Verletzung von LLI bzw. LPI angesehen werden, zum anderen könnte es aber auch sein, daß die betrachtete „Konstante“ im Rahmen einer übergeordneten Theorie eine dynamische Größe darstellt.

Die vorgestellten Ergebnisse zur zeitlichen Änderung von Naturkonstanten sind in *Physical Review Letters* **92**, 230802 (2004) veröffentlicht (siehe Anhang C auf Seite 142) bzw. bei *Laser Physics* zur Veröffentlichung eingereicht.

6. Ausblick

Im Ausblick möchte ich auf einige Experimente hinweisen, die in der Arbeitsgruppe von Prof. T. W. Hänsch im Zusammenhang mit fs-Frequenzkämmen in der näheren Zukunft aufgebaut bzw. durchgeführt werden sollen.

6.1 Verbesserungen am Wasserstoffspektrometer

Ein gemeinsames Problem der 1S-2S Frequenzmessungen der Jahre 1999 und 2003 war die starke Streuung der Tagesmittelwerte. Eine Ursache dafür könnte die unzureichende Rotationssymmetrie der Mode des Überhöhungsresonators für das 243 nm Licht sein, die zu einem nicht verschwindenden Dopplereffekt erster Ordnung führt. Bereits ein linearer Dopplereffekt der Größenordnung $10^{-7}v/c$ könnte die Streuung der Daten erklären. Da der Überhöhungsresonator während der Messungen täglich justiert wurde, kann die Streuung dadurch hervorgerufen worden sein. Die Symmetrie der Resonatormode kann durch eine größere Finesse des Resonators, d. h. durch Spiegel höherer Reflektivität, verbessert werden. Solche Spiegel sind bereits vorhanden und werden in naher Zukunft in die Vakuumkammer eingebaut. Eine höhere Finesse des Überhöhungsresonators ermöglicht außerdem den Einsatz eines Diodenlasersystems zur Erzeugung des 486 nm Lichts, was die Handhabung des Experiments wahrscheinlich deutlich verbessern wird.

In der Gruppe um J. Ye am JILA¹ in Boulder/Colorado/USA konnte gezeigt werden, daß eine geeignete *senkrechte* Lagerung eines Referenzresonators diesen im Vergleich zur üblichen waagerechten Lagerung unempfindlicher gegen Schwingungen macht.² Die Anwendung dieses Konzepts auf den bereits vorhandenen ULE-Resonator würde die Linienbreite des Wasserstoff-Spektroskopielasers weiter reduzieren.

Alle Verbesserungen zusammengenommen könnten in naher Zukunft den Bau einer transportablen Wasserstoffuhr ermöglichen. An diesem Projekt arbeitet im Moment Dr. J. Alnis.

6.2 Spektroskopie mit Frequenzkämmen

In der Gruppe um Th. Udem sind zwei Experimente in Vorbereitung, bei denen Atome bzw. Ionen alleine mit stabilisierten Frequenzkämmen spektroskopiert werden sollen. Das

¹engl. Joint Institute for Laboratory Astrophysics

²Die ursprüngliche Idee zu diesem Konzept wurde in der Gruppe um J. Bergquist am NIST entwickelt. Eine vergleichbare Unempfindlichkeit gegen Schwingungen wird dort durch eine waagrechte Lagerung *und* die Einwirkung von äußeren Kräften erreicht.

hat zwei Vorteile: zum einen benötigt man keinen gesonderten Spektroskopielaser und zum anderen kann man die für die beiden Experimente nötige kurzweilige Strahlung nicht oder nur mit großen Nachteilen auf kontinuierlichem Wege erzeugen.

6.2.1 1S-3S Spektroskopie an atomarem Wasserstoff

Mit der Messung von Übergangsfrequenzen im Wasserstoff- bzw. Deuterium-Atom können die Rydbergkonstante R_∞ und die 1S, 2S Lambverschiebungen in Wasserstoff bzw. Deuterium bestimmt werden [Bir01]. Davon sind die 1S-Lambverschiebungen für einen QED-Test gebundener Zustände besonders interessant, weil sie den größten Wert haben. Der experimentelle Fehler der 1S-Lambverschiebung in Wasserstoff wird dabei nicht durch den Fehler der 1S-2S Frequenzmessung beherrscht, sondern durch den anderer Frequenzmessungen. Um den Fehler der Lamb-Verschiebung zu verringern, wurde von P. Fendel ein Experiment aufgebaut, mit dem die Frequenz des 1S-3S Zweiphotonen-Übergangs mit hoher Genauigkeit bestimmt werden soll. Der 1S-3S Übergang hat eine Wellenlänge von etwa 102,5 nm und kann mit zwei gegenläufigen Photonen von je 205 nm Wellenlänge dopplerfrei angeregt werden. Das 205 nm Licht wird durch zweimaliges Verdoppeln eines Ti:Saphir ps-Lasers bei 820 nm erzeugt, der auf eine Cs-Uhr stabilisiert ist. Der photorefraktive Effekt im nichtlinearen Kristall der zweiten Verdopplung, der eine *kontinuierliche* Erzeugung von 205 nm Licht verhindert, spielt im gepulsten Betrieb keine Rolle. Verwendet man statt eines kontinuierlichen Lasers einen Frequenzkamm zur dopplerfreien Zweiphotonen-Spektroskopie, dann trägt nicht nur eine der Kammoden zur Anregung bei, sondern alle Modenpaare, deren Summenfrequenz gerade der Übergangsfrequenz entspricht. Durch die Breite des Frequenzkamms wird der Dopplereffekt erster Ordnung allerdings nicht vollständig unterdrückt. Da aber im Falle des 1S-3S Experiments ein ps-Laser als Frequenzkammgenerator verwendet wird und die natürliche Linienbreite des Übergangs 1 MHz ist, begrenzt der verbleibende Dopplereffekt nicht die erreichbare Genauigkeit der Frequenzmessung. Wenn es gelingt, die Linienmitte mit einem Fehler von 1 kHz zu bestimmen, was 1/1000 der Linienbreite bzw. einer relativen Genauigkeit von $3,4 \cdot 10^{-13}$ entspricht, dann kann dadurch der Fehler der 1S-Lambverschiebung halbiert werden.

6.2.2 1S-2S Spektroskopie an $^4\text{He}^+$

Von M. Herrmann und F. Markert wird eine Apparatur zur Spektroskopie von kalten Ionen aufgebaut, die wie beim 1S-3S Experiment mit einem stabilisierten Frequenzkamm spektroskopiert werden sollen. Die Idee ist, zwei unterschiedliche Ionensorten in einer Falle zu speichern, wobei eine Ionensorte lasergekühlt wird und damit als Kühlmedium für die zweite Ionensorte dient, die dann mit einem Frequenzkamm spektroskopisch untersucht wird. Als Kühlion soll $^{24}\text{Mg}^+$ bzw. $^{25}\text{Mg}^+$ verwendet werden, das mit einem vervierfachen Faserlaser einer Wellenlänge von 1120 nm lasergekühlt werden kann. Ein solcher Aufbau eignet sich zur Untersuchung all der Ionen, die nicht auf einfache Weise selbst lasergekühlt werden können, und ist deshalb besonders vielseitig. Insbesondere wird dadurch

das Spektrum möglicher Uhrenübergänge einer optischen Uhr erheblich erweitert. Ein Ion, das untersucht werden soll, ist das wasserstoffähnliche $^4\text{He}^+$ Ion, dessen $1S$ - $2S$ Übergang für einen QED-Test gebundener Zustände von besonderem Interesse ist, weil der Ladungsdurchmesser des Kerns³ besser bekannt ist als bei Wasserstoff, wodurch der Fehler der QED-Rechnungen verringert werden kann. Außerdem skaliert der führende Term der Lambverschiebung mit der Kernladungszahl Z wie Z^4 und die $1S$ - $2S$ Frequenz wie Z^2 , so daß die Empfindlichkeit auf die führende QED-Korrektur mit Z^2 anwächst. Andere Korrekturen, die deshalb besonders interessant sind, weil unterschiedliche theoretische Werte vorliegen, skalieren mit noch höheren Potenzen von Z . Vergleiche von QED und Experiment als Funktion der Kernladungszahl Z ermöglichen zusätzlich die Überprüfung der Z -Skalierung. Ein wichtiger experimenteller Vorteil ist, daß wegen der tiefen Temperatur der Ionen alle Effekte an Bedeutung verlieren, die mit der Geschwindigkeit der Ionen zusammenhängen wie z. B. der Dopplereffekt und die Durchflugsverbreiterung. Ein Nachteil von $^4\text{He}^+$ ist die kurze Wellenlänge des $1S$ - $2S$ Übergangs von etwa 30 nm. Um die für den Zweiphotonen-Übergang nötige Strahlung von 60 nm zu erzeugen, wurde von Ch. Gohle ein optischer Resonator aufgebaut, mit dem das Licht eines Ti:Saphir fs-Lasers überhört und in einem Xe-Gasstrahl fokussiert wird. Durch die Erzeugung hoher Harmonischer im Gasstrahl wird dabei auch Licht der benötigten Wellenlänge erzeugt.⁴ Erste Ergebnisse dazu wurden von Ch. Gohle zur Veröffentlichung eingereicht. Ob das erzeugte Licht bei 60 nm weiterhin einen Frequenzkamm darstellt, müssen zukünftige Experimente zeigen.

6.3 Faser-Frequenzkämme bei $1,5\mu\text{m}$

Stabilisierte Frequenzkämme, die auf fs-Faserlasern bei $1,5\mu\text{m}$ aufbauen, sind wegen ihrer leichten Handhabung besonders dazu geeignet, über lange Zeiträume als Uhrwerk optischer Atomuhren zu dienen und die Grenzen der fs-Frequenzkammtechnologie weiter auszuloten. Ein Ziel ist es, die relative Genauigkeit eines fs-Uhrwerks im Bereich von 10^{-18} oder besser zu bestätigen oder dessen Grenzen aufzuzeigen. Ph. Kubina und Kollegen ist es in einer ersten Testmessung gelungen, die Übereinstimmung zweier fs-Faser-Frequenzkämme mit einer relativen Genauigkeit von $6 \cdot 10^{-16}$ zu demonstrieren [Kub05]. Mögliche Anwendungen der Faser-Frequenzkammtechnologie in der Telekommunikation sind die Verteilung von wohldefinierten optischen Referenzfrequenzen über bereits bestehende Fasernetzwerke und die Erhöhung der Übertragungsrate durch Modulation der einzelnen Kammoden. An diesen Projekten arbeiten R. Holzwarth, P. Adel, Ph. Kubina und V. Mackowiak.

6.4 Messung des relativistischen Dopplereffekts

In diesem Abschnitt werden Experimente zur Überprüfung der relativistischen Zeitdehnung vorgestellt. Da optische Frequenzmessungen, die im Rahmen dieser Arbeit durch-

³ α -Teilchen

⁴60 nm entspricht etwa der 13. Harmonischen von 800 nm.

geführt wurden, einen Beitrag zu diesen Experimenten leisten, soll etwas ausführlicher auf die Thematik eingegangen werden.

Ein wichtiges Experiment zur Überprüfung der Speziellen Relativitätstheorie (SR) ist die Messung der relativistischen Zeitdehnung. Dieser Typ Experiment wird auch Ives-Stilwell-Experiment (IS) genannt [Ive38, Saa03]. Zusammen mit dem Michelson-Morley-Experiment⁵ [Mich87, Mül03] und dem Kennedy-Thorndike-Experiment⁶ [Ken32, Wol03] gestattet es die Bestimmung aller Parameter der Testtheorie von Mansouri und Sexl (MS) [Rob49, Man77] und damit einen Test der SR. Eine Überprüfung der SR bzw. der Lorentz-invarianz ist aus zwei Gründen von besonderem Interesse: zum einen ist die SR die Grundlage für die Beschreibung der 4 bekannten Wechselwirkungen und zum anderen werden Abweichung von der SR im Rahmen vereinheitlichter Theorien erwartet.

Eine moderne Form des IS-Experimentes wird am Max-Planck-Institut für Kernphysik in Heidelberg durchgeführt. Dort werden ${}^7\text{Li}^+$ Ionen auf etwa 6% der Lichtgeschwindigkeit beschleunigt und im Testspeicherring (TSR) angesammelt und gekühlt. Mit Hilfe von kollinearer Sättigungsspektroskopie wird die Frequenz des ${}^3S_1 (F = 5/2) \rightarrow {}^3P_2 (F = 7/2)$ Übergangs sowohl *in* Flugrichtung der Ionen f_p als auch *entgegengesetzt* der Flugrichtung f_a gemessen. Mit Hilfe der Dopplerformel 5.5 auf Seite 86 und $\varphi_p = 0$ bzw. $\varphi_a = 180^\circ$ findet man:

$$\text{SR: } f_p \cdot f_a = f_0 \frac{\sqrt{1 - (v/c_0)^2}}{1 - v/c_0} \cdot f_0 \frac{\sqrt{1 - (v/c_0)^2}}{1 + v/c_0} = f_0^2, \quad (6.1)$$

wobei f_0 die Frequenz des Übergangs bei Geschwindigkeit $v = 0$ ist. Für Gleichung 6.1 wurde $c_{ph} = c_0$ gesetzt, was für Einphotonenübergänge in Vakuum erlaubt ist. Abweichungen von der relativistischen Zeitdehnung werden im Rahmen der Testtheorie von MS durch eine Zahl α beschrieben,⁷ die durch

$$\text{SR: } \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_0}\right)^2} \rightarrow \text{MS: } \left[1 - \left(\frac{v}{c_0}\right)^2\right]^{1/2+\alpha} \quad (6.2)$$

definiert werden kann [Saa02]. Damit ergibt sich für Gleichung 6.1:

$$\text{MS: } \frac{f_p f_a}{f_0^2} = 1 - 2\alpha \left(\frac{v}{c_0}\right)^2 + \dots \quad (6.3)$$

Bei $v/c \approx 6\%$ ist $\lambda_a \approx 584,7 \text{ nm}$, $\lambda_0 \approx 549,0 \text{ nm}$ und $\lambda_p \approx 514,7 \text{ nm}$. Das Licht bei 514,7 nm bzw. 584,7 nm wurde von einem Ar^+ Laser bzw. einem Farbstofflaser erzeugt. Der Ar^+ Laser, dessen Wellenvektor parallel zur Geschwindigkeit der Ionen ist, wird dabei auf eine Iodlinie stabilisiert und in seiner Frequenz nicht geändert. Die Geschwindigkeit der Ionen wird dann so eingestellt, daß sie mit dem Ar^+ Laser in Resonanz sind. Dann

⁵Test der Isotropie der Lichtgeschwindigkeit

⁶Test der Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit \vec{v}_L des Laborsystems relativ zu einem gewählten Bezugssystem.

