

Seminar für Philosophie, Logik und Wissenschaftstheorie der LMU München

Kontinuum und Konstitution der Wirklichkeit.
Analyse und Rekonstruktion des Peirce'schen
Kontinuum-Gedankens

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Philosophie
an der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Julia Zink
aus
München
2004

Referent: Prof. Dr. Godehard Link
Koreferent: Prof. Dr. Matthias Varga von Kibéd
Tag der mündlichen Prüfung: 2.2.2004

Danksagung:

Das Thema der Arbeit hat sich konkretisiert durch ausführliche Gespräche mit Prof. Huber in Rom, wofür ich ihm herzlich danken möchte. Herr Prof. Link hat mich in sein Oberseminar aufgenommen und mich als Doktorvater jederzeit beraten und stets unterstützt, ihm und auch den Herren des Oberseminars darf ich dafür vielmals danken. Mein besonderer Dank gilt auch Prof. Varga von Kibéd für viele wissenschaftliche Anregungen und meinem Vater für seine geduldige Hilfe bei der Korrektur der Arbeit. Der DFG danke ich für die materielle Unterstützung im Rahmen des Graduiertenkollegs Sprache, Information, Logik.

Die Arbeit möchte ich den Menschen widmen, die meinen beruflichen Lebensweg wesentlich bestimmt haben

meinem Vater, Prof. Dr. rer. nat. Dr. med. Dipl.-Phys. Peter Zink,
meinem Mathematiklehrer am Lyceum Alpinum Zuoz, Max Baumann,
meinem akademischen Lehrer in Mathematik an der LMU München, Prof. Dr.
rer. nat. Otto Forster,
meinem akademischen Lehrer in Philosophie an der Pontificia Università Gre-
goriana, Prof. Dr. phil. Carlo Huber SJ,
meinem akademischen Lehrer in Logik an der LMU München, Prof. Dr. phil.
Matthias Varga von Kibéd,
meinem akademischen Lehrer in Logik an der LMU München, Prof. Dr. phil.
Dipl.-Math. M.A. Godehard Link.

Inhaltsverzeichnis

1	Geschichtlicher Hintergrund	xi
1.1	Ein Überblick über die Geschichte des Kontinuums	xi
1.2	Der Einfluss von Aristoteles, Leibniz und Kant	xiv
1.2.1	Zur aristotelischen Sicht des Kontinuums	xiv
1.2.2	Zur Leibniz'schen Sicht des Kontinuums	xvii
1.2.3	Zur kantianischen Sicht des Kontinuums	xxi
1.3	Phasen des Kontinuums bei Peirce	xxiv
1.3.1	Vorcantorsche Periode	xxv
1.3.2	Cantor'sche Periode	xxv
1.3.3	Kantianische Periode	xxx
1.3.4	Nachcantorsche Periode	xxxii
I	Peirce und das Kontinuum	1
2	Die drei Kategorien von Peirce	5
2.1	Unterteilung der Wissenschaften	5
2.2	Die drei Peirce'schen Kategorien	6
2.2.1	Phänomenologischer Aufweis der drei Kategorien	7
2.2.2	Kategorien in der Realität	9
2.2.3	Kategorien und Relationenlogik	11
2.2.4	Peirce' Kategorien und seine Reduktionsthese	12
3	Aus Peirce' Logik und Mathematik	13
3.1	Relationen	13
3.1.1	Nichtdegenerierte triadische Relationen	24
3.1.2	Hypostatische Abstraktion	26
3.1.3	Verhältnis von PAL und der Prädikatenlogik	27
3.1.4	Peirce und Boole	27
3.2	Zwei grundlegende Prinzipien	27
3.2.1	Zur ersten Formulierung des Nichtwiderspruchsprinzips	28
3.2.2	Zur zweiten Formulierung des Nichtwiderspruchsprinzips	29
3.2.3	Verbindung beider Prinzipien	30
3.2.4	Weitere Formulierungen	32

3.3	Mengen	35
3.4	Vagheit und Allgemeinheit	39
3.4.1	Definition aus der Pragmatik	40
3.4.2	Russel über „all“, „every“, „any“, „a“ und „some“	41
3.4.3	Quantoren, Universalien und die beiden Prinzipien	42
4	Fünf Eigenschaften des Kontinuums	47
4.1	Unterteilbarkeit des Peirce'schen Kontinuums	48
4.2	Potentialität	51
4.3	Erfassung des Allgemeinen	53
4.3.1	Kontinuum und Drittheit	54
4.4	Selbstähnlichkeit	55
4.5	Priorität	57
5	Kontinuum und Konstitution	59
5.1	Pragmatische Maxime	60
5.2	Gemeinsames in Metaphysik und Erkenntnistheorie	62
5.2.1	Tychismus und Agapismus	62
5.3	Modalia und die drei Kategorien	64
5.3.1	Erkenntnis und Schöpfung	66
5.4	Materie und Geist	67
II	Weiterentwicklungen und Modelle	71
6	Über Blaus Logik	75
6.1	Reflexionslogik, Vagheit und Allgemeinheit	76
6.1.1	Die sechs Wahrheitswerte in der Reflexionslogik	78
6.1.2	Vagheit, Allgemeinheit und die Blau'schen Wahrheitswerte	79
6.2	Der allwissende Verifikator	80
6.3	Blaus größte Zahlen	81
6.4	Blaus kleinste Zahlen	83
6.5	Blau, Peirce und die fünf Bedingungen	84
7	Konstruktive Sicht des Kontinuums	87
7.1	Intuitionistische Logik	87
7.1.1	BHK-Interpretation der Junktoren und Quantoren	88
7.1.2	Allwissenheitsprinzipien	89
7.2	Konstruktive reelle Zahlen	90
7.2.1	Cauchy-Folgen	90
7.2.2	Dedekind-Schnitte	92
7.2.3	Das konstruktive Kontinuum und die fünf Bedingungen	94
7.3	Das intuitionistische Kontinuum	95
7.3.1	Das kreative Subjekt	96
7.3.2	Wahlfolgen	97
7.3.3	Das intuitionistische Kontinuum und die fünf Bedingungen	100

8	Bells Logik der Wahrnehmung	101
8.1	Räume und algebraische Strukturen	101
8.2	Anwendung für die Logik	108
8.3	Verbindung zwischen Kontexten und Räumen	109
8.4	Bells Logik und die fünf Bedingungen	111
8.5	Punktfreie Topologie und die fünf Bedingungen	112
9	Ein Modell für das Peirce'sche Kontinuum	113
9.1	Myrvolds Modell	113
9.2	Verbindung zweier Modelle	116
9.2.1	Ebenen der Verfeinerung im Endlichen	118
9.3	Zuschreiben von Prädikaten	120
9.4	Die fünf Bedingungen und die Modelle	120
10	Über die Grenzen der Unterscheidbarkeit	123
	Zusammenfassung	127
	Lebenslauf	129

Vorwort

Die Arbeit ist in zwei Teile geteilt: Der erste Teil handelt von Peirce Peirce und seiner Theorie des Kontinuums, der zweite Teil von Modellen aus der heutigen Logik und Mathematik, die dem Peirce'schen Kontinuum verwandt sind.

Zuerst findet sich eine geschichtliche Einführung, die die mathematische Geschichte des Kontinuums verfolgt, auf Gedanken dreier bedeutender Philosophen zu dem Thema eingeht, und die Phasen der Peirce'schen Gedanken zum Kontinuum skizziert.

Der erste Teil befasst sich mit dem Peirce'schen Kontinuum, einer Thematik, die in dem umfangreichen Werk von Peirce, als besonders schwierig eingeschätzt wird. Es werden die drei Kategorien von Peirce besprochen und dessen Überzeugung dargelegt, dass die Strukturen unserer Wahrnehmung und Erkenntnis sich auch in der Wirklichkeit wiederfinden. Ein Kapitel beschäftigt sich mit einzelnen Aspekten der Peirce'schen Mengenlehre und Relationenlogik. Das Peirce'sche Kontinuum wird anhand von fünf Eigenschaften charakterisiert. Beispielhaft werden Zusammenhänge dargestellt, die zwischen seiner Vorstellung des Kontinuums und seiner Philosophie, einschließlich seiner Metaphysik, bestehen.

Der zweite Teil beginnt mit einer kurzen Darstellung der Blau'schen größten und kleinsten Zahlen. Blau verwendet in seiner Logik und Philosophie den Begriff des allwissenden Verifikators. Es soll dargelegt werden, dass es auch für diesen in dem Sinn Grenzen der Erkenntnis gibt, als die Mittel der Beschreibung manches, das unterschieden wäre, nicht mehr unterscheiden können. Es wird die intuitionistische und konstruktive Sicht des Kontinuums bzw. der reellen Zahlen besprochen. Dabei wird kurz auf das von Brouwer eingeführte kreative Subjekt eingegangen, das die Unterscheidungsfähigkeit eines idealisierten Mathematikers besitzt. Bells Logik der Wahrnehmung setzt ein Subjekt mit endlicher Unterscheidungsfähigkeit voraus. Ein von Bell und Myrvold inspiriertes Modell des Kontinuums wird vorgeschlagen. Das Modell folgt dem Peirce'schen Gedanken, dass Punkte teilbar sind und keine Ausdehnung haben, und hat verschiedene Ebenen von Infinitesimalen. Es konnten philosophische Thesen entwickelt werden, die über einen Vergleich der Peirce'schen Gedanken mit heutigen Vorstellungen hinausgehen. Eine dieser Thesen ist, dass die Vielfalt der Welt abhängt von der Unterscheidungsfähigkeit, die vorausgesetzt ist. Dies wird beispielhaft an drei mathematischen Theorien gezeigt, die Modelle für das Kontinuum liefern. Eine andere These ist, dass bei der Erforschung der Wirklichkeit eine immer

größere Verfeinerung gefunden werden kann und dass jede Beschreibung mit einer bestimmten Feinkörnigkeit oder Grobkörnigkeit verbunden ist.

Die Gedanken der Dissertation gehen auf die Schriften von Peirce zurück, die einen immensen Umfang haben, und teilweise nur handschriftlich vorliegen. Es wird unter dem Oberbegriff Kontinuum der Versuch unternommen, aus zunächst unzusammenhängend scheinenden Themen skizzenhaft Querverbindungen aufzuzeigen, was stellenweise der Arbeit den Charakter eines Steinbruchs verleiht.

Die Arbeit soll einen Beitrag liefern zu der Frage, wo sich Grenzen der Beschreibbarkeit zeigen, wie sie sich zeigen, und inwieweit es sinnvoll ist zu sagen, dass diese Grenzen in der Wirklichkeit selbst angelegt sind.

Kapitel 1

Geschichtlicher Hintergrund

Charles S. Peirce (1839 - 1914), der amerikanische Philosoph, Logiker, Mathematiker und Naturwissenschaftler hat sich intensiv mit dem Thema Kontinuum auseinandergesetzt und Jahrzehnte lang versucht, eine schlüssige Beschreibung des Kontinuums zu entwickeln. Er ist damit, soweit ersichtlich, nicht fertig geworden. Viele seiner Fragen und Ideen sind bis heute aktuell geblieben. In dieser Arbeit sollen sowohl seine Ideen, als auch die weitere Entwicklung mancher seiner Ansätze dargestellt werden. Dabei sollen auch die Autoren, die Peirce beeinflusst haben, insbesondere Aristoteles, Leibniz, Kant und Cantor Beachtung finden. Einige Themen, die für Peirce' Überlegungen Bedeutung haben, werden besprochen. Dazu gehören die Fragen, ob das Kontinuum aus Atomen, also unteilbaren Elementen zusammengesetzt sei, ob es sinnvoll ist, Infinitesimale anzunehmen und ob das Kontinuum potentielle Elemente habe.

1.1 Ein Überblick über die Geschichte des Kontinuums

Kontinuum kommt von dem lateinischen „continuus“, was bedeutet zusammenhängend, unmittelbar aufeinander folgend. Das Problem des Kontinuums beschäftigt die Menschen schon seit langer Zeit. Strecken werden beispielsweise sehr früh als etwas Kontinuierliches angesehen. Man will Strecken messen. Die Schule des Pythagoras hat im sechsten Jahrhundert v.Chr. versucht beim Messen mit ganzen Zahlen oder Verhältnissen von ganzen Zahlen, also rationalen Zahlen, auszukommen. In der zweiten Hälfte des fünften Jahrhunderts v.Chr. wird festgestellt, dass es Strecken gibt, die nicht durch einen Bruch messbar sind, deren Länge nicht rational ist. Das Kontinuum wird auch in der Geometrie untersucht. Man will dort Gesetze über den Raum, die Geraden und die Punkte feststellen. Eudoxos von Knidos verbindet die geometrische Fragestellung mit der des Messens. Er entwickelt die geometrische Proportionen-

lehre¹, die im Buch fünf der Elemente des Euklid² dargestellt ist. Eudoxos geht von Zahlenverhältnissen aus, die er auf Größenverhältnisse anwendet. Zwei Größenverhältnisse $a_1 : a_2$; $b_1 : b_2$ heißen gleich, wenn sie zwischen denselben Zahlenverhältnissen, modern gesprochen also zwischen denselben rationalen Zahlen, liegen³. Nur mit Hilfe natürlicher Zahlen definiert Euklid wie folgt: $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ genau dann, wenn für alle (natürlichen) Zahlen m, n gilt: Aus $na_1 > ma_2$ folgt $nb_1 > mb_2$, ebenso folgt aus $na_1 = ma_2$, dass $nb_1 = mb_2$ und aus $na_1 < ma_2$, dass $nb_1 < mb_2$. Euklid beweist, dass die Größen abgeschlossen sind gegen Addition und Subtraktion (falls $a_1 > a_2$) und er beweist weiter, dass sie dem archimedischen Axiom genügen, das in heutiger Formulierung lauten würde: $\forall a_1 \forall a_2 \forall b_1 \forall b_2 \exists n \in \mathbf{N} : n|a_1 : a_2| > |b_1 : b_2|$, wobei $|a_1 : a_2|$ die dem Größenverhältnis $a_1 : a_2$ entsprechende reelle Zahl sein soll. Damit sind die Größenverhältnisse ein geometrisches Analogon zu den heutigen reellen Zahlen, die ein archimedisch abgeschlossener Körper sind.

Parmenides gibt an seinen Schüler Zenon von Elea im fünften Jahrhundert v. Chr. die Überzeugung weiter, dass es keine Bewegung gibt, sondern dass Bewegung Illusion sei. Zenon sieht die Meinung seines Lehrers bestätigt durch die Bewegungsparadoxien. In der Physik schreibt Aristoteles, Zenon habe als Theorem aufgestellt, der Schnellere könne den Langsameren bei einem Wettlauf nicht einholen⁴. Das dazugehörige Zenon'sche Paradoxon wird oft wie folgt erzählt: Achilles und die Schildkröte treten zu einem Wettlauf gegeneinander an. Die Schildkröte bekommt Vorsprung, sagen wir um eine Strecke s , um ihr eine Chance einzuräumen. Wenn nun Achilles die Strecke s zurückgelegt hat, so hat die Schildkröte schon ein kleines Stück Weg zurückgelegt. Nach einer weiteren Zeit hat Achilles diesen neuen Ausgangspunkt der Schildkröte erreicht. Man kann nun auf gleiche Weise fortfahren, so dass es scheint, als könnte Achilles die Schildkröte nie erreichen. Folgendes ist durch die heutige Grenzwertrechnung gelöst: Zwischen je zwei Punkten befinden sich unendlich viele Punkte, ja sogar unendlich viele Teilstrecken. Durch die Paradoxie stellt sich die Frage, ob man für diese Strecke nicht eine unendlich lange Zeit benötigen würde, da man für jedes Teilstück endlich lange braucht. In der Grenzwertrechnung hat man herausgefunden, dass Summen unendlich vieler unterschiedlicher Werte gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren können. Eine weitere Paradoxie Zenons ist diejenige vom ruhenden Pfeil: Der Pfeil kann nicht an zwei Orten zugleich sein. Er ist aber zu jeder Zeit an einem Ort. Also kann es nicht sein, dass er sich von einem Ort zum anderen bewegt.

Aristoteles kommt durch die Zenon'schen Paradoxien zu dem Schluss, dass das Kontinuum nicht aus Unteilbarem zusammengesetzt sein darf, dass es nicht aus Atomen bestehen kann. Zusätzlich lehnt Aristoteles aus diesem Grund ab, dass es aktuelle Unendlichkeit geben kann. Er sieht nur potentielle Unendlichkeit als möglich an. Die späteren Philosophen folgen ihm darin nicht immer. Im Mittelalter wird aktuelle Unendlichkeit durchaus als möglich angesehen. Als

¹Siehe [52], Proportionenlehre.

²Siehe [31], Buch V.

³Siehe [31], Buch V, Def. 5.

⁴Vgl [2], [3], Kapitel 9.

Begründung wird angeführt, dass die Bewegungsbahn einer rollenden Kugel als zusammengesetzt aus unendlich vielen Berührungspunkten zu betrachten ist.

Auch Galileo Galilei weist die Sicht Aristoteles' zurück und konnte sich ein aus unendlich vielen Atomen zusammengesetztes Kontinuum durchaus vorstellen. Er versucht auch Gleichheit u.a. für unendliche Gesamtheiten zu definieren, und bringt damit viele Schwierigkeiten zutage⁵. Leibniz und Newton entwickelten unabhängig voneinander die Differentialrechnung. Leibniz arbeitet damals mit „unvergleichlich kleinen Größen“. Diese können als Infinitesimale interpretiert werden. Seine Argumentation kann mit Hilfe der modernen Non-Standard-Analysis belegt werden. Leibniz und Newton greifen auch Ideen von Eudoxos und Archimedes wieder auf, die dadurch neu verstanden werden konnten⁶.

Im 19. Jahrhundert beginnt die Arithmetisierung des Kontinuums. Cauchy definiert den Grenzwert durch die Relation zwischen reellen Zahlen. Das Rechnen mit Infinitesimalen, die zu dieser Zeit noch nicht präzise definiert waren, wird abgelöst vom Rechnen mit Grenzwerten. In der Physik werden stillschweigend weiter Infinitesimale verwendet, weil sie sich gut zum Rechnen eignen. Cantor, Dedekind, Weierstraß und andere versuchen, das Kontinuum auf die reellen Zahlen, und diese auf die natürlichen Zahlen zurückzuführen. Dedekind greift die Definition der Größenverhältnisse von Eudoxos auf⁷. An die Stelle der inkommensurablen Größenverhältnisse treten die Lösungen von Polynomen wie $x^2 - 2$, die keine rationale Lösung haben. Dedekind konstruiert Lösungen, indem er auf dem Körper der rationalen Zahlen \mathbf{Q} die Dedekind-Schnitte einführt, jeweils zwei disjunkte Mengen rationaler Zahlen, deren Vereinigung \mathbf{Q} ergibt. Die Dedekind-Schnitte lassen sich als vollständig archimedisch angeordneter Körper auffassen. Cantor und Méray führen die Punkte im Kontinuum als Folgen rationaler Zahlen ein, die konvergieren und deren Folgenglieder mit wachsenden Indizes verschwinden. Folgen, die sich nur durch eine Nullfolge unterscheiden, werden identifiziert. Diese Themen bringen Cantor dazu, sich mit Unendlichkeiten zu beschäftigen. Dies führt zu den Ordinal- und Kardinalzahlen und ist der Beginn der heutigen Mengenlehre. Eine dritte Weise, die rationalen Zahlen zu vervollständigen wird von Bolzano, Weierstraß und Bachmann entwickelt und erfolgt über Intervallschachtelungen⁸. Man stellte fest, dass diese drei Arten, die rationalen Zahlen zu vervollständigen, zu demselben archimedisch angeordneten Körper, nämlich den reellen Zahlen \mathbf{R} führte. Peirce bewundert Cantor sehr, besonders seine Mengenlehre und seine Theorie der Unendlichkeit. Dennoch ist er in den späteren Jahren mit Cantors Sicht über das Kontinuum nicht einverstanden. Peirce nennt die reellen Zahlen Pseudokontinuum. Die mathematische Disziplin, die sich schon zu Peirce Zeiten am meisten mit Kontinua beschäftigt, ist die Topologie. Er nennt diese mathematische Disziplin *Topics*, und beschäftigt sich intensiv mit Listing⁹, einem damals führenden Topologen. Da Peirce das Kontinuum unabhängig von einer Metrik, also einem Abstand charakterisieren

⁵Siehe [30], Continuity.

⁶Siehe [30], Continuity.

⁷Siehe [52], Kontinuum.

⁸Siehe [52], Kontinuum.

⁹Das Verhältnis von Listing und Peirce wird ausführlich von [53] behandelt.

will, versucht er über topologische Fragen Klarheit zu gewinnen. Von dieser Seite wird von einem Kontinuum gefordert, dass es zusammenhängend kompakt sei.

Die heutige Mathematik nimmt oft selbstverständlich an, dass das Kontinuum durch die reellen Zahlen vollständig beschrieben ist. Dennoch haben die Stimmen nicht aufgehört, die fragen, ob es nicht andere Beschreibungen des Kontinuums geben könne. Weyl schreibt 1918, dass die reellen Zahlen genauso voneinander isoliert sind wie die ganzen Zahlen. Das scheinbar Zusammenhängende, scheinbar Kontinuierliche der reellen Zahlen ist nach Weyl nicht durch diese gegeben, sondern durch auf ihnen definierte Strukturen, nämlich die Ordnung und die Topologie. Durch diese kann man stetige Funktionen auf ihnen definieren. In der konstruktiven Mathematik sind die Punkte des Kontinuums nicht in gleicher Weise voneinander isoliert wie in der klassischen Mathematik. In der Non-Standard-Analysis werden die reellen Zahlen durch Infinitesimale verdichtet.

1.2 Der Einfluss von Aristoteles, Leibniz und Kant auf Peirce' Vorstellungen des Kontinuums

Peirce' Sicht des Kontinuums ist sowohl von Mathematikern, als auch von Philosophen beeinflusst. Mit Aristoteles' Philosophie¹⁰ und Logik hat sich Peirce ausführlich beschäftigt; er weist bei seinen Untersuchungen über das Kontinuum ausdrücklich auf ihn hin. Leibniz wird oft mit Peirce verglichen und hat in mancher Hinsicht ein ähnliches philosophisches Programm wie Peirce. Kant war der philosophische Ausgangspunkt von Peirce¹¹.

1.2.1 Zur aristotelischen Sicht des Kontinuums

Die aristotelische Sicht des Kontinuums ist u.a. in dem sechsten Buch der Physik (*Z*) dargestellt¹². Aristoteles unterscheidet am Anfang des Buches *Z* drei Arten der Relation zwischen Stücken, nämlich die *Aufeinanderfolge*, die *Berührung* und den *Zusammenhang*. Dabei ist die *Aufeinanderfolge* dadurch charakterisiert, dass zwischen den Stücken kein artgleiches liegt. Die *Berührung* ist dadurch charakterisiert, dass die Enden der Stücke miteinander ortsgleich sind. Der *Zusammenhang* ist für das Kontinuum typisch¹³. Bei dem *Zusammenhang* sind die Enden der Stücke zu einer Einheit verschmolzen. Durch diese Eigenschaft ist das Kontinuum zu einem Ganzen vereint. Aus dieser Charakteristik ergibt sich nach Aristoteles die

¹⁰Ich danke Jan Markus Pinju für sprachliche Hilfe bei altgriechischer Literatur.

¹¹Der Einfluß von Aristoteles und Kant wurde schon in der Lizentiatsarbeit [133] untersucht.

¹²Eine ausführlichere Untersuchung zu diesem Thema findet sich in [122]. Schramm untersucht an dieser Stelle Aristoteles' Lösungen der Zenon'schen Paradoxien mit besonderer Berücksichtigung seiner Bewegungslehre.

¹³Siehe [2], Buch VI, 231a, 21-23.

Unmöglichkeit des Aufbaus eines Kontinuums aus unteilbaren Gliedern, etwa einer Linie aus Punkten, wenn ja die Linie ein Kontinuum und der Punkt unteilbar ist¹⁴. [2], Buch VI, 231a, 24-26.

Mit dieser Sicht stimmt Peirce überein, er löst das Problem in seiner kantianischen Periode durch sogenannte „potentielle Punkte.“ Diese Punkte, die keine bestimmte Identität haben, lassen sich in gewissem Sinn sogar teilen. Man kann Peirce' Punkte als infinitesimale Intervalle auffassen. So können sie sich berühren, ohne aus infinitesimaler Sicht miteinander ortsgleich zu sein.

Aristoteles begründet seine Sicht, dass das Kontinuum nicht aus Unteilbarem aufgebaut sein kann damit, dass Punkte keine Enden haben, an denen sie miteinander verschmelzen können; sie sind unteilbar; sind Punkte auf eine solche Art und Weise in Zusammenhang, dass sie ortsgleich sind, so kann aus ihnen kein ausgedehntes Kontinuierliches zusammengesetzt sein, sondern nur ein einzelner Punkt ohne Ausdehnung, an dem viele ortsgleiche Punkte übereinanderliegen.¹⁵

Daraus folgert Aristoteles, dass das Kontinuum immer weiter teilbar sein muss. Er schreibt:

Kontinuität heißt uneingeschränkte Teilbarkeit¹⁶. [2], Buch VI, 232b, 24-25.