⁷ α ist *nicht* die Feinstrukturkonstante!

wird die Frequenz des Farbstofflasers, dessen Wellenvektor antiparallel zur Geschwindigkeit der Ionen ist, relativ zu einer anderen Iodlinie durchgestimmt und so die Resonanz abgefahren. Wenn beide Laser mit der selben Geschwindigkeitsklasse wechselwirken, erscheint ein Lambdip im Spektrum, für dessen Frequenz nach MS Gleichung 6.3 gilt. Mit diesem Experiment konnte eine Obergrenze für α von $2,2 \cdot 10^{-7}$ bestimmt werden. Die Genauigkeit des Experiments ist dabei durch die unzureichende Kenntnis von f_0 begrenzt [Saa03]. Dieses Problem kann umgangen werden, indem man *zwei* Messungen mit unterschiedlichen Ionengeschwindigkeiten v_1 bzw. v_2 durchführt und untersucht inwieweit

$$\text{SR: } f_p(v_1) \cdot f_a(v_1) = f_p(v_2) \cdot f_a(v_2) \quad (6.4)$$

erfüllt ist. Durch den Vergleich zweier Messungen wird man unabhängig von f_0 . Vernachlässigt man höhere Ordnungen, so ergibt sich für α :

$$\text{MS: } \alpha = \frac{1}{2} \frac{f_{p1}f_{a1} - f_{p2}f_{a2}}{f_{p1}f_{a1}\left(\frac{v_2}{c_0}\right)^2 - f_{p2}f_{a2}\left(\frac{v_1}{c_0}\right)^2} \quad (6.5)$$

Die Indizes 1 bzw. 2 beziehen sich auf Messungen bei der Geschwindigkeit v_1 bzw. v_2 . Folgende Wellenlängen (Iodlinien) bzw. Ionengeschwindigkeiten bieten sich für ein solches Experiment an:

- $v/c \approx 6\%$ Wellenlängen und Iodlinien wie bei [Saa03]

$\lambda_a \approx 584,7 \text{ nm}$ $^{127}\text{I}_2$ Linie P(10) 14-1 a_{15} Komponente
→ Farbstofflaser

$\lambda_p \approx 514,7 \text{ nm}$ $^{127}\text{I}_2$ Linie P(13) 43-0 a_3 Komponente [Jon02]
→ Ar^+ Laser

- $v/c \approx 3\%$

$\lambda_a \approx 565,8 \text{ nm}$ $^{127}\text{I}_2$ Linie P(80) 21-1 a_{10} Komponente
→ Farbstofflaser

$\lambda_p \approx 532,3 \text{ nm}$ $^{127}\text{I}_2$ Linie R(57) 32-0 a_1 Komponente [Hol01a]
→ frequenzverdoppelter Nd:YAG Laser

Für die genannten Iodlinien um 514,7 und 532,3 nm existieren Frequenzmessungen mit Fehlern von wenigen kHz [Jon02, Hol01a]. Dabei muß beachtet werden, daß die gemessenen Frequenzen im Einzelfall von den verwendeten Iodzellen abhängen (Verunreinigungen). Die Frequenzen der beiden anderen Iodlinien sind dagegen wesentlich schlechter bekannt. Der Fehler der Linie bei 565,8 nm betrug 3 MHz und war durch den dopplerfreien Iodatlas gegeben [Kat00] und die Frequenz der Linie bei 584,7 nm war mit einem Fehler von ca. 150 kHz bekannt [Rei02]. Damit die Genauigkeit der geplanten Messung nicht dadurch begrenzt wird, wurden die Frequenzen der Iodlinien im Rahmen dieser Arbeit erstmalig mit einem fs-Frequenzkamm gemessen. Als Referenz des Frequenzkamms wurde eine

HP 5071A Cs-Uhr verwendet, die eine spezifizierte relative Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-13}$ hat (Option 001, Hochleistungs-Cs-Röhre). Die Messungen wurden in Zusammenarbeit mit S. Reinhardt und G. Saathoff vom Max-Planck-Institut für Kernphysik in Heidelberg und S. Karpuk von der Universität Mainz durchgeführt und ergaben folgende Frequenzen:

$$\begin{aligned}
 {}^{127}\text{I}_2 \text{ P}(80) \text{ 21-1 } a_{10} & \quad (530\,222\,434\,292 \pm 73) \text{ kHz} \quad \lambda \approx 565,8 \text{ nm} \\
 {}^{127}\text{I}_2 \text{ P}(10) \text{ 14-1 } a_{15} & \quad (512\,671\,028\,078 \pm 73) \text{ kHz} \quad \lambda \approx 584,7 \text{ nm}
 \end{aligned}$$

Die im Vergleich mit den Referenzen [Hol01a, Jon02] großen Fehler von 73 kHz sind dominiert durch die konservative Abschätzung von systematischen Fehlern, die bei der Stabilisierung des verwendeten Farbstofflasers auf die Iodlinien erwartet werden. Die Ungenauigkeit der verwendeten Cs-Uhr bewirkt dagegen einen Frequenzfehler von etwa 300 Hz, der in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden kann. Die Ergebnisse der Frequenzmessungen werden von S. Reinhardt zusammen mit weiteren Messungen am Iodmolekül zu Veröffentlichung vorbereitet. Das durch die Iodmessungen ermöglichte Experiment bei unterschiedlichen Ionengeschwindigkeiten wird in Kürze abgeschlossen.

Die Genauigkeit des beschriebenen Relativitätstests kann durch eine Erhöhung der Ionengeschwindigkeit gesteigert werden. Daher wird von S. Reinhardt, G. Saathoff, S. Karpuk und Ch. Novotny (Uni Mainz) und weiteren Kollegen unter Beteiligung der Arbeitsgruppe von Prof. Hänsch ein neues IS-Experiment vorbereitet, mit dem die relativistische Zeitdehnung bei $1/3$ der Lichtgeschwindigkeit überprüft werden soll. Dabei werden wieder ${}^7\text{Li}^+$ Ionen verwendet, deren ${}^3S_1 (F = 5/2) \rightarrow {}^3P_2 (F = 7/2)$ Übergangsfrequenz mit kollinearer Sättigungsspektroskopie gemessen wird. Da der TSR Ionen dieser Energie nicht speichern kann, wird das Experiment am Experimentierspeicherring (ESR) der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) in Darmstadt durchgeführt. Bei $v/c = 1/3$ gilt nach der SR $f_p = 2 \cdot f_a$, was bedeutet, daß für dieses Experiment lediglich *ein* Laser und eine Frequenzverdopplung notwendig sind. Die Wellenlänge des benötigten Lasers ist etwa 776 nm, so daß dafür ein Ti:Saphir- oder Diodenlaser in Frage kommt, dessen Frequenz jedoch nicht mit einer I₂-Linie sondern mit einem Frequenzkammgenerator stabilisiert werden soll, der von einer Cs-Uhr kontrolliert wird. Die benötigte Wellenlänge erlaubt dabei den Einsatz eines frequenzverdoppelten Faser-Frequenzkamms, von dem eine besonders hohe Bedienfreundlichkeit erwartet wird. Die Obergrenze für α kann mit diesem Experiment wahrscheinlich in den Bereich einiger 10^{-9} herabgesetzt werden, was verglichen mit Referenz [Saa03] eine Verbesserung von mehr als einer Größenordnung wäre.

Anhang A. Funktionsweise von Ti:Saphir Femtosekunden-Lasern

Pulse mit einer Dauer von wenigen Nanosekunden (ns) können durch Güteschaltung (engl. Q-switching) eines Laserresonators erzeugt werden. Noch kürzere Pulse kann man erzeugen, wenn es gelingt zwischen den Moden eines Laserresonators eine feste Phasenbeziehung herzustellen. Diese Technik nennt man Modenkopplung (engl. mode locking). In Abbildung A.1 ist das Entstehen eines Pulses durch phasenrichtige Überlagerung mehrerer Resonatormoden dargestellt. Je mehr Moden bei der Überlagerung beteiligt sind, umso

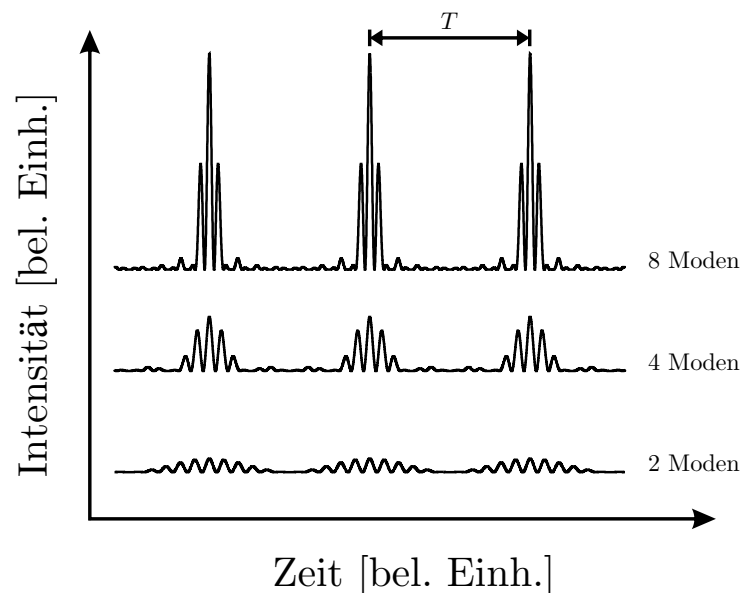


Abbildung A.1: Entstehung eines Pulses durch Überlagerung von Resonatormoden mit einer festen Phasenbeziehung. Je mehr Moden beteiligt sind, umso kürzer und intensiver ist der Puls.

kürzer ist die erreichbare Pulsdauer. Die kürzeste erreichbare Pulsdauer Δt ist mit der Breite $\Delta\omega$ des Laserspektrums über $\Delta\omega\Delta t \approx 2\pi$ verknüpft (siehe Seite 13). Um kurze Pulse zu erzeugen, ist es daher wichtig, ein Lasermedium mit einem breiten Verstärkungsprofil zu verwenden. Als Lasermedium wird oft ein mit Ti^{3+} Ionen dotierter Al_2O_3 Kristall (Saphir) verwendet.¹ Saphir zeichnet sich als Wirtsmaterial besonders durch seine hohe Zerstörschwelle aus. Ein solcher Ti:Saphir Kristall hat eine Verstärkungsbandbreite

¹Andere Verstärkungsmedien für fs-Laser sind beispielsweise Cr^{3+} dotierte Colquiriite-Kristalle. Der Vorteil dieser Kristalle ist, daß sie mit Diodenlasern gepumpt werden können. Ein optischer Synthesizer konnte mit diesem Lasertyp bereits demonstriert werden [Hol01b].

von etwa 400 nm bei einer Zentralwellenlänge von ca. 800 nm. Ti:Saphir Laser mit einer Pulslänge von unter 7 fs können bereits käuflich erworben werden.² Bei einer Zentralwellenlänge von 800 nm und bandbreitebegrenzten sech^2 Pulsen entspricht das einer spektralen Breite von mehr als 96 nm (FWHM). Von der Verstärkungsbandbreite her könnte ein Ti:Saphir Laser theoretisch Pulse einer Dauer von 1,6 fs erzeugen. Da es technisch sehr schwer ist, einen Laser mit dieser oder einer noch größeren Bandbreite zu bauen, geht man bei der Erzeugung kürzester Pulse zu kürzeren Wellenlängen über, weil dann die geforderte Bandbreite ebenfalls kleiner wird. Die dazu nötige kurzweilige Strahlung kann man mit einem Ti:Saphir Laser durch Erzeugung hoher Harmonischer in einem Edelgasstrahl generieren. Ein weiterer Vorteil kurzweiliger Strahlung liegt darin, daß durch die geringere Bandbreite Beugungseffekte bei der Propagation verringert werden können.

Die Funktionsweise eines fs-Lasers basiert auf zwei Prozessen: dem optischen Kerreffekt, der die nötige Phasenbeziehung zwischen den Resonatormoden herstellt, und der Kompensation der Gruppengeschwindigkeitsdispersion (GVD), die ein zeitliches Zerfließen der Pulse aufgrund der Dispersion im Resonator verhindert.

Der Kerreffekt ist eine Folge des nichtlinearen Brechungsindex n_2 , durch den der Brechungsindex n folgendermaßen abgeändert wird: $n(\omega, I) = n_0(\omega) + n_2 I$, wobei I die Intensität des Laserstrahls ist. Aufgrund des räumlichen Strahlprofils einer Lasermode bildet sich ein Brechungsindexprofil im Laserkristall aus, das gleich einer Linse den Laserstrahl fokussiert. Dieser Effekt wird Kerrlinse oder Selbstfokussierung genannt und ist umso stärker, je größer die Intensität ist. Wenn ein kurzer Puls im Resonator umläuft (viele gekoppelte Moden), so wird dieser im Laserkristall stärker fokussiert als eine einzelne Mode (kontinuierliche Welle). Fügt man nun in den Resonator eine Blende ein, so daß der gepulste Strahl ungehindert passieren kann, der kontinuierliche Strahl dagegen eine Abschwächung erfährt, so wird nach einiger Zeit nur noch der gepulste Strahl im Resonator umlaufen. Durch die Bevorzugung des gepulsten Betriebs hat man eine Kopplung der Resonatormoden erreicht, wie sie in Abbildung A.1 dargestellt ist. Wegen der verwendeten „harten“ Apertur wird diese Methode engl. *hard aperture Kerr-lens mode locking* genannt. Eine andere Methode der Modenkopplung kommt dagegen ohne Blende aus. Bei ihr wird der Pumplaser so stark in den Kristall fokussiert, daß seine Strahltaile einen kleineren Durchmesser hat als eine kontinuierliche Resonatormode. Durch die Selbstfokussierung eines gepulsten Strahls wird der Überlapp dann besser und der gepulste Betrieb erhält einen Vorteil. Da die Strahltaile des Pumplasers gewissermaßen eine „weiche“ Blende darstellt wird diese Methode engl. *soft aperture Kerr-lens mode locking* genannt. Nach dieser Methode arbeitet der fs-Laser, der in dieser Arbeit verwendet wurde (siehe Abbildung 2.8 auf Seite 30). Damit die Selbstfokussierung stark genug ist, um den gepulsten Betrieb zu stabilisieren, benötigt man in beiden Fällen Startpulse einer gewissen Mindestintensität, die man durch eine schnelle Änderung der Resonatorlänge erzeugen kann (z. B. durch die Erschütterung eines Spiegelhalters).