Sowohl Peirce in seiner ersten Phase als auch Aristoteles beschäftigen sich mit den Paradoxien Zenons. Aristoteles löst sie auf durch die Unterscheidung von Teilungsunendlichkeit und Ausdehnungsunendlichkeit¹⁷. Aristoteles versucht zu zeigen, dass Endlichkeit im Sinn von Ausmeßbarkeit und Unendlichkeit im Sinn von Unendlich-oft-teilbar-sein einander nicht ausschließen. Schramm¹⁸ weist darauf hin, dass Aristoteles den Unterschied zwischen Kompaktheit und Dichte zwar nicht kannte oder nicht belegt habe, aber dennoch vorsichtig genug war, nicht von Dichte auf Kompaktheit zu schließen. Als Mangel seiner Widerlegung der Zenon'schen Paradoxien nennt Schramm, dass er die Möglichkeit eines Widerspruchs auch mit seiner Unterscheidung zwischen Ausdehnungsunendlichkeit und Teilungsunendlichkeit nicht ganz ausschließt, weil er an dieser Stelle den Zusammenhang zwischen endlich Ausmessbarem und unendlich Teilbarem nicht ergründet. Im Buch Θ geht Aristoteles dieser Frage nach, aber nach Schramm mit wissenschaftlich unzureichenden Mitteln¹⁹.

Sowohl die Zeit, als auch der Raum sind nach Aristoteles kontinuierlich: Wenn die Zeit ein Kontinuum darstellt, so muss es auch die Ausdehnung tun, da ein Körper in der Hälfte der Zeit auch bloß die Hälfte des Weges zurücklegt.

¹⁴Auf griechisch findet sich das Zitat in [3] und lautet: ἀδύνατον ἐξ ἀδιαίρετων εἶναι τι συνεχές, οἷον γραμμὴν ἐκ στιγμῶν, εἴπερ ἡ γραμμὴ μὲν συνεχές, ἡ στιγμή δὲ ἀδιαίρετον.

¹⁵Siehe [2], Buch VI, 231a, 26-29.

¹⁶Auf griechisch findet sich das Zitat in [3] und lautet:

λέγω δὲ συνεχές τὸ διαίρετόν εἰς αἰεὶ διαίρετά·

¹⁷Siehe [2], Buch VI, 233a, 27.

¹⁸Siehe [122], S. 61.

¹⁹Siehe [122], S. 61.

Die Teilungsabschnitte, so schreibt Aristoteles, sind in der Zeit und im Weg dieselben. Ist eines von beiden unendlich, so ist es auch das andere und zwar jeweils in demselben Sinn. Ist also die Zeit unendlich teilbar, so auch der Weg, ist die Zeit unendlich ausgedehnt, so auch der Weg²⁰. Des weiteren betont Aristoteles, dass Kontinuität für die Zeit unerlässlich sei²¹. Auch diese Sicht findet sich bei Peirce wieder, der in seiner letzten Phase die Untersuchung des Kontinuums auf einer Analyse der Zeit aufbaut.

Auf das Argument Zenons, dass in endlicher Zeit nicht unendlich viele Wegstücke durchlaufen werden können, antwortet Aristoteles deshalb, dass unendlich Ausgedehntes sich nicht in endlich langer Zeit durcheilen lässt. Es lasse sich aber sehr wohl eine unendlich teilbare Strecke in endlich langer Zeit zurücklegen, da auch diese endlich lange Zeit unendlich teilbar sei²².

Bei der Analyse der Zeit wird der Gedanke der unendlichen Teilbarkeit des Kontinuums nochmals ergänzt. Aristoteles stellt fest, dass ein Jetzt in der Zeit enthalten sei. Das Jetzt charakterisiert er folgendermaßen:

Denn es gibt eine Grenze der Vergangenheit, über welche keine Zukunft übergreift, und ebenso eine Grenze der Zukunft, über welche keine Vergangenheit übergreift. Sie ist also, wie wir sagen, die Grenze von beiden²³. [2], Buch VI, 233b, 35-234a3.

Aristoteles sagt außerdem, dass dieses Jetzt unteilbar sei, wenn es die oben genannten Eigenschaften habe. Die Grenzen von Zukunft und Vergangenheit müssen identisch sein, denn läge etwas Ausgedehntes zwischen ihnen, so wäre dies Zeit, und diese wäre wiederum teilbar. Man erhielte so ein Jetzt, das wiederum aus Vergangenheit und Zukunft bestünde und unendlich teilbar wäre. Das könne aber nicht sein.

Peirce kommt hier zu einer etwas anderen Lösung als Aristoteles. Das Jetzt ist seiner Ansicht nach aus endlicher Sicht nicht ausgedehnt, aber dennoch ein infinitesimales Intervall. Denn gäbe es im Kontinuum bestimmbare Jetztzeitpunkte, die unteilbar wären, so könnte man sich das Kontinuum vielleicht wieder zusammengesetzt aus Unteilbarem denken. Auch sei das Entstehen von Bewegung in einem infinitesimalen Intervall leichter zu denken. In diesem infinitesimalen Zeitraum würde eine infinitesimale Strecke im Raum zurückgelegt.

Wegen der obigen Beschreibung muss das aristotelische Jetzt unteilbar sein und die Grenzen von Vergangenheit und Zukunft müssen identisch im Jetzt zusammenfallen. Aristoteles bedenkt auch die Bedeutung des Jetzt und des unendlich Teilbaren für Bewegung und Veränderung. Im Jetzt kann kein Spielraum für Bewegung sein und kein Spielraum für Ruhe, da Ruhe und Bewegung das Vorher benötigt. Aristoteles schreibt außerdem:

²⁰Siehe [2], Buch VI, 233a, 14-21.

²¹[2], Buch VI, 232b, 25.

²²Siehe [2], Buch VI, 233a, 10-20.

²³Auf griechisch findet sich das Zitat in [3] und lautet: ἔστιν γὰρ ἔσχατον τοῦ γεγονότος, οὐ ἐπὶ τὰδε οὐθέν ἐστι τοῦ μέλλοντος, καὶ πάλιν τοῦ μέλλοντος, οὐ ἐπὶ τὰδε οὐθέν ἐστι τοῦ γεγονότος· ὁ δὴ φάμεν ἀμφοῖν εἶναι πέρασ.

Jeder Gegenstand, der einen Prozeß soll durchmachen können, muß teilbar sein²⁴. [2], Buch VI, 234b, 10.

Die Teilungsweise, welche die Prozesszeit, die Veränderung und den Prozess des Gegenstandes als solchen betreffen, müssen gleich sein²⁵. Damit ist dasselbe gemeint, was in der Beschreibung über die unendliche Teilbarkeit des Raumes im Vergleich mit der unendlichen Teilbarkeit der Zeit beschrieben ist. Halbiert man die Zeit, so ist auch die Veränderung zur Hälfte fortgeschritten.

Der von Aristoteles beschriebene Jetztpunkt hat auch Ähnlichkeiten mit den „potentiellen Punkten“ bei Peirce. Auch bei Aristoteles sind diese Punkte nicht schon bestimmt, sondern potentiell vorhanden. Ein Prozess, so versuchte Aristoteles zum Beispiel zu zeigen, komme zu einem genau bestimmten Zeitpunkt zum Stillstand²⁶. Man könnte also sagen, dass der Prozess im Kontinuierlichen einen Zeitpunkt erst bestimmt, dies würde Peirce auch für Zeitpunkte wünschen.

1.2.2 Zur Leibniz'schen Sicht des Kontinuums

In diesem Abschnitt soll zunächst die Verbindung Leibniz' mit Peirce anhand einiger Zitate und einem Artikel von Max Fisch dargelegt werden. Anschliessend sollen, einem Artikel von Breger folgend, die Eigenschaften des Leibniz'schen Kontinuums kurz skizziert werden.

Peirce hört schon in seiner Jugend von Leibniz. Sein Vater war Mathematiker und ein führendes Mitglied des Cambridge Scientific Club, in dem öfter Treffen zu dem Thema Leibniz stattfanden. Peirce' Lehrer Francis Bowen sieht viele wissenschaftliche Entdeckungen des 19. Jahrhunderts bei Leibniz vorbereitet. Peirce' Vater, der ein Buch über analytische Mechanik geschrieben hat, argumentiert in einem Appendix für die Rückkehr zu Leibniz' Theorie der Bewegung von Körpern. Etwas später, noch im College beschäftigt sich Peirce intensiv mit Kants Kritik der reinen Vernunft und liest auch Leibniz erneut, um Kant besser zu verstehen²⁷.

Peirce vergleicht sich, wie Max Fisch im ersten Teil seines Artikels²⁸ erklärt, mehrfach mit Leibniz. Er wird auch von Zeitgenossen, die ihn gut kannten, mit Leibniz verglichen. Einmal tut er das scherzhaft in einer Skizze zu einem Brief an Francis C. Russell. Peirce will eine Kritik an dem Pragmatisten James, um ihn nicht zu kränken, unter anderem Namen veröffentlichen und hatte Russell gebeten, die Kritik unter seinem Namen im *Monist* mit Einverständnis des Herausgebers Carus zu veröffentlichen²⁹. Francis C. Russell hat ihm geantwortet, worauf Peirce wiederum antworten wollte. In einem Entwurf zu einer Antwort vergleicht er sich folgendermassen mit Leibniz:

²⁴Auf griechisch findet sich das Zitat in [3] und lautet: *Τὸ δὲ μεταβάλλον ἅπαν ἀνάγκη διαιρετὸν εἶναι.*

²⁵Siehe [2], Buch VI, 235a, 15ff.

²⁶Siehe [2], Buch VI, 236a, 1-5.

²⁷[33], S. 252.

²⁸[33], S. 249 - 252.

²⁹Dies wird ausführlicher in [33], S. 249 geschildert.

As to what you say about me, partly seriously, strictly *sub rosa* I hold that a man of 65, well read in philosophy & a thinker himself must be a precious fool or be able to place himself better than anybody else can do, and I place myself somewhere about the real rank of Leibniz. [60], MS L 387, cit. in: [33], S. 249.

Er betont später, dass sich sein scherzhafter, halberner Vergleich nur auf die Logik beziehen soll. Auch gibt er zu bedenken, dass Leibniz keine Vorläufer gehabt hat, während Boole und de Morgan sehr wohl kurze Zeit vorher an ähnlichen Dingen wie er gearbeitet hätten. Später vergleicht sich Peirce nochmals mit Leibniz, diesmal durchaus ernsthaft. Dies tut er wieder in einem Entwurf für einen Brief, den er 1909 vermutlich an Abbot Lawrence Lowell schreibt, der seit kurzem Rektor der Universität Harvard geworden war. Peirce äusserte in diesem Brief, dass er seine Fähigkeiten in Logik korrekt einschätzen und einordnen möchte, weder zu hoch, noch zu tief. Dann schreibt er:

Now I am well acquainted & deeply read in the whole literature of the subject in the widest sense & and have so carefully studied the question that personally concerns me, that I feel sure I can have made no great mistake about it; and the only writers known to me who are in the same rank as I are Aristotle, Duns Scotus, and Leibniz, the three greatest logicians in my estimation, although some of the most important points escaped each. [60], MS L 482, cit. in: [33], S. 250.

Er fährt fort, indem er betont, dass Leibniz und Aristoteles auch in anderer Hinsicht großartiges geleistet haben, er sich aber mit ihnen nur bezüglich der Logik vergleichen wolle. Später in dem Briefentwurf fragt er, ob er sich weiterhin so ausschließlich der Logik widmen soll, obwohl er so wenig Unterstützung habe. Er stellt sich die Frage, ob es gerechtfertigt sei, für seine Arbeit in Logik finanzielle Unterstützung zu suchen, insbesondere für sein Projekt „Logic considered as Semiotic“.

Max Fisch schreibt, dass dies seines Wissens nach die einzigen Stellen seien, in denen Peirce sich bezüglich seiner Fähigkeiten mit Leibniz verglichen hat³⁰.

Bei dem folgenden Vergleich von Leibniz' und Peirce' Sicht des Kontinuums wird Bregers Artikel „Le Continu chez Leibniz“ herangezogen. Die philosophische Anwendung, die beiden ein Anliegen war, wird ausgehend von Fisches Artikel untersucht.

Breger charakterisiert das Leibniz'sche Kontinuum durch sechs Aussagen, die von Laugwitz wie folgt übersetzt wurden:

1. Das Kontinuum ist als Ganzes gegeben; es ist nicht aus Punkten zusammengesetzt.
2. Die Punkte und die Teile erscheinen im Kontinuum nur durch die Handlung des Mathematikers, der im Verlauf seiner Konstruktionen die Teilung

³⁰Vergleiche [33], S. 251.

des Kontinuums ausführt; in einem eindimensionalen Kontinuum ist das äusserste eines Teiles ein Punkt.

3. Das Kontinuum ist beliebig teilbar, doch können niemals alle möglichen Teilungen gleichzeitig ausgeführt werden.
4. Zerlegt man das Kontinuum in zwei Teile, (welche ihrerseits wieder Kontinua sein müssen), so dass die beiden Teile etwas Gemeinsames haben, so ist dies ein neues Kontinuum oder zumindest ein Punkt.
5. Die unendlich kleinen Größen sind Fiktionen. Weder kann man im Kontinuum unendlich kleine Größen finden, noch kann man solche durch eine Konstruktion bestimmen.
6. Die Gleichheit ist eine unendlich kleine Ungleichheit. [47], S. 269, [14], S. 76-80.

Heute sind wir gewohnt, das Kontinuum aus Punkten zusammengesetzt zu denken. Sowohl Peirce als auch Leibniz sind nicht dieser Ansicht. Aus den ersten vier der obigen Aussagen lässt sich folgern, dass jedes Kontinuum seine Extrempunkte enthält. Peirce überlegt, dass eine Strecke, in zwei Abschnitte geteilt, auf beiden Seiten den Extrempunkt enthalten soll, der dadurch verdoppelt wird. Peirce und Leibniz sind der Ansicht, dass Punkte im Kontinuum erst dadurch erscheinen, dass sie durch Teilung nachträglich eingeführt werden. Beide haben sich intensiv mit Infinitesimalen auseinandergesetzt, schreiben ihnen jedoch einen verschiedenen ontologischen Status zu³¹. Statt das unendlich Kleine in der Natur anzunehmen, zieht es Leibniz vor, mit unvergleichbar kleinen Größen zu rechnen, von denen nicht behauptet werden muss, dass sie unendlich klein sind³². Peirce und Leibniz sind jedoch nicht nur beide herausragende Logiker, sondern es gibt noch viel mehr, was sie verbindet. Beide haben ähnliche Vorhaben. Peirce versucht in seiner Semiotik und in seinem Synechismus Grundprinzipien zu erfassen, die universelle Bedeutung haben sollen. Sie sollen sowohl in der Philosophie, als auch in der Naturwissenschaft Anwendung finden. Leibniz versucht ein universelles Kalkül zu entwickeln, und die Bedeutung des Kontinuitätsprinzips herauszustellen. Die Hierarchien von Monaden sollen kontinuierlich abgestuft sein. Leibniz denkt auch, diese Welt sei die beste aller möglichen Welten und versucht, seine Erkenntnisse aus der Differentialrechnung auf die Metaphysik anzuwenden. Das Kontinuitätsprinzip soll sowohl in der Metaphysik Anwendung finden, als auch in der Physik. Leibniz schreibt dazu in einem Brief an Varignon von 1702 folgendes:

Die Allgemeingültigkeit dieses Prinzips in der Geometrie hat mich bald einsehen lassen, daß es auch in der Physik seinen Platz haben

³¹Dies wäre noch genauer zu untersuchen. Peirce hatte einen sehr differenzierten Realitätsbegriff. Für ihn waren zum Beispiel Gesetze real, da sie im Hier und Jetzt Wirkung zeigen, dadurch, dass der Verlauf eines Ereignisses durch das Gesetz im voraus zumindest teilweise festgelegt ist. Bei Leibniz haben die Monaden und die physikalische Welt einen verschiedenen ontologischen Status.

³²Siehe [48], S. 251.

muß; sehe ich doch, daß, damit Regelmäßigkeit und Ordnung in der Natur herrsche, es notwendig ist, daß die Physik mit der Geometrie in andauernder Harmonie sein muß, und daß das Gegenteil einträte, wenn da, wo die Geometrie Kontinuität verlangt, die Physik eine plötzliche Unterbrechung zuließe. Nach meiner Ansicht ist kraft metaphysischer Gründe alles im Universum derart miteinander verbunden, daß die Gegenwart stets mit der Zukunft schwanger geht und daß jeder Zustand nur durch den ihm unmittelbar vorangehenden auf natürliche Weise erklärbar ist.

Bei Peirce lassen sich Anwendungen des Leibniz'schen Kontinuitäts- oder Stetigkeitsprinzips finden, vermutlich das erste Mal ausdrücklich 1867. Fisch zitiert dazu aus einem 1867 geschriebenen Artikel von Peirce mit dem Titel "Upon Logical Comprehension and Extension"³³:

A philosophical distinction emerges gradually into consciousness; there is no moment in history before which it is altogether unrecognized, and after which it is perfectly luminous. [61] 2.392.

Eine damit eng verwandte Art, wie Peirce Kontinuität auf die Philosophie anwenden möchte, ist, dass er infinite Regresse explizit zuließ. So soll es keine ersten Prämissen geben, keinen ersten Gedanken, auf den wir zurückgreifen. Statt dessen kann es seiner Ansicht nach auch in endlicher Zeit eine unendliche Reihe von Gedanken, Schlussfolgerungen und Ähnlichem geben. Diese Gedanken beginnt er in *Questions concerning certain faculties claimed for Man* [76], er führt diese Überlegungen fort in *Some Consequences of four incapacities* [77]. In *The Law of Mind*³⁴ bemerkt er, dass diese Überlegungen der Beginn seines Synechismus gewesen sind. Peirce versucht auf viele Weise auch seine Forschungen über das Kontinuum in der Philosophie zu verwenden. In seiner späten Philosophie ist für Peirce die Realität der Gesetze und die Verbundenheit der Dinge untereinander zentral. Gesetze, die er als Gewohnheiten und als „Would-be's“ bezeichnet, stellen einen Zusammenhang zwischen den unter einem Gesetz stehenden möglichen Ereignissen her. Dieser Zusammenhang fußt auf einem kontinuierlichen Zusammenhang zwischen Gegenwart und Zukunft. Nennt ein Philosoph solche kontinuierlichen Zusammenhänge, also solche Kontinua real, so wird er von Peirce als Realist bezeichnet. Betrachtet er hingegen alle Gegenstände (Objects) der Welt als vereinzelt, als diskret, voneinander abgetrennt, so nennt Peirce ihn Nominalist³⁵.

Fisch schreibt über Leibniz, er sei von 1663 bis 1670 ausdrücklich Nominalist gewesen, sein Nominalismus habe sich dadurch gemildert, dass er sich von Hobbes' Idee, die Wahrheit vom menschlichen Willen abhängig zu machen, distanziert habe. Leibniz beginnt dann auch Scotus' Individuationsprinzip anders

³³Siehe [33], S. 253.

³⁴Siehe [78], S. 313.

³⁵Dies ist nur eine der Bedeutungen der Unterscheidung zwischen Nominalist und Realist. Peirce schien sie jedoch häufig zu verwenden, und sie wird auch von Vincent Potter verwendet in [117], *Peirce's pragmatic maxim: realist or nominalist*, S. 91.

zu sehen³⁶. Einen ähnlichen Weg macht auch Peirce durch, der zunächst Hobbes' Nominalismus sehr bewundert, bis er sich durch das Studium der Scholastiker und seine eigenen Studien in Logik davon überzeugte, dass man Universalien wie Gesetze und Möglichkeiten als real bezeichnen sollte³⁷.

1.2.3 Zur kantianischen Sicht des Kontinuums

Peirce ist vor allem in seinen jungen Jahren von Kant beeinflusst. So beschäftigt sich Peirce schon während seines Studiums am Harvard-College 1855 intensiv mit der *Kritik der reinen Vernunft*. Elisabeth Walther, die eine wichtige Biographie von Peirce geschrieben hat, führt an, dass Peirce von sich selbst behauptet, die *Kritik* in beiden Ausgaben fast auswendig gekannt zu haben³⁸. Peirce' Vater habe ihn auf logische Schwachstellen in der *Kritik* aufmerksam gemacht.

1864/65 beschäftigt sich Peirce intensiv mit den Kategorien Kants und sagt später, dass seine eigene Kategorienlehre aus der Auseinandersetzung mit den kantianischen Kategorien hervorgegangen sei³⁹. Peirce will zum einen theoretische und praktische Vernunft wieder verbinden, und zum anderen die Erkenntnistheorie so gestalten, dass Erkenntnis der Realität als möglich angesehen werden kann.

Betrachten wir nun die kantianische Sicht des Kontinuums anhand dreier Abschnitte der *Kritik der reinen Vernunft*:

Die erste zu untersuchende Stelle findet sich in der transzendentalen Analytik. Vor dem zu betrachtenden Abschnitt hat Kant Raum und Zeit als die Prinzipien, und die Kategorien als reine Verstandesbegriffe hergeleitet. Es geht darum, jene synthetisch apriorischen Urteile zu formulieren, die als transzendente Grundsätze des reinen Verstandes eine weitere Grundlage all unserer Erfahrungserkenntnis bilden. Die Grundsätze sind also Urteile, die immer schon vollzogen sind, wenn wir in unserer Erfahrungswelt empirisch erkennen. Bevor die Grundsätze des reinen Verstandes formuliert und belegt werden können, stellt Kant in den transzendentalen Schemata Vermittelnde zwischen Verstand und Sinnlichkeit vor. Die Erwähnung des Kontinuums findet sich unter dem Abschnitt *System aller Grundsätze des reinen Verstandes*. Dort werden die Grundsätze des reinen Verstandes angegeben, die sich aus der Anwendung der Kategorien auf die Zeitschemata ergeben. Einer der vier Typen untersuchter Grundsätze ist die „Antizipationen der Wahrnehmung“. Kant stellt dort fest:

In allen Erscheinungen hat das Reale, was ein Gegenstand der Empfindung ist, intensive Größe, d.i. einen Grad. [45], B 211.

Man könne also nach Kant antizipieren, d.h. a priori sagen, dass jeder Gegenstand der Empfindung einen Grad hat. Einen Grad haben bedeutet auch, eine Größe der Intensität haben, die vermindert werden kann. Kant sagt, dass

³⁶Vergleiche [33], S. 254.

³⁷Die Parallele wird in [33], S. 254 gezogen, in [34], S. 228 wird Peirce' Entwicklung mit Hilfe eines Zitats aus einem Brief von Peirce an Barnett vom 20. Dezember 1909 verdeutlicht.

³⁸Siehe [128], S. 40.

³⁹Siehe [128], S. 40.

zwischen Realität und Negation ein kontinuierlicher Zusammenhang besteht. Er spricht von kontinuierlichen Größen. Diese sind nach Kant charakterisiert dadurch, dass es keine kleinsten Teile, und auch keine kleinste Einheit von ihnen gibt, zum Beispiel kein kleinstes Maß an Helligkeit⁴⁰.

Sofort anschließend schreibt Kant über Raum und Zeit, die er als kontinuierlich ansieht:

Raum und Zeit sind *quanta continua*, weil kein Teil derselben gegeben werden kann, ohne ihn zwischen Grenzen (Punkten und Augenblicken) einzuschließen, mithin nur so, dass dieser Teil selbst wiederum ein Raum, oder eine Zeit ist. Der Raum besteht also nur aus Räumen, die Zeit aus Zeiten. Punkte und Augenblicke sind nur Grenzen, d.i. bloße Stellen ihrer Einschränkung; Stellen aber setzen jene Anschauung, die sie beschränken oder bestimmen sollen, voraus, und aus bloßen Stellen, als aus Bestandteilen, die noch vor dem Raume oder der Zeit gegeben werden könnten, kann weder Raum noch Zeit zusammengesetzt werden. [45], B 212.

Hier lässt sich eine Übereinstimmung mit Peirce finden. Auch Peirce sieht während seiner sogenannten kantianischen Periode und der nachcantorschen Periode Punkte und Augenblicke als Stellen der Einschränkung.

Kant schreibt weiterhin, dass alle Erscheinungen kontinuierliche Größen sind, sowohl der Anschauung als auch der bloßen Wahrnehmung nach⁴¹. Er fügt hinzu, dass bei aller Zahl die Einheit zugrundeliegen muss und die Erscheinung als Einheit ein Quantum ist und damit ein Kontinuum⁴².

Die zweite Stelle, in der Kant auf die Kontinuität eingeht, findet sich in der transzendentalen Analytik. Dort geht es um den zweiten der vier Typen von Grundsätzen, nämlich die „Analogie der Wahrnehmung“. Das gemeinsame Prinzip der Grundsätze von diesem Typ ist: „Erfahrung ist nur durch die Vorstellung einer notwendigen Verknüpfung der Wahrnehmung möglich“⁴³. Der zu beweisende Grundsatz lautet:

Alle Veränderungen geschehen nach dem Gesetze der Verknüpfung der Ursache und Wirkung. [45], B 233.

Bei der Untersuchung dieser Frage behandelt Kant auch die Kontinuität der Veränderung:

Also bringt diese Ursache ihre Veränderung nicht plötzlich (auf einmal oder in einem Augenblick) hervor, sondern in einer Zeit, so, dass, wie die Zeit vom Anfangsaugenblicke a bis zu ihrer Vollendung in b wächst, auch die Größe der Realität (b-a) durch alle kleineren Grade, die zwischen dem ersten und letzten enthalten sind, erzeugt wird.

⁴⁰[45], B 211.

⁴¹Siehe [45], B 212.

⁴²Siehe [45], B 212, 213.

⁴³[45], B 218.

Alle Veränderung ist also nur durch eine kontinuierliche Handlung der Kausalität möglich,... [45], B 254.

Als Grundlage dieses Gesetzes der Verknüpfung zwischen Ursache und Wirkung auf kontinuierliche Weise nennt Kant die Kontinuität der Zeit:

Das ist nun das Gesetz der Kontinuität aller Veränderungen, dessen Grund dieser ist: dass weder die Zeit, noch auch die Erscheinung in der Zeit, aus Teilen besteht, die die kleinsten sind, und dass doch der Zustand des Dinges bei seiner Veränderung durch all diese Teile, als Elemente, zu seinem zweiten Zustand übergehe. [45], B 255.

Die dritte zu betrachtende Stelle befindet sich in der transzendentalen Dialektik und handelt von der Auflösung der zweiten Antinomie der reinen Vernunft. Das Grundproblem der Antinomien ist, dass von der Welt gesprochen wird, als wäre sie ein gegebenes Ganzes. Die zugrundeliegende Idee der reinen Vernunft für die zweite Antinomie ist die der „absoluten Vollständigkeit der Teilung eines gegebenen Ganzen in der Erscheinung“⁴⁴. Die These der zweiten Antinomie lautet:

Eine jede zusammengesetzte Substanz in der Welt besteht aus einfachen Teilen, und es existiert überall nichts als das Einfache, oder das, was aus diesem zusammengesetzt ist. [45], B 462.

Die Antithese der zweiten Antinomie lautet:

Kein zusammengesetztes Ding in der Welt besteht aus einfachen Teilen, und es existiert überall nichts Einfaches in derselben. [45], B 463.

In der Welt der Erscheinung sind nach Kant Raum und Zeit als Formen der sinnlichen Anschauung vorgegeben. In der kontinuierlichen Welt der Erscheinung ist unendliche Teilung möglich, aber nicht schon gegeben. Für die Welt der Erscheinung ist also sowohl die These als auch die Antithese falsch. Kant schreibt dazu:

Die Teilung der Teile (subdivisio oder decompositio) ist ein Regressus in der Reihe dieser Bedingungen. Die absolute Totalität dieser Reihe würde nur alsdann gegeben sein, wenn der Regressus bis zu einfachen Teilen gelangen könnte. Sind aber alle Teile in einer kontinuierlich fortgehenden Dekomposition immer wiederum teilbar, so geht die Teilung, d.i. der Regressus von dem Bedingten zu seinen Bedingungen in infinitum; weil die Bedingungen (die Teile) in dem Bedingten selbst enthalten sind, und, da dieses in einer zwischen seinen Grenzen eingeschlossenen Anschauung ganz gegeben ist, insgesamt auch mitgegeben ist. [45], B 552.

⁴⁴[45], B 443.

Kant klärt außerdem, warum es seiner Meinung nach nicht richtig ist, zu behaupten, das Kontinuum bestehe aus unendlich vielen einfachen Teilen:

Denn obgleich alle Teile in der Anschauung des Ganzen enthalten sind, so ist doch darin *nicht die ganze Teilung* enthalten, welche nur in der fortgehenden Dekomposition, oder dem Regressus selbst besteht, der die Reihe allererst wirklich macht. Da dieser Regressus nun unendlich ist, so sind zwar alle Glieder (Teile), zu denen er gelangt, in dem gegebenen Ganzen als *Aggregate* enthalten, aber nicht die ganze *Reihe der Teilung*, welche sukzessivunendlich und niemals ganz ist, folglich keine unendliche Menge, und keine Zusammennehmung derselben in einem Ganzen darstellen kann. [45], B 553.

Da der Regress nach Kant nie in seiner Vollständigkeit vollzogen oder vorgestellt werden kann, liegt er nicht im Bereich der möglichen Erfahrung. Er kann deshalb kein konstitutives Prinzip sein, sondern nur, wie jedes Vernunftsprinzip, ein regulatives⁴⁵.

1.3 Phasen in der Entwicklung der Vorstellung des Kontinuums bei Peirce

Peirce lebte in der Zeit der Arithmetisierung des Kontinuums. Weierstraß und andere ersetzen in dieser Zeit das Rechnen mit Infinitesimalen durch das Rechnen mit Grenzwerten, die man damals theoretisch präziser fassen konnte. Peirce hält aber an den Infinitesimalen fest, und vergleicht sie mit den imaginären Zahlen. Wichtig für seine Entwicklung ist auch Cantor. Peirce hofft zunächst, mit Hilfe der Cantor'schen Theorie des Unendlichen das Kontinuum erfassen zu können. Dabei stimmt er erst dem zu, was wir heute reelle Zahlen nennen, um später diese als Pseudokontinuum zu bezeichnen.

In dem Artikel von Potter und Shields von 1977 [116] werden Definitionen oder Beschreibungen des Kontinuums verschiedenen Datums vorgestellt, und so die Peirce'schen Forschungen zum Kontinuum in vier Zeitabschnitte unterteilt⁴⁶:

1. Periode bis 1884: vorcantorsch,
2. Periode 1884-1894: cantorsch,
3. Periode 1895-1908: kantianisch,
4. Periode 1908-1911: nachcantorsch.

⁴⁵Siehe [45], B 538, 539.

⁴⁶Dieser Artikel wird später von Potter neu überarbeitet [117], *Peirce on Continuity*. Auch Myrvold greift in seinem Artikel [54] die Unterteilung von Potter und Shields auf.

1.3.1 Vorcantorsche Periode

In der vorcantorschen Periode charakterisiert Peirce das Kontinuum als „dasjenige, wessen Teile wieder in demselben Sinn Teile hat“⁴⁷. Darin, dass die Teile eines Kontinuums, also z. B. einer Geraden selbst Kontinua sind, sieht er, wie vor ihm Aristoteles, die Lösung der Zenon’schen Paradoxien⁴⁸. Es ist jedoch nicht klar, ob er diese Eigenschaft mit unendlicher Teilbarkeit identifiziert, da er an anderer Stelle schreibt:

a continuous system is one, in which every quantity greater than another is also greater than some intermediate quantity greater than that other. [61] 3.256.

Weiterhin nennt er den Übergang kontinuierlich, wenn er graduell unmerklich erfolgt⁴⁹.

Es genügt jedenfalls nicht, das Kontinuum nur durch die unendliche Teilbarkeit zu definieren, diese Eigenschaft haben schon die rationalen Zahlen. Potter und Shields weisen darauf hin, dass damit nicht garantiert wäre, dass zwei sich kreuzende Geraden einen Punkt gemeinsam haben⁵⁰. Wären auf einer der beiden Geraden die reellen Zahlen angeordnet, so könnte die Gerade zum Beispiel im Punkt $\sqrt{2}$ geschnitten werden, und an diesem Punkt würde sich keine rationale Zahl befinden.

1.3.2 Cantor’sche Periode

1884 liest Peirce Cantors *Grundlagen Einer Allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* [21] im zweiten Band der *Acta Mathematica*. Diese Lektüre verändert seine Sicht über das Kontinuum grundlegend und führt zur Cantor’schen Periode. Peirce ist von Cantor fasziniert, der sich sowohl philosophisch, als auch mathematisch Gedanken zum Kontinuum macht. Cantor schreibt den Zahlen zum Beispiel zwei Arten von Wirklichkeit zu⁵¹. Die eine nennt er *intrasubjektiv* oder *immanent*, die andere *transsubjektiv* oder *transient*. Zahlen sind intrasubjektiv wirklich, da sie, wie Cantor schrieb, in unserem Geiste durch Definitionen einen bestimmten Platz einnehmen, von anderen Bestandteilen unterschieden sind, und zu ihnen in Beziehung stehen, und auf diese Art und Weise die Substanz unseres Geistes modifizieren. Transsubjektiv wirklich sind sie, da sie nach Cantor für einen Ausdruck oder ein Abbild von Vorgängen und Beziehungen der dem Intellekt gegenüberstehenden Außenwelt gehalten werden müssen. Dabei bemerkt Cantor, dass seine Zahlenklassen (I), (II), (III) u.s.w. Repräsentanten von Mächtigkeiten sind, die in der Natur tatsächlich vorkommen. Die Zahlenklassen sind wohl am ehesten als Ordinalzahlen mit der Mächtigkeit \aleph_0 bzw.

⁴⁷Das Zitat findet sich auf englisch in: [61], 3.335 und lautet: That, every part of which has parts, in the same sense.

⁴⁸Siehe [61], 3.335.

⁴⁹Siehe [61], 2.646.

⁵⁰Siehe [116], S. 21.

⁵¹Für den folgenden Abschnitt siehe [21], S. 181. Cantor verwendet hier „Wirklichkeit“ und „Realität“ wohl synonym.

2^{\aleph_0} bzw. $2^{2^{\aleph_0}}$ aufzufassen. Diese Überlegungen nennt Cantor idealistische und realistische. Er nimmt an, dass die beiden Arten von Realität sich zusammenfinden in dem Sinn, dass ein als intrasubjektiv zu bezeichnender Begriff immer in gewissen, sogar unendlich vielen Beziehungen auch eine transiente Realität besitzt. Die Feststellung dieser Realität gehört nach Cantor zu den schwierigsten Problemen der Metaphysik. Dabei ist Peirce vermutlich zum einen durch die Kombination aus mathematischem Vorgehen und philosophischen Fragen angesprochen worden, zum anderen durch die Überlegungen über die intrasubjektive und transsubjektive Realität, die Peirce' ähnlich zu sein scheinen. Das Zusammentreffen der intrasubjektiven und der transsubjektiven Wirklichkeit ist ein Aspekt der pragmatischen Maxime. Peirce setzt das Zusammentreffen der beiden Realitäten voraus, da sonst Forschen keinen Erfolg haben könnte.

Nachdem Peirce Cantors *Grundlagen Einer Allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* gelesen hat, ist er einverstanden, das Kontinuum zu definieren als eine Menge, die bestimmte Bedingungen erfüllt. Peirce geht dabei von den Bedingungen aus, die Cantor nennt, und modifiziert sie⁵².

Definition 1.1 Eine Menge $A \subset \mathbf{R}^n$ heißt perfekt, wenn

1. die Umgebung jeder ihrer Punkte unendlich viele Elemente von A enthält und wenn
2. all diejenigen Punkte, deren Umgebungen unendlich viele Punkte von A enthalten, in A enthalten sind,

also, wenn die Menge abgeschlossen und dicht in sich selbst ist.

Zu einem Kontinuum gehört es jedoch auch, dass es nicht zerlöchert sein darf. Die Menge $\left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}, c_n \in \{0, 2\} \text{ für alle } n \in \mathbf{N} \right\}$ ist perfekt, aber enthält $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ nicht, wie auch das mittlere Drittel der anderen beiden Intervalle, so dass die Menge unendlich viele „Löcher“ hat.

Definition 1.2 Eine Menge $A \subset \mathbf{R}^n$ heißt verkettet⁵³, wenn es für beliebige Punkte P und Q der Menge und für eine beliebig kleine reelle Zahl ε endlich viele Punkte P_1, \dots, P_n gibt, so dass die Abstände zwischen P und P_1 ; P_1 und P_2 ; P_2 und P_3 ; ...; P_{n-1} und P_n ; P_n und Q jeweils kleiner sind als ε .

Nun kann das Cantor'sche Kontinuum definiert werden.

Definition 1.3 Eine Menge X heißt ein (Cantor'sches) Kontinuum, wenn sie perfekt und verkettet ist.

Diese Definitionen verwenden den Abstandsbegriff, und stellen daher metrische Definitionen dar.

Obwohl Peirce die Cantor'sche Definition für die zu dieser Zeit beste hielt, kritisiert er manches an ihr. Er schreibt 1893:

⁵²Für die Ausführungen über die Cantor'sche Periode, siehe [54] S. 519-524.

⁵³Cantor nennt solche Mengen zusammenhängend. Siehe [21], S. 194.

Nevertheless, it has some serious defects. In the first place, it turns upon metrical considerations; while the distinction between a continuous and discontinuous series is manifestly non-metrical. In the next place, a perfect series is defined as one containing “every point” of a certain description. But no positive idea is conveyed of what all the points are: that is definition by negation, and cannot be admitted. If that sort of things were allowed, it would be very easy to say, at once, that the continuous series of points is one which contains every point on the line between its extremities. Finally, Cantor’s definition does not convey a distinct notion of what the components of the conception of continuity are. It ingeniously wraps up its properties in two separate parcels, but does not display them to our intelligence⁵⁴. [61], 4.121.

Peirce kritisiert in seinem Zitat als erstes, dass der topologische Begriff Kontinuum metrisch definiert ist. Die Perfektheit kann problemlos auch topologisch ausgedrückt werden. Der Begriff der Verkettung dagegen ist wesentlich mit dem Abstands begriff verknüpft. Im n -dimensionalen Raum der reellen Zahlen, \mathbf{R}^n , haben wir eine genaue Vorstellung davon, was Abstand ist. In diesem Raum beinhaltet die Topologie also den Abstands begriff. Auch von stetigen Funktionen haben wir eine genaue Vorstellung. Funktionen, die reellen Zahlen reelle Zahlen zuordnen, sind dann stetig, wenn wir gewissermassen den Stift nicht absetzen müssen, wenn wir ihren Graphen zeichnen. Die Definition Cantors von Perfektheit bezieht die metrische Topologie des \mathbf{R}^n ein. Die Punkte, in deren Umgebungen sich unendlich viele Punkte befinden, sind dann genau diejenigen, die der Grenzwert jeweils einer unendlichen Folge sind. Peirce hätte diese Begriffe gerne definiert, ohne sich auf einen Raum festzulegen. Peirce will das Kontinuum nämlich anhand von intrinsischen, vom jeweiligen Raum unabhängigen Eigenschaften charakterisieren.

Peirce schlägt dann eine andere Definition vor: Das Kontinuum soll eine lineare Ordnung sein, die entsprechend untenstehender Definition zwei Bedingungen erfüllt. Dabei heißt ein Paar (X, \leq) ⁵⁵ *lineare Ordnung*, wenn die Relation \leq reflexiv, symmetrisch und transitiv ist und mittels ihrer je zwei beliebige Elemente $x, y \in X$ verglichen werden können, so dass man sagen kann, $x \leq y$, oder $y \leq x$.

Definition 1.4 *Eine lineare Ordnung (X, \leq) heiÙe kantisch, bzw dicht, wenn zwischen zwei Punkten jeweils ein dritter liegt.*

Eine lineare Ordnung (X, \leq) heiÙe aristotelisch bzw vollständig, wenn jede nichtleere Teilmenge, die eine obere Schranke hat, eine kleinste obere Schranke hat.

⁵⁴Die Datierung wurde im Artikel von Potter und Shields angegeben, das Zitat findet sich in: [61], 4.121.

⁵⁵Mit dem Begriff Menge ist hier der naive Mengenbegriff gemeint, also eine Ansammlung von nicht zu vielen Objekten .

Definition 1.5 Eine lineare Ordnung (X, \leq) heie Kontinuum genau dann, wenn sie kantisch und aristotelisch sei, also wenn sie dicht und vollständig ist.

Cantors Definition und Peirce' Definition sind nicht quivalent. Für eine Teilmenge A von \mathbf{R} lässt sich zeigen, dass sie dicht in \mathbf{R} liegt, falls sie verkettet ist. Denn zwischen zwei Punkten muss ein Dritter liegen, damit man für jedes ε eine Kette von Punkten mit einem Abstand kleiner ε zwischen den beiden Punkten bilden kann. Jede abgeschlossene Teilmenge von \mathbf{R} ist vollständig, da in einer abgeschlossenen Menge alle Häufungspunkte enthalten sind. Ist eine Teilmenge der reellen Zahlen also ein Cantor'sches Kontinuum, so ist sie auch ein Peirce'sches Kontinuum der Cantor'schen Periode. Umgekehrt gilt dies nicht. Es gibt Teilmengen von \mathbf{R} , die dicht und vollständig sind, aber kein Cantor'sches Kontinuum. Die Menge, die entsteht, wenn man aus \mathbf{R} das halboffene Intervall $(0, 1]$ herausnimmt, ist ein Beispiel dafür. Sie enthält nicht alle ihre Häufungspunkte, ist also nicht abgeschlossen. Sie ist auch nicht verkettet, da zwischen 0 und $1 + \delta$ für ein beliebiges δ keine Kette von Punkten mit einem Abstand kleiner als $\frac{1}{2}$ gefunden werden kann, die die beiden Punkte 0 und $1 + \delta$ verbindet⁵⁶.

Dedekinds Definition von 1872 ist quivalent zu der von Peirce⁵⁷. Dedekind geht wie Peirce von einer linearen Ordnung auf der Menge X aus.

Definition 1.6 Ein Dedekind'scher Schnitt ist definiert als ein Paar (A, B) von disjunkten, nichtleeren Teilmengen von X , so dass gilt

1. Jedes $x \in A$ ist kleiner als jedes $y \in B$.
2. $A \cup B = X$.

Definition 1.7 Ein Element $x \in X$ heißt Schnittpunkt von (A, B) genau dann, wenn x entweder der größte Punkt von A , oder der kleinste Punkt von B ist.

Dedekind nennt eine Menge X kontinuierlich genau dann, wenn X genau einen Schnittpunkt hat. Er nennt dies die Essenz der Kontinuität. Dedekinds Definition des Kontinuums lässt sich in zwei Abschnitte zerteilen:

1. Jeder Schnitt hat höchstens einen Schnittpunkt
2. Jeder Schnitt hat mindestens einen Schnittpunkt.

Dabei ist die erste Bedingung genau dann erfüllt, wenn die Menge dicht ist, die zweite Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Menge vollständig ist⁵⁸. Inwieweit Peirce von Dedekind beeinflusst ist, ist nicht klar. Er hat wohl in der französischen Übersetzung von Cantors *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* [21] die Besprechung der Dedekind-Schnitte gelesen.

Heute würde man von einem Kontinuum erwarten, dass es zusammenhängend ist:

⁵⁶Siehe [54], S. 523.

⁵⁷Siehe [54], S. 522 und [27], S. 11.

⁵⁸Siehe [54], S. 523 .

Definition 1.8 Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend genau dann, wenn es keine zwei disjunkten nichtleeren offenen Mengen A, B gibt, so dass $X = A \cup B$.

Auf den reellen Zahlen und ihren Teilmengen sind verschiedene Topologien definierbar. Eine mögliche Topologie ist diejenige, die durch den Abstand auf \mathbf{R} definiert ist. Eine Basis dieser Topologie ist die Menge der offenen Intervalle, zusammen mit \mathbf{R} und \emptyset . Durch diese Topologie wird auf $X \subset \mathbf{R}$ eine Teilraumtopologie induziert. Sei $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ die Basis der metrischen Topologie auf \mathbf{R} . Man erhält die Basis \mathcal{B}_X der Teilraumtopologie wie folgt. Sei $b \in \mathcal{B}_X : \Leftrightarrow \exists b_{\mathbf{R}} \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}} : b_{\mathbf{R}} \cap X = b$. Eine weitere Topologie lässt sich durch die Ordnungsrelation $<$ auf den linear geordneten Teilmengen von \mathbf{R} definieren.

Definition 1.9 Sei X eine linear geordnete Teilmenge von \mathbf{R} . Dann gehören zu der Basis \mathcal{B} der Ordnungstopologie

1. $X \in \mathcal{B}, \emptyset \in \mathcal{B}$.
2. Für je zwei Zahlen $a, b \in X$, mit $a < b$ das Intervall $(a, b) \in \mathcal{B}$.
3. Für $a \in X$ die Menge $\{x \in X : x < a\} \in \mathcal{B}$ und die Menge $\{x \in X : x > a\} \in \mathcal{B}$.

Eine Teilmenge E von X heißt offen in der Ordnungstopologie genau dann, wenn für jedes $x \in E$ ein $b \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $x \in b$ und $b \subseteq E$.

Die metrische Topologie auf dem ganzen Raum \mathbf{R} ist identisch mit der Ordnungstopologie. Dies trifft jedoch nicht zu für die Teilraumtopologie auf \mathbf{R} . Dies liegt anschaulich gesprochen daran, dass in der Ordnungstopologie der Abstand keine Rolle spielt. $\mathbf{R} \setminus (0, 1]$ hat dieselben Eigenschaften wie \mathbf{R} , denn hier ist die 1 der Häufungspunkt der Zahlen kleiner 0, da hier die Topologie nicht mit Hilfe der Topologie auf ganz \mathbf{R} und dem Abstand definiert wird, sondern nur bezüglich der Ordnung, und \mathbf{R} und $\mathbf{R} \setminus (0, 1]$ sind ordnungsisomorph. Ein Isomorphismus ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \setminus (0, 1] \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases} \\ \mathbf{R} \setminus (0, 1] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{falls } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ist also zum Beispiel ganz \mathbf{R} zusammenhängend bezüglich der Ordnungstopologie, die auf \mathbf{R} mit der metrischen Topologie übereinstimmt, so ist $\mathbf{R} \setminus (0, 1]$ auch zusammenhängend, da \mathbf{R} und $\mathbf{R} \setminus (0, 1]$ bezüglich mit der Ordnungstopologie isomorph sind.

Eine Teilmenge des \mathbf{R}^n , die in der gewöhnlichen Topologie zusammenhängend ist, ist auch verkettet, und eine Teilmenge, die verkettet und abgeschlossen ist, ist zusammenhängend. Eine Teilmenge der reellen Zahlen ist genau dann ein Peirce'sches Kontinuum der Cantor'schen Phase, wenn sie zusammenhängend bezüglich der Ordnungstopologie ist. Eine Teilmenge der reellen Zahlen ist genau dann ein Cantor'sches Kontinuum, wenn sie zusammenhängend bezüglich der Teilraumtopologie ist. Myrvold sagt deshalb, es wäre, als hätten sowohl Peirce, als auch Cantor versucht „Zusammenhang“ zu definieren, jeder seiner bevorzugten Topologie entsprechend, Peirce der Ordnungstopologie und Cantor der Teilraumtopologie⁵⁹. Peirce ist sich über den Unterschied seiner und Cantors Definition bewusst. Ihm kommt es nur auf die Ordnungsrelation an. Er schreibt:

My definition of a Continuum only prescribes that, after every innumerable series of points, there should be a next following point, and does not forbid, this to follow at the interval of a mile. [61] 4.126.

Peirce nimmt im Gegensatz zu Cantor die Existenz von Infinitesimalen an. Er denkt, Cantor würde diese Ansicht teilen, wohl, weil Cantor sich in den Grundlagen missverständlich ausgedrückt hat. Cantor schreibt zwar, dass die bisherigen Versuche, solche Interpolationen durchzuführen, auf einer Verwechslung zwischen uneigentlich Unendlichem und eigentlich Unendlichem beruht⁶⁰. Das uneigentlich Unendliche bezeichnet bei Cantor dasjenige Unendliche, das man z.B. für das Berechnen von Limites braucht. Man benötigt dazu seiner Ansicht nach nur die Möglichkeit des immer Weiter-Zählens. Durch Weiter-Zählen kann man das nächste Folgenglied der konvergierenden Folge ausrechnen, deren Limes man berechnen möchte. Man wollte Infinitesimale für die Differentialrechnung einzuführen. Cantor schreibt, die Theorie der unendlich kleinen Größen habe sich seines Wissens nach nur in der Form des uneigentlich Unendlichen als nützlich erwiesen. Das unendlich Kleine, das in der Infinitesimalanalysis und der Funktionentheorie verwendet wird, zu einem eigentlich unendlich Kleinen zu machen, bezeichnet er als zwecklos. Falls eigentlich unendlich kleine Größen definierbar sind, stehen sie seiner Ansicht nach in keinem unmittelbaren Zusammenhang mit den unendlich klein werdenden Größen.

1.3.3 Kantianische Periode

Ähnlich wie in der Cantor'schen Periode ist Peirce auch in der kantianischen Periode stark von Cantor beeinflusst. Peirce macht sich Gedanken um einen sinnvollen Mengenbegriff. Er nennt seine Mengen „collection“. Cantor verlangt, dass eine Menge eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen sei⁶¹. Peirce fordert zusätzlich, dass die Elemente Individuen sind. Die Bedeutung des Peirce'schen Begriffes Individuum variiert. Sein Individuum ist nicht allgemein und bestimmt. Außerdem hat sein Individuum

⁵⁹Siehe [54] S. 519-524.

⁶⁰Für den folgenden Abschnitt siehe [21], S. 171,172.

⁶¹Siehe [23], S. 282.

Selbstidentität, womit gemeint zu sein scheint, dass es feste Charakteristika hat⁶².

Das Kontinuum definiert Peirce in dieser Periode durch Abgrenzung. Es soll anders sein, als eine Menge bzw. eine Kollektion. Es hat keine klar individuierten, wohlunterschiedenen Punkte mehr, sondern statt dessen potentielle Punkte. Potentielle Punkte fließen ineinander und sind nur durch einen Prozess, eine Konstruktion, unterschiedlich zu machen, die das jeweilige Kontinuum aber in diesem Punkt diskontinuierlich macht. Solch eine Konstruktion kann z.B. das Schneiden zweier Geraden sein. Die Geraden sind dann die Kontinua und der Schnittpunkt ist die Stelle, an der die Kontinua diskontinuierlich geworden sind.

Das Kontinuum ist außerdem nach Peirce dadurch von Mengen unterschieden, dass es jegliche Kardinalität überschreitet. Im Kontinuum sind Mengen aller Mächtigkeiten enthalten. Auch in den Überlegungen zur Kardinalität ist Peirce von Cantor beeinflusst. Cantor beweist, dass die Kardinalität einer Potenzmenge echt größer ist als die Kardinalität der Ausgangsmenge. Peirce überlegt, dass man diese Tatsache verwenden könnte um etwas zu erzeugen, dass größer als jede Menge sei. Dieses Etwas soll das Kontinuum sein⁶³.