Eine Kerrlinse ist für den stabilen gepulsten Betrieb aber noch nicht ausreichend. Durch die Gruppengeschwindigkeitsdispersion (GVD $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$) im Kristall oder anderen Elementen

²Femtolasers Produktions GmbH: Femtosource Rainbow

des Lasers würde ein erzeugter Puls schnell wieder zeitlich zerfließen, weil verschiedene Frequenzkomponenten des Pulses unterschiedliche Umlaufgeschwindigkeiten aufweisen. Im Fall normaler Dispersion (positive GVD) laufen die langwelligen Komponenten den kurzwelligeren voraus, wodurch der Puls in die Länge gezogen wird und einen sogenannten *chirp* erhält (genauer: ein *upchirp*; siehe Abbildung 2.3 (oben) auf Seite 17). Diese positive GVD muß innerhalb des Resonators durch Elemente negativer GVD ausgeglichen werden, was durch eine Kombination von Prismen [For84] oder sogenannten „gechirpten“ Spiegeln [Szi94] geschehen kann. Bei gechirpten Spiegeln können rote Frequenzkomponenten tiefer in die dielektrischen Schichten eindringen als blaue, wodurch der Puls wieder zeitlich komprimiert werden kann. Bei dem in dieser Arbeit verwendeten Laser wurden gechirpte Spiegel zur Kompensation der GVD verwendet. Mit Gitterpaaren kann man auch negative GVD erzeugen, diese werden aber wegen der Reflexionsverluste nicht in Laserresonatoren sondern vorwiegend in Verstärkersystemen bzw. Pulsformern eingesetzt.

Die Selbstfokussierung ist nicht der einzige Prozeß, der zum gepulsten Betrieb eines fs-Lasers beiträgt. Durch das zeitliche Intensitätsprofil eines umlaufenden Pulses kommt es im Ti:Saphir Kristall zu einer starken Selbstphasenmodulation (siehe Seite 22), die Modulationsseitenbänder im Frequenzabstand der Pulswiederholrate ω_r um bereits bestehende Moden erzeugt. Unvollständig kompensierte GVD bzw. höhere Ordnungen der Dispersion führen nun dazu, daß Modulationsseitenbänder und Resonatormoden eine leicht unterschiedliche Frequenz aufweisen (siehe Gleichungen 2.15 und 2.16 auf Seite 17). Kleine Frequenzunterschiede können dadurch ausgeglichen werden, daß die Resonatormoden durch Injektionskopplung (engl. injection locking) gezwungen werden, in Phase mit den Modulationsseitenbändern zu schwingen, wodurch sich ein konstanter Modenabstand über das gesamte Spektrum ausbildet. Ist der Frequenzunterschied zu groß, um durch Injektionskopplung ausgeglichen werden zu können, so tragen diese Resonatormoden nicht mehr zum umlaufenden Puls bei und erfahren durch die Blende (hart oder weich) starke Verluste, die zum Aussterben der Moden führen. Die erreichbare Pulsdauer eines modengekoppelten Lasers ist daher neben der Bandbreite der Spiegel dadurch bestimmt, wie gut die GVD bzw. höhere Ordnungen der Dispersion ausgeglichen werden können.

Anhang B. Einzelheiten zu Kapitel 5

In diesem Anhang sind Details zur $1S$ - $2S$ Frequenzmessung und zur Berechnung der Obergrenzen einer möglichen zeitlichen Änderung von Naturkonstanten zusammengefaßt.

B.1 Stabilisierung der Pulswiederholrate

Die Pulswiederholrate f_r wurde während der Messung mit zwei unterschiedlichen elektronischen Aufbauten stabilisiert:

- **Konfiguration 1** (verwendet an den ersten drei Tagen der $1S$ - $2S$ Messung):

Photodiode (Siemens BPX 65), 3 dB-Abschwächer, Verstärker (Miteq AM-1299), Leistungsteiler (ein Ausgang wurde auf 20 MHz gemischt und gezählt), Mischer (Mini-Circuits ZEM-4300), rauscharmer Verstärker (Stanford Research Systems SR 560, Verstärkung 1, 10 kHz Tiefpaß mit 12 dB/Oktave Dämpfung), einstellbarer Loopfilter, Hochspannungsverstärker, Piezokeramik.

Der Verstärker nach der Photodiode war *nicht* auf der Grundplatte festgeschraubt und die Temperatur des Mixers war *nicht* stabilisiert.

Die Schwebung zwischen dem Farbstofflaser und dem Frequenzkamm war auf einem Hameg 5010 Spektrumanalysator ca. 4 MHz breit (Auflösungsbandbreite 300 kHz, Bildwiederholrate 43 Hz).

- **Konfiguration 2** (verwendet an den restlichen 9 Tagen der $1S$ - $2S$ Messung)

Photodiode (Siemens BPX 65), 3 dB-Abschwächer, Verstärker (Miteq AM-1299), Eingang Richtkoppler (Mini-Circuits ZDC-20-3, der Koppel-Ausgang wurde verstärkt, auf 20 MHz gemischt und gezählt), Mischer (Mini-Circuits ZEM-4300), einstellbarer Loopfilter, Hochspannungsverstärker, Piezokeramik.

Der Verstärker nach der Photodiode war auf der Grundplatte festgeschraubt und die Temperatur des Richtkopplers war passiv- bzw. die des Mixers aktiv stabilisiert.

Die Schwebung zwischen dem Farbstofflaser und dem Frequenzkamm war ca. 2 MHz breit (gleiche Bedingungen wie bei Konfiguration 1).

B.2 Bestimmung der Obergrenzen bei N Frequenzvergleichen

N Messungen wie die Frequenzvergleiche von f_H , f_{Hg} und f_{Yb} mit f_{Cs} (siehe Gleichungen 5.21, 5.25 und 5.29) lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

$$y = C_i \cdot x - (b_i \pm \sigma_i) \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{B.1})$$

Dabei sind $x \equiv \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha$, $y \equiv \frac{\partial}{\partial t} \ln(\mu_{Cs}/\mu_B)$, $(b_i \pm \sigma_i)$ die gemessene relative zeitliche Änderung des jeweiligen f_h/f_{Cs} Frequenzverhältnisses und C_i der Multiplikationsfaktor vor x in den Gleichungen 5.21, 5.25 und 5.29 oder im Vergleich mit Gleichung 5.18:

$$C_i = - \left\{ 2 - \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{rel,h} \right) + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{rel,Cs} \right) \right\} \quad (\text{B.2})$$

Die Linien $y_i = C_i x - b_i$, die den Mittelwerten der Messungen entsprechen, müssen sich dabei *nicht* in einem Punkt schneiden, wohingegen die Streifen eine gemeinsame Fläche einschließen müssen. Schließen die Streifen keine gemeinsame Fläche ein, so sind entweder die Fehlerbalken der Messungen unrealistisch klein oder das zugrunde liegende Modell ist falsch. Die Wahrscheinlichkeit $P(x, y)$, daß x und y die wahren Werte sind, läßt sich schreiben als

$$p(x, y) \sim e^{-\frac{1}{2}R(x,y)^2}. \quad (\text{B.3})$$

Mit der Annahme, daß alle Messungen statistisch unabhängig voneinander sind und die Messungen jeweils einer Gauß-Verteilung genügen, läßt sich $R(x, y)^2$ folgendermaßen darstellen:

$$R(x, y)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} (y - C_i x + b_i)^2 \quad (\text{B.4})$$

Die wahrscheinlichsten Werte x_0 und y_0 sind durch das Maximum von $P(x, y)$ gegeben, das mit den Forderungen

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial R^2}{\partial x} \right|_{x=x_0} &= -2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} (y - C_i x + b_i) C_i = 0 \quad \text{und} \\ \left. \frac{\partial R^2}{\partial y} \right|_{y=y_0} &= +2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} (y - C_i x + b_i) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

bestimmt werden kann. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} B_1 &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}, & B_2 &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{C_i^2}{\sigma_i^2}, & B_3 &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{\sigma_i^2}, \\ B_4 &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{\sigma_i^2}, & B_5 &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{-b_i}{\sigma_i^2} \quad \text{und} & B_6 &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{-C_i b_i}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

erhält man für x_0 und y_0 :

$$x_0 = \frac{B_5 B_4 - B_6 B_1}{B_1 B_2 - B_4^2} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{B_4 B_6 - B_2 B_5}{B_1 B_2 - B_4^2} \quad \text{mit} \quad B_1 B_2 - B_4^2 \geq 0. \quad (\text{B.7})$$

Die Fehler σ_{x_0} und σ_{y_0} von x_0 und y_0 erhält man durch Projektion von $P(x, y)$ auf die jeweiligen Achsen. Projektion auf die x -Achse bedeutet dabei Integration über die y -Koordinate und umgekehrt. Bei den Integrationen entstehen jeweils eindimensionale Gauß-Funktionen mit

$$\sigma_{x_0} = \sqrt{\frac{B_1}{B_1 B_2 - B_4^2}} \quad \text{und} \quad \sigma_{y_0} = \sqrt{\frac{B_2}{B_1 B_2 - B_4^2}}. \quad (\text{B.8})$$

In allen physikalisch sinnvollen Fällen ($\sigma_i > 0$ und mindestens 2 C_i unterschiedlich) sind $B_1 B_2 - B_4^2$, B_1 und B_2 größer als null.

Anhang C. Veröffentlichte Artikel

In diesem Anhang sind die im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Veröffentlichungen aufgeführt.

1) Referenz [Hol01a]

Absolute frequency measurement of iodine lines with a femtosecond optical synthesizer

R. Holzwarth, A. Yu. Nevsky, M. Zimmermann, Th. Udem, T. W. Hänsch, J. von Zanthier, H. Walther, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, P. St. J. Russell, M. N. Skvortsov und S. N. Bagayev, Appl. Phys. B **73**, 269 (2001).

2) Referenz [Hol01b]

White-light frequency comb generation with a diode-pumped Cr:LiSAF laser

R. Holzwarth, M. Zimmermann, Th. Udem, T. W. Hänsch, P. Russbüldt, K. Gäbel, R. Poprawe, J. C. Knight, W. J. Wadsworth und P. St. J. Russell, Opt. Lett. **26**, 1376 (2001).

3) Referenz [Zim04]

Optical clockwork with an offset-free difference-frequency comb: accuracy of sum- and difference-frequency generation

M. Zimmermann, Ch. Gohle, R. Holzwarth, Th. Udem und T. W. Hänsch, Opt. Lett. **29**, 310 (2004).

4) Referenz [Fis04a]

New Limits on the Drift of Fundamental Constants from Laboratory Measurements

M. Fischer, N. Kolachevsky, M. Zimmermann, R. Holzwarth, Th. Udem, T. W. Hänsch, M. Abgrall, J. Grünert, I. Maksimovic, S. Bize, H. Marion, F. Pereira Dos Santos, P. Lemonde, G. Santarelli, P. Laurent, A. Clairon, C. Salomon, M. Haas, U. D. Jentschura und C. H. Keitel, Phys. Rev. Lett. **92**, 230802 (2004).

5) bei *Laser Physics* zur Veröffentlichung eingereicht:

High Resolution Laser Spectroscopy and Time Variation of Fundamental Constants

M. Zimmermann, M. Fischer, N. Kolachevsky, R. Holzwarth, Th. Udem, T.W. Hänsch, M. Abgrall, J. Grünert, I. Maksimovic, S. Bize, H. Marion, F. Pereira Dos Santos, P. Lemonde, G. Santarelli, P. Laurent, A. Clairon und C. Salomon.

Auf den folgenden Seiten sind die beiden Veröffentlichungen zur Genauigkeit nichtlinearer Prozesse (Referenz [Zim04]) und zur zeitlichen Veränderung fundamentaler Naturkonstanten (Referenz [Fis04a]) abgedruckt.

Optical clockwork with an offset-free difference-frequency comb: accuracy of sum- and difference-frequency generation

Marcus Zimmermann, Christoph Gohle, Ronald Holzwarth, Thomas Udem, and Theodor W. Hänsch

Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Hans-Kopfermann-Strasse 1, D-85748 Garching, Germany

Received July 29, 2003

We demonstrate a simple optical clockwork mechanism based on the broadened frequency comb of a femtosecond laser and on difference-frequency generation (DFG) in a nonlinear crystal. The DFG comb possesses a vanishing carrier envelope offset frequency that permits the construction of a simple and thus potentially more stable optical clockwork. In addition it offers the possibility of extending the frequency comb into the infrared spectral region. The overall accuracy and stability of the DFG comb relative to the initial frequency comb were measured to be 6.6×10^{-21} and $10^{-18} \tau^{-1}$, respectively, where τ is the averaging time in seconds. Assuming that sum- and difference-frequency generation are independent processes, our measurements suggest a $< 10^{-20}$ accuracy for them. © 2004 Optical Society of America

OCIS codes: 120.3940, 140.4050, 190.2620.

The long-standing problem of how to convert optical oscillations to the radio-frequency (rf) domain has been conveniently solved by use of femtosecond (fs) laser frequency combs.^{1,2} Within 4 years this technique developed from a first demonstration³ to wide use as a laboratory tool that is already commercially available. With this technique at hand it is becoming possible to fabricate all-optical atomic clocks that take advantage of the high frequency of optical transitions.^{4,5} By slicing time into finer intervals, these clocks are expected to improve our ability to measure time with an increase in accuracy of as much as 3 orders of magnitude. Naturally, one has to investigate at what level the so-called clockwork is likely to limit the performance of future all-optical atomic clocks.