1.3.4 Nachcantorsche Periode

Nun untersucht Peirce das Kontinuum unabhängig von Mengen von Punkten. Kontinua lassen sich weiter nur der Dimension nach, und nicht der Größe bzw. Kardinalität nach vergleichen. Peirce gibt um 1908 die Behauptung auf, das Kontinuum sei größer als jede Menge⁶⁴. Er stellt in den Mittelpunkt, dass die Teile des Kontinuums selbst wieder Kontinua sind, wie das Kant vorgeschlagen hat. Dabei stellt sich die Frage, wie diese Teile untereinander verbunden sind. Peirce schreibt dazu:

It will be seen that the definition of Material Parts involves the concept of *Connexion*, even if there is no other connexion between them than co-being; and in case no other connexion be essential to the concept of W, this latter is called a collection... . [61], 6.147.

Das besondere an einem Kontinuum sieht Peirce in dieser Zeit in der Verbindung zwischen den „material parts“. Dafür sieht er die Zeit als ausgezeichnetes Beispiel, deshalb versucht er das Kontinuum anhand der Zeit zu verstehen. Er stellt dabei unter anderem fest, dass die Zeit für uns aufhört, während wir schlafen⁶⁵. Außerdem ändert er seine Meinung darüber, dass das Kontinuum Raum für alle Mengen haben soll, er sagt, es könnte Raum nur für abzählbar viele Punkte haben, oder für alle Mengen, falls diese sich linear anordnen lassen⁶⁶. Die Definition des Kontinuums soll also unabhängig von Größen von Mengen sein.

⁶²Siehe [28], S. 68.

⁶³Dies wird in Kapitel 3 genau erklärt.

⁶⁴Siehe [116], S.29.

⁶⁵Siehe [61], 4.642.

⁶⁶Siehe [61], 4.642.

Teil I

Peirce und das Kontinuum

In diesem Teil sollen die Peirce'schen Gedanken zum Kontinuum untersucht werden. Grundlegend für die Peirce'sche Philosophie sind seine drei Kategorien Erstheit, Zweitheit und Drittheit. Besonders Erstheit und Drittheit sind für Peirce' Gedanken zum Kontinuum ausschlaggebend. Die Überlegungen zu den Kategorien führen zur Relationenlogik. Nach weiteren logischen Vorbereitungen wird das Peirce'sche Kontinuum anhand von fünf Eigenschaften charakterisiert. Im letzten Kapitel sollen Auswirkungen der Peirce'schen Auffassung des Kontinuums auf Erkenntnistheorie und Metaphysik erläutert werden.

Kapitel 2

Die drei Kategorien von Peirce

Peirce wollte eine Theorie des Kontinuums finden, was sich aus seiner Metaphysik, den Kategorien und seinen logischen Fragen erklären lässt. Der Peirce'sche Synechismus ist der Versuch, die Wichtigkeit des Kontinuums und des Stetigkeitsgedankens für möglichst viele Gebiete fruchtbar zu machen. Um den Gedanken von Peirce zu folgen, ist es hilfreich zu sehen, wie er das Verhältnis der Wissenschaften untereinander beurteilt. Da die Kategorien in verschiedenen Disziplinen Anwendung finden, sollen sie entsprechend der von Peirce vorgeschlagenen Reihenfolge eingeführt und begründet werden. Die Kategorien führen uns zu dem Thema des Kontinuums hin.

2.1 Unterteilung der Wissenschaften

Peirce klassifiziert die Wissenschaften danach, wie sie sich aufeinander beziehen¹. So nennt er die erste Wissenschaft jene, auf die sich alle beziehen. Im Bereich der *Wissenschaft der Entdeckung* ist für Peirce die erste Wissenschaft die *Mathematik* mit den Zweigen *Dyadik*, *Arithmetik* und *Synektik*. Die *Philosophie* bezeichnet er als zweite Wissenschaft in der Wissenschaft der Entdeckung. Philosophie teilt er ein in *Phänomenologie*, *normative Wissenschaften* und *Metaphysik*. Die normativen Wissenschaften unterteilt er in *Ästhetik*, *Ethik* und *Logik*. Zur Logik gehört seiner Ansicht nach auch die *Semiotik*. Zur Metaphysik gehören *Ontologie*, *physikalische Metaphysik* mit den hier wichtigen Untergruppen *Kosmologie*, *Lehre von Raum und Zeit* und *Lehre von der Materie*, und religiöse Metaphysik.

Dabei betrachtet Peirce *Mathematik* als das Studium dessen, was logisch möglich oder unmöglich ist, ohne den Versuch festzustellen, was tatsächlich existiert. Bei mathematischem Argumentieren soll also von Hypothesen ausgegan-

¹Siehe [95], S. 189.

gen und aus diesen gefolgert werden. Dabei soll kein Bezug darauf genommen werden, ob diese Hypothesen in Wirklichkeit gelten². *Philosophie* hingegen betrachtet er als jene Wissenschaft, die sich darauf beschränkt, alles ihr mögliche über die gewöhnliche alltägliche Erfahrung herauszufinden, ohne besondere Beobachtungen zu machen³. *Logik* betrachtet Peirce als normative Wissenschaft. Sie versucht zu beweisen, welche Verfahren zur Entdeckung der Wahrheit führen, unabhängig von besonderen Umständen oder Themen⁴.

Später, 1905, erklärt Peirce den Begriff Philosophie erneut⁵. Er sagt, dass es zwei Arten von Philosophie gibt. In beiden Fällen geht es um ein Wissen über reale Dinge, beide machen philosophische Wahrheit zu etwas extrem Allgemeinem. Die eine Art von Philosophie umfasst all jene positiven Wissenschaften, die auf Erfahrung aufbauen, sie sucht nicht nach seltenen Phänomenen. Die andere Art handelt von all jenen Erkenntnissen, die aus einer dieser Einzelwissenschaften nicht ableitbar sind, sich aber ergeben, wenn man die Ergebnisse der verschiedenen Einzelwissenschaften zusammenfasst.

Seine Theorie über das Kontinuum ordnet Peirce der Mathematik zu. Sie findet bei ihm Anwendung in der Logik, da er das Kontinuum als Diskursuniversum betrachten wollte, und in der Lehre von Raum und Zeit. In seiner späten Zeit scheinen für Peirce die Gedanken über das Kontinuum zusammenzufallen mit den Gedanken über die Zeit.

Das Kontinuum hat Peirce oft im Zusammenhang mit einer seiner drei Kategorien erwähnt, der Drittheit. Das Kontinuum war für ihn sogar typisch für Drittheit. Deshalb werden nun die Kategorien aus phänomenologischer Sicht, dann aus logischer Sicht eingeführt.

2.2 Die drei Peirce'schen Kategorien

Peirce behauptet, dass die ganze Realität mittels der drei Kategorien beschrieben werden kann. Die Kategorien sind nach Peirce in jedem Phänomen vorzufinden, deshalb nennt er sie universal; und er begründete dies und die Anzahl drei relationenlogisch. Peirce findet die drei Kategorien aber auch in unserem Denken und Fühlen vor.

Hier soll dargestellt werden, wie sich die Kategorien zum einen in unserem Erleben, zum anderem in der Realität finden, auch sollen die Kategorien durch ihre logische Form charakterisiert werden. Peirce beschreibt die Kategorien also mehrfach und in unterschiedlicher Art. Der phänomenologischen Erscheinung der Kategorien und den Kategorien in der Realität ist die relationenlogische Begründung gemeinsam.

²Siehe [101], S.197.

³Siehe [101], S.190 ff.

⁴Siehe [101], S.197.

⁵Siehe [101], S. 309.

2.2.1 Phänomenologischer Aufweis der drei Kategorien

In dem 1894 geschriebenen Artikel *What is a Sign*⁶ stellt Peirce die drei Kategorien auf anschauliche Weise vor. Er beschreibt dort, wie diese Kategorien in unserem Erleben vorzufinden sind. Er ist der Überzeugung, dass alles, was in unserem Erleben auftaucht, einer der drei Kategorien zugeordnet werden kann. Im phänomenologischen Blick auf die Kategorien versucht er die, der jeweiligen Kategorie entsprechenden mentalen Zustände zu beschreiben. Dabei ist es nicht seine Absicht, etwa durch Experimente festzustellen, ob der der jeweiligen Kategorie zugeordnete Zustand jemals rein auftaucht. Gezeigt werden soll nur, dass jeder der drei den Kategorien zugeordneten Zustände in unserem Erleben eine Rolle spielt und grundlegend für das Erleben ist⁷.

Zur sprachlichen Vereinfachung sei im folgenden die Person, die für die Erläuterungen bei Peirce und auch hier verwendet wird, und deren Eindrücke geschildert werden sollen, Max genannt.

Erstheit (Firstness)

Peirce vermittelte eine Vorstellung der ersten Kategorie, indem er den ersten Eindruck von Max beschreibt, der eine Farbe wahrnimmt.

Beim Sehen der Farbe Rot mag Max einen kurzen Moment so etwas wie reine Wahrnehmung erleben. Bevor eine Reaktion ausser dem reinen Erleben auftritt, hat er bezüglich dieser Wahrnehmung nur diese Farbe im Bewusstsein. Er ist sich auch nicht einmal dieser Wahrnehmung Rot bewusst, denn das wäre schon eine Reaktion.

Peirce beschreibt dieses Mit-gar-nichts-in-Verbindung-stehen der Wahrnehmung wie folgt:

Not thinking about it, either, that is, not asking any questions about it, not even saying to himself that it pleases him, but just contemplating it, as his fancy brings it up. [79], S. 4.

Dieser sehr einfache Zustand ist Bestandteil unseres Erlebens. Peirce sagte dazu:

But whenever we are awake, something is present to the mind, and what is present, without reference to any compulsion or reason, is feeling. [79], S. 4.

Der Zustand, im Beispiel Wahrnehmung Rot, ist also eine Grundlage unseren Erlebens. Dieser Zustand heißt „Gefühl“ („feeling“), die dazugehörige Kategorie nannte Peirce Erstheit (Firstness).

Formuliert man das Erleben von Erstheit in einem Aussagesatz, z.B. das Erleben von Wärme, so lautet er: „Ich fühle Wärme.“ In diesem Aussagesatz wird dem Wesen, dass dies erlebt, ein Gefühl zugewiesen. Die Form der Aussage ist

⁶[79]

⁷Siehe [90], S. 55.

also die einer monadischen Relation Px , wobei P für das Gefühl, hier „Wärme“ steht, und x für das erlebende Wesen, hier „Ich“.

Zweitheit (Secondness)

Auch die Zweitheit beschreibt Peirce mittels des Erlebens.

Max, der noch vollständig mit dem Sehen der Farbe Rot beschäftigt ist, hört plötzlich einen lauten Pfiff. In dem Moment, in dem der Pfiff beginnt, ist Max irritiert. Er führt unwillkürlich die Hände zu den Ohren. Es geht nicht so sehr darum, ob der Pfiff unangenehm ist, sondern um die Kraft, die er ausübt. Der instinktive Widerstand, der dem Pfiff entgegengesetzt wird, ist typisch. Der „actio“ des Pfiffs wird die „reactio“ des Widerstands entgegengesetzt. Dabei fühlt sich der irritierte Max dem Pfiff ausgeliefert, passiv. Er wertet den Pfiff als das Aktive. Dies spielt jedoch nach Peirce keine Rolle, es geht vielmehr darum, dass zwei Objekte einen Einfluss aufeinander ausüben.

Neben dieser Parabel von Peirce sei ein weiteres Beispiel angefügt. Dabei wird der mentale Zustand der Zweitheit mit etwas Angenehmem exemplifiziert. Max sitze an einem Fluss, nichts denkend, und versunken in das Wasser schauend. Dann kommt ein Schmetterling und setzt sich auf seine Hand. So wird er aus seiner Versunkenheit gerissen und blickt auf den Schmetterling, immer noch nichts denkend, sondern reagierend. Das erste „Gefühl“, das vom Ins-Wasser-schauen ausgelöst war, wird unterbrochen oder zumindest ergänzt durch ein zweites, das durch den Schmetterling ausgelöst wurde. Schmetterling und Mensch üben einen Einfluss aufeinander aus. Der mentale Zustand, in dem sich Max befindet, beinhaltet zwei „Gefühle“, von dem das zweite das erste durchbrochen oder ergänzt hat. Den mentalen Zustand nannte Peirce *Reaktion*, die dazugehörige Kategorie *Zweitheit* (Secondness). Der Schmetterling und der Mensch stehen also in einer dyadischen Relation.

Nach 1905 nennt Peirce die Idee der Andersheit als Beispiel für Zweitheit⁸.

Peirce verwendet für den zur Zweitheit gehörenden mentalen Zustand neben der Bezeichnung „Reaktion“ auch das Wort „struggle“. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass Peirce in solchem Geschehen hauptsächlich den Widerstand gesehen hat, der gegen das Eindringen eines zweiten „Gefühls“ auftreten kann. Dies hängt wohl damit zusammen, dass im Bereich der Naturwissenschaften ein Falsifizieren gesetzmäßiger Zusammenhänge, nicht ein Verifizieren möglich ist. Falsifizieren bedeutet ein Nicht-Funktionieren einer gesetzmäßigen Vermutung. Dies könnte der Naturwissenschaftler Peirce als Widerstand der Realität gegen die Vermutung des Menschen gesehen haben. Wegen dieses Widerstandes mag er das Wort „struggle“ für den zur Zweitheit gehörenden mentalen Zustand verwendet haben.

Drittheit (Thirdness)

Wenden wir uns nochmals Max zu, der, mit dem Sehen der Farbe Rot beschäftigt, durch einen Pfiff irritiert wurde. Der Pfiff sei unangenehm, so dass Max instink-

⁸Siehe [99], S. 372.

tiv versucht wegzugehen, und dabei den Raum durch eine Tür verlässt. Im Moment des Öffnens der Tür höre der Pfiff auf. Als er die Tür wieder schließt, beginnt der Pfiff von neuem. Jetzt beginnt Max zu denken. Er überlegt, ob der Pfiff immer dann aufhört, wenn die Tür geöffnet wird. Er versucht bewusst eine Regelmäßigkeit zu entdecken, ein Gesetz. Max versucht zu verstehen, ob eine Handlung, nämlich das Türöffnen, mit einem Geschehen, nämlich dem Aufhören des Pfiffs, durch ein Gesetz verbunden ist. Der zur Drittheit gehörende mentale Zustand beim Suchen einer Gesetzmässigkeit unterscheidet sich wesentlich von den vorher beschriebenen. Den zur Zweitheit gehörenden mentalen Zustand beschrieb Peirce als charakterisiert durch „nackte Kraft“ (brute force), den zur Drittheit gehörenden mentalen Zustand durch Gesetzeszusammenhang. In dem mentalen Zustand der Reaktion geht es um zwei Dinge, die miteinander in Beziehung stehen. Beim Denken geht es um drei Dinge. Das Aufhören des Pfiffs und das Öffnen der Tür werden vom Menschen als möglicherweise gesetzmäßig verbunden interpretiert. Das Gesetz verbindet Öffnen der Tür und Aufhören des Pfiffs und so entsteht eine triadische Relation.

Nach 1905 möchte Peirce alles, was ein unzerlegbares Medium der Verbindung oder Verknüpfung zwischen irgend etwas Erstem und Zweitem ist, zur Drittheit rechnen⁹.

Der mentale Zustand heißt „Denken“, und die dazugehörige Kategorie heißt „Drittheit“ (Thirdness).

2.2.2 Kategorien in der Realität

In *Reasoning and the Logic of Things* erklärt Peirce, wie die Kategorien in der Realität gefunden werden. In dem Brief an Lady Welby vom 12. Oktober 1904 zählt Peirce verschiedene Beispiele für die jeweilige Kategorie auf. Nachdem bisher die zu den Kategorien zugehörenden mentalen Zustände betrachtet wurden, sollen nunmehr erläutert werden, wie Qualitäten, Geschehnisse und Bestandteile der Realität den Kategorien zugeordnet werden können.

Erstheit

Peirce definiert die Erstheit wie folgt:

Firstness may be defined as follows: It is the mode, in which anything would be for itself, irrespective of anything else, so that it would not make any difference though nothing else existed, or ever had existed, or could exist. Now this mode of being can only be apprehended as a mode of feeling. For there is no other mode of being which we can conceive as having no relation to the possibility of anything else. In the second place, the First must be without parts. [82], S 147.

⁹Siehe [99], S. 372.

Peirce verwendet hier „the First“ generisch. Der Kategorie der Erstheit kann also nur absolut Einfaches zugeschrieben werden, außerdem soll Etwas der Erstheit Zugeordnetes ohne Teile sein. Typische Beispiele sind Qualitäten wie zum Beispiel Rot oder Warm. Derartiges ist, unabhängig davon, ob es wahrgenommen wird, einfach. Die Qualität „Rot“ kann zu einem Gegenstand gehören, ob es ein stumpfes oder leuchtendes Rot ist. Wieder ist die logische Form des dazugehörenden Aussagesatzes wie zum Beispiel „Die Wand ist rot“ die einer monadischen Relation. Dem Gegenstand wird eine Eigenschaft zugesprochen.

Zweitheit

Zweitheit kann nach Peirce definiert werden als Veränderung von Etwas durch etwas Anderes:

..., Secondness is that in each of two absolutely severed and remote subjects which pairs it with the other, not for my mind nor for, or by, any mediating subject or circumstance whatsoever, but in those two subjects alone; so that it would be just the same if nothing else existed, or ever had existed, or could exist....It is that a blind reaction takes place between the two objects. [82], S. 147-148.

An anderer Stelle¹⁰ lehnt Peirce ausdrücklich ab, eines der beiden Objekt als das beeinflusste und das andere als das aktive, beeinflussende Objekt zu bezeichnen und die beiden Objekte anhand dieses Merkmals zu unterscheiden. Vielmehr sieht er Beeinflusstes und Beeinflussendes als symmetrisch an, ähnlich wie Newton in seiner Theorie von *actio* gleich *reactio*. Man findet Zweitheit also überall dort vor, wo zwei Dinge sich beeinflussen. Da durch Beeinflussen eine Veränderung geschieht und da sich Dinge nicht leicht verändern, gehört zu dieser Kategorie nach den Vorstellungen von Peirce immer auch der Widerstand, der als *reactio* aufgefaßt werden kann. Das ist ein Grund, warum die Zweitheit von Peirce auch *struggle* genannt wird. Die logische Form eines Aussagesatzes, der Zweitheit ausdrückt, ist also die einer dyadischen Relation. Beispiele solcher Aussagesätze sind „Zwei Murmeln stoßen aneinander“ oder „Der Ball fällt auf den Boden“. Im ersten Beispiel besteht eine dyadische Relation zwischen den beiden Murmeln, im zweiten Beispiel zwischen dem Boden und dem Ball.

Drittheit

Die Kategorie Drittheit ist in der Realität dort vorzufinden, wo sich eine Gesetzmäßigkeit zeigt.

Peirce schreibt über die Drittheit:

It is a modification of the being of one subject which is a mode of a second so far as it is a modification of a third. It might be called an inherent reason. The dormitive power of opium by virtue

¹⁰[91], S. 151.

of which the patient sleeps is more than a mere word. It denotes, however indistinctly, some reason or regularity by virtue of which opium acts so. Every law, or general rule expresses a Thirdness, because it induces one fact to cause another. [82], S. 148.

Die dritte Kategorie umfasst in gewissem Sinn die erste und zweite. Zeichen gehören immer zur Drittheit, können aber Erstheit und Zweitheit ausdrücken. Jeder Satz gehört also zur Drittheit, da zu ihm der Sprechende oder Schreibende, das Wort oder die Schrift, und der mögliche Interpret gehören. Ein Aussagesatz der Drittheit ausdrückt, hat die Form einer triadischen Relation. Zum Beispiel ist bei „Wenn zwei Murmeln aufeinanderprallen fliegen sie auseinander“ die triadische Relation zwischen den Murmeln, die durch die Gesetzmässigkeit verknüpft sind, bei „A gibt B an C“ ist sie zwischen A, B und C.

2.2.3 Charakterisierung der Kategorien anhand von Relationenlogik

Nach 1905 beschäftigt sich Peirce mit dem *Phaneron*, dass die Gesamtsumme all dessen sein sollte, was wir fühlen, uns vorstellen, oder denken, oder das, was unser Fühlen, Denken und Vorstellen färbt und regelt. Das Phaneron soll also alles enthalten, was unserem Geist vorliegt. Peirce möchte beweisen, dass es im Phaneron unzerlegbare¹¹ Elemente aller drei Kategorien gibt. Dafür braucht er die Relationenlogik und eine logische Begründung der drei Kategorien. Alle Definitionen der drei Kategorien enthalten schon den Hinweis auf die Relationen. Die drei Kategorien können am präzisesten anhand ihrer logischen Form unterschieden werden. Peirce verwendet den Begriff der Relation als Grundlage für den Begriff Zeichen, der den Begriff Geist einschließt. Außerdem verwendet er den Begriff der Relation auch als Grundlage für ontologische Strukturen. Burch rekonstruiert Peirce' Relationenlogik 1991 mit Hilfe der existentiellen Graphen [19] und mit Hilfe einer algebraischen Definition [18].

Es gibt nach Peirce irreduzible monadische, dyadische und triadische Relationen. Sein Relationenbegriff weicht vom heutigen ab, und wird im nächsten Kapitel erläutert. Mittels dieser Relationen können auch die Kategorien charakterisiert werden. In einem Brief an Lady Welby werden die Kategorien auf diese Art und Weise beschrieben.

Folgende Definitionen finden sich bei Peirce:

Firstness is the mode of being of that which is such as ist is, positively and without reference to anything else

Secondness is the mode of being of that which is such as it is, with respect to a second but regardless to any third.

Thirdness is the mode of being of that which is such as it is, in bringing a second and third into relation to each other. [94], S. 24.

¹¹Die Bedeutung von unzerlegbar wird im nächsten Kapitel deutlich werden.

2.2.4 Peirce' Kategorien und seine Reduktionsthese

Die Überzeugung von Peirce, dass es genau drei Kategorien gäbe, hängt eng mit seiner Relationenlogik zusammen.

Sie wird durch seine relationenlogische Reduktionsthese belegt. Diese These lautet nach Burch [18]:

Es gibt Relationen der Vielfachheit 3, die nicht aus Relationen der Vielfachheiten 1 und 2 erzeugt werden können, es gibt Relationen der Vielfachheit 2, die nicht aus Relationen der Vielfachheit 1 erzeugt werden können und Relationen beliebiger Vielfachheit können aus Relationen der Vielfachheit 1, 2, 3 erzeugt werden.

Nach Peirce gilt die Reduktionsthese so allgemein, dass sie in jedem logischen System gültig ist. Deshalb kann sie Grundlage für seine Kategorienlehre sein. Er folgerte aus ihr, dass alles Sein, Tun und Denken mit Hilfe der drei Kategorien beschrieben werden kann, die ihrerseits auf monadischen, dyadischen und triadischen Relationen aufbauen. Herzberger beweist 1981 eine nicht so allgemeine Version der Reduktionsthese¹². Burch beweist eine allgemeinere Version des Satzes, der für die Quantorenlogik und für ein System algebraischer Logik namens PAL (Peircean Algebraic Logic) gültig ist¹³.

Peirce hat einen anderen Relationsbegriff als den heute üblichen. Dadurch, und durch seinen schwächeren Reduktionsbegriff verändern sich auch die Möglichkeiten, wann man eine Relation aus mehreren anderen zusammensetzen könne. Dadurch war die nach prädikatenlogischer Auffassung aus zwei dyadischen Relationen zusammengesetzte triadische Identität

$$x = y = z$$

nach Peirce irreduzibel. Die Gründe für diese ungewöhnliche Überzeugung werden im nächsten Kapitel dargelegt.

¹²[36].

¹³[18].

Kapitel 3

Ausschnitte aus Peirce' Logik und Mathematik

In diesem Kapitel sollen diejenigen logisch-mathematischen Überlegungen von Peirce betrachtet werden, die Voraussetzungen für seine Theorie des Kontinuums sind. Dabei wird nicht im Einzelnen untersucht, welche dieser Überlegungen Peirce der Mathematik, und welche er der Logik zugeordnet hat. In der Mathematik sollen nach Peirce Schlüsse aus beliebigen Hypothesen gezogen werden. In der Logik will er schlüssige Argumentationsweisen untersuchen. Seine Logik soll mathematisches Gedankengut anwenden. Außerdem versucht Peirce das logische Schließen dem alltäglichen nachzubilden. Da er überzeugt ist, dass Relationen grundlegender sind als Mengen, wählt er in seiner Logik die Relationen als den grundlegenden Begriff als die Mengen. Er identifiziert deshalb Mengen auch häufig mit ihren Identitätsrelationen.

Im Einzelnen wird zunächst seine Relationenlogik betrachtet, anschließend werden verschiedene Definitionen des Prinzips des Nichtwiderspruchs und des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten vorgestellt. Es soll darauf eingegangen werden, was sich Peirce unter Mengen bzw. Kollektionen vorgestellt hat. Auch werden einzelne Aspekte der Logik der Vagheit und Allgemeinheit betrachtet, die zu interpretieren sind, da Peirce' Aussagen hierzu nicht eindeutig erscheinen.

3.1 Relationen

Peirce' Logik ist eine Logik der Relationen. Da Peirce in seinem Leben über 80.000 Seiten geschrieben hat und wesentliche Teile davon sich mit Logik beschäftigen, werden hier Peirce' Gedanken nur skizzenhaft und nicht in allen Punkten streng formal dargestellt. Um Missverständnisse zu vermeiden, soll darauf hingewiesen werden, dass Peirce Begriffe wie Logik, Negation u. a. anders verwendet als heute üblich.

In seiner Logik versucht Peirce das natürliche schlüssige Folgern aus beliebigen Hypothesen nachzubilden. Er hält Relationen in unserem alltäglichen

Schließen für grundlegender als Einzeldinge. Da er annimmt, dass unser Erkenntnisprozess den Evolutionsprozess abbildet¹, hält er Relationen für ontologisch grundlegender als Individuen und wählt sie deshalb als Ausgangspunkt. Dies ist auch ein Grund, warum er das graphische Folgern seiner existentiellen Graphen besonders schätzt. Er findet dies dem alltäglichen Schließen ikonisch nachgebildet.

Peirce verwendet statt dem Begriff Relation den Begriff Relativ. Seine Relative ähneln den heute z. B. in der Prädikatenlogik verwendeten Relationen, stimmen jedoch nicht mit diesen überein. Dieser Unterschied zeigt sich dadurch, dass seine mehrstelligen Relative nicht alle durch dyadische Relative ausgedrückt werden können. Um beliebige mehrstelligen Relative ausdrücken zu können, benötigt man eine weitere Art von Relativen, nämlich genuin triadische. Diese Besonderheit wird uns im weiteren noch beschäftigen.

Auch unter Logik versteht Peirce etwas anderes, als wir heute gewohnt sind. So rechnet er beispielsweise die Semiotik zur Logik. Deshalb ist eine Übersetzung seiner Überlegungen in die heutige Logik schwierig. Burch schreibt zur Andersartigkeit seiner Logik:

A full account of what Peirce meant by a relation would have to involve the conception of mind. Because such a factor as mind must be omitted from any account of relations that would have any chance of meeting the criteria of standard logic, the notion of mind is represented in the present work by the notion „Interpretation function.” [18], S. ix.

Burch versucht in seinem Buch *A Peircean Reduction Thesis* die Peirce'sche Relationenlogik so nachzubilden, dass das entstehende formale System PAL sowohl zu Peirce' algebraischer Logik, als auch zu dessen existentiellen Graphen gut passt. Burch macht hinter den verschiedenen logischen Systemen eine Peirce'sche Vision der Logik aus. An dieser Vision, die Peirce in seinen logischen Systemen ikonisch abzubilden sucht, orientiert sich Burch.

Burch möchte innerhalb von PAL die Reduktionsthese beweisen, die Peirce immer wieder postuliert hat, um seine Aufteilung der Wirklichkeit mittels der drei Kategorien zu erhärten.

Geraldine Brady [12] hat den Einfluß Peirce' und seines Schülers Mitchell über Schröder, Löwenheim und Skolem auf die moderne mathematische Logik untersucht. Sie zeigt anhand einiger Veröffentlichungen Peirce', dass er von der Boole'schen Algebra ausgeht, um sich dann auch mit Verbandstheorie auseinanderzusetzen, und zuerst implizit, dann explizit Quantoren einzuführen. In einem von Peirce mit seinen Schülern zusammen geschriebenen Buch [43] steht ein Artikel von Mitchell [72], in dem dieser Quantoren das erste Mal in der heutigen Weise verwendet. Da Brady den Einfluss Peirce' auf die heutige Logik untersucht, werden manche Besonderheiten Peirce', wie zum Beispiel die Bedeutung der Kategorien für seine Logik nur am Rande erwähnt. Die Triadizität

¹Siehe den Abschnitt über die pragmatische Maxime im übernächsten Kapitel.

seiner Logik wird in dem von Brady verfolgten Traditionsstrang nicht mit aufgenommen, deshalb wird auf die Triadizität nur durch einen Hinweis auf Burch [18] Bezug genommen.

Brady bespricht als erstes *On a improvement in Boole's Calculus of Logic*. Dort ergänzt Peirce Booles ursprüngliche Algebra, in der nur ein ausschließliches „oder“ definiert wurde, um das einschließliche „oder“. Dies nennt er logische Addition. Er fügt auch eine logische Subtraktion hinzu als Inverses für die logische Addition.

In seinem Artikel von 1870 führt Peirce das Begonnene weiter. Er beginnt damit, Axiome anzugeben für seine Erweiterung der von Boole stammenden Algebra. Dazu nimmt er eine Relation als gegeben an, die transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist. Außerdem fügt er zu Booles Operationen neue hinzu, nämlich Multiplikation und Exponentiation. Der Durchschnitt als eine Art der Multiplikation ist von Boole übernommen. Die zweite Art der Multiplikation ist das relative Produkt, sie ist nichtkommutativ. Addition und Multiplikation erfüllen jeweils die in der Algebra üblichen Regeln². Danach spricht er von der Anwendung der algebraischen Zeichen in der Logik, also von Semantik. Buchstaben sollen logische Zeichen denotieren. Als logische Terme führt er absolute Relative, einfache Relative und konjugative Relative ein. Absolute Relative sollen den monadischen, einfache Relative den dyadischen und konjugative Relative den triadischen Relationen entsprechen.

Die drei Arten der Relative sollen mit verschieden gedruckten kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden. Konjugativen Relativen ordnet er Drittheit zu, den einfachen Relativen das Andersein, und den absoluten Relativen das Konzept *eines* Objektes. Individuen sollen mit Großbuchstaben bezeichnet werden, Zahlen mit gotischen Buchstaben, „generals“ mit kleinen Buchstaben. Als Beispiel für „generals“ nennt er Liebhaber, Mutter, Feind Operationen werden mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Als nächstes erklärt er die Semantik der Zeichen $>$ und $=$, wobei er das erste Inklusion nennt und als transitive, reflexive und antisymmetrische Relation einführt. Als Verknüpfung führt er Addition, zwei Arten von Multiplikation und Exponentiation ein. Die erste Art der Multiplikation ist kommutativ und wird als x, y geschrieben. Die zweite Art der Multiplikation ist nicht kommutativ, deshalb unterscheidet Peirce auch zwischen linken und rechten Quotienten. Für die linken Quotienten schreibt er $(x : y)$, für die rechten $\frac{x}{y}$. Über die nichtkommutative Multiplikation, die auch relatives Produkt genannt wird, schreibt er:

I shall adopt for the conception of multiplication *the application of a relation*, in such a way that, for example, lw shall denote whatever is the lover of a woman³.

Das relative Produkt von Peirce verknüpft die Relative, die Ähnlichkeiten zu dem haben, was wir heute Relationen nennen, jedoch nicht dasselbe sind. Bei

²Siehe [70] in [63], S. 359-364.

³Siehe [70], in [61] S. 38. Zwischen S. 30 und 38 bespricht Brady [12] die beiden Multiplikationen.

der Verknüpfung berücksichtigt Peirce, dass es bei mehrstelligen Relativen auf die Reihenfolge ankommt.

We must be able to distinguish, in our notation, the giver of A to B from the giver to A of B .⁴

Peirce schreibt hier nicht, dass er den Geber von A an B von dem Geber von B an A unterscheiden möchte. Er scheint hier auf eine Art Gerichtetheit seiner Relative anzuspielen. Burch⁵ führt bei seiner Rekonstruktion Permutationen ein, die die Stellen der Relative vertauschen können. Diese helfen auch, die Multiplikation der Relative zu definieren, also zum Beispiel aus dem absoluten Relativ „Frau“ (w) und dem einfachen Relativ „Liebhaber _“ (l) das absolute Relativ „Liebhaber einer Frau“ (lw) zu machen. Die Identität wird von Peirce als Relation „Identität mit_“ aufgefasst. Diese soll bezüglich der Multiplikation die 1 sein. Burch führt deshalb und auch aus anderen Gründen sowohl monadische, dyadische, als auch triadische Identitäten⁶ ein.

Zur Bedeutung von X^Y schreibt Brady⁷, dass X^Y die Menge der Elemente sei, die mit den Elementen von Y in der dyadischen Relation X stehen, also

$$\{z : \forall w [Y(w) \Rightarrow X(z, w)]\},$$

oder in einer anderen Schreibweise

$$\{z : \forall w [Y(w) \Rightarrow zXw]\}.$$

Es heißt also l^w Liebhaber jeder Frau. In der Peirce'schen Notation kommen bis hierher keine Quantoren explizit vor. Dennoch ergeben sich bei der extensionalen Interpretation Bradys hier quantifizierte Ausdrücke. Kombinationen von Multiplikation und Exponentiation verschiedenener Relative können als quantifizierte Aussagen aufgefasst werden⁸. Brady stellt dazu Peirce'sche Beispiele vor, wobei \mathbf{b} , a , m für Relative stehen, nämlich \mathbf{b} steht für „betrayers to_ of_“, a für „enemy of_“, m für man. Die Beispiele lauten:

$\mathbf{b}am$	betrayers of a man to an enemy of him
$(\mathbf{b}a)^m$	betrayers of every man to some enemy of him
$\mathbf{b}a^m$	betrayers of each man to an enemy of every man
\mathbf{b}^{a^m}	betrayers of a man to all enemies of all men
\mathbf{b}^am	betrayers of a man to every enemy of him
\mathbf{b}^{am}	betrayers of every man to every enemy of him ⁹ .

Folgt man der graphischen Argumentationsweise von Peirce, so kann man sich Relative verbildlichen als Punkte mit losen Enden, wobei der Stelligkeit entsprechend viele lose Enden genommen werden. „betrayers to_ of_“ hat zwei lose Enden, „enemy of_“ ist auch ein Relativ und hat ein loses Ende. Die losen

⁴Siehe [70], in [63], S. 370.

⁵Siehe [18], S. 11.

⁶Zur Definition siehe [18] S. 8, zur Triadizität siehe [18], S. 71.

⁷Siehe [12], S. 41.

⁸Siehe [12], S. 42.

⁹ Siehe [70], in [61] S. 46. Siehe [12] S. 42.

Enden sind nummeriert, der erste Eintrag wird dem ersten losen Ende zugeordnet, der zweite dem zweiten. Steht ein Ausdruck als Exponent, können wir das heute mit dem Allquantor übersetzen. Sieht man von den in einer natürlichen Sprache unvermeidbaren Unschärfen ab, so wird das offene Ende von „enemy of_“ meist gesättigt mit „man“ bzw. „all men“, es sei denn, das zweite Ende ist noch nicht zugänglich wie im Beispiel $(\mathbf{ba})^m$. Peirce schreibt an manchen Stellen Indizes für die Stellen, an denen die Relationen zusammengefügt werden. Falls sie an erster Stelle zusammengefügt werden, so lässt er den Index häufig weg. Hier würde man $\mathbf{b}_{11}a_1m$ erhalten. Peirce hat an dieser Stelle eine Möglichkeit gefunden, Ausdrücke, die Quantoren einschließen, ohne Benennung der Variablen auszudrücken.

Es soll noch eine Formalisierung der englischen Ausdrücke in freier Logik gegeben werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass zu der Unschärfe, die in natürlichen Sprachen sowieso gegeben ist, noch der Abstand eines Jahrhunderts dazu kommt.

Peirce legt großen Wert auf die sogenannte hypostatische Abstraktion. Spricht er von einem Wort wie „Mensch“, möchte er damit nicht auf die Menge aller Menschen verweisen, sondern auf so etwas wie eine offene Vielheit, unter die alles fällt, was eine Mensch ist, also z. B. auch jetzt noch nicht existierende Menschen. Um dies mit heutiger Logik wiederzugeben, ist der λ -Operator geeignet, der in der freien Logik¹⁰ verwendet wird. Ein λ -Ausdruck bezeichnet die Eigenschaft, die unter ihm stehende Formel zu erfüllen. Er eignet sich für diese Beispiele besonders, da Peirce die hypostatische Abstraktion häufig auf triadische Relationen anwendet. Man benötigt folgende Relationen:

$$\begin{aligned} F(x, y) &: x \text{ ist ein Feind von } y, \\ M(y) &: y \text{ ist ein Mensch,} \\ b(x, y, z) &: x \text{ ist eine Verräter von } y \text{ an } z. \end{aligned}$$

Man erhält anhand der Formalisierung des zu \mathbf{bam} gehörenden englischen Satzes:

$$\mathbf{bam} \doteq [\lambda x \exists y \exists z (M(y) \wedge F(z, y) \wedge b(x, y, z))].$$

Dabei wurde der unbestimmte Artikel als existenzpräsupponierend betrachtet.

Bei der zweiten Formel $(\mathbf{ba})^m$ erhält man für die Formalisierung des englischen Ausdrucks:

$$(\mathbf{ba})^m \doteq [\lambda x \forall y \exists z (M(y) \wedge F(z, y) \wedge b(x, y, z))].$$

Bei der dritten Formel verwendet Peirce in dem englischen Ausdruck das Wort „each“. Dies könnte auf einen Allquantor mit weitem Skopus hinweisen. In der Arithmetik unterscheidet man zwischen dem Satz

$$\begin{aligned} \text{Für alle } n \in \mathbf{N} &\vdash_{\mathbf{PA}} F(\bar{n}) \text{ und} \\ &\vdash_{\mathbf{PA}} \forall x F(x). \end{aligned}$$

¹⁰Siehe z.B. [51], S. 191 ff.

Es wird bei der Formalisierung angenommen, dass sich derselbe Unterschied hier zwischen „every“ und „each“ zeigt. Deshalb wird der Allquantor metasprachlich ausgedrückt. Außerdem enthält der englische Ausdruck als Teilausdruck die Eigenschaft, aller Menschen Feind zu sein. Dies ist also die Eigenschaft, Feind zu sein, wenn etwas ein Mensch ist, was sich durch $[\lambda\forall y (M(y) \rightarrow F(z, y))]$ ausdrücken lässt. Der unbestimmte Artikel wird wieder existenzpräsupponierend verstanden:

$$\mathbf{ba}^m \doteq \text{Für alle } y \text{ mit } M(y) : [\lambda x\forall y\exists z (M(y) \wedge F(z, y) \wedge b(x, y, z))].$$

Für die anderen Formeln ist zu berücksichtigen, dass man bei der Formalisierung von Allaussagen Konditionale erhält. Dann ergibt sich analog wie oben:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^{a^m} &\doteq [\lambda x\exists y\forall z\forall u ((M(y) \wedge M(u) \wedge F(z, u)) \rightarrow b(x, y, z))]. \\ \mathbf{b}^a m &\doteq [\lambda x\exists y\forall z ((M(y) \wedge F(z, y)) \rightarrow b(x, y, z))]. \\ \mathbf{b}^{am} &\doteq [\lambda x\forall y\forall z ((M(y) \wedge F(z, y)) \rightarrow b(x, y, z))]. \end{aligned}$$

Soweit zur Formalisierung der englischen Ausdrücke.

Peirce erweitert Booles Algebra nur um eine zusätzliche Multiplikation. Er führt Quantoren nicht direkt ein, und erhält dennoch eine Logik, die große Ausdrucksstärke besitzt.

Brady erhält die Resultate obiger Beispiele, indem sie ihre extensionalen Interpretationen von Multiplikation und Exponentiation anwendet¹¹. Sie zitiert bei der Besprechung dieses Artikels auch Burch und schreibt, er habe versucht, diesen Kalkül zu erweitern und zu zeigen, dass dieses System dieselbe Ausdruckskraft habe wie Prädikatenlogik erster Stufe¹².

Burch führt mit PAL eine Logik ein, die in enger Verbindung mit Begriffen aus der algebraischen Topologie, wie Ecken, Kanten und Betti-Zahlen steht. Er beweist auch ein Theorem, das ein Analogon zur Euler-Poincaré'schen Formel ist. Die Brücke zur Topologie entsteht durch die Verbindung mit den existentiellen Graphen, deren Logik Burch mit PAL abzubilden hofft. Hier soll nur auf den algebraischen Teil seiner Logik eingegangen werden. Burch ist in der Entwicklung von PAL von Herzbergers Artikel von 1981 [36] ausgegangen. Ziel des Artikels von Herzberger war, die Peirce'sche Reduktionsthese zu beweisen. Die Reduktionsthese ist nach Peirce die Grundlage für die Behauptung, dass es genau drei Kategorien gibt. Um dem Leser die folgenden Seiten zu erleichtern, sei darauf hingewiesen, dass Burch die Relative von Peirce als Relationen bezeichnet.

Die relationenlogische Reduktionsthese hat nach Burch zwei Komponenten:

Theorem 3.1 *Es gibt Relationen der Stelligkeit 3, die nicht aus Relationen der Stelligkeit 1 und 2 erzeugt werden können, und es gibt Relationen der Stelligkeit 2, die nicht aus Relationen der Stelligkeit 1 erzeugt werden können.*

¹¹Brady diskutiert ein analoges Beispiel ausführlich auf [12], S. 33.

¹²Siehe [12], S. 42 und [20]. Worin Bradys Zweifel an Burch' Versuch bestehen ist unklar.

Theorem 3.2 *Alle Relationen mit der Stelligkeit $n \in \mathbf{N}$ können aus Relationen der Stelligkeit 1, 2, 3 erzeugt werden.*

Nach Peirce gilt die Reduktionsthese so allgemein, dass sie in jedem Aufbau der Logik gültig ist. Deshalb kann sie auch Grundlage für seine Kategorienlehre sein. Er folgert aus ihr, dass alles Sein, Tun und Denken mit Hilfe der drei Kategorien beschrieben werden kann, die ihrerseits auf monadischen, dyadischen und triadischen Relationen aufbauen. Dies kann er folgern, da das Denken und alles Wirkliche den Gesetzen der Logik folgen muss. Die logische Reduktionsthese führt ihn also zu starken erkenntnistheoretischen und metaphysischen Thesen.

Herzberger beweist 1981 eine Version der Reduktionsthese [36]. Burch beweist eine allgemeinere Version des Satzes, der für die Quantorenlogik und für PAL gültig ist [18].

Die zentrale Idee des Beweises von Herzberger ist die sogenannte „valency-rule“, also die Stelligkeitsregel. Die Stelligkeitsregel soll an einem Beispiel erläutert werden:

Betrachtet man den Satz „ A gibt B an C “ und den Satz „ D ist Vater von E “, und nimmt man außerdem an, dass D und C identisch sind, so kann man einen neuen Satz formulieren, der eine neue Relation ausdrückt: „ A gibt B an den Vater von E “. Man erhält so aus zwei Sätzen mit drei bzw. zwei Platzhaltern (A, B, C, D, E) einen Satz mit drei Platzhaltern. Aus einer dreistelligen Relation und einer zweistelligen Relation ist also durch Zusammenfügen eine dreistellige Relation geworden.

Es lässt sich allgemein zeigen, dass diese Art des Zusammenfügens einer n -stelligen und einer m -stelligen Relation zu einer $(n + m - 2)$ -stelligen Relation führt. Diese Tatsache wird Stelligkeitsregel genannt. Peirce verwendete oft die Schreibweise der Chemie für Moleküle, um das Zusammenfügen von Relationen zu veranschaulichen. Man kann sich eine Peirce'sche n -stellige Relation vorstellen wie einen Punkt, von dem aus n lose Enden ausgehen, wie in den folgenden Abbildungen zu sehen ist. Betrachtet man das Zusammenfügen zweier Relationen der Stelligkeit n und m an einer Stelle mit Hilfe der Veranschaulichung der losen Enden, so ist offensichtlich, dass die beiden Enden, an denen zusammengefügt wird, verschmelzen, und nicht mehr offen sind. Es entsteht eine Relation der Stelligkeit $n + m - 2$. Diese Enden sind nummeriert, die erste Stelle der Relation wird durch das mit 1 nummerierte lose Ende der Relation dargestellt. Durch eine Permutationsoption können die Enden unnummeriert werden. Fügt man Relationen der Stelligkeit n und m an ν Stellen zusammen, so erhält man nach der Stelligkeitsregel eine Relation der Stelligkeit $n + m - 2\nu$.

Beschränkt man sich bei n und m auf 1 und 2, so kommt man nie auf eine höhere Zahl als 1 und 2. Deshalb kann man aus monadischen und dyadischen Relationen keine triadischen Relationen erhalten. Dies ist die Begründung für den ersten Teil der Reduktionsthese. Wählt man n und m aus der Menge $\{1, 2, 3\}$, so erhält man als Resultat von $n + m - 2\nu$ zusätzlich auch die Stelligkeit 4. Man kann also Relationen der Stelligkeit 1, 2, 3 und 4 aus einer Zusammenfügung von Relationen der Stelligkeit $\{1, 2, 3\}$ erhalten. Nimmt man die so erhaltenen Relationen, und fügt sie erneut zusammen, so erhält man Relationen aller Stel-

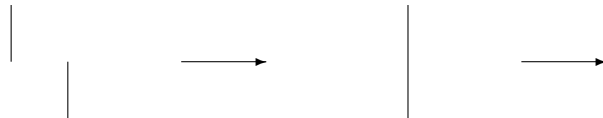


Abbildung 3.1: Dyaden

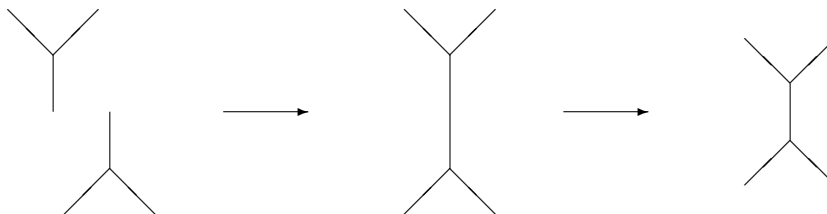


Abbildung 3.2: Triaden

ligkeiten. Dies ist die Begründung für den zweiten Teil der Reduktionsthese.

Aus einem graphentheoretischen Blickwinkel könnte man also sagen: Ohne Verzweigung keine Verzweigung, mit Verzweigung jede Verzweigung.

Soweit die Beweisidee von Herzberger für die Reduktionsthese. Nun sollen einige Gedanken von Burch verfolgt werden, die uns zur Beschreibung genuin triadischer Relationen führen werden:

Burch beginnt in seinem Buch mit der Einführung der Syntax. Später führt er zwei Semantiken ein, eine intensionale und eine extensionale, deren Wahrheitsbegriffe jedoch auf eine noch zu definierende Weise miteinander übereinstimmen sollen. In PAL gibt es als Terme primitive Terme, Elemente und Arrays. Primitive Terme dieser Logik stehen für die Relationen. PAL besitzt abzählbar unendlich viele primitive Terme jeder Stelligkeit, die indiziert sind durch die natürlichen Zahlen. Primitive Terme der Stelligkeit n werden mit R_i^n bezeichnet, wobei i und n natürliche Zahlen sind, i bezeichnet den Index, n bezeichnet die Stelligkeit des Terms. Als konstante primitive Terme gibt Burch U^n , I^n und 0^n an. Zur Veranschaulichung erklärt er schon an dieser Stelle, dass U^n für die Relation steht, die prädikatenlogisch durch $x_1 = x_1 \& \dots \& x_n = x_n$ ausgedrückt wird. I^n steht für die Identitätsrelation $x_1 = x_2 \& \dots \& x_{n-1} = x_n$. Besonders wichtig ist die „triadische Identität“. Betrachtet man die prädikatenlogische Schreibweise, so erscheint diese Relation als zusammengesetzt aus zwei dyadischen Relationen. Dennoch kann gezeigt werden, dass sie genuin triadisch ist¹³. 0^n ist prädikatenlogisch gegeben durch $x_1 \neq x_1 \& \dots \& x_n \neq x_n$. Diese Relationen können auch durch jede andere prädikatenlogisch äquivalente Formel

¹³[18], Theorem 6.2, S. 68.

gegeben werden. Elemente werden rekursiv definiert: Man erhält sie aus den primitiven Termen durch wiederholte Anwendung einiger Operationen, nämlich $Neg, Perm, J_1, J_2$. Neg soll die Negationsoperation auf Relationen denotieren, $Perm$ soll die Permutationsoperation der Stellen auf Relationen denotieren, J steht für Join und soll eine Zusammenfügungsoperation für einzelne Relationen bzw. für Paare von Relationen denotieren. J ist eine Besonderheit von PAL, trägt wesentlich zu der Nähe von PAL zur Topologie bei und entspricht dem Verschmelzen der losen Enden in der Graphik. J_1^{ij} ist definiert für Relationen der Stelligkeit ≥ 2 und identifiziert die i -te und j -te Stelle der Relation. J_2^{ij} ist definiert für ein Paar von Relationen der Stelligkeit ≥ 1 und identifiziert die i -te Stelle der ersten Relation mit der j -ten Stelle der zweiten Relation. Burch definiert die Stelligkeit, die Größe, die Anzahl der Ecken, die 0-dimensionale und die 1-dimensionale Bettizahl¹⁴ eines Elements E und beweist dann die Euler-Poincaré Formel. Die Stelligkeit ändert sich nur durch die beiden Join-Operationen. Werden zwei Relationen R_i^n und R_j^m zusammengefügt, so beträgt die Stelligkeit $n + m - 2$. Die dritte Art der Terme in PAL sind die Arrays. Arrays sind eine endliche Folge von Elementen. Die Stelligkeit, die Größe, die Anzahl der Ecken, die 0-dimensionale und die 1-dimensionale Bettizahl werden als Summe der Stelligkeiten, Größen, Anzahl der Ecken, die 0-dimensionalen und die 1-dimensionalen Bettizahlen der einzelnen Folgenglieder berechnet. Auf diesen führt Burch noch eine Äquivalenzrelation ein, nämlich „äquivalent bis auf Permutation“. Alle bis auf Permutation äquivalenten Arrays haben dieselbe Stelligkeit, Größe, Anzahl der Ecken, 0-dimensionale und 1-dimensionale Bettizahl. Außerdem identifiziert er Arrays der Länge 1 mit den entsprechenden Elementen.