In the frequency domain the pulse train emitted by an ideal mode-locked fs laser consists of a comb of modes f_n whose frequencies obey the equation $f_n = nf_{\text{rep}} + f_{\text{ceo}}$.⁶ Here f_{rep} is the pulse repetition frequency and $f_{\text{ceo}} < f_{\text{rep}}$ is the so-called carrier envelope offset frequency that shifts the comb as a whole from the exact harmonics of f_{rep} . The large integer $n \approx 10^5$ – 10^6 allows for a phase-coherent downconversion of optical frequencies f_n of some 100 THz into the rf domain where f_{rep} and f_{ceo} reside. The radio frequencies can then be counted and conveniently distributed. If the spectrum of the frequency spans at least one optical octave, f_{ceo} is readily determined by frequency doubling of a group of modes f_n at the red side and creation of a beat note with a second group of modes f_{2n} at the blue side of the comb: $2f_n - f_{2n} = f_{\text{ceo}}$.^{1,2} The broad spectrum, which is necessary for this technique, is either directly emitted from the fs laser⁷ or externally broadened in a nonlinear medium such as a photonic crystal fiber (PCF).^{9,10} One can control the carrier envelope offset frequency f_{ceo} either by tilting the mirror at the dispersive end of a prism-controlled fs laser³ or by tuning the power of the pump laser.^{2,11} By comparison of two fs frequency comb generators the accuracy of the fs approach was found to be at least 4×10^{-17} .^{2,12}

To operate the optical clockwork⁴ one may lock the mode f_n of the frequency comb to an optical reference frequency f_{orf} with the help of a phase-locked loop¹³

that forces the two frequencies to oscillate in phase. Phase locking f_{ceo} to a fraction $1/m$ of f_{rep} by use of an electronic prescaler causes the extracted repetition rate $f_{\text{rep}} = f_{\text{orf}}/(n + 1/m)$ to become a known fraction of f_{orf} . To simplify such clockwork one can use an offset-free frequency comb, where all the modes are exact multiples of f_{rep} . Then only one loop will be necessary to phase lock mode f_n to f_{orf} , which will lead to $f_{\text{rep}} = f_{\text{orf}}/n$. An offset-free frequency comb can be made with difference-frequency generation (DFG) in a nonlinear crystal.^{13,15} Subtracting two groups of modes of the same comb from each other leads to a new frequency comb with vanishing f_{ceo} :

$$\begin{aligned} f_{n1} - f_{n2} &= (n_1 f_{\text{rep}} + f_{\text{ceo}}) - (n_2 f_{\text{rep}} + f_{\text{ceo}}) \\ &= (n_1 - n_2) f_{\text{rep}} \quad (n_1 > n_2 \text{ integers}). \end{aligned} \quad (1)$$

As f_{ceo} cancels, the cavity length and the pump power may be used to lock the DFG comb, adding some extra bandwidth when needed. In addition, a DFG comb gives an opportunity to extend the frequency comb to the infrared spectral range.^{15,17} This opens the field for direct frequency measurements of He–Ne lasers at $3.4 \mu\text{m}$ or of CO₂ lasers at $10.6 \mu\text{m}$. It is also possible to generate a fixed grid of telecommunication wavelengths near 1.3 or $1.5 \mu\text{m}$ simply by stabilizing the repetition rate of a mode-locked laser. Note that the resultant comb lines are exact multiples of the pulse repetition rate $f_n = n f_{\text{rep}}$, which enables optical frequency measurements to be made without measuring or controlling f_{ceo} .

Our experimental setup, as shown in Fig. 1, uses a fs Ti:sapphire ring laser (GigaOptics, Model GigaJet) pumped by a frequency-doubled Nd:YVO₄ laser (Coherent, Model Verdi). This laser is operated with a repetition rate of 750 MHz and an average output power of 600 mW and has a specified pulse duration shorter than 25 fs. Focusing the laser beam into a 5–30-cm-long PCF with a $1.6\text{-}\mu\text{m}$ core diameter leads to an octave-spanning frequency comb ranging from 1049 to 439 nm (–20 dB). The initial frequency comb $f_n = n f_{\text{rep}} + f_{\text{ceo}}$ from the Ti:sapphire ring laser and the PCF is used to create two additional frequency

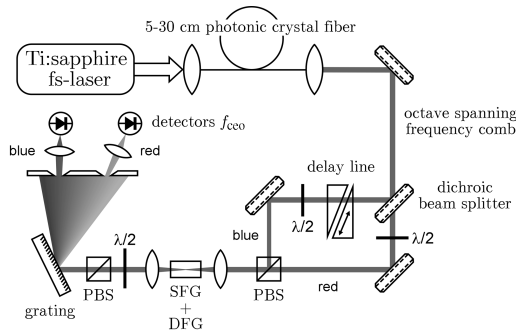


Fig. 1. Experimental setup. The fs laser and the PCF generate a frequency comb including radiation from 946 to 473 nm. Blue comb lines near 473 nm and red comb lines near 946 nm are focused in a nonlinear crystal. Two processes are phase matched: SFG (946 nm + 946 nm) leads to a blue comb near 473 nm with offset frequency $2f_{\text{ceo}}$, and DFG (473 nm - 946 nm) leads to an offset-free red comb near 946 nm. Both newly generated combs are expected to produce beat signals at f_{ceo} with the initial comb. PBS, polarizing beam splitter.

combs by sum-frequency generation (SFG) and DFG in a 5-mm-long KNbO₃ crystal. Whereas the SFG comb has a doubled offset frequency, the DFG comb has a zero offset. Each comb produces a beat note of f_{ceo} with the initial frequency comb. The generated wavelengths, together with the resultant comb equations, are summarized in Table 1. The center wavelength of the DFG comb was chosen to be 946 nm to facilitate a comparison with the initial frequency comb and for simplicity of the experimental setup. In general, any wavelength longer than 946 nm could have been chosen. For typical parameters of our experiment we estimate the power per mode of the DFG comb to be of the order of 100 nW.

To test the integrity of the DFG comb we phase locked the beat note near 473 nm between the SFG

comb and the initial frequency comb (blue beat) to a 64-MHz local oscillator by controlling the pump power with an electro-optic modulator and a polarizing beam splitter. Then we counted the beat note near 946 nm between the DFG comb and the initial comb (red beat), which is expected to return the local oscillator frequency of 64 MHz. Possible small differences between SFG and DFG could lead to a different result.

To check the integrity of the counted red beat note we created two copies of that signal by rf mixing at 5 and 9 MHz. The 5-MHz beat was used for the data evaluation and the 9- and 64-MHz beats were used for cross checking for possible counter errors.³ We used Hewlett-Packard (Models 53131A and 53132A) counters that show a smaller systematic uncertainty for lower input frequencies and larger gate times. To validate a 5-MHz counter reading we required that it be consistent within 0.1 Hz with the 9- and the 64-MHz signals for a gate time of 1 s. For longer gate times we reduced this threshold accordingly.

All synthesizers and counters were referenced to our local Cs clock (Hewlett-Packard, Model 5071A) while f_{rep} remained unlocked during the measurements. The results of the frequency measurements are summarized in Table 2. The stated systematic uncertainty is the specified worst-case systematic uncertainty of the HP 53132A counter. We calculated a mean deviation of $0.21 \pm 2.1 \mu\text{Hz}$ from 64 MHz weighted by the respective combined uncertainty of Table 2. If this result is normalized to the optical frequency of the DFG comb at 946 nm (317 THz) one can conclude that the modes of the DFG comb differ by less than 6.6×10^{-21} from their expected frequency as measured by the initial frequency comb. As the total uncertainty is dominated by the systematic effects of the counter, it seems possible that this result can be improved by use of a measurement system with a lower systematic uncertainty.

The precision of this measurement reflects the fact that nearly all possible changes in the optical

Table 1. Wavelengths of the SFG and the DFG Processes and Resultant Comb Equations^a

	Initial Frequency Comb	SFG Comb	DFG Comb
Spectral range (nm)	946–473	473	946
Nonlinear process (nm)		946 + 946 → 473	473 - 946 → 946
Comb equation	$f_{n_i} = n_i f_{\text{rep}} + f_{\text{ceo}}$	$f_{n_s} = n_s f_{\text{rep}} + 2f_{\text{ceo}}$	$f_{n_d} = n_d f_{\text{rep}}$

^a n_i , n_s , and n_d are the integer mode numbers of the initial frequency comb and of the SFG and the DFG combs, respectively. f_{rep} denotes the pulse repetition rate; f_{ceo} , the carrier envelope offset frequency of the initial frequency comb.

Table 2. Results of the Frequency Measurements^a

Counter Gate Time (s)	Mean Deviation from 64 MHz (μHz)	Systematic Uncertainty (μHz)	Combined Uncertainty (μHz)	Number of Valid Data Points
1	+360 ± 290	500	580	1871
3	+22 ± 73	170	190	1728
10	-4.2 ± 6.6	50	50	1012
30	+4.1 ± 6.2	17	18	198
100	+8.4 ± 2.6	5	5.6	51
300	+1.6 ± 1.6	1.7	2.3	13

^aThe beat of the SFG comb near 473 nm with the initial frequency comb was phase locked to 64 MHz, whereas the beat of the DFG comb near 946 nm with the initial comb was analyzed with a counter, as listed in column 2.

path lengths (owing to changes in the temperature, etc.) that could lead to small frequency deviations are compensated for by the phase-locked loop. This is so because the DFG and SFG combs are created within the same crystal; the same is true for a possible temperature-dependent dispersion of the PCF. A change in the path-length difference from the crystal to the two detectors is not compensated for by the phase-locked loop but can be neglected because of the long wavelength of the rf beat notes. The crystal temperature was stabilized, because the relative phases of the two beat notes varied by up to 5.4×10^{-3} cycles/K. This effect was not reproducible and changed in magnitude and sign.

We measured the stability of the red beat relative to the blue beat by recording their relative phase. To do this we frequency divided both beat notes by 4 and fed the results to an XOR gate phase detector.¹⁸ The Allan variance normalized to the optical frequency of the DFG comb (317 THz) was below 10^{-18} for 1-s averaging and reduced proportionally to $1/\tau$ for longer gate times τ , as expected for phase coherent signals subject to white phase noise. The measured Allan variance reflected possible noise sources connected with SFG and DFG and with the measurement system itself. As we did not measure or control the optical power, which was directed to the photodiodes, it is likely that our measurement system was limited by power-dependent phase shifts of the photodiodes and the rf circuits. This leaves open the possibility that the Allan variance associated with SFG and DFG is less than 10^{-18} s/ τ .

With the assumption that SFG and DFG are independent processes, the frequency comparison of the DFG comb relative to the initial frequency comb can be interpreted as a test of the accuracy of the processes of SFG and DFG. Following Ref. , one can introduce deviation functions $\delta_{\text{SFG,DFG}}$, which model possible deviations of SFG and DFG from their expected values:

$$f_{\text{SFG}}(f_1, f_2) = f_1 + f_2 + \delta_{\text{SFG}}(f_1, f_2), \quad (2)$$

$$f_{\text{DFG}}(f_1, f_2) = f_1 - f_2 + \delta_{\text{DFG}}(f_1, f_2), \quad f_1 > f_2. \quad (3)$$

Here f_1 and f_2 are frequencies that correspond to 946 nm for the SFG, whereas f_1 and f_2 correspond to 473 and 946 nm, respectively, for DFG. Unlike frequencies f_1 and f_2 , which may vary, δ_{SFG} and δ_{DFG} are assumed to be constant within the phase-matching bandwidth. Accordingly, the beat notes of the SFG and the DFG combs with the initial comb would not yield f_{ceo} exactly but rather

$$(2nf_{\text{rep}} + 2f_{\text{ceo}} + \delta_{\text{SFG}}) - (2nf_{\text{rep}} + f_{\text{ceo}}) = f_{\text{ceo}} + \delta_{\text{SFG}}, \quad (4)$$

$$(nf_{\text{rep}} + f_{\text{ceo}}) - (nf_{\text{rep}} + \delta_{\text{DFG}}) = f_{\text{ceo}} - \delta_{\text{DFG}}. \quad (5)$$

By phase locking Eq. (4) to 64 MHz and counting Eq. (5) we obtain

$$\delta_{\text{SFG}} + \delta_{\text{DFG}} = 0.21 \pm 2.1 \mu\text{Hz}. \quad (6)$$

Assuming independence of SFG and DFG leads to the conclusion that both nonlinear processes operate with an accuracy of at least 6.6×10^{-21} . This result is a 100-fold improvement compared with the results reported in Ref. . In addition, the authors believe that the assumption that SFG and DFG are independent is not so strong as the assumptions used in Ref. , where two SFGs at the same wavelength were compared.

The authors thank J. Knight, W. Wadsworth, and P. St. J. Russell of the University of Bath, Bath, UK, for providing us with the PCF. M. Zimmermann's e-mail address is marcus.zimmermann@mpq.mpg.de.

References

1. S. A. Diddams, D. J. Jones, J. Ye, S. T. Cundiff, J. L. Hall, J. K. Ranka, R. S. Windeler, R. Holzwarth, Th. Udem, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5102 (2000).
2. R. Holzwarth, Th. Udem, T. W. Hänsch, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, and P. St. J. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2264 (2000).
3. J. Reichert, M. Niering, R. Holzwarth, M. Weitz, Th. Udem, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3232 (2000).
4. S. A. Diddams, Th. Udem, J. C. Bergquist, E. A. Curtis, R. E. Drullinger, L. Hollberg, W. M. Itano, W. D. Lee, C. W. Oates, K. R. Vogel, and D. J. Wineland, *Science* **293**, 825 (2001).
5. J. Stenger, Ch. Tamm, N. Haverkamp, S. Weyers, and H. R. Telle, *Opt. Lett.* **26**, 1589 (2001).
6. J. Reichert, R. Holzwarth, Th. Udem, and T. W. Hänsch, *Opt. Commun.* **172**, 59 (1999).
7. T. M. Fortier, D. J. Jones, and S. T. Cundiff, *Opt. Lett.* **28**, 2198 (2003).
8. J. C. Knight, T. A. Birks, P. St. J. Russell, and D. M. Atkin, *Opt. Lett.* **21**, 1547 (1996).
9. J. K. Ranka, R. S. Windeler, and A. J. Stentz, *Opt. Lett.* **25**, 25 (2000).
10. H. A. Haus and E. P. Ippen, *Opt. Lett.* **26**, 1654 (2001).
11. S. A. Diddams, L. Hollberg, L.-S. Ma, and L. Roberts, *Opt. Lett.* **27**, 58 (2002).
12. F. M. Gardner, *Phase Lock Techniques*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1979), pp. 1–24.
13. A. Baltuška, T. Fuji, and T. Kobayashi, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 133901 (2002).
14. F. Tauser, A. Leitenstorfer, and W. Zinth, *Opt. Express* **11**, 594 (2003), <http://www.opticsexpress.org>.
15. Th. Udem, R. Holzwarth, M. Zimmermann, and T. W. Hänsch, in *Proceedings of the Sixth Symposium on Frequency Standards and Metrology*, P. Gill, ed. (World Scientific, Singapore, 2002), p. 125.
16. P. Horowitz and W. Hill, *The Art of Electronics*, 2nd ed. (Cambridge U. Press, Cambridge, 1989), p. 644.
17. R. Wynands, O. Coste, C. Rembe, and D. Meschede, *Opt. Lett.* **20**, 1095 (1995).
18. J. Stenger, H. Schnatz, C. Tamm, and H. R. Telle, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 073601 (2002).