Anschließend führt Burch die Semantik von PAL ein, die aus einem extensionalen und einem intensionalen Teil besteht. Dies soll hier im wesentlichen nur für die primitiven Terme vorgeführt werden. Da Burch in diesem Teil Mengen benötigt, braucht er eine Hintergrundmengenlehre. Er wählt hierfür ZFC aus, bemerkt jedoch, dass auch NBG dafür geeignet wäre.

Den primitiven Termen wird sowohl durch die extensionale Semantik, als auch durch die intensionale Semantik eine Bedeutung zugewiesen. Das Zuweisen der Bedeutung geschieht durch Abbildungen, die Bewertungsfunktionen heißen.

Bevor die extensionale Bewertung der primitiven Terme R_n^i angegeben werden kann, muss der Begriff „ n -Tupel⁺“ und „Kollektion von n -Tupeln⁺“ definiert werden:

Definition 3.1 *Sei D eine nichtleere Menge, die weder \top noch \perp enthält. Die Elemente von $D^{\{0, \dots, n-1\}}$ heißen n -Folgen über D ¹⁵. Ein n -Tupel⁺ t über D sei eine Funktion von $D^{\{0, \dots, n-1\}}$ in die Menge der Wahrheitswerte $\{\top, \perp\}$, so dass es höchstens ein $s \in D^{\{0, \dots, n-1\}}$ gibt mit $t(s) = \top$. Gibt es genau ein $s \in D^{\{0, \dots, n-1\}}$ mit $t(s) = \top$, so schreibt Burch (s_0, \dots, s_{n-1}) statt t . Das*

¹⁴0-dimensionale Bettizahl wird von Peirce und Burch Choris, 1-dimensionale Cyclois genannt. Siehe dazu [18], S 8.

¹⁵Das, was in der heutigen Logik gewöhnlich n -Tupel genannt wird, ähnelt den n -Tupel⁺, stimmt jedoch nicht damit überein. Burch nennt sie n -Tupel. [18] S. 29.

n -Tupel⁺, das jeder n -Folge den Wahrheitswert \perp zuordnet, heie das Null- n -Tupel⁺ Z^n , das man auch als $(\ , \dots, \)$ schreiben kann, mit n Leerstellen¹⁶. Eine Menge von n -Tupeln⁺ über D heie für $n \geq 1$ genau dann Kollektion von n -Tupeln⁺, wenn sie entweder nur das Null- n -Tupel⁺ enthält, oder das Null- n -Tupel⁺ nicht enthalt¹⁷, also

$$\{k : k \subset \{x : x \text{ } n\text{-Tupel}^+\} \wedge (k = \{Z^n\} \vee Z^n \notin k)\}.$$

Die Wahrheitswerte \top, \perp heißen die beiden Kollektionen von 0-Tupel⁺.¹⁸

Man kann sich eine Kollektion von n -Tupel⁺ vorstellen wie eine Matrix, in der die Zeilen n -Tupel⁺ sind. Kollektionen von n -Tupel⁺ können verwendet werden, um primitiven Termen, Elementen und Arrays eine Bedeutung zuzuordnen. Nach diesen Definitionen kann der Begriff „extensionale Bewertungsfunktion“ für Relationen entsprechend Burch eingeführt werden:

Definition 3.2 *Eine Funktion*

$$* : \{R_n^i : R_n^i \text{ prim. Term in PAL}\} \rightarrow \{\alpha : \alpha \text{ Kollektion von } n\text{-Tupeln}^+ \text{ über } D\}$$

heißt extensionale Bewertungsfunktion über D oder zusammen mit der Menge D Entepretation $(*, D)$, wenn sie jedem primitiven Term R_n^i von PAL eine Klasse von n -Tupeln⁺ $*(R_n^i)$ über D zuordnet und dabei folgende Bedingungen erfüllt:

1. Dem primitiven Term U^n wird durch $*$ die Kollektion von n -Tupeln⁺ zugeordnet, die alle n -Tupel⁺ bis auf das Null- n -Tupel⁺ enthält.

$$*(U^n) = V^n = \{X^n : X^n \text{ } n\text{-Tupel}^+ \wedge X^n \neq Z^n\}.$$

2. Dem primitiven Term $I^n, n > 1$ wird durch $*$ diejenige Kollektion von n -Tupeln⁺ zugeordnet, die nur den n -Folgen mit gleichen Einträgen den Wahrheitswert \top zuordnet, ohne das Null- n -Tupel⁺. Man kann also schreiben:

$$*(I^n) = \left\{ \begin{array}{l} (s_0, \dots, s_{n-1}) : (s_0, \dots, s_{n-1}) \\ n\text{-Tupel}^+ \wedge s_0 = s_1, \dots, s_{n-2} = s_{n-1} \end{array} \right\}.$$

3. Dem primitiven Term 0^n wird Z^n zugeordnet¹⁹.

¹⁶Man erhält also für jede n -Folge ein n -Tupel⁺, und außerdem noch das Null- n -Tupel⁺ Z^n .

¹⁷Siehe zur obenstehenden Definition [18], Kapitel 3, S. 28, 29.

¹⁸0-Tupel⁺ sind Tupel⁺ der Länge 0. Burch setzt voraus, dass die Wahrheitswerte die einzigen 0-Tupel⁺ sind. Er nennt Kollektionen von n -Tupeln⁺ Klassen von n -Tupeln⁺. Da das Wort „Klasse“ normalerweise in anderer Bedeutung verwendet wird, wird hier Kollektion dafür geschrieben. [18] S. 29.

¹⁹Siehe zur obenstehenden Definition [18], Kapitel 3, S. 36.

Die Bewertungsfunktion muss auch passend sein für die oben erwähnten Operationen $Neg, Perm, J_1, J_2$. Die Bewertung der Anwendung von Neg wird durch Komplementbildung erklärt, das Komplement von Z^n ist V^n , also ist $*(Neg\ 0^n) = V^n$. Die Interpretation der Permutation kann man sich so vorstellen, dass die Spalten der jeweiligen Kollektion von n -Tupel $^{+n}$ permutiert werden. Um Arrays interpretieren zu können führt Burch ein “*Cartesisches Produkt*” ein²⁰, das eine leichte Abwandlung unseres Cartesischen Produktes ist. Das “*Cartesische Produkt*” nach Burch ist definiert zwischen Kollektionen von n -Tupel $^{+n}$ und wurde so ergänzt, dass auch das Produkt mit Z^n und mit \top und \perp definiert ist. Dabei ist \top eine Einheit bezüglich der Multiplikation \times , und \perp ist eine Null. Sei X^n eine Kollektion von n -Tupel $^{+n}$:

$$\begin{aligned} X^n \times Z^m &= Z^m \times X^n = Z^{n+m}, \\ X^n \times \top &= \top \times X^n = X^n \text{ und } X^n \times \perp = \perp \times X^n = Z^n, \\ \top \times \top &= \top \text{ und } \top \times \perp = \perp \times \top = \perp. \end{aligned}$$

Für eine Folge von Kollektionen von n -Tupel $^{+n}$ kann die Retraktion definiert werden, die darin besteht, dass diejenigen Faktoren gelöscht werden können, die für das “*Cartesische Produkt*” keine Rolle spielen. So ist die Retraktion von $X^n \top$ definiert als X^n . Dieser Begriff kann später dazu genutzt werden um festzustellen, welche Folgen von Kollektionen aufeinander reduzierbar sind. Ein nächster wichtiger Begriff ist die *ausgewählte doppelte Löschung*²¹. $SD^{ij}(X^n)$ wählt diejenigen n -Tupel $^{+n}$ aus, die an i -ter und an j -ter Stelle denselben Eintrag haben und löscht dann die i -te und die j -te Stelle, so dass man eine Menge von $(n-2)$ -Tupeln $^{+n}$ erhält. Mit Hilfe dieser Operation lässt sich die Interpretation der Zusammenfügsoperatoren definieren. So ist

$$*(J_2^{ij}(R_1, R_2)) = SD^{ij}(*(R_1) \times *(R_2)).$$

Als nächstes soll die intensionale Bewertungsfunktion für Relationen definiert werden. Sie ist inspiriert von Kripkes Mögliche-Welten-Semantik. Statt einer Familie möglicher Welten wird hier eine Familie von nichtleeren Mengen vorausgesetzt, die weder \top noch \perp enthalten. Für die intensionale Semantik muss zunächst erklärt werden, was ein “*Relations-Simplex*“ ist:

Definition 3.3 *Eine Modell-Struktur M für PAL sei ein Paar von Mengen (W, D) , wobei D eine Menge nichtleerer Mengen $D_w, w \in W$ sei, die keinen der beiden Wahrheitswerte enthalten. Sei C_w die Menge der Kollektionen von Tupeln $^{+n}$ über D_w und sei C die Menge aller C_w . Ein Relations-Simplex ist eine Funktion $\psi : W \rightarrow \bigcup_{w \in W} C_w$, wobei $\psi(w)$ eine Kollektion von n -Tupel $^{+n}$ in C_w sei.*

²⁰Burch schreibt das “*Cartesische Produkt*” [18], S. 32 mit Anführungsstrichen, um es von dem gewöhnlichen zu unterscheiden.

²¹Bei Burch [18], S. 33 selective double deletion.

Nun kann die intensionale Bewertungsfunktion für primitive Terme definiert werden. Spezielle intensionale Bewertungsfunktionen, nämlich solche, die eine Enterpretation induzieren, heißen „Interpretation“. Dadurch, dass die Interpretationen jeweils eine Enterpretation induzieren, kommt die Übereinstimmung des intensionalen und extensionalen Wahrheitsbegriffes zustande.

Definition 3.4 *Eine intensionale Bewertungsfunktion ι bildet primitive Terme der Stelligkeit n auf Relations-Simplices der Stelligkeit n ab. Also ist $\iota(R_n^i)$ eine Funktion, die Elementen aus W eine Kollektion von n -Tupel⁺ n in C_w zuordnet.*

$[\iota(R_n^i)](w)$ hat also dieselbe Struktur wie eine Enterpretation. Falls $[\iota(t)](w)$ für jedes $w \in W$ und für jeden Term t von PAL eine Enterpretation ist, und auch für andere Formeln von PAL auf ähnliche Weise eine Enterpretation induziert, heißt ι eine „Interpretation“.

3.1.1 Nichtdegenerierte triadische Relationen

In der heutigen Logik wird angenommen, dass alle Relationen aus dyadischen Relationen konstruiert werden können. Peirce behauptet, dass es triadische Relative, zum Beispiel die triadische Identität gibt, die nicht aus monadischen und dyadischen Relativen konstruierbar sind. Falls Relative sich aus Relativen geringerer Stelligkeit konstruieren lassen, so heißen sie degeneriert. Auch hier wird wieder das Wort Relationen für die Burch'sche Rekonstruktion der Peirce'schen Relative verwendet.

Die These Peirce', dass es triadische Relative gibt, die sich nicht aus monadischen und dyadischen Relativen konstruieren lassen, scheint zunächst einigen Resultaten der modernen Logik zu widersprechen²². Burch stellt jedoch fest, dass für diese Konstruktionen triadische Relationen im Peirce'schen Sinne benötigt werden. Insbesondere wird meist die genuin triadische Identität I^3 benötigt²³. Damit sind die so konstruierten triadischen Relationen nicht ausschließlich aus monadischen und dyadischen, sondern aus monadischen, dyadischen und triadischen Relationen konstruiert worden. Es ist also bei dem Übersetzen der Peirce'schen Gedanken in heutige Sprache für jede Konstruktion triadischer Relationen aus monadischen und dyadischen nachzuprüfen, an welcher Stelle eine triadische Relation im Sinne von Peirce, wie zum Beispiel die triadische Identität, verwendet wird.

Burch zählt Beispiele der heutigen Logik für Konstruktionen auf, in denen Drittheit vorkommt, die also von nichtdegenerierten triadischen Relationen abhängen. Er nennt Konventionen als Beispiele und Konstruktionsregeln, die das erlauben, was in der Prädikatenlogik Identifizieren freier Variablen genannt wird. Auch das Formen Boole'scher Produkte, wie zum Beispiel $Px \& Qx$, ist ein solches Beispiel. Burch meint hier wohl, dass dabei die freie Variable x von Px und die freie Variable x von Qx identifiziert werden. Das Identifizieren freier Variablen erlaubt aus Relationen ausschließlich gerader Stelligkeit Relationen

²²[18], Kapitel 10, S. 117ff.

²³[18], Kapitel 7, S. 71ff.

ungerader Stelligkeit zu konstruieren. Dies ist jedoch nachweislich mit den zur Reduktion zugelassenen Operationen nicht möglich²⁴. Als weiteres Beispiel für die Konstruktionen, für die Peirce'sche triadische Relationen nötig sind, nennt er die Quantifizierung und zwei Operationen von Bernays.

Die der Peirce'schen Reduktionsthese scheinbar widersprechenden Theoreme der Logik hängen also nach Burch von nichtdegenerierten triadischen Relationen ab²⁵. Peirce will mit seiner Reduktionsthese nicht behaupten, dass man triadische Relationen überhaupt nicht reduzieren kann, sondern nur, dass man sie nicht reduzieren könne, ohne triadische Elemente zu verwenden.

Nach diesen Beispielen sollen einige Ideen skizziert werden, um zu zeigen, dass es nichtdegenerierte triadische Relationen gibt. Relationen heißen in der Burch'schen Rekonstruktion dann degeneriert, wenn sie sich aus Relationen niedriger Stelligkeit durch die oben angegebenen Operationen *Neg*, *Perm*, J_1 , J_2 , durch Gleichsetzen oder durch Aneinanderhängen mittels des Burch'schen „Cartesischen Produkts“ erhalten lassen.

Damit kann der Grund, warum es nichtdegenerierte Relationen gibt, durch einen einfachen Gedankengang illustriert werden: Um Relationen höherer Stelligkeit aus Relationen niedrigerer Stelligkeit zu konstruieren, gibt es nur zwei Möglichkeiten, da *Neg* und *Perm* die Stelligkeit nicht verändern. Die erste Möglichkeit besteht einfach darin, Relationen aneinanderzuhängen. Dies entspricht hier dem Aneinanderhängen von Kollektionen von Tupeln⁺ durch das „Cartesische Produkt“. Werden Relationen R_i^n und R_j^m auf diese Weise aneinandergehängt, also auf eine Weise, die mit dem „Cartesischen Produkt“ verträglich ist, so wird dies geschrieben als $R_i^n \circ R_j^m$; nicht alle Relationen können auf diese Weise konstruiert werden. Die zweite Möglichkeit, Relationen höherer Stelligkeit aus solchen niedrigerer Stelligkeit zu konstruieren, ist durch die Zusammenfügungsoperation J_2 gegeben. Hat man zwei Relationen R_i^n und R_j^m , und diese werden an Stellen i, j zusammengefügt, so hat die resultierende Relation $J_2^{ij}(R_i^n, R_j^m)$ die Stelligkeit $n + m - 2$. Deshalb kann auf diese Weise keine Relation höherer Stelligkeit aus monadischen und dyadischen Relationen konstruiert werden. Zum Beweis, dass nicht alle Relationen durch \circ konstruiert werden können, geht Burch von einer Menge D mit mehr als zwei Elementen aus, auf der eine Interpretation definiert ist. Dann zeigt er, dass es für jedes $k \in \mathbf{N}$ eine Kollektion von k -Tupeln⁺ X^k über D gibt, die nicht ein Produkt zweier Kollektionen von Tupeln⁺ $Y^n \times W^m$ ist. Für $k = 0$ und $k = 1$ ist dies leicht ersichtlich. Für $k \geq 2$ nimmt Burch einfach die Kollektion von k -Tupeln⁺, die durch die beiden k -Tupel⁺ (a, \dots, a) , (b, \dots, b) gegeben ist, wobei $a, b \in D$. Da X^k mehr als ein Element hat, muss entweder Y^n oder W^m mehr als ein Element haben. O.B.d.A. habe W^m mehr als ein Element. Dann müssten bei mehreren Elementen in X^k die ersten n Stellen übereinstimmen, was nicht der Fall ist.

Unter den gleichen Voraussetzungen für D kann gezeigt werden, dass für jedes $k \geq 2$, $k \in \mathbf{N}$ die Relation I^k nicht durch ein Produkt zweier Kollektionen

²⁴Siehe [18], Kapitel 5 S. 58, 59 und Kapitel 10, S. 118.

²⁵Die in diesem Abschnitt angedeuteten Resultate finden sich in [18], Kapitel 10, S. 117 ff.

tionen von Tupeln⁺ $Y^n \times W^m$ erhältlich ist. Dies gilt, da auch I^k keine zwei k -Tupel⁺ als Elemente hat, deren erste n Glieder übereinstimmen, denn I^k hat als Elemente alle k -Tupel⁺ der Form (a, \dots, a) , für beliebige $a \in D$.

Damit ist auch gezeigt, dass die triadische Identität nicht degeneriert ist, denn sie kann wegen der Stelligkeitsregel nicht mit Hilfe von J konstruiert werden.

3.1.2 Hypostatische Abstraktion

Burch führt kurz vor dem Beweis des extensionalen und intensionalen Reduktionstheorems die hypostatische Abstraktion als wichtiges Werkzeug ein²⁶. Er geht dazu von einem oft verwendeten Peirce'schen Beispiel aus, nämlich der Relation

$$x_1 \text{ gibt } x_2 \text{ an } x_3.$$

Dieses Beispiel wird auch durch

$$x_1 \text{ ist Geber von } x_2 \text{ an } x_3$$

ausgedrückt. Eine hypostatische Abstraktion dieser Relation sagt aus, dass Beispiele für den Akt des Gebens existieren. Es besteht eine spezifische dyadische Relation von x_1 zum Akt des Gebens, nämlich die Relation des Gebers. Auch x_2 hat eine dyadische Relation zu dem genannten Akt des Gebens, nämlich die Relation des Gegeben-Werdens und x_3 hat die dyadische Relation des Empfängers des Gegebenen zu dem Akt des Gebens. Burch schreibt, dass in der Quantorenlogik die hypostatische Abstraktion repräsentiert würde durch das Ersetzen der primitiven wohlgeformten Formel

$$G(x_1, x_2, x_3)$$

durch die wohlgeformte Formel

$$\exists y [G(y) \& I_1(x_1, y) \& I_2(x_2, y) \& I_3(x_3, y)],$$

wobei I_1, I_2, I_3 die oben genannten dyadischen Relationen sind und G für die monadische Relation des Gebens steht. In PAL benötigt man für die hypostatische Abstraktion die triadische Identität.

Eine Verbindung zu Peirce' Theorie des Kontinuums ist, dass Peirce die hypostatische Abstraktion, hier den Akt des Gebens, vermutlich als Universalie betrachten würde. Die Universalie wird von einem Kontinuum von Möglichkeiten erfüllt, diese fallen unter ihren Begriff. Zu den Universalien gehört Peirce' Ansicht nach Drittheit.

²⁶Siehe [18], Kapitel 9, S. 105.

3.1.3 Verhältnis von PAL und der Prädikatenlogik

Burch zeigt, daß jede Formel der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität ohne Funktionssymbole und Konstanten²⁷ in eine Formel von PAL übersetzt werden kann. Dazu werden Operatoren benötigt, die das Negieren von PAL-Formeln ermöglichen. Mit der Übersetzung ist gezeigt, dass, wenn die Reduktionsthese in PAL gültig ist, sie auch in der Prädikatenlogik erster Stufe Gültigkeit hat. Burch stellt sich als nächstes die Frage, ob es Konstruktionen nichtdegenerierter triadischer Relationen geben könnte, die nicht in PAL formalisierbar seien. Diese dürften dann auch nicht in der Prädikatenlogik erster Stufe formalisierbar sein. Er vermutet, dass auch Formeln in Prädikatenlogik höherer Stufe in PAL formalisierbar sind, da in PAL hypostatische Abstraktion formalisierbar ist, und damit seiner Ansicht nach auch Quantifizierung über Relationen und Relationen von Relationen formalisierbar sein müssten²⁸. Er kommt so zu der These, dass alle relationalen Konstruktionen in PAL ausdrückbar, d.h. formalisierbar seien²⁹. Das würde bedeuten, dass die Reduktionsthese ohne Einschränkung gültig wäre.

3.1.4 Peirce und Boole

Nach der Erläuterung der Reduktionsthese soll noch erwähnt werden, dass Peirce in seiner algebraischen Logik 1880 auch mit der Entwicklung einer Verbandstheorie begonnen hat und mit einer Theorie reflexiver und transitiver Relationen. Dies wird 1890 von Schröder in seiner Algebra der Logik fortgesetzt. Peirce versucht die Boole'sche Algebra in die gewöhnliche Algebra einzubetten, und fasst die beiden Wahrheitswerte als zusätzliche Konstanten auf. Später stellt er fest, dass die Boole'sche Algebra Wahrscheinlichkeitsrechnung für Allwissende sei. Für Allwissende habe jedes Ereignis entweder die Wahrscheinlichkeit 1 oder die Wahrscheinlichkeit 0, und deshalb sei die arithmetisch zu lesende Gleichung $x(x - 1) = 0$ für jede Wahrscheinlichkeit x erfüllt³⁰.

3.2 Nichtwiderspruchsprinzip und Prinzip des ausgeschlossenen Dritten

Peirce will das Kontinuum als Diskursuniversum verwenden. Er behauptet, dass unsere gewöhnlich verwendeten Diskursuniversen Kontinua sind und im Kontinuum und bei allgemeinen Aussagen das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten nicht gilt. Peirce spricht über allgemeine Aussagen auch als Allaussagen. Bei Aussagen über Möglichkeiten oder existenzquantifizierten Aussagen soll das Nichtwiderspruchsprinzip nicht gelten. Dabei ist nicht ganz klar, was Peirce

²⁷Funktionssymbole können durch Prädikate definiert werden, und Konstanten können bei der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität eliminiert werden. Siehe [18], S. 93.

²⁸Siehe [18], Kapitel 10, S. 121. Zur hypostatischen Abstraktion siehe S. 105 ff.

²⁹[18], Kapitel 10, S. 121, 122.

³⁰Siehe [81], S. 1.

unter dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten und dem Nichtwiderspruchsprinzip versteht. Im Manuskript 1147 [104], das aus Einträgen für das Baldwin Dictionary besteht, stellt Peirce verschiedene Formulierungen der beiden alten und wohlbekannten logischen Prinzipien vor. In diesem Manuskript versteht Peirce die Negation als Relation und vergleicht sie mit anderen Relationen.

Im Folgenden sollen anhand der Zitate aus den Notizen für das Baldwin Dictionary und späterer Zitate stärkere und schwächere Formen des Nichtwiderspruchsprinzips unterschieden werden, die sich durch verschiedene Negationen ergeben. Die verschiedenen Formulierungen der Prinzipien müssen insoweit relativiert werden, als Peirce für das Baldwin Dictionary möglicherweise nicht seine ureigenen Gedanken, sondern die in der damaligen Zeit üblichen Formulierungen der Prinzipien erläutert. In der nachcantorschen Periode scheint Peirce die Vorstellung von einem stärkeren Prinzip des ausgeschlossenen Dritten zu haben.

Peirce macht entsprechend den Gepflogenheiten seiner Zeit keine Unterscheidung zwischen dem, was wir heute Metasprache und Objektsprache nennen, auch legte er sich auf keine Sprache fest.

3.2.1 Zur ersten Formulierung des Nichtwiderspruchsprinzips in MS 1147

Peirce nennt drei Prinzipien, die häufig Gesetze des Denkens genannt werden, nämlich das Prinzip der Identität, ein Prinzip, das er Prinzip des Widerspruchs nennt und das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten. Zu den beiden letzteren schreibt er:

- II. **The Principle of Contradiction:** A is not not- A
- III. **The Principle of Excluded Middle:** Everything is either A or not A . [104], S.1.

Das Nichtwiderspruchsprinzip, hier Prinzip des Widerspruchs genannt, kann Peirce' Ansicht nach verstanden werden als eine Erklärung der Negation. „Nicht“ bestimme das Gegenteil oder das Duale³¹ einer Aussage A . „Nicht A “ sei also das Gegenteil von A . Dann erklärt Peirce, dass die Negation einer Aussage universell zu verstehen sei. „Nicht A “ meint also nicht „nicht manche A “, sondern „kein A “. Weiter erwähnt Peirce Relationen, die ihr eigenes „Duales“ sind. Damit scheinen Relationen gemeint zu sein, die auf ihre Anwendung angewendet, wieder dasselbe ergeben. In die heutige Sprache übersetzt wäre etwa für $R \subset X \times X$ $xR := \{y \in X : xRy\}$, und für eine Menge M $MR := \{y \in X : \forall x (x \in M \Rightarrow xRy)\}$. Man erhält eine weitere Anwendung von R durch $R(xR) := \{z \in X : \forall y (y \in xR \Rightarrow zRy)\}$. Es soll ein Beispiel mit der Relation \neq vorgeführt werden:

Sei $X := \mathbf{R}$, $R := \neq$, $x := 3$. Dann ist $xR = 3 \neq = \{y \in \mathbf{R} : 3 \neq y\}$ und $R(xR) = \{z \in \mathbf{R} : \forall y (y \in xR \Rightarrow zRy)\} = \{z \in \mathbf{R} : \forall y (3 \neq y \Rightarrow z \neq y)\} = \{3\}$.

³¹Peirce schrieb „converse“.

Insofern kann man sagen, dass die Relation \neq ihr eigenes Duales ist. Peirce nennt als Beispiele:

Every A is other than everything that is other than every A ,
or Any A is not anything that is not any A . [104], S. 2.

Das letzte Beispiel hat große Ähnlichkeiten mit dem, was Peirce als Prinzip des Nichtwiderspruchs bezeichnet hat. Mit seinen Beispielen will Peirce wohl Relationen mit der Negation in Zusammenhang bringen, die wichtige Eigenschaften mit dieser teilen. Sei nun \mathbf{A} die durch das Prädikat A bestimmte Menge, oder das durch A bestimmte Kontinuum und sei $\mathbf{A} \subseteq X$. Man kann nun, falls A eine Menge ist, $\mathbf{A}R$ definieren als $\mathbf{A}R := \{y \in X : \forall x \in \mathbf{A} \ xRy\}$. Wieder kann man die Relation doppelt auf \mathbf{A} anwenden: $R(\mathbf{A}R) := \{z \in X : y \in \mathbf{A}R \Rightarrow zRy\}$. Das würde bedeuten, dass Peirce $NON(\mathbf{A}NON) = \mathbf{A}$ als eine Formulierung des Nichtwiderspruchsprinzips gesehen hätte, wobei NON die Peirce'sche Negationsrelation bezeichnet.

3.2.2 Zur zweiten Formulierung des Nichtwiderspruchsprinzips in MS 1147

Als eine weitere mögliche Formulierung schlägt Peirce eine uns geläufigere vor:

On the other hand, the principle of contradiction may be understood to mean that which is at once A and not A is nonexistent, just as that which is at once A and the father of A is nonexistent. [104], S. 2.

Zu diesem Zitat sei folgende ausführliche Interpretation angefügt: Peirce spricht von der Nichtexistenz von etwas, das sowohl A als auch nicht A ist. Unter Existenz versteht er je nach Kontext die Existenz in einem der drei Modi des Seins (Möglichkeit, Aktualität, Notwendigkeit), oder einfach die Existenz als „Sein eines physischen Dings“³². Mit Existenz scheint er also so etwas wie Realsein gemeint zu haben, deshalb könnte dies in unsere heutige Logik mit $E!t := \exists x : x = t$ übersetzt werden, wobei t für einen Term steht. Dies kann in einer freien Logik formuliert werden, wie sie Link³³ vorgestellt hat. Der innere Teil des Satzes, „that which is at once A and not A “ muss noch näher untersucht werden. Es ist nicht klar, ob Peirce mit A einen Satz oder ein Prädikat gemeint hat. Das obige Zitat legt eher nahe, dass er von Prädikaten P spricht und beliebigen Subjekten S : $(S \text{ ist } P) \& (S \text{ ist nicht } P)$. Dabei nennt Peirce das Wort „ist“ wie üblich die Kopula. Die Kopula verbirgt in sich die Inklusionsrelation und den Folgerungspfeil. Beides schreibt er als $_>_$.

„ $(S \text{ ist } P)$ “ heißt so viel wie S gehört zu den P 's, also S ist Element der Extension von P . Der innere Teil des Satzes, hier als „ $(S \text{ ist } P) \& (S \text{ ist nicht } P)$ “ übersetzt, klingt zunächst wie ein quantorenfreier Ausdruck. Dies täuscht, da S

³²Siehe dazu [109], S. 4.

³³Siehe [51], S. 151.

sowohl ein primitives Individuum, d.h. ein einzelnes Ding sein kann, als auch eine Menge, als auch eine Universalie wie „Mensch“, die nach Peirce ein Kontinuum aufspannt. Auch das Prädikat kann entweder ein solches sein, das eine Menge definiert, oder eines wie „Blume“, das nach Peirce eine Universalie bezeichnet. Sei $|P|$ die Extension von P . Nehmen wir zunächst an, $|P|$ sei eine Menge. Falls S ein primitives Individuum ist, wäre (S ist P) zu lesen als $S \in |P|$, oder $|S| \subseteq |P|$, wobei $|S|$ eine einelementige Menge ist. Auch falls $|S|$ eine Menge ist, so wäre die Kopula mit dem Teilmengenzeichen zu übersetzen, also wäre (S ist P) zu lesen als $|S| \subseteq |P|$. Wären sowohl S als auch P universal, so müsste man schreiben „ $|S|$ ist Teil von $|P|$ “, wobei „Teil von“ noch näher zu definieren wäre. Alle diese Fälle lassen sich mit Hilfe des mereologischen Teilbegriffs zusammenfassen³⁴. Man schreibt $|S| \sqsubseteq |P|$.

Man kann sich die mereologische Teilbeziehung mit Hilfe von Gebieten in einer Ebene veranschaulichen. Diese können sich überlappen, oder sie können keinen gemeinsamen Teil haben, oder ein Gebiet kann im anderen liegen, also Teil von diesem sein. Im Fall der Ebene wird in der Mereologie also ein geometrischer Standpunkt eingenommen, der von der Interpretation von Gebieten als Mengen von Punkten absieht. So wird auch zwischen den Objekten $\{a\}, \{\{a\}\}, \{\{\{a\}\}\}$ nicht unterschieden. Insofern wird auch die Frage gegenstandslos, ob man für Individuen S schreiben soll $S \sqsubseteq |P|$ oder $|S| \sqsubseteq |P|$.

Da „that which is at once A and not A “ eigentlich keine Denotation haben soll und „that“ ein bestimmter Artikel ist, wird der ι -Operator verwendet. Ein andere Möglichkeit wäre, „at once A and not A “ als Prädikat aufzufassen. Man erhält als mögliche Teilübersetzung in die heutige Logik³⁵:

$$\neg E! \iota x ((x \sqsubseteq |P|) \wedge (x \sqsubseteq |\sim P|)) \quad \text{bzw.} \quad \neg \exists y [\lambda x ((x \sqsubseteq |P|) \wedge (x \sqsubseteq |\sim P|))] y,$$

Dabei sei

$$(\sim P) a : \Leftrightarrow \neg Pa.$$

Analysiert man A nicht in der vorgeschlagenen Weise, so erhält man

$$\neg E! \iota x (A[x] \wedge \neg A[x]) \quad \text{bzw.} \quad \neg \exists y [\lambda x (A[x] \wedge \neg A[x])] y.$$

Für das letzte Zitat mag dies eine sinnvolle Übersetzung sein, jedoch tauchen in Peirce' Texten dauernd Ausdrücke der Form „(S ist P)“, also $|S| \sqsubseteq |P|$ auf. Damit ist die Analyse von „that which is at once A and not A “ abgeschlossen.

3.2.3 Verbindung zwischen dem Nichtwiderspruchsprinzip und dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten in MS 1147

Je nachdem, welche Formulierung des Nichtwiderspruchsprinzips verwendet wird, ergibt sich nach Peirce eine andere Formulierung des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten. Jede der beiden Formulierungen führt zu einer anderen Logik.

³⁴Siehe [51], 415 ff.

³⁵Zur freien Logik siehe [51], S. 192.

Er bezeichnet beide als für den Aufbau einer Logik geeignet, die Logik müsse für jede dieser Formulierungen unterschiedlich entwickelt werden.

Zu der ersten Formulierung des Nichtwiderspruchsprinzips „ A ist nicht nicht A “ gehört die Formulierung des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten als „Nicht nicht A ist A “. Es ist hierbei zu beachten, dass Peirce wieder mit A vermutlich nicht einen Satz, sondern ein Prädikat meint. „Nicht nicht A ist A “ soll bedeuten, dass alle Nicht-nicht- A 's, also all das, was die unter das Prädikat „Nicht nicht A “ fällt, auch unter das Prädikat A fällt, also $|\sim\sim A| \sqsubseteq |A|$. Dieses Prinzip ist klassisch, aber nicht intuitionistisch gültig³⁶.

Nun zur zweiten Formulierung des Nichtwiderspruchsprinzips und ihrer Verbindung zum Prinzip des ausgeschlossenen Dritten. Zu

What is, at once, A and not A , is non-existent. [104], S. 3

gehört folgende Formulierung des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten:

Whatever exists is either A or not A . [104], S. 3.

Dieses Prinzip des Nichtwiderspruchs kann man lesen als

$(S \text{ ist } P)$ oder $(S \text{ ist nicht } P)$.

Nimmt man die Analyse des „Whatever exists“ mit auf, so erhält man wie oben.

$\forall x (E!x \rightarrow (x \sqsubseteq |P|) \vee (x \sqsubseteq |\sim P|))$ bzw. $\forall x (E!x \rightarrow [\lambda y ((y \sqsubseteq |P|) \vee (y \sqsubseteq |\sim P|))] x)$.

In der freien Logik gilt für Formeln ϕ die Regel: $\forall x (E!x \rightarrow \phi) \leftrightarrow \forall x \phi$ ³⁷,
also erhält man

$\forall x ((x \sqsubseteq |P|) \vee (x \sqsubseteq |\sim P|))$ bzw. $\forall x ([\lambda y ((y \sqsubseteq |P|) \vee (y \sqsubseteq |\sim P|))] x)$.

Diskussion des Wortes „nicht“

Peirce schlägt eine Deutung des Wortes „nicht“ vor: Man kann ein Analogon zu „Nicht nicht A ist A “ finden, indem man statt „nicht A “ einsetzt „etwas, das identisch ist mit etwas ausserhalb von A “. Damit wird der Gedanke aufgegriffen, der bei dem Beispiel mit der Relation \neq diskutiert wurde. Man erhält so das, was Peirce schreibt:

Whatever is identical with something besides things identical with something besides A is A . [104], S. 3.

Peirce weist auf implizite Voraussetzungen des Prinzips hin. Wird das als letztes zitierte Prinzip zum Beispiel für Individuen³⁸ formuliert, dann muss man

³⁶Siehe dazu im zweiten Teil das Kapitel über die konstruktive Sicht des Kontinuums.

³⁷Siehe [51] S.191 ff.

³⁸Dabei wird hier nicht untersucht, welche impliziten Voraussetzungen für abgeleitete Individuen bestehen würden.

nach Peirce voraussetzen, dass das Universum, über das gesprochen wird, mindestens zwei Individuen enthält. Peirce meint wohl, dass kein Quantor in den A s vorkommen darf. In heutiger Logik kann z.B. in einem Ausdruck mit ι -Operator sehr wohl ein Quantor vorkommen, ohne dass solche impliziten Voraussetzungen entstehen. Die Peirce'sche Auffassung weicht wohl davon ab. Peirce schlägt vor, das Prinzip umzuformulieren in:

A is not-not-A, if there is anything not A. [104], S. 3, zweite Version.

Er betont auch, dass die Identitätsrelation ihr eigenes Duales sei, wie oben für die Negationsrelation dargelegt. Aus diesem Grund schreibt er,

The principle of contradiction justifies the simple conversion. [104], S. 3, zweite Version.

Das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten hingegen erlaubt den Schluss:

Everything but A is B

∴ Everything but B is A. [104], S. 4, zweite Version.

Später diskutiert Peirce, ob die beiden genannten Prinzipien auch als Teil der Definition, oder als vollständige Definition der Bedeutung des Wortes „nicht“ verstanden werden können, wie dies von Mill und anderen Logiker vorgeschlagen wurde. Peirce wendet hierzu ein, dass „ A non est non A “ als Definition gegen die Regel verstößt, dass das Definiendum nicht in der Definition stehen darf. Er fordert also an dieser Stelle, dass die Definition prädikativ sein solle, räumt aber ein, dass man diskutieren kann, ob diese Regel für logische Ausdrücke gelten soll. Schreibt man statt dessen für das Nichtwiderspruchsprinzip „ A est non non A “, wie er es vorgeschlagen hat, so ist dieser Einwand gegenstandslos.

3.2.4 Weitere Formulierungen des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten

In diesem Abschnitt werden Zitate betrachtet, in denen Peirce seine eigene Auffassung zu den beiden Prinzipien kundgetan haben dürfte³⁹. Es gibt einige Zitate, die nahelegen, dass Peirce mit dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten ($(|S| \sqsubseteq |P|) \vee (|S| \sqsubseteq |\sim P|)$) gemeint hat, und einige, die nahelegen, dass er mit dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten ($(|S| \sqsubseteq |P|) \vee \neg(|S| \sqsubseteq |P|)$) gemeint hat, wobei vor dem jeweiligen Ausdruck noch wie oben ein Existenzquantor stehen könnte. Es lässt sich somit sagen, dass der Satz $(|S| \sqsubseteq |P|)$ sich auf zwei verschiedene Arten negieren lässt. Die gewählte Interpretation der Negation könnte jeweils von der gewählten Interpretation der Kopula abhängen. Diese beiden verschiedenen Negationsweisen führen zu zwei unterschiedlichen Interpretationsmöglichkeiten des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten und des

³⁹Einige der Formulierungen des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten wurden auch in [132] untersucht.

Nichtwiderspruchsprinzips. Die eine Negationsweise führt zu einer schwächeren Form des Nichtwiderspruchsprinzips und des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten, die zweite führt zu einer stärkeren Form dieser beiden Prinzipien. Aus der Literatur ergibt sich, dass Peirce beide Formulierungsweisen verwendet hat.

In einer Schrift über vielwertige Logik definiert Peirce das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten folgendermaßen:

Every proposition is either true or false. [112], S. 750.

Dies ist eine dritte Peirce'sche Formulierung des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten. Sie scheint von Peirce in den späten Jahren bevorzugt diskutiert worden zu sein. Das starke Prinzip des ausgeschlossenen Dritten ($(|S| \sqsubseteq |P|) \vee \neg(|S| \sqsubseteq |P|)$) und das Prinzip „Jede Proposition ist entweder wahr oder falsch“ ist eine Folgerung aus diesem Prinzip, das in Zukunft Bivalenzprinzip genannt werden soll.

Lane [46] vertritt die Ansicht, dass Peirce mit dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten ausschließlich $((|S| \sqsubseteq |P|) \vee (|S| \sqsubseteq |\sim P|))$ gemeint hat. Er belegt dies zum Beispiel mit einem Zitat von 1908:

By the Principle of Excluded Middle (or of excluded third), is always meant the principle, that no pair of mutually contradictory predicates are both false of any individual subject. MS 611, S. 13, cit in [46], S. 688.

Mit „mutually contradictory predicates“ P und Q könnte

$$(((|S| \sqsubseteq |P|) \Rightarrow (|S| \sqsubseteq |\sim Q|)) \wedge ((|S| \sqsubseteq |Q|) \Rightarrow (|S| \sqsubseteq |\sim P|)))$$

gemeint sein. Setzt man für Q nun $\sim P$ ein, so erhält man, dass $\sim\sim P$ und P für dieselben Subjekte erfüllt sind. Diese Formulierung hatten wir a.a.O. gesehen.

In einer Aussage von Peirce von 1910 finden sich unmittelbar hintereinander zwei Formulierungen des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten.

..., every educated boy was taught that of two „contradictories“, that is, of two assertions flatly contradicting one another, and no more, one or other must be true, which is about as satisfactory a statement, of the principle of excluded third, (though without characterizing it as a *principle* of the *substance*), as the usual formula of today, „A is either B or not B“. ⁴⁰[110], S. 23.

In dem zitierten Manuskript will Peirce jungen Leuten etwas über Logik erklären. In dieser Zeit hat bei Peirce das Vertrauen in die Allgemeingültigkeit der klassischen Logik nachgelassen, da er sich von der Bedeutung der Logik der Vagheit und Allgemeinheit überzeugt hatte. Im obigen Zitat scheint die erste Formulierung des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten der heute üblichen $p \vee \neg p$

⁴⁰Es ist nicht klar, wo die im Manuskript über die Zeile geschriebenen Worte „of the substance“ hingehören.

zu entsprechen, die eine Verallgemeinerung von $((|S| \sqsubseteq |P|) \vee \neg(|S| \sqsubseteq |P|))$ ist. Die zweite Formulierung ist „A is either B or not B“ und wurde schon diskutiert. 1909/1910 schreibt Peirce über verschiedene Arten von Propositionen und dabei über verschiedene Weisen der Negation. Eine der Weisen, die Proposition $(|S| \sqsubseteq |P|)$ zu negieren, sei $(|S| \sqsubseteq |\sim P|)$. Eine andere Weise $(|S| \sqsubseteq |P|)$ zu negieren, nennt er die echte Negation. Er schreibt, diese Art der Negation würde auf die Kopula einwirken und die Natur der Behauptung umkehren. Diese Interpretation, dass diese Art von Negation auf die Kopula einwirkt, ist ungewöhnlich. Peirce meinte vermutlich mit der echten Negation eines Satzes einfach $\neg(|S| \sqsubseteq |P|)$. Peirce schreibt über die beiden Negationen:

Tatsächlich gibt es zwei Arten von Negation, die eine, bloß oberflächliche, die das Prädikat negiert „*S est non P*“, eine Form von Proposition, welche die lateinischen Logiker „infinite“ oder „infinite“ nennen, und die echte Negation, welche auf die Kopula einwirkt und, indem sie dies tut, dazu neigt, die Natur der Behauptung umzukehren [107], S. 418⁴¹.

Für Individuen führen die echte Negation und die schwache Negation zu einem äquivalenten Ergebnis. Handelt es sich nicht um Individuen, erhält man unterschiedliche Ergebnisse. Spricht man von einer bestimmten Menge von Individuen und verwendet das Wort „alle“, so ist die schwächere Form des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten nicht mehr gültig, die stärkere bleibt hingegen gültig. Zum Beispiel ist weder „Alle natürlichen Zahlen sind gerade“, noch „Alle natürlichen Zahlen sind ungerade“ wahr, aber „Nicht (Alle natürlichen Zahlen sind gerade)“ ist wahr. Ist die Menge zusätzlich unbestimmt, so scheint Peirce zu behaupten, dass auch das stärkere Prinzip des ausgeschlossenen Dritten nicht gilt. Ähnliches lässt sich für das Nichtwiderspruchsprinzip sagen.

Das starke Prinzip des ausgeschlossenen Dritten $((|S| \sqsubseteq |P|) \vee \neg(|S| \sqsubseteq |P|))$ gilt nicht nur für ein Einzelindividuum, sondern auch für mehrere tatsächlich voneinander unterschiedene Individuen. Das starke Prinzip des ausgeschlossenen Dritten und das Prinzip „Jede Proposition ist entweder wahr oder falsch“ sind nur dann gleichbedeutend, wenn es keinen anderen Wahrheitswert als wahr oder falsch gibt, wenn also falsch gleichbedeutend ist mit nicht wahr.

Dasselbe Interpretationsproblem gibt es bei dem Nichtwiderspruchsprinzip. Für ein bestimmtes einzelnes Subjekt S gilt, dass $((|S| \sqsubseteq |P|) \wedge (|S| \sqsubseteq |\sim P|))$ nicht gültig sein kann. Zum Beispiel kann man von einer einzelnen ganzen Zahl sagen, ob sie gerade ist, oder ob sie ungerade ist, und keine Zahl ist gleichzeitig gerade und ungerade. Die Zahl zwei ist gerade, und nicht gleichzeitig ungerade. Es gilt jedoch, dass sowohl „Manche natürlichen Zahlen sind gerade“, als auch „Manche natürlichen Zahlen sind ungerade“ wahr ist. Es gilt aber nicht, dass sowohl „Manche natürlichen Zahlen sind gerade“ wahr ist, als auch „Nicht (Manche natürlichen Zahlen sind gerade)“ wahr ist. Deshalb ist für die Menge

⁴¹Deutschübersetzung von Helmut Pape, der in drei Semiotikbänden viele unveröffentlichte Peirce'sche Texte zugänglich gemacht hat.

von wohlunterschiedenen Individuen der natürlichen Zahlen das starke Nichtwiderspruchsprinzip $\neg(|S| \sqsubseteq |P|) \wedge \neg(|S| \sqsupseteq |P|)$ weiterhin gültig, während das schwache Nichtwiderspruchsprinzip $\neg(|S| \sqsubseteq |P|) \wedge (|S| \sqsubseteq |\sim P|)$ nicht gültig ist.

3.3 Mengen

Peirce schreibt häufig, dass Mengen dadurch charakterisiert sind, dass sie wohlunterschiedene Elemente haben. Von den meisten Mathematikern wird unter einer Menge das verstanden, was durch die Mengenlehre von Zermelo und Fränkel zusammen mit dem Auswahlaxiom (ZFC) festgelegt ist. Es gibt aber auch andere Entwürfe einer Mengenlehre, zum Beispiel die Mengenlehre von Neumann, Bernays und Gödel (NBG) und auch Quines Mengenlehre, die NF genannt wird. Jede dieser Mengenlehren nennt andere Objekte Mengen. Auch gibt es in jeder dieser Mengenlehren wegen der Gödel'schen Unvollständigkeitssätze unabhängige Aussagen, die man innerhalb der gegebenen Theorie weder beweisen noch widerlegen kann. Das Verständnis, was eine Menge sein soll, ist also nicht vollständig festgelegt. Meist werden die Diskussionen über die geeigneten Axiome formal geführt. Es werden zum Beispiel die Folgerungen aus einem neuen Axiom überprüft. Sind diese mathematisch interessant, so ist dies ein Argument, das neue Axiom hinzuzunehmen. Peirce geht nicht so vor. Er überlegt, was eine Menge sein soll. Diese Überlegungen sind von Cantors Definition beeinflusst. Peirce scheint aber von Mengen eine engere Vorstellung haben als Cantor. Er will, dass Mengen zusätzlich zu den von Cantor aufgezählten Eigenschaften weitere Bedingungen erfüllen. Betrachtet man diese Bedingungen, so wird auch seine kantianische Vorstellung des Kontinuums deutlicher, die er durch Abgrenzung vom Mengenbegriff gewinnt. Peirce kommentiert im Manuskript 821 [80] Cantors Definition. Außerdem schreibt er Cantor über seine Vorstellung von Mengen und vergleicht sie mit der Cantors. Diese Texte sollen hier untersucht werden, zusätzlich Diperts Artikel [28]. Als erstes soll Peirce' Kommentar zu Cantors Definition betrachtet werden. Cantors berühmte Definition lautet:

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen. [23], S. 282.

Peirce schreibt dazu:

This is remarkably accurate. No need of subjectivism of „unserer Anschauung oder unseres Denkens“. He notes, that the members which he calls „Elemente“ are definite, „bestimmten“ but not that they are also individual, and that they are independent, „wohlunterschieden.“ But he does not analyse this character and say in what it consists. He implies that the relation of the collection to a member is that of a inclusion but this he does not analyse. [80], S. 1.

Aus diesem Kommentar wird deutlich, dass Peirce wie Cantor unter einer Menge eine Zusammenfassung wohlunterschiedener bestimmter Objekte verstehen, die außerdem Individuen sein sollen. Nach Peirce trifft auf ein *individuelles* Subjekt S ein Prädikat⁴² P immer zu, oder nicht zu, es gilt also entweder $(|S| \sqsubseteq |P|)$, oder $(|S| \sqsubseteq |\sim P|)$. Er schreibt auch, dass auf individuelle Subjekte das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten zutrifft. An der gleichen Stelle erklärt er, dass ein Subjekt *bestimmt* heißt, wenn entweder $(|S| \sqsubseteq |P|)$ falsch ist, oder $(|S| \sqsubseteq |\sim P|)$. Dies stellt wohl eine weitere Formulierung des Nichtwiderspruchsprinzips dar. Es soll also möglich sein, über die Elemente von Mengen unter Verwendung der gewohnten logischen Regeln zu argumentieren. In seinem Brief an Cantor vom 21. Dezember 1900 [86] schreibt Peirce, ihm sei nicht klar, ob das, was Cantor als Menge bezeichnet, dasselbe ist, wie das, was er Kollektion nennt. Für die dort vorgestellte Definition von Kollektion benötigt er drei logische Begriffe, nämlich *Individuum*, *koordiniert* und *unabhängig*. Ein Individuum soll keine Allgemeinheit haben, sondern vollständig bestimmt sein. Er nennt Aussagen an anderer Stelle allgemein, wenn sie das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten nicht erfüllen. Als Beispiel für ein Individuum nennt er „die deutschen Leute.“ Er verwendet hier also die Begriffe bestimmt und individuell anders als in der vorher zitierten Arbeit. Eine Relation nennt er individuell, wenn sie zwischen zwei Individuen besteht und zwischen nichts anderem. In einem zweiten Teil des genannten Briefes führt Peirce virtuelle Individuen ein⁴³. Als Beispiel nennt er den Meter, der als virtuelles Individuum unser Messen ermöglicht. Der Meter im Pavillon de Breteuil sei streng genommen kein Individuum, da er seine Eigenschaften ändert. Auch ein imaginierter Tintenfleck sei ein virtuelles Individuum. Er hat jedoch keine echte Individualität, da ihm die Selbstidentität fehlt, weil man seine Eigenschaften nach Belieben ändern kann. Im nächsten Brief an Cantor unterscheidet Peirce nochmals zwischen verschiedenen Arten von Individuen. Er benennt dort Individuum, primitives Individuum und abgeleitetes Individuum⁴⁴. Ein Individuum nennt er an dieser Stelle ein Subjekt S , von dem für jedes Prädikat P entweder $(|S| \sqsubseteq |P|)$ universell wahr, oder universell falsch ist. Mit universell wahr meint Peirce vielleicht zu allen Zeiten wahr. Ein primitives Individuum ist nach Dipert dasselbe wie ein unabhängiges Individuum⁴⁵. Peirce schreibt:

By a *primitive individual* I mean an individual having characters which it might, without contradiction, be supposed to possess although there were no regularities among other things except certain regularities presupposed to render knowledge possible. [86], S. 774.