New Limits on the Drift of Fundamental Constants from Laboratory Measurements

M. Fischer, N. Kolachevsky,* M. Zimmermann, R. Holzwarth, Th. Udem, and T.W. Hänsch[†]
Max-Planck-Institut für Quantenoptik (MPQ), Hans-Kopfermann-Straße 1, 85748 Garching, Germany

M. Abgrall,¹ J. Grünert,¹ I. Maksimovic,¹ S. Bize,¹ H. Marion,¹ F. Pereira Dos Santos,¹ P. Lemonde,¹ G. Santarelli,¹
 P. Laurent,¹ A. Clairon,¹ and C. Salomon²

¹*BNM-SYRTE, Observatoire de Paris, 61 Avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France*

²*Laboratoire Kastler Brossel, ENS, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France*

M. Haas, U. D. Jentschura, and C. H. Keitel

Max-Planck-Institut für Kernphysik, Saupfercheckweg 1, 69117 Heidelberg, Germany

(Received 3 December 2003; published 10 June 2004)

We have remeasured the absolute $1S-2S$ transition frequency ν_H in atomic hydrogen. A comparison with the result of the previous measurement performed in 1999 sets a limit of (-29 ± 57) Hz for the drift of ν_H with respect to the ground state hyperfine splitting ν_{Cs} in ^{133}Cs . Combining this result with the recently published optical transition frequency in $^{199}\text{Hg}^+$ against ν_{Cs} and a microwave ^{87}Rb and ^{133}Cs clock comparison, we deduce separate limits on $\dot{\alpha}/\alpha = (-0.9 \pm 2.9) \times 10^{-15} \text{ yr}^{-1}$ and the fractional time variation of the ratio of Rb and Cs nuclear magnetic moments $\mu_{\text{Rb}}/\mu_{\text{Cs}}$ equal to $(-0.5 \pm 1.7) \times 10^{-15} \text{ yr}^{-1}$. The latter provides information on the temporal behavior of the constant of strong interaction.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.230802

PACS numbers: 06.30.Ft, 06.20.Jr, 32.30.Jc

In the era of a rapid development of precision experimental methods, the stability of fundamental constants becomes a question of basic interest. Any drift of non-gravitational constants is forbidden in all metric theories of gravity including general relativity. The basis of these theories is Einstein's Equivalence Principle (EEP) which states that weight is proportional to mass, and that in any local freely falling reference frame, the result of any nongravitational experiment must be independent of time and space. This hypothesis can be proven only experimentally as no theory predicting the values of fundamental constants exists. In contrast to metric theories, string theory models aiming to unify quantum mechanics and gravitation allow for, or even predict, violations of EEP. Limits on the variation of fundamental constants might therefore provide important constraints on these new theoretical models.

A recent analysis of quasar absorption spectra with redshifted UV transition lines indicates a variation of the fine structure constant $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ on the level of $\Delta\alpha/\alpha = (-0.54 \pm 0.12) \times 10^{-5}$ for a redshift range $(0.2 < z < 3.7)$ [1]. On geological time scales, a limit for the drift of α has been deduced from isotope abundance ratios in the natural fission reactor of Oklo, Gabon, which operated about 2 Gyr ago. Modeling the processes which have changed the isotope ratios of heavy elements gives a limit of $\Delta\alpha/\alpha = (-0.36 \pm 1.44) \times 10^{-8}$ [2]. In these measurements, the high sensitivity to the time variation of α is achieved through very long observation times at moderate resolution for $\Delta\alpha$. Therefore, they are vulnerable to systematic effects [3].

Laboratory experiments can reach a 10^{-15} accuracy within years with better controlled systematics. This type of experiment is typically based on repeated absolute frequency measurements, i.e., comparison of a transition frequency with the reference frequency of the ground state hyperfine transition in ^{133}Cs . For an optical transition, the theoretical expression for the drift of its absolute frequency inevitably involves $\mu_{\text{Cs}}/\mu_{\text{B}}$ in addition to α , where μ_{Cs} is the magnetic moment of the Cs nucleus and μ_{B} is the Bohr magneton [4]. The microwave Rb and Cs clock comparison [5] even involves two nuclear moments. The magnitude of nuclear moments results from both the electromagnetic and the strong interaction.

Contributions from weak, electromagnetic, and strong interactions can be disentangled by combining several frequency measurements possessing a different sensitivity to the fundamental constants. In this Letter, we deduce separate stringent limits for the drifts of the fine structure constant α , $\mu_{\text{Cs}}/\mu_{\text{B}}$, and $\mu_{\text{Rb}}/\mu_{\text{Cs}}$ from combining the drifts of two optical frequencies in hydrogen and in the mercury ion with respect to the ground state hyperfine splitting in ^{133}Cs and the result of a microwave clock comparison [5]. Comparing measurements performed at different places and at different times we have to use the Lorentz and position invariance and we have to assume that the constants change linearly and do not oscillate on a year scale. With the exception of this, our results are independent of further assumptions about a particular drift model and possible correlated drifts of different constants [6].

The experiments on the drift of the $^{199}\text{Hg}^+ 5d^{10}6s^2S_{1/2}(F=0) \rightarrow 5d^96s^2D_{5/2}(F'=2)$ electric quadrupole ("clock") transition frequency ν_{Hg} were performed by the group of Bergquist at NIST between July 2000 and December 2002 [7]. These repeated measurements of ν_{Hg} limit the fractional time variation of the ratio $\nu_{\text{Cs}}/\nu_{\text{Hg}}$ to $(0.2 \pm 7) \times 10^{-15} \text{ yr}^{-1}$.

In 1999 [8] and 2003, we have phase coherently compared the frequency of the $(1S, F=1, m_F = \pm 1) \rightarrow (2S, F'=1, m'_F = \pm 1)$ two-photon transition in atomic hydrogen to the frequency of the ground state hyperfine splitting of ^{133}Cs using a frequency comb technique [9]. The 1999 setup of the hydrogen spectrometer has been described previously in [10], so we present only a brief description with an emphasis on the improvements since 1999. A sketch of the actual setup is shown in Fig. 1.

A cw dye laser emitting near 486 nm is locked to an external reference cavity. The new cavity for the 2003 measurement is more stable and drifts less than 0.5 Hz/s at 486 nm. The linewidth of the dye laser stabilized on the new cavity has been characterized as 60 Hz for an averaging time of 1 s. A small part of the laser light is transferred to a neighboring lab where its absolute frequency is measured. The main part is frequency doubled, and the resulting radiation near 243 nm (corresponding to half of the 1S-2S transition frequency) is coupled into a linear enhancement cavity inside the vacuum chamber of the hydrogen spectrometer.

Hydrogen atoms from a radio-frequency (rf) gas discharge are cooled to 5–6 K by collisions with the walls of

a copper nozzle. The nozzle forms a beam of cold atomic hydrogen which leaves the nozzle collinearly with the cavity axis and enters the interaction region between the nozzle and the detector shielded from stray electric fields by a Faraday cage. Some of the atoms are excited from the ground state to the metastable 2S state by Doppler-free absorption of two counterpropagating photons from the laser field in the enhancement cavity. The 1999 measurement was performed at a background gas pressure of around 10^{-6} mbar in the interaction region. In the meantime, we upgraded the vacuum system with a differential pumping configuration. This allows us to vary the background gas pressure in a range of 10^{-8} – 10^{-7} mbar and to reduce the background gas pressure shift and the corresponding uncertainty to 2 Hz.

Because of small apertures, only atoms flying close to the cavity axis can enter the detection region where the 2S atoms are quenched in a small electric field and emit L_α photons. The excitation light and the hydrogen beam are periodically blocked by two mutually phase locked choppers, and the L_α photons are counted time-resolved only in the dark part of a cycle. The delay τ between blocking the 243 nm radiation and the start of photon counting sets the upper limit for the atomic velocity of $v < l/\tau$, where l is the distance between nozzle and detector. With the help of a multichannel scaler, we count all photons and sort them into 12 adjacent time bins. From each scan of the laser frequency over the hydrogen 1S-2S resonance we therefore get up to 12 spectra measured with different delays. To correct for the second order Doppler shift, we use an elaborate theoretical model to fit all the delayed spectra of one scan simultaneously with a set of seven fit parameters [10]. The result of the fitting procedure is the 1S-2S transition frequency for a hydrogen atom at rest.

The transition frequency depends linearly on the excitation light intensity due to the dynamic ac-Stark shift. We vary the intensity and extrapolate the transition frequency to zero intensity to correct for this effect [8].

For an absolute measurement of the 1S-2S transition frequency, the dye laser frequency near 616.5 THz is phase coherently compared with an atomic cesium fountain clock. We take advantage of the frequency comb technique recently developed in Garching and Boulder [9] to bridge the large gap between the optical and radio-frequency domains. A mode-locked femtosecond (fs) laser emits a pulse train which equals a comb of laser modes in the frequency domain. The mode spacing corresponds to the repetition rate frequency f_{rep} of the fs laser, and the frequency of each mode can be written as $f_n = nf_{\text{rep}} + f_0$, where n is a large integer number and $f_0 < f_{\text{rep}}$ is the comb offset frequency. The repetition rate f_{rep} can easily be detected with a photodiode. For combs spanning more than one octave, f_0 can be determined by frequency doubling an infrared mode f_n in a nonlinear crystal to $2f_n$ and measuring the beat note with the appropriate

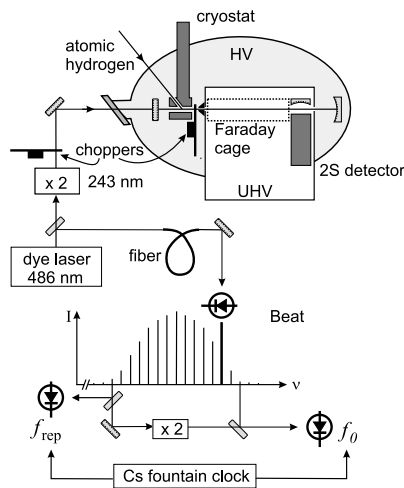


FIG. 1. Simplified experimental setup for comparison of the hydrogen 1S-2S transition frequency with a primary frequency standard (HV, high vacuum; UHV, ultrahigh vacuum). A mode-locked femtosecond laser with repetition rate f_{rep} emits the frequency comb which is broadened in a photonic crystal fiber. f_0 is the carrier-envelope offset frequency.

mode f_{2n} of the blue part of the comb, yielding $f_0 = 2f_n - f_{2n}$.

In our experiment, the frequency comb from a mode-locked fs Ti:sapphire laser with a repetition rate f_{rep} of 800 MHz is broadened in a photonic crystal fiber to cover more than an optical octave. We phase lock both degrees of freedom of the comb (f_{rep} , f_0) to the radio-frequency output of the Cs fountain clock to get a frequency comb with optical modes whose frequencies are known with the accuracy of the primary frequency standard. Any of these modes are available for optical measurements.

For both the 1999 and 2003 measurements, the transportable Cs fountain clock FOM has been installed at MPQ. Its stability is $1.8 \times 10^{-13} \tau_{\text{ave}}^{-1/2}$ for an averaging time of τ_{ave} , and its accuracy has been evaluated to 8×10^{-16} [11] at BNM-SYRTE. During the experiments in Garching, only a verification at the level of 10^{-15} has been performed. Consequently we attribute a conservative FOM accuracy of 2×10^{-15} for these measurements.

We have measured the 1S-2S transition in atomic hydrogen during 10 d in 1999 and during 12 d in 2003. For comparability, both data sets have been analyzed using the same theoretical line-shape model [10]. In Fig. 2, the results of the extrapolation to zero excitation light intensity and the respective statistical error bars for each day are presented. The statistical uncertainty was significantly reduced compared to the 1999 measurements due to the narrower laser linewidth and a better signal-to-noise ratio, but the scatter of the day averages did not reduce accordingly. We ascribe this effect to a residual uncompensated first-order Doppler shift. Later measurements performed without the fountain clock with a deliberately introduced asymmetry in the 243 nm cavity indicate an adjustment-dependent frequency shift (the elimination of this additional systematic shift should be of high concern in future measurements). The effect should average out after multiple readjustments of the spectrometer which have been typically performed twice a day. It is impossible to correct the data *a posteriori* because such details of the spectrometer adjustment were not recorded during the phase-coherent measurement.

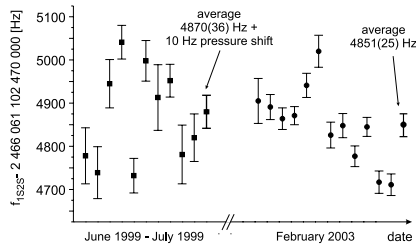


FIG. 2. Experimental results and averages for the 1999 and 2003 measurements of the absolute ($1S, F = 1, m_F = \pm 1$) \rightarrow ($2S, F' = 1, m_{F'} = \pm 1$) transition frequency in atomic hydrogen. The background pressure shift of +10 Hz as explained in [8] is added to the 1999 value.

230802-3

Other effects which can cause the systematic shift (intra-beam pressure shift, background gas pressure shift, Stark shift of the hyperfine levels induced by the rf gas discharge, stray electric fields) have been checked and can be excluded on the level of the observed scatter.

The 1999 and 2003 d -dependent data were averaged without weighting [12]. After accounting for the total systematic uncertainties of 28 Hz (1999) and 23 Hz (2003) in the mutually equivalent evaluation processes of both measurements we deduce a difference equal to (-29 ± 57) Hz over a time interval of 44 months. This is equivalent to a fractional time variation of the ratio $\nu_{\text{Cs}}/\nu_{\text{H}}$ equal to $(3.2 \pm 6.3) \times 10^{-15} \text{ yr}^{-1}$.

The frequency of any optical transition can be written as $\nu = A \text{Ry} F_{\text{rel}}(\alpha)$ [4,13], where Ry is the Rydberg energy and the relativistic correction $F_{\text{rel}}(\alpha)$ takes into account relativistic and many-body effects. F_{rel} depends on the transition in the system considered and embodies the dependence on α , while the parameter A is independent of fundamental constants. For absolute frequency measurements Ry always cancels out.

Numerical calculations of the dependence of $F_{\text{rel,Hg}}(\alpha)$ for ν_{Hg} on the fine structure constant α yield [13]

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{\text{rel,Hg}}(\alpha) \approx \frac{\alpha}{\Delta \alpha} \frac{\Delta F_{\text{rel}}}{F_{\text{rel}}} = -3.2. \quad (1)$$

The corresponding expression for ν_{H} gives a very weak dependence on α :

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{\text{rel,H}}(\alpha) \approx 0. \quad (2)$$

The frequency of the ground state hyperfine transition in ^{133}Cs is given by

$$\nu_{\text{Cs}} = A' \text{Ry} \alpha^2 \frac{\mu_{\text{Cs}}}{\mu_{\text{B}}} F_{\text{rel,Cs}}(\alpha). \quad (3)$$

Following [13], the relativistic correction $F_{\text{rel,Cs}}(\alpha)$ is

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln F_{\text{rel,Cs}}(\alpha) \approx +0.8. \quad (4)$$

Therefore, the comparison of the clock transition in Hg^+ against a primary frequency standard tests a drift of [7]

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\nu_{\text{Cs}}}{\nu_{\text{Hg}}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{\mu_{\text{Cs}}}{\mu_{\text{B}}} + (2.0 + 0.8 + 3.2) \ln \alpha \right), \quad (5)$$

whereas the 1S-2S experiment tests the drift of

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\nu_{\text{Cs}}}{\nu_{\text{H}}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{\mu_{\text{Cs}}}{\mu_{\text{B}}} + (2.0 + 0.8) \ln \alpha \right). \quad (6)$$

For clarity, we set $x \equiv (\partial/\partial t) \ln \alpha$, $y \equiv (\partial/\partial t) \times \ln(\mu_{\text{Cs}}/\mu_{\text{B}})$ and get as experimental constraints

$$y + 6x = (0.2 \pm 7) \times 10^{-15} \text{ yr}^{-1} (\text{Hg}^+), \quad (7a)$$

$$y + 2.8x = (3.2 \pm 6.3) \times 10^{-15} \text{ yr}^{-1} (\text{H}). \quad (7b)$$

Solving for x and y yields the separate restrictions for the drifts of α and $\mu_{\text{Cs}}/\mu_{\text{B}}$ without any assumptions of conceivable mutual correlations (see, e.g., [6]). In this

230802-3

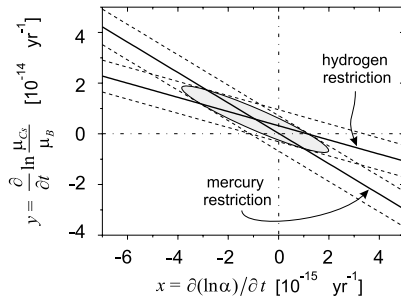


FIG. 3. Possible values for the relative drift rates x and y and their experimental restrictions (dashed lines) as stated by Eqs. (7). The probability density for x and y to be the true values is given by $P(\Delta x, \Delta y) \propto \exp[-R(\Delta x, \Delta y)/2]$ with the distances from the crossing point Δx and Δy and $R(\Delta x, \Delta y) = (\Delta y + 6\Delta x)^2/\sigma_{\text{Hg}}^2 + (\Delta y + 2.8\Delta x)^2/\sigma_{\text{H}}^2$. The resulting elliptical uncertainty region, defined by $R(\Delta x, \Delta y) = 1$, gives the standard deviation when projected on either axis by integration over the other. The uncertainties of the measured values are $\sigma_{\text{H}} = 6.3 \times 10^{-15} \text{ yr}^{-1}$ and $\sigma_{\text{Hg}} = 7 \times 10^{-15} \text{ yr}^{-1}$.

sense, this evaluation is model independent. Figure 3 represents both equations and their solution graphically.

For the relative drift of the fine structure constant at the end of the second millennium, we deduce the limit of

$$x = \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha = (-0.9 \pm 2.9) \times 10^{-15} \text{ yr}^{-1}. \quad (8)$$

The limit on the relative drift of $\mu_{\text{Cs}}/\mu_{\text{B}}$ is

$$y = \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{\text{Cs}}}{\mu_{\text{B}}} = (0.6 \pm 1.3) \times 10^{-14} \text{ yr}^{-1}. \quad (9)$$

We deduce the uncertainties in expressions (8) and (9) as projections of the ellipse (Fig. 3) on the corresponding axes. This is equivalent to performing Gaussian propagation of uncertainties when resolving Eqs. (7) for x and y . Here, the measurement results for Hg^+ and H are treated as uncorrelated even though the drift rates x and y may be correlated [6]. The given 1σ uncertainties for x and y in Eqs. (8) and (9) incorporate both the statistical and systematic uncertainties of the hydrogen and the mercury measurements. Both limits (8) and (9) are consistent with zero. Meanwhile Peik and co-workers have added a precise drift measurement on a single trapped Yb ion to push the overall limit even further [14].

These results allow us to deduce a restriction for the relative drift of the nuclear magnetic moments in ^{87}Rb and ^{133}Cs . From 1998 to 2003, the drift of the ratio of the ground state hyperfine frequencies in ^{87}Rb and ^{133}Cs has been measured to be [5]

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\nu_{\text{Rb}}}{\nu_{\text{Cs}}} = (0.2 \pm 7.0) \times 10^{-16} \text{ yr}^{-1}. \quad (10)$$

Substituting the corresponding dependencies $F_{\text{rel}}(\alpha)$ for these transitions [5,13] yields

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\nu_{\text{Rb}}}{\nu_{\text{Cs}}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{\mu_{\text{Rb}}}{\mu_{\text{Cs}}} - 0.53 \ln \alpha \right). \quad (11)$$

Combining (8), (10), and (11) we get

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\mu_{\text{Rb}}}{\mu_{\text{Cs}}} = (-0.5 \pm 1.7) \times 10^{-15} \text{ yr}^{-1}, \quad (12)$$

where the same procedure as in Fig. 3 was used with a diagram covering x and $z \equiv (\partial/\partial t) \ln(\mu_{\text{Rb}}/\mu_{\text{Cs}})$.

In conclusion, we have determined separate limits for the drift of α , $\mu_{\text{Cs}}/\mu_{\text{B}}$ and $\mu_{\text{Rb}}/\mu_{\text{Cs}}$ from laboratory experiments without assumptions of conceivable correlations among them. All these limits are consistent with zero. Quasar absorption spectra measured with the Keck/HIRES spectrograph show a significant deviation between the values of α today and 10 Gyr ago [1]. A corresponding linear drift of α is smaller than the uncertainty of our result, therefore it cannot be excluded.

We thank S. G. Karshenboim for fruitful discussions of this work. N. K. acknowledges support from the AvH Stiftung. The work was partly supported by DFG (Grant No. 436RUS113/769/0-1) and RFBR. The development of the FOM fountain was supported by Centre National d'études spatiales and Bureau National de Métrologie.

*Also at P. N. Lebedev Physics Institute, Moscow, Russia.

†Also at Ludwig-Maximilians-University, Munich, Germany.

- [1] M. T. Murphy, J. K. Webb, and V. V. Flambaum, astro-ph/0306483; see also J. K. Webb *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 091301 (2001).
- [2] Y. Fujii *et al.*, Nucl. Phys. **B573**, 377 (2000).
- [3] J.-P. Uzan, Rev. Mod. Phys. **75**, 403 (2003).
- [4] S. G. Karshenboim, Can. J. Phys. **78**, 639 (2000); see also physics/0306180.
- [5] H. Marion *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 150801 (2003).
- [6] X. Calmet and H. Fritzsche, Eur. Phys. J. C **24**, 639 (2002).
- [7] S. Bize *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 150802 (2003).
- [8] M. Niering *et al.*, Phys. Rev. Lett. **84**, 5496 (2000).
- [9] Th. Udem, R. Holzwarth, and T. W. Hänsch, Nature (London) **416**, 233 (2002).
- [10] A. Huber *et al.*, Phys. Rev. A **59**, 1844 (1999).
- [11] M. Abgrall, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, 2003.
- [12] The result presented in [8] was inadvertently described as "the weighted mean value" but was calculated without consideration of day-averaged uncertainties.
- [13] V. A. Dzuba, V. V. Flambaum, and J. K. Webb, Phys. Rev. A **59**, 230 (1999); V. V. Flambaum, physics/0302015.
- [14] E. Peik *et al.*, physics/0402132 (to be published).

Literaturverzeichnis

- [Abe62] I. Abella, Proc. IRE **50**, 1824 (1962).
- [Abg03] M. Abgrall, Thèse de doctorat de l'université Paris VI (2003).
- [Abg04] M. Abgrall, private Mitteilung 2004.
- [Agilent] Agilent application note AN 1289, *The Science of Timekeeping*.
- [Ago79] P. Agostini, F. Fabre, G. Mainfray und G. Petite, Phys. Rev. Lett. **42**, 1127 (1979).
- [Amo02] M. Amoretti *et al.*, ATHENA-Kollaboration, Nature **419**, 456 (2002).
- [And04] A. André, A.S. Sørensen und M.D. Lukin, Phys. Rev. Lett. **92**, 230801 (2004).
- [Avi86] G. Avila, P. Gain, E. de Clercq und P. Cerez, Metrologia **22**, 111 (1986).
- [Bag97] S.N. Bagayev, A.K. Dmitriyev und P.V. Pokasov, Laser Physics **7**, 989 (1997).
- [Bah04] J. Bahcall, C. Steinhardt und D. Schlegel, The Astrophysical Journal **600**, 520 (2004).
- [Bal02a] A. Baltuška, T. Fuji und T. Kobayashi, Phys. Rev. Lett. **88**, 133901 (2002).
- [Bal02b] A. Baltuška, T. Fuji und T. Kobayashi, Opt. Lett. **27**, 1241 (2002).
- [Bal03] A. Baltuška, Th. Udem, M. Uiberacker, M. Hentschel, E. Goulielmakis, Ch. Gohle, R. Holzwarth, V. Yakovlev, A. Scrinzi, T.W. Hänsch und F. Krausz, Nature **421**, 611 (2003).
- [Bar71] J. A. Barnes, A. R. Chi, L. S. Cutler, D. J. Healey, D. B. Leeson, T. E. McGunigal, J. A. Mullen Jr, W. L. Smith, R. L. Sydnor, R. F. C. Vessot und G. M. R. Winkler, IEEE Trans. Instrum. Meas. **20**, 105 (1971). Die darin definierte, aber nicht so genannte, Größe $\sigma_y(\tau)$ ist die Allan-Varianz der Größe y .

- [Bar99] A. Bartels, T. Dekorsy und H. Kurz, *Opt. Lett.* **24**, 996 (1999).
- [Bar02] A. Bartels und H. Kunz, *Opt. Lett.* **27**, 1839 (2002).
- [Bau03] A. Bauch, *Meas. Sci. Technol.* **14**, 1159 (2003).
- [Bea86] R. G. Beausoleil, Dissertation, Stanford-University USA (1986).
- [Bec01] Th. Becker, J. v. Zanthier, A. Yu. Nevsky, Ch. Schwedes, M. N. Skvortsov, H. Walther und E. Peik, *Phys. Rev. A* **63**, 051802(R) (2001).
- [Ben02] G. W. Bennett *et al.*, Myon ($g-2$) Kollaboration, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 101804 (2002).
- [Ber99] J. E. Bernard, A. A. Madej, L. Marmet, B. G. Whitford, K. J. Siemsen und S. Cundy, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3228 (1999).
- [Bet77] H. A. Bethe und E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms*, Plenum, New York (1977).
- [Bir01] F. Biraben, T. W. Hänsch, M. Fischer, M. Niering, R. Holzwarth, J. Reichert, Th. Udem, M. Weitz, B. de Beauvoir, C. Schwob, L. Jozefowski, L. Hilico, F. Nez, L. Julien, O. Acef, J.-J. Zondy und A. Clairon, in *The Hydrogen atom: Precision physics of simple atomic systems*. Herausgeber S. G. Karshenboim *et al.* (Springer, Berlin, Heidelberg), 18-41, (2001).
- [Biz03] S. Bize, S. A. Diddams, U. Tanaka, C. E. Tanner, W. H. Oskay, R. E. Drullinger, T. E. Parker, T. P. Heavner, S. R. Jefferts, L. Hollberg, W. M. Itano und J. C. Bergquist, *Phys. Rev. Lett* **90**, 150802 (2003).
- [Bol96] J. J. Bollinger, W. M. Itano, D. J. Wineland und D. J. Heinzen, *Phys. Rev. Lett.* **54**, R4649 (1996).
- [Bör05] G. Börner, *Physik Journal* **4**, Nr. 2, 21 (2005).
- [Bor97] Ch. J. Bordé, private Mitteilung 1997.
- [Boy62] H. Boyne und W. Martin, *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 880 (1962).
- [Boy92] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, San Diego (1992).
- [Bro94] L. R. Brothers, D. Lee und N. C. Wong, *Opt. Lett.* **19**, 245 (1994).
- [BS] L. Bergmann und C. Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Bd. 3 Optik, Walter de Gruyter, Berlin.

- [Bur01] H. Burkhardt und B. Pietrzyk, Phys. Lett. B **513** 46 (2001).
- [Cag73] B. Cagnac, G. Grynberg und F. Biraben, Jour. Phys. (Paris) **34**, 845 (1973).
- [Cal02a] X. Calmet und H. Fritzsche, Eur. Phys. J. C **24**, 639 (2002).
- [Cal02b] X. Calmet und H. Fritzsche, Phys. Lett. B **540**, 173 (2002).
- [Cha97] Z. Chang, A. Rundquist, H. Wang, M. Murnane und H. Kapteyn, Phys. Rev. Lett. **79**, 2967 (1997).
- [Cha00] S. Chang, A. Mann und A. Luiten, Electron. Lett. **36**, 480 (2000.)
- [Chr97] I. P. Christov, M. M. Murnane und H. C. Kapteyn, Phys. Rev. Lett. **78**, 1251 (1997).
- [Coe02] S. Coen, A. H. L. Chau, R. Leonhardt, J. D. Harvey, J. C. Knight, W. J. Wadsworth und P. St. J. Russell, J. Opt. Soc. Am. B **19**, 753 (2002).
- [Dam94] T. Damour und A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B **423**, 532 (1994).
- [Dam96] T. Damour und F. Dyson, Nucl. Phys. B **480**, 37 (1996).
- [Dam03] T. Damour, Astrophysics and Space Science **283**, 445 (2003).
- [Den03] T. Dent und M. Fairbairn, Nucl. Phys. B **653**, 256 (2003).
- [Did00] S. A. Diddams, D. J. Jones, J. Ye, S. T. Cundiff, J. L. Hall, J. K. Ranka, R. S. Windeler, R. Holzwarth, Th. Udem und T. W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. **84**, 5102 (2000).
- [Did01] S. A. Diddams, Th. Udem, J. C. Bergquist, E. A. Curtis, R. E. Drullinger, L. Hollberg, W. M. Itano, W. D. Lee, C. W. Oates, K. R. Vogel und D. J. Wineland, Science **293**, 825 (2001).
- [Did02] S. A. Diddams, L. Hollberg, L. S. Ma und L. Robertsson, Opt. Lett. **27**, 58 (2002).
- [Dir37] P. A. M. Dirac, Nature (London) **139**, 323 (1937).
- [Dmi97] V. G. Dmitriev, G. G. Gurzadyan und D. N. Nikogosyan, *Handbook of Nonlinear Optical Crystals*, (Springer, Berlin 1997).
- [Dom04] P. Dombi, A. Apolonski, Ch. Lemell, G. G. Paulus, M. Kakehata, R. Holzwarth, Th. Udem, K. Torizuka, J. Burgdörfer, T. W. Hänsch und F. Krausz, New Journal of Physics **6**, 39 (2004).

- [Dre83] R. Drewer, J. Hall, F. Kowalski, J. Hough, G. Ford, A. Munley und H. Ward, *Appl. Phys. B* **31**, 97 (1983).
- [Dyc87] R. S. Van Dyck, Jr., P. B. Schwinberg und H. G. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 26 (1987).
- [Dzu99a] V. A. Dzuba, V. V. Flambaum und J. K. Webb, *Phys. Rev. A* **59**, 230 (1999).
- [Dzu99b] V. A. Dzuba, V. V. Flambaum und J. K. Webb, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 888 (1999).
- [Dzu00] V. A. Dzuba und V. V. Flambaum, *Phys. Rev. A* **61**, 034502 (2000).
- [Eck78] J. Eckstein, A. I. Ferguson und T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 847 (1978).
- [Edd35] A. Eddington, *New Pathways in Science*, Cambridge University Press 1935.
- [Ell01] R. Ell, U. Morgner, F. X. Kärtner, J. G. Fujimoto, E. P. Ippen, V. Scheuer, G. Angelow, T. Tschudi, M. J. Lederer, A. Boiko und B. Luther-Davies, *Opt. Lett.* **26**, 373 (2001).
- [Ess57] L. Essen und J. V. L. Parry, *Phil. Trans. R. Soc. A* **250**, 45 (1957).
- [Ess71] L. Essen, R. W. Donaldson, M. J. Bangham und E. G. Hope, *Nature* **229**, 110 (1971).
- [Far81] J. W. Farley und W. H. Wing, *Phys. Rev. A* **23**, 2397 (1981).
- [Fer03] M. M. Fermann, A. Galvanauskas und G. Sucha, *Ultrafast Lasers - Technology and Applications*, Marcel Dekker, New York 2003.
- [Fis04a] M. Fischer, N. Kolachevsky, M. Zimmermann, R. Holzwarth, Th. Udem, T. W. Hänsch, M. Abgrall, J. Grünert, I. Maksimovic, S. Bize, H. Marion, F. Pereira Dos Santos, P. Lemonde, G. Santarelli, P. Laurent, A. Clairon, C. Salomon, M. Haas, U. D. Jentschura und C. H. Keitel, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 230802 (2004).
- [Fis04b] M. Fischer, Dissertation, Ludwig Maximilians Universität München (2004).
- [Fla04] V. V. Flambaum, D. B. Leinweber, A. W. Thomas und R. D. Young, *Phys. Rev. D* **69**, 115006 (2004).
- [For84] R. L. Fork, O. E. Martinez und J. P. Gordon, *Opt. Lett.* **9**, 150 (1984).

- [For03] T. M. Fortier, D. J. Jones und S. T. Cundiff, *Opt. Lett.* **28**, 2198 (2003).
- [Fri02] H. Fritzsche, *Fundamental Constants at High Energy*, arXiv: hep-ph/0201198.
- [Fuj00] Y. Fujii, A. Iwamoto, T. Fukahori, T. Ohnuki, M. Nakagawa, H. Hidaka, Y. Oura und P. Möller, *Nucl. Phys. B* **573**, 377 (2000).
- [Fuj05] T. Fuji, J. Rauschenberger, A. Apolonski, V.S. Yakovlev, G. Tempea, Th. Udem, Ch. Gohle, T. W. Hänsch, W. Lehnert, M. Scherer und F. Krausz, *Opt. Lett.* **30**, 332 (2005).
- [Gab02] G. Gabrielse *et al.*, ATRAP-Kollaboration, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 213401 (2002).
- [Gar79] F. M. Gardener, *Phaselock Techniques*, (John Wiley & Sons, New York 1979).
- [Gil01] <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0112033>.
- [Gol60] H. Goldenberg, D. Kleppner und N.F. Ramsey, *Phys. Rev. Lett.* **5**, 361 (1960).
- [Han63] L. N. Hand, D. J. Miller und R. Wilson, *Rev. Mod. Phys.* **35**, 335 (1963).
- [Hän74] T. W. Hänsch, K. C. Harvey, G. Miesel und A. L. Schawlow, *Opt. Comm.* **11**, 50 (1974).
- [Hän80] T. W. Hänsch und B. Couillaud, *Opt. Commun.* **35**, 441 (1980).
- [Hau01] H. A. Haus und E. P. Ippen, *Opt. Lett.* **26**, 1654 (2001).
- [Heb56] J. W. Heberle, H. A. Reich und P. Kusch, *Phys. Rev.* **101**, 612 (1956).
- [Her02] J. Herrmann, U. Griebner, N. Zhavoronkov, A. Husakou, D. Nickel, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, P. St. J. Russell und G. Korn, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 173901 (2002).
- [HH] P. Horowitz und W. Hill, *The Art of Electronics*, 2. Auflage (Cambridge U. Press, Cambridge, 1989), Seite 644.
- [Hol00] R. Holzwarth, Th. Udem, T. W. Hänsch, J. C. Knight, W. J. Wadsworth und P. St. J. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2264 (2000).
- [Hol01] R. Holzwarth, Dissertation, Ludwig Maximilians Universität München (2001).

- [Hol01a] R. Holzwarth, A. Yu. Nevsky, M. Zimmermann, Th. Udem, T. W. Hänsch, J. von Zanthier, H. Walther, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, P. St. J. Russell, M. N. Skvortsov und S. N. Bagayev, *Appl. Phys. B* **73**, 269 (2001).
- [Hol01b] R. Holzwarth, M. Zimmermann, Th. Udem, T. W. Hänsch, P. Russbüldt, K. Gäbel, R. Poprawe, J. C. Knight, W. J. Wadsworth und P. St. J. Russell, *Opt. Lett.* **26**, 1376 (2001).
- [Hub97] A. Huber, Dissertation, Ludwig Maximilians Universität München (1997).
- [Hub99] A. Huber, B. Gross, M. Weitz und T. W. Hänsch, *Phys. Rev. A* **59**, 1844 (1999).
- [Hub98] A. Huber, Th. Udem, B. Gross, J. Reichert, M. Kourogi, K. Pachucki, M. Weitz und T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 468 (1998).
- [Hus01] A. V. Husakou und J. Herrmann, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 203901 (2001).
- [Ita93] W. M. Itano, J. C. Bergquist, J. J. Bollinger, J. M. Gilligan, D. J. Heinzen, F. L. Moore, G. M. Raizen und D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 3554 (1993).
- [Iva03a] E. Ivanov, S. Diddams und L. Hollberg, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. **9**, 1059 (2003).
- [Iva03b] A. Ivanchik, P. Petitjean, E. Rodriguez und D. Varshalovich, *Astrophysics and Space Science* **283**, 583 (2003).
- [Ive38] H. E. Ives und G. R. Stilwell, *J. Opt. Soc. Am.* **28**, 215 (1938).
- [Jen03] U. Jentschura, M. Haas und C. Keitel, interner Report „Statistical analysis of the most recent $1S$ - $2S$ hydrogen measurement“ (2003).
- [Jon00] D. J. Jones, S. A. Diddams, J. K. Ranka, A. Stentz, R. S. Windeler, J. L. Hall und S. T. Cundiff, *Science* **288**, 635 (2000).
- [Jon02] R. J. Jones, W.-Y. Cheng, K. W. Holman, L. Chen, J. L. Hall und J. Ye, *Appl. Phys. B* **74**, 597 (2002).
- [Kak01] M. Kakehata, H. Takada, Y. Kobayashi, K. Torizuka, Y. Fujihira, T. Homma und H. Takahashi, *Opt. Lett.* **26**, 1436 (2001).
- [Kar04] S. G. Karshenboim, arXiv: physics/0311080 (2004).

- [Kat00] H. Kato et al., *Doppler-Free High Resolution Spectral Atlas of Iodine Molecule 15 000 to 19 000 cm⁻¹*, Japan Society for the Promotion of Science (JSPS) (2000).
- [Kat03] H. Katori, M. Takamoto, V. Pal'chikov und V. Ovsiannikov, Phys. Rev. Lett. **91**, 173005 (2003).
- [Ken32] R. J. Kennedy und E. M. Thorndike, Phys. Rev. **42**, 400 (1932).
- [Kim04] J. Kim, F. X. Kärtner und M. H. Perrott, Opt. Lett. **29**, 2076 (2004).
- [Kin03] T. Kinoshita und M. Nio, Phys. Rev. Lett. **90**, 021803 (2003).
- [Kle62] D. Kleppner, H. Goldenberg und N. F. Ramsey, Phys. Rev. **126**, 603 (1962).
- [Kle65] D. Kleppner, H. Berg, S. Crampton, N. F. Ramsey, R. Vessot, H. Peters und J. Vanier, Phys. Rev. **138**, A 972 (1965).
- [Kni96] J. C. Knight, T. A. Birks, P. St. J. Russel und D. M. Atkin, Opt. Lett. **21**, 1547 (1996).
- [Kol04] N. Kolachevsky, M. Fischer, S. G. Karshenboim und T. W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. **92**, 033003 (2004).
- [Kou94] M. Kourogi, T. Enami und M. Ohtsu, IEEE Photonics Technology Letters **6**, 214 (1994).
- [Kou95] M. Kourogi, B. Widiyatomo, Y. Takeuchi und M. Ohtsu, IEEE J. Quantum Electron. **31**, 2120 (1995).
- [Kra03] H. Kragh, Eur. J. of Phys. **24**, 169 (2003).
- [Kub05] Ph. Kubina, P. Adel, F. Adler, G. Grosche, T. W. Hänsch, R. Holzwarth, A. Leitenstorfer, B. Lipphardt und H. Schnatz, Optics Express **13**, 904 (2005).
- [Lam47] W. E. Lamb und R. C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).
- [Lam04] S. K. Lamoreaux und J. R. Torgerson, Phys. Rev. D **69**, 121701(R) (2004!).
- [Lan02] P. Langacker, G. Segrè und M. J. Strassler, Phys. Lett. B **528**, 121 (2002).
- [Lar99] K. Larson und J. Levine, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control **46**, 1001 (1999).

- [Lei95] D. Leibfried, Dissertation, Ludwig Maximilians Universität München (1995).
- [Lep95] L. Lepetit, G. Chériaux und M. Joffe, J. Opt. Soc. Am. B **12**, 2467 (1995)
- [Les83] P. Lesage, IEEE Trans. Instrum. Meas. **32**, 204 (1983).
- [Lev74] M. D. Levenson und N. Bloembergen, Phys. Rev. Letters **32**, 645 (1974).
- [Lin97] L. Lin, M. Wu, T. Itoh, T. Vang, R. Muller, D. Sivco und A. Cho, IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques **45**, 1320 (1997).
- [Man77] R. Mansouri und R. U. Sexl, Gen. Relativ. Gravit. **8**, 497 (1977); **8**, 515 (1977); **8**, 809 (1977).
- [Mar03] H. Marion, F. Pereira Dos Santos, M. Abgrall, S. Zhang, Y. Sortais, S. Bize, I. Maksimovic, D. Calonico, J. Grünert, C. Mandache, P. Lemonde, G. Santarelli, Ph. Laurent, A. Clairon und C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **90**, 150801 (2003).
- [Mar04] H. S. Margolis, G. P. Barwood, G. Huang, H. A. Klein, S. N. Lea, K. Szymaniac und P. Gill, Science **306**, 1355 (2004).
- [May92] T. Mayer-Kuckuk, *Kernphysik*, 5. Auflage (B. G. Teubner, Stuttgart, 1992), Seite 102.
- [McI89] D. H. McIntyre, R. G. Beausoleil, C. J. Foot, E. A. Hildum, B. Coulliaud und T. W. Hänsch, Phys. Rev. A **39**, 4591 (1989).
- [Meh00] M. Mehendale, S. A. Mitchell, J. P. Likforman, D. M. Villeneuve und P. B. Corkum, Opt. Lett. **25**, 1672 (2000).
- [Mel00] K. Melnikov und T. v. Ritbergen, Phys. Rev. Lett. **84**, 1673 (2000).
- [Mer96] P. Mergell, U. G. Meißner und D. Dreschel, Nucl. Phys. A **596**, 367 (1996).
- [Mich87] A. A. Michelson und E. W. Morley, Am. J. Sci. **34**, 333 (1887).
- [Mil37] E. A. Milne, Proc. Roy. Soc. A, **158**, 324 (1937).
- [Mor01] U. Morgner, R. Ell, G. Metzler, T. R. Schibli, F. X. Kärtner, J. G. Fujimoto, H. A. Haus und E. P. Ippen, Phys. Rev. Lett. **86**, 5462 (2001).
- [Mül03] H. Müller, S. Herrmann, C. Braxmaier, S. Schiller und A. Peters, Phys. Rev. Lett. **91**, 020401 (2003).

- [Mur01a] M. Murphy, J. Webb, V. Flambaum, M. Drinkwater, F. Combes und T. Wilklind, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **327**, 1244 (2001).
- [Mur01b] M. Murphy, J. Webb, V. Flambaum, J. Prochaska und A. Wolfe, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **327**, 1237 (2001).
- [Mur03] M. T. Murphy, J. K. Webb und V. V. Flambaum, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **345**, 609 (2003).
- [Nak98] M. Nakazawa, K. Tamura, H. Kubota und E. Yoshida, *Opt. Fiber Technol.* **4**, 215, (1998).
- [Nev01] A. Yu. Nevsky, R. Holtzwarth, J. Reichert, Th. Udem, T.W. Hänsch, J. von Zanthier, H. Walther, H. Schnatz, F. Riehle, P.V. Pokasov, M.N. Skvortsov und S.N. Bagayev, *Opt. Commun.* **192**, 263 (2001).
- [Nie00a] M. Niering, R. Holzwarth, J. Reichert, P. Pokasov, Th. Udem, M. Weitz, T. W. Hänsch, P. Lemonde, G. Santarelli, M. Abgrall, P. Laurent, C. Salomon und A. Clairon, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5496 (2000).
- [Nie00b] M. Niering, Dissertation, Ludwig Maximilians Universität München 2000.
- [NIST] NIST Technical Note 1533.
- [Oli02] K. A. Olive, M. Pospelov, Y. Qian, A. Coc, M. Cassé und E. Vangioni-Flam, *Phys. Rev. D* **66**, 045022 (2002).
- [Oli04] K. Olive, M. Pospelov, Y. Qian, G. Manhès, E. Vangioni-Flam, A. Coc und M. Cassé, *Phys. Rev. D* **69**, 027701 (2004).
- [Pac62] M. E. Packard und B. E. Swartz, *IRE Trans. Instrum.* **11**, 215 (1962).
- [Pac01] K. Pachucki, *Phys. Rev. A* **63**, 042503 (2001).
- [Pao99] L. Pao-Lo, K. Williams, M. Frankel und R. Esman, *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques* **47**, 1297 (1999).
- [Pau01] G. G. Paulus, F. Grasbon, H. Walther, P. Villorosi, M. Nisoli, S. Stagira, E. Priori und S. De Silvestri, *Nature* **414**, 182 (2001).
- [Pau03] G. G. Paulus, F. Lindner, H. Walther, A. Baltuška, E. Goulielmakis, M. Lezius und F. Krausz, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 253004 (2003).
- [Pes95] M. Peskin und D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, HarperCollins Publishers 1995.

- [Pei04] E. Peik, B. Lipphardt, H. Schnatz, T. Schneider, Chr. Tamm und S. G. Karshenboim, Phys. Rev. Lett. **93**, 170801 (2004).
- [Pet96] G. Petit und P. Tavella, Astron. Astrophys. **308**, 290 (1996).
- [Phy71] Physics Today, November 1971, Seite 9.
- [Plo99] homepage von S. Plouffe: <http://www.lacim.uqam.ca/~plouffe/>.
- [Poh01] R. Pohl *et al.*, in: *Hydrogen atom: Precision physics of simple atomic systems*. Herausgeber S. G. Karshenboim *et al.* (Springer, Berlin, Heidelberg), 454-458, (2001).
- [Pou47] R. Pound, Proc. IRE **35**, 1405 (1947).
- [Pre95] M. Prevedelli, T. Freearge und T.W. Hänsch, Appl. Phys. B **60**, S241 (1995).
- [Pre95a] J. Prestage, R. Tjoelker und L. Maleki, Phys. Rev. Lett. **74**, 3511 (1995).
- [Qua04] R. Quast, D. Reimers und S.A. Levshakov, Astronomy and Astrophysics **415**, L7 (2004).
- [Raf00] R. J. Rafac, B. C. Young, J. A. Beall, W. M. Itano, D. J. Wineland und J. C. Bergquist, Phys. Rev. Lett. **85**, 2462 (2000).
- [Ram02] T. M. Ramond, S. A. Diddams, L. Hollberg und A. Bartels, Opt. Lett. **27**, 1842 (2002).
- [Ran00] J. K. Ranka, R. S. Windeler und A. J. Stentz, Opt. Lett. **25**, 25 (2000).
- [Rei99] J. Reichert, R. Holzwarth, Th. Udem und T. W. Hänsch, Opt. Commun. **172**, 59 (1999).
- [Rei00a] J. Reichert, M. Niering, R. Holzwarth, M. Weitz, Th. Udem und T. W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. **84**, 3232 (2000).
- [Rei00b] J. Reichert, Dissertation, Ludwig Maximilians Universität München (2000).
- [Rei02] S. Reinhardt, Diplomarbeit, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg (2002).
- [Rob49] H. P. Robertson, Rev. Mod. Phys. **21**, 378 (1949).
- [Rob00] M. Roberts, P. Taylor, G. P. Barwood, W. R. C. Rowley und P. Gill, Phys. Rev. A **62**, 020501(R) (2000).

- [Saa02] G. Saathoff, Dissertation, Ruperto-Carola Universität Heidelberg (2002), Seite 15, Gleichung (2.31).
- [Saa03] G. Saathoff, S. Karpuk, U. Eisenbarth, G. Huber, S. Krohn, R. Muñoz Horta, S. Reinhardt, D. Schwalm, A. Wolf und G. Gwinner, Phys. Rev. Lett. **91**, 190403 (2003).
- [Sav56] M. P. Savedoff, Nature **178**, 688 (1956).
- [Sch96] H. Schnatz, B. Lipphardt, J. Helmcke, F. Riehle und G. Zinner, Phys. Rev. Lett. **76**, 18 (1996).
- [See97] S. Seel, R. Storz, G. Ruoso, J. Mlynek und S. Schiller, Phys. Rev. Lett. **78**, 4741 (1997).
- [Shl76] A. Shlyakhter, Nature **264**, 340 (1976).
- [Sim80] G. G. Simon, C. Schmidt, F. Borkowski und V. H. Walther, Nucl. Phys. A **333**, 381 (1980).
- [Sob92] I. I. Sobelman, Atomic spectra and radiative transitions, 2. Aufl., Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1992).
- [Sri04] R. Srianand, H. Chand, P. Petitjean und B. Aracil, Phys. Rev. Lett. **92**, 121302 (2004).
- [Ste75] S. Stein und J. Turneaure, Proceedings of the IEEE **63**, 1249 (1975).
- [Ste01] J. Stenger, Ch. Tamm, N. Haverkamp, S. Weyers und H. R. Telle, Opt. Lett. **26**, 1589 (2001).
- [Ste02] J. Stenger, H. Schnatz, C. Tamm und H. R. Telle, Phys. Rev. Lett. **88**, 073601 (2002).
- [Szi94] R. Szipöcs, K. Ferencz, C. Spielmann und F. Krausz, Opt. Lett. **19**, 201 (1994).
- [Tai86] K. Tai, A. Hasegawa und A. Tomita, Phys. Rev. Lett. **56**, 135 (1986).
- [Tak03] M. Takamoto und H. Katori, Phys. Rev. Lett. **91**, 223001 (2003).
- [Tay88] T. R. Taylor und G. Veneziano, Phys. Lett. B **213**, 450 (1988).
- [Tel90] H. R. Telle, D. Meschede und T. W. Hänsch, Opt. Lett. **15**, 532 (1990).

- [Tel99] H. R. Telle, G. Steinmeyer, A. E. Dunlop, J. Stenger, D. H. Sutter und U. Keller, Appl. Phys. B **69**, 327 (1999).
- [Tho75] R. I. Thompson, Astrophys. Lett. **16**, 3 (1975).
- [Tjo03] R. Tjoelker, J. Prestage, P. Koppang und T. Swanson, Proceedings of the 2003 IEEE International Frequency Control Symposium, Seite 1066.
- [Tur70] J. Turneaure und N. Viet, Appl. Phys. Lett. **16**, 333 (1970).
- [Tur88] J. Turneaure und S. Stein, in *Near Zero*, Editor J. D. Fairbank *et al.*, Freeman, New York, 1988, Seite 414.
- [Ude97] Th. Udem, A. Huber, B. Gross, J. Reichert, M. Prevedelli, M. Weitz und T. W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. **79**, 2646 (1997).
- [Ude99a] Th. Udem, J. Reichert, R. Holzwarth und T. W. Hänsch, Opt. Lett. **24**, 881 (1999).
- [Ude99b] Th. Udem, J. Reichert, R. Holzwarth und T. W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. **82**, 3568 (1999).
- [Ude01] Th. Udem, S. A. Diddams, K. R. Vogel, C. W. Oates, E. A. Curtis, W. D. Lee, W. M. Itano, R. E. Drullinger, J. C. Bergquist und L. Hollberg, Phys. Rev. Lett. **86**, 4996 (2001).
- [Ude02] Th. Udem, R. Holzwarth, M. Zimmermann und T. W. Hänsch, in *Proceedings of the Sixth Symposium on Frequency Standards and Metrology*, P. Gill (Editor), (World Scientific, Singapore, 2002), Seite 125.
- [Ude02a] Th. Udem, Habilitationsschrift, Ludwig Maximilians Universität München (2002).
- [Uza03] J.-P. Uzan, Rev. Mod. Phys. **75**, 403 (2003).
- [Var96] D. Varshalovich, V. Panchuk und A. Ivanchik, Astron. Lett. **22**, 6 (1996).
- [Vas70] L. S. Vasilenko, V. P. Chebotayev und A. V. Shishaev, JETP Lett. **12**, 113 (1970).
- [Ves80] R. F. C. Vessot, M. W. Levine, E. M. Mattison, E. Blomberg, T. E. Hoffman, G. U. Nystrom und B. F. Farrel, Phys. Rev. Lett. **45**, 2081 (1980).
- [Wad02] W. J. Wadsworth, A. Ortigosa-Blanch, J. C. Knight, T. A. Birks, T. P. M. Man und P. St. J. Russel, J. Opt. Soc. Am. B **19**, 2148 (2002).

- [Wal03] J. Walz¹, H. Pittner¹, M. Herrmann¹, P. Fendel, B. Henrich¹ und T. W. Hänsch, *Appl. Phys. B* **77**, 713 (2003).
- [Web99] J.K. Webb, V.V. Flambaum, C.W. Churchill, M.J. Drinkwater und J.D. Barrow, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 884 (1999).
- [Web01] J.K. Webb, M.T. Murphy, V.V. Flambaum, V.A. Dzuba, J.D. Barrow, C.W. Churchill, J.X. Prochaska und A.M. Wolfe, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 091301 (2001).
- [Wet04] C. Wetterich, *Physik Journal* **3**, Nr. 12, 43 (2004).
- [Wil92] K. William und R. Esman, *Electronics Lett.* **28**, 731 (1992).
- [Wil02] G. Wilpers, T. Binnewies, C. Degenhardt, U. Sterr, J. Helmcke und F. Riehle, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 230801 (2002).
- [Wol03] P. Wolf, S. Bize, A. Clairon, A.N. Luiten, G. Santarelli und M.E. Tobar, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 060402 (2003).
- [WWW] <http://scienceworld.wolfram.com/physics/FineStructureConstant.html>
- [Wyl69] A. Wyler, *Acad. Sci. Paris, Comtes Rendus* **269 A**, 743 (1969).
- [Wyn95] R. Wynands, O. Coste, C. Rembe und D. Meschede, *Opt. Lett.* **20**, 1095 (1995).
- [Xu96] L. Xu, Ch. Spielmann, A. Poppe, T. Brabec, F. Krausz und T.W. Hänsch, *Opt. Lett.* **21**, 2008 (1996).
- [You99] B.C. Young, F.C. Cruz, W.M. Itano und J.C. Bergquist, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3799 (1999).
- [Zan00] J. von Zanthier, Th. Becker, M. Eichenseer, A. Yu. Nevsky, Ch. Schwedes, E. Peik, H. Walther, R. Holzwarth, J. Reichert, Th. Udem, T.W. Hänsch, P.V. Pokasov, M.N. Skvortsov und S.N. Bagayev, *Opt. Lett.* **25**, 1729 (2000).
- [Zim04] M. Zimmermann, Ch. Gohle, R. Holzwarth, Th. Udem und T.W. Hänsch, *Opt. Lett.* **29**, 310 (2004).

Danksagung

Ich danke Prof. T. W. Hänsch für die freundliche Aufnahme in seine Arbeitsgruppe und die Möglichkeit, an spannenden Experimenten arbeiten zu können.

Thomas Udem danke ich für die ständige Bereitschaft, auch die einfachsten Fragen geduldig zu beantworten, und für die effiziente Hilfe im Labor. Von ihm lernte ich u. a. den nicht zu unterschätzenden Unterschied zwischen Genauigkeit und Stabilität.

Ronald Holzwarth, Jörg Reichert und Thomas Udem sei für ihre Einführung in die Geheimnisse der optischen Frequenzmessung gedankt.

Meinen Bürokollegen Sebastian Fray und Tobias Nebel danke ich für die entspannte Atmosphäre und viele unterhaltsame Gespräche.

Meinen Kollegen im Frequenzkamlabor Christoph Gohle, Max Hermann, Thomas Udem, Ronald Holzwarth, Tobias Nebel und Frank Markert danke ich für die gute Zusammenarbeit und Stimmung im Labor. Bei Michel Abgrall, Jan Grünert, Marc Fischer und Nikolai Kolachevsky bedanke ich mich für die mir unvergeßliche Zeit während der 1S-2S Frequenzmessung im Jahr 2003. Außerdem danke ich Sascha Reinhardt, Sergej Karpuk und Guido Saathoff für die schöne Zeit während unserer Iodmessungen. Auch war es mir immer eine große Freude, mit den Kämpfern von der Indium-Front Sascha Nevsky, Mario Eichenseer, Christian Schwedes und Joachim von Zanthier zusammenzuarbeiten. Peter Fendel sei u. a. dafür gedankt, daß er sich mit väterlicher Fürsorglichkeit dem verwaisten Frequenzkamm angenommen hat.

Für so manche Fahrradfahrt zur Arbeit, nach Hause oder in den Bergen bedanke ich mich bei Max, Thomas, Peter und Christoph. Jetzt kann ich es ja sagen: ich hätte selbstverständlich zu jeder Zeit schneller fahren können, habe es aber aus Rücksichtnahme nie gemacht.

Der gesamten Hänsch-Gruppe sei für viel Spaß und Aufmunterung besonders während der unausweichlichen Frustrationsphasen gedankt.

Weiterhin sei denen gedankt, die immer wußten, wo und wann Prof. Hänsch zu finden ist: Rosemarie Lechner und Gabriele Gschwendtner.

Bei unserem Elektroniker Helmut Brückner und unseren Technikern Charlie Linner und last but not least Wolfgang Simon bedanke ich mich für ihre schnelle und unkomplizierte Hilfe in allen Fragen des täglichen Laborlebens und (nicht zu vernachlässigen!) für ihre Bayerische Dialektschulung (Des is halt des!).

Den Pförtnern des MPQ sei für die Verbreitung einer angenehmen Atmosphäre und für so manches nette Gespräch gedankt.

Für die fürsorgliche Versorgung mit Lebensmitteln bedanke ich mich bei Marion Gertler (eine Wurst- und eine Käsesemmel, abzuholen beim Pförtner).

Heimat ist da, wo man Freunde hat. Während meiner Zeit am MPQ habe ich einige Freunde hinzugewonnen, denen ich für viel Spaß und viele Unternehmungen danke. Ohne sie wäre die Zeit lange nicht so schön gewesen.

Meinen Freunden aus der Heimat danke ich für so manch aufbauendes Telefongespräch.

Am Schluß möchte ich meiner Familie danken. Sie haben mich fern der Heimat auf jede erdenkliche Weise unterstützt und mich in schwierigen Phasen aufgebaut. Zu meiner Schande muß ich an dieser Stelle auch den täglichen Weckdienst aus Bad Vilbel bzw. Grab erwähnen. In diesem Zusammenhang ist es mir eine besondere Freude, Lore und Hans-Eberhard zu danken, die sich in vielfältiger Weise rührend um mich gekümmert haben, sei es durch Adventskränze, Osternester oder den exzellenten Verpflegungsservice.