Die Eigenschaften eines primitiven Individuums sollen also auch denkbar sein ohne Gesetze und Regularitäten. Ein abgeleitetes Individuum besteht aufgrund von Regularitäten, wobei hier nicht solche Regularitäten gemeint sind, die

⁴²Peirce schrieb an dieser Stelle statt Prädikat monadisches Rhema, was der Name einer bestimmte Art von Zeichen ist. Siehe [92], S. 119.

⁴³Siehe [86], S. 771.

⁴⁴Siehe [86], S. 773, 774.

⁴⁵Siehe [28], S. 69.

das Wissen ermöglichen. Als Beispiel nennt Peirce „deutsche Menschen“. Von diesem Individuum sind nur Fakten wahr, die durch das Deutschsein und das Menschsein festgelegt werden. Als zweites Beispiel nennt Peirce eine Gerade. Er schreibt:

So a line, whether it be regarded as an aggregation of points or not, has no character whatever except what consists in relations between its parts and other parts of space. Thus, if it is black, to say so only means that all its parts are black. [86], S. 774.

Peirce erklärt weiter, dass nominalistische Theorien keine feste Reihenfolge der Abhängigkeit anerkennen, und deshalb innerhalb einer solchen Theorie Punkte als abgeleitete, und Geraden als primitive Individuen aufgefasst werden können.

Peirce nennt mehrere Subjekte koordiniert, wenn ihnen problemlos dieselben Prädikate zugeschrieben werden können. Punkte, oder zwei verschiedene Menschen sind koordiniert. Als Gegenbeispiele nennt er eine Relation und ein materielles Ding. Es ist sinnvoll, davon zu sprechen, dass dieses materielle Ding blau ist. Nicht sinnvoll ist es aber, davon zu sprechen, dass die Relation blau ist. Solches würden wir heute als Kategorienfehler bezeichnen. In einem zweiten Brief an Cantor unterscheidet Peirce zwischen einer Menge und ihrem Singleton. Peirce betrachtet $\{a\}$ und a als nicht koordiniert⁴⁶. Dipert bezeichnet die Überlegungen zur Koordiniertheit von Elementen als Peirce' Theorie der metaphysischen Typen.

Subjekte können nach Peirce mehr oder weniger unabhängig sein. Subjekte heißen dann unabhängig, wenn sie ihre Eigenschaften wechseln können, ohne ihre Identität zu verlieren. Als Beispiel nennt er Atome, die in der Zeit ihre Eigenschaften verändern können, ohne ihre Identität zu verlieren. Farben hingegen können ihre Eigenschaften nicht so leicht wechseln, ohne zu einer anderen Farbe zu werden.

Eine Kollektion soll ein Individuum sein, dass koordinierte und unabhängige Elemente hat. Diese sollen entweder abgeleitet sein, oder nicht abgeleitet. Sind sie abgeleitet, so sollen sie nicht auf dieselbe Weise abgeleitet sein⁴⁷. In dem zweiten Brief schreibt er genauer, dass eine Kollektion ein abgeleitetes Individuum sein soll. Eine Kollektion soll erstens bestimmt sein durch die Elemente, die koordinierte primitive Individuen sein sollten. Peirce nennt sie *ineunts*⁴⁸. Peirce schwächt das primitiv ab und schreibt relativ primitive Individuen, da er nicht sicher zu sein scheint, ob es absolut primitive Individuen gibt. Zweitens ist eine Kollektion bestimmt durch diejenigen Elemente, die zu den ineunts koordiniert sind, aber nicht zur Menge gehören. Er nennt sie *exeunts*.

Eine Kollektion soll nach Peirce also bestimmt sein durch bestimmte Individuen, die nicht Elemente der Kollektion sind. Eine Kollektion ist also gegeben dadurch, dass angegeben wird, welche Individuen zu der Kollektion gehören

⁴⁶Siehe [86], S. 775.

⁴⁷[86], S. 768.

⁴⁸[86], S. 775.

und welche nicht. Dadurch entsteht eine Art Universum von koordinierten Individuen, innerhalb welchem die „ineunts“ und „exeunts“ ausgewählt werden können.

Man braucht also mehr Information, um sagen zu können, dass etwas eine Kollektion ist, als eine Menge. Zum Beispiel können sich $\{a\}$ und a durchaus in derselben Menge befinden, ohne die Axiome der Mengenlehre zu verletzen. Bei Peirce' Kollektionen wäre das nicht möglich, da sie nicht koordiniert sind. Auch ist es in der klassischen Mengenlehre nicht notwendig, die „exeunts“ anzugeben, also die Elemente, die zu einer Menge nicht dazugehören.

Zu der Definition von Mengen sagte Peirce an anderer Stelle⁴⁹, dass mögliche Mengen durch ein „Substantiv“ A definiert werden. Er schreibt, die „Substantive“ sollten eineindeutig den Mengen zugeordnet sein. „Substantive“ könnten Eigenschaften sein, die genau auf alle Elemente der Menge zutreffen. Seine sogenannten „Substantive“ scheinen Ähnlichkeiten mit den heutigen Klassentermen zu haben. Sie entsprechen den heutigen Nominalphrasen. Er fordert außerdem, dass die Elemente wohlunterschieden sind.

Peirce kommentiert auch, wie Cantor die Mächtigkeit definiert⁵⁰ und kritisiert, dass in der Definition etwas seiner Ansicht nach Subjektives, nämlich das aktive Denkvermögen vorkommt. Außerdem betrachtet er Cantors Definition als negative Definition, da die Kardinalzahl durch Abstraktion von der Ordnung der Elemente der Menge gefunden werden soll⁵¹. Peirce wäre lieber von kleiner und größer ausgegangen. Peirce hat sich intensiv mit partiellen Ordnungen auseinandergesetzt. Dies zeigt sich in seinen Arbeiten zur Relationenlogik, die im vorletzten Abschnitt besprochen wurden, und in den Überlegungen zum Kontinuum aus der Cantor'schen Periode, im einleitenden geschichtlichen Kapitel. Vielleicht bedeutet die Aussage, dass Peirce lieber von kleiner und größer ausgegangen wäre, dass er den Begriff der Kardinalzahl lieber über den Begriff der Ordinalzahl eingeführt hätte.

Um Mengen größerer Mächtigkeit zu erzeugen, kann man die Potenzmenge bilden, und diese ist größer als die Menge, aus der sie gebildet wurde, wie Cantor [22] gezeigt hat. Peirce überlegt, dass man, wenn man dies immer fortsetzt, also aus jeder Potenzmenge wieder eine neue Menge bildet, als Grenzwert etwas Neues, nämlich das Kontinuum erhalten muss, das keine Menge mehr ist. Dieses Neue würde dann Mengen aller Mächtigkeiten enthalten, da Peirce annahm, die einzigen Mächtigkeiten, die es gäbe, wären diejenigen, die man durch Potenzmengenbildung erhält⁵².

⁴⁹Mit möglich ist hier nur gemeint, dass die leere Menge, von Peirce das Nichts genannt, zugelassen sein soll. Da die leere Menge nach seinem Verständnis von Existenz nicht existiert, schreibt er mögliche Mengen statt nur Mengen. Siehe [103], S. 141.

⁵⁰[80], S.1.

⁵¹Siehe [23], S. 282, [80], S. 3.

⁵²Er nahm die allgemeine Kontinuumshypothese an. Siehe zu diesem Thema das Kapitel über Definitionen des Kontinuums und Infinitesimale.

3.4 Vagheit und Allgemeinheit

Peirce bezeichnet das Kontinuum als das wahre Allgemeine. Die Wirklichkeit wird von Peirce als kontinuierlich vorausgesetzt; dadurch entsteht in Peirce' Theorie Vagheit in der Realität und in der Sprache.

Vagheit und Allgemeinheit sind bei Peirce schillernde Begriffe. So scheint es teilweise, als würden vage Aussagen den Aussagen mit Existenzquantifizierung entsprechen, und allgemeine Aussagen jenen mit Allquantifizierung⁵³. Auch wird das Phänomen der Vagheit von Peirce manchmal mit der Ungesättigtheit von Prädikaten in Verbindung gebracht. Peirce formuliert zwei weitere Definitionen von Vagheit und Allgemeinheit: Die erste gehört zur Pragmatik, die zweite zur Logik. Vage Aussagen⁵⁴ sind diejenigen Aussagen, in denen der Sprecher die Bedeutung des Satzes festlegt. Der Hörer kann die vage Aussage richtig, also gleich wie der Sprecher, oder falsch, also anders als der Sprecher interpretieren. Da die Bedeutung des Satzes nicht in einer für den Hörer offensichtlichen Weise festgelegt wird, ist der Satz, ohne dass der Hörer einen logischen Fehler macht, richtig und falsch interpretierbar. Dies ist eine Erklärung, weshalb Peirce vage Sätze als Sätze definiert, die dem Nichtwiderspruchsprinzip nicht genügen. Peirce scheint damit zu meinen, dass einzelne vage Sätze gleichzeitig wahr und falsch sein können. Dies erklärt sich daraus, dass die Eigenschaft, nicht unter dem Nichtwiderspruchsprinzip zu stehen, nach Peirce an der undefiniertheit des Satzes liegt.

Bei einer allgemeinen Aussage nach Peirce hat der Hörer die Aufgabe des Interpretierens. Der Hörende ist aufgefordert, dem allgemeinen Satz eine Bedeutung zu geben. Peirce behauptet außerdem, allgemeine Sätze unterliegen nicht dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten. Dies kann so gedeutet werden, dass der Satz bei beliebiger logisch korrekter Interpretation wahr sein soll, bis auf eine winzige Menge mit Maß 0 von möglichen Ausnahmen. Vielleicht denkt Peirce dabei an die Wahrscheinlichkeitstheorie. Er bezeichnet die zweiwertige Boole'sche Logik als Wahrscheinlichkeitsrechnung für Allwissende. Diese Interpretation soll durch ein Beispiel erläutert werden: Trifft man mit einem unendlich dünnen Pfeil auf eine Gerade, auf der die reellen Zahlen eingezeichnet sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine rationale Zahl zu treffen Null, da die rationalen Zahlen das Maß Null haben, obwohl es nicht unmöglich ist, eine rationale Zahl zu treffen. Man könnte hier als Gesetz formulieren, dass man mit dem Pfeil stets eine irrationale Zahl trifft.

Gesetze sollen sich nach Peirce ähnlich wie menschliche Gewohnheiten entwickeln. Es war keine Stelle zu finden, wo Peirce konkret erklärt, wie eine Entwicklung von Gesetzen genau vor sich gehen soll. Es lässt sich lediglich der Literatur entnehmen, dass er dafür die Theorie des Kontinuums, der Infinitesimalen und die Möglichkeit der Bildung von Limites verwenden will. Schon Peirce ist der Ansicht, dass schon das Ergebnis eines einzigen Experimentes genügen soll, um ein Gesetz zu widerlegen.

⁵³Siehe [24], S. 229 ff.

⁵⁴Eine ausführlichere Erläuterung zu dem Begriff „Vagheit“ findet sich in [24].

Peirce beschreibt das Allgemeine mit Hilfe des Kontinuums, so dass jede allgemeine Aussage ein Kontinuum von möglichen Ereignissen oder Dingen aufspannt, die unter die allgemeine Aussage fallen können. Innerhalb eines solchen Kontinuums soll das Tertium non Datur im infinitesimalen Bereich nicht mehr gültig sein. Das heißt, man könnte die Koordinaten eines Punktes nicht ohne weiteres infinitesimal genau bestimmen.

3.4.1 Definition aus der Pragmatik

Zeichen oder Aussagen können nach Peirce vage, singulär oder allgemein sein. Die Bedeutung singulärer Zeichen ist vollständig festgelegt. Vage und allgemeine Zeichen sind dagegen nicht vollständig bestimmt. Sie sind dadurch unterschieden, dass sie auf verschiedene Weise unbestimmt sind. Peirce beschreibt im Manuskript 9 [89] einige Charakteristika der vagen, singulären und allgemeinen Zeichen. Zunächst erklärt er, dass jedes Zeichen auf verschiedene Objekte anwendbar ist. Er betont insbesondere, dass dies auch für Namen gilt. Der Name Phillip zum Beispiel bezieht sich auf den betrunkenen und den nüchternen Phillip. Aus einem bestimmten Blickwinkel kann man das Zeichen als einem bestimmten Objekt zugehörig betrachten. Verwendet jemand ein Zeichen unter diesem Blickwinkel für viele Objekte, so heißt es „*vage*“. Gibt derjenige, der das Zeichen verwendet, die Aufgabe des Festlegens an den Interpretierenden, also zum Beispiel Hörenden weiter, so heißt das Zeichen „*allgemein*“. Im Falle eines vagen Zeichens liegt die Festlegung also bei dem, der das Zeichen verwendet, im Falle eines allgemeinen Zeichens beim Interpretierenden. Deshalb kann ein Zeichen nicht unter derselben Rücksicht vage und allgemein sein. Als Beispiel gibt Peirce drei Anwendungen des Zeichens „Mensch“ an:

„Man“ is used vaguely in „Some man sins“; generally in „Every man sins“ and singularly in „This man sins“. [89], S. 3.

In einem anderen Manuskript verwendet Peirce auch das Beispiel des Sünders. Er schreibt dort:

Let A say to B, „A man is a sinner.“ B asks „What man“. If A replies „Whatever man you like“, his assertion is comprehensive pr.; if however, A replies, „I prefer not to name the man“, his assertion is vague or indefinite. [114], S. 2⁵⁵.

Lässt der Sprecher A dem Hörer B die Wahl, auf welchen Menschen er den Satz „Ein Mensch ist ein Sünder“ anwenden will, so ist dieser Satz ein allgemeines Zeichen. Der Hörer B kann das Zeichen auf einen beliebigen einzelnen Menschen anwenden. Derselbe Satz kann jedoch auch ein vages Zeichen meinen. Falls es sich um ein vages Zeichen handelt, wird es nicht durch den Hörer B interpretiert, sondern durch den Sprecher A.

⁵⁵Peirce hat in diesem Zitat das Wort „general“ durchgestrichen und stattdessen comprehensive und ein weiteres unleserliches Wort eingefügt.

Die Eigenschaften vager bzw. allgemeiner Zeichen werden in den folgenden Zeilen zusammengefasst, wobei Peirce auch darauf eingeht, wie vage bzw. allgemeine Zeichen verteidigt bzw. abgelehnt werden.

A vague sign leaves the *utterer* the liberty of choosing the singular. Hence, it will be successfully *defended* by *establishing* a suitable *individual* sign. It cannot be *defended* by *establishing* a *general* sign since giving the *interpreter* liberty to find a singular sign does not confer the power to do so. [89].

A general sign transfers to the *interpreter* the choice of the singular, it will successfully *refuted* by *refuting* a suitable *definite* sign. It cannot be *refuted* by *refuting* a vague sign since proving that the *utterer* can find a singular does not prove that the interpreter can. [89].

3.4.2 Russel über „all“, „every“, „any“, „a“ und „some“

Peirce beschäftigte sich mit Russells *Principles of Mathematics*, wie man zum Beispiel in [101], S. 392 lesen kann. Russell untersucht im Abschnitt über Denotieren „all“, „every“, „any“, „a“, „some“ und „the“⁵⁶. Er untersucht diese sechs Ausdrücke, da sie sowohl für die Mathematik, als auch für die Alltagssprache von Bedeutung sind. Alle sechs seien scharf voneinander zu unterscheiden. „The“ wird mit Hilfe von Kennzeichnung separat analysiert. Er fragt, ob die sechs verschiedenen Worte auf sechs verschiedene Objekte hinweisen oder auf sechs Weisen des Denotierens, oder ob sowohl die Objekte, als auch die Weisen des Denotierens unterschiedlich seien. Er kommt zu dem Schluss, dass die Objekte unterschiedlich sind.

Zunächst untersucht er die Bedeutung für endliche Klassen:

1. *All a's* denotes a_1 and a_2 and ... and a_n .
2. *Every a* denotes a_1 and denotes a_2 and ... and denotes a_n .
3. *Any a* denotes a_1 or a_2 or ... or a_n , where *or* has the meaning that it is irrelevant which we take.
4. *An a* denotes a_1 or a_2 or ... or a_n , where *or* has the meaning that no one in particular must be taken, just as in *all a's* we must not take any one in particular.
5. *Some a* denotes a_1 or denotes a_2 or ... or denotes a_n , where it is not irrelevant which is taken, but on the contrary some one particular *a* must be taken [120], S. 59.

Da in der Mathematik Klassen von so großer Bedeutung sind, betrachtet Russell noch Klassen a und b , wobei b eine Klasse von Klassen sein soll. Er

⁵⁶Siehe [120], S. 53-65.

erhält damit Verbindungen zur Inklusion. Er gliedert für jede der sechs Worte verschiedene Möglichkeiten auf. Für *any* erhält er:

1. Any a belongs to any class belonging to b , in other words, the class a is wholly contained in the common part or logical product of the various classes belonging to b .
2. Any a belongs to a b , i.e. the class a is contained in any class which contains all the b 's, or, is contained in the logical sum of all the b 's.
3. Any a belongs to some b , i.e. there is a class belonging to b , in which the class a is contained. The difference between this case and the second arises from the fact that here there is one b to which every a belongs, whereas before it was only decided that every a belonged to a b , and different a 's might belong to different b 's [120], S. 59.

Es mag sein, dass Peirce bei seiner Untersuchung der Quantoren von Russell beeinflusst war. Er hat aber die feine Unterscheidung von Russell wohl nicht so expliziert. Auch mag ihn Russells Unterscheidung von Klassenkonzepten und Prädikaten beeinflusst haben bei der Untersuchung der Universalien. Er ist aber aufgrund seiner Verbindung der Universalien, der Quantoren und des Kontinuums zu anderen Ergebnissen gekommen.

3.4.3 Quantoren, Universalien und die beiden logischen Grundprinzipien

Peirce gibt eine formale Definition vager und allgemeiner Behauptungen, indem er ihr Verhältnis zum Prinzip des ausgeschlossenen Dritten und zum Nichtwiderspruchsprinzip darstellt. Im letzten Abschnitt werden verschiedene Versionen vom Prinzip des ausgeschlossenen Dritten und des Nichtwiderspruchsprinzips diskutiert. Anhand dieser Gedanken soll nun versucht werden, die Bedeutung von Vagheit und Allgemeinheit näher zu erfassen. Peirce schreibt als Definition von vagen und allgemeinen Sätzen:

Perhaps a more scientific pair of definitions would be that anything is *general*, in so far as the principle of contradiction does not apply to it and is *vague* in so far as the principle of contradiction does not apply to it⁵⁷. [61], 5.448.

Quantoren, Vagheit und Allgemeinheit

Die Quantoren werden von Peirce zum Teil mit Hilfe der Pragmatik eingeführt. Peirce erklärt 1885, dass der Existenzquantor der Disjunktion entspricht und der Allquantor der Konjunktion. Damals vergleicht er die Quantifikation mit

⁵⁷Nach [32], S. 79 ist dieser Text aus dem 1905 geschriebenen *Issues of Pragmaticism* entnommen, d.h. aus MS 290.

Summe und Produkt. Für den Existenzquantor verwendet er das Produktzeichen und für den Allquantor das Summenzeichen, die Disjunktion schreibt er als Plus, die Konjunktion ohne Zeichen, wie bei der Multiplikation. Er erklärt:

Here, in order to render the notation as iconical as possible we may use \sum for some, and \prod for all, suggesting a product. Thus $\sum_i x_i$ means that x is true of some one of the individuals, or

$$\sum_i x_i = x_i + x_j + x_k + \text{etc.}$$

In the same way $\prod_i x_i$ means that x is true of all these individuals, or

$$\prod_i x_i = x_i x_j x_k \text{ etc.}$$

Peirce weist darauf hin, dass $\sum_i x$ und $\prod_i x_i$ ähnlich sind zu Summe und Produkt, jedoch nicht wirklich von gleicher Art, da die Kollektion, aus der die i genommen werden, überabzählbar sein kann. Er stellt auch die Formeln $\sum_i \sum_j x_{ij}$, $\prod_i \prod_j x_{ij}$, $\sum_i \prod_j x_{ij}$, und $\prod_i \sum_j x_{ij}$ vor⁵⁸.

In einem Brief an William James erklärt Peirce, dass die Unterscheidungsmöglichkeit zwischen vagen oder indefiniten, singulären, und allgemeinen Subjekten wesentlich ist. Generisch verwendete Nomen wie „Mensch“ sind normalerweise allgemein. Der allgemeine Term, bzw. das allgemeine Nomen ist unbestimmt und überlässt dem Hörer die Bestimmung, wie oben erläutert. Bei vagen Nomen wie „ein Mann“ wird die Bestimmung dem Hörer oder der Instantiierung überlassen:

„A man marries“ = „A man *who might be instanced* marries“
[100], S. 812.

In den Worten „a man“ oder „whatever man you like“ stecken Peirce' Quantoren. Wird über Mengen quantifiziert, also über Kollektionen mit unterscheidbaren und unabhängigen Individuen, so gilt das schwache Prinzip des ausgeschlossenen Dritten für allquantifizierte Sätze nicht mehr, und das schwache Nichtwiderspruchsprinzip für existenzquantifizierte Sätze nicht mehr. Dazu folgendes Beispiel: „All diese Tassen haben einen Henkel“. Dabei sei der Hinweis auf diese Tassen eindeutig. Die Tassen sollen alle entweder eindeutig einen Henkel, oder eindeutig keinen Henkel haben. Es könnte nun sein, dass manche der Tassen einen Henkel haben, und manche nicht. In diesem Fall gilt

$$E!S ((|S| \sqsubseteq |P|) \vee (|S| \sqsubseteq |\sim P|))$$

⁵⁸Für eine detaillierte Diskussion der Peirce'schen Quantorenlogik und ihres Einflusses auf die Entwicklung der heutigen Logik siehe [12], S. 113 ff. Da es für Bradys Thema nicht wesentlich ist, berücksichtigt sie die Zusammenhänge mit Vagheit und Allgemeinheit höchstens am Rande.

nicht, falls man S als „Tassen“ und P als „mit Henkel“ interpretiert. Wegen dem Wort „diese“ wurde die Interpretation mit dem ι Operator ausgewählt. Der Allquantor ist in S verborgen, das mehrere Elemente enthält. Auf ähnliche Weise lässt sich auch ein Beispiel für die Existenzquantifizierung angeben: „Eine der Tassen, die ich meine, hat einen Henkel.“ Für diesen Satz gilt

$$\neg \exists S (\lambda x ((|S| \sqsubseteq |P|) \wedge (|S| \sqsupseteq |P|)) S)$$

nicht, solange nicht festgelegt ist, welche der Tassen der Sprecher meint. S steht hier für ein unbestimmtes Objekt. Peirce schreibt weiter, dass kein Satz absolut vage sei, denn dann hätte das Nichtwiderspruchsprinzip keinerlei Anwendung, und das wäre absurd. Es ist schwierig zu sehen, was er damit genau meint.

Blau unterscheidet zwischen vagen und selbstreferentiellen Sätzen. Peirce unterscheidet im Gegensatz dazu zwischen allgemeinen und vagen Objekten. In dem Ausdruck S , der für ein allgemeines Objekt steht, kann wie oben in „all (diese) Tassen“ ein Allquantor verborgen sein. In dem Ausdruck, der für ein vages Objekt S steht, kann wie bei „eine der Tassen, die ich meine“ ein Existenzquantor verborgen sein.

Vage Sätze, die den Sätzen über allgemeine Objekte entsprechen, bewertet Blau mit dem zusätzlichen Wahrheitswert *neutral*. Selbstreferentielle Sätze, die den Sätzen über vage Objekte entsprechen, gibt Blau den Wahrheitswert *neutral*. Entsprechend könnte man auch hier vorgehen. Dieses Thema wird nochmals bei der Diskussion der Blau'schen Reflexionslogik aufgegriffen.

Vagheit, Allgemeinheit und Universalien

Zumindest für die Allgemeinheit wäre das Beispiel mit den Tassen nur ein abgeschwächtes Beispiel, da die Tassen wohlunterschieden sind. Sätze, deren Subjekte in einem Kontinuum liegen, haben eine noch nicht festgelegte Identität. Peirce nennt das Kontinuum das wahre Allgemeine. Betrachtet man mit Peirce einen Satz wie „Alle Menschen sind sterblich“, so sind darin sämtliche möglichen zukünftigen, gegenwärtigen und vergangenen Menschen gemeint. Deren Identität ist noch nicht festgelegt. Jeder einzelne Mensch ist eine Instanz dieses Gesetzes, der einzelne Mensch wird von der Natur hervorgebracht, er wird damit singulär. Das Gesetz betrifft all diese Instantiierungen. Dennoch sind die einzelnen Instantiierungen nicht wie bei einer Menge gegeben, sondern sie sind potentiell vorhanden. Man kann sich also solche Propositionen nicht mehr in dem Sinn quantifiziert vorstellen, dass der Quantor über eine vorgegebene Menge läuft, wo die Elemente wohlunterschieden sind. Solch allgemeine Subjekte könnte man Universalien nennen.

Die Identität von Punkten im Kontinuum ist nicht festgelegt, und Peirce stellt sich vor, das ein Gesetz ein Kontinuum aufspannt, das seine Instantiierungen potentiell enthält.

Die Interpretation, dass Peirce einen weiteren Wahrheitswert angenommen haben könnte, wird durch seine Ansätze in mehrwertiger Logik gestützt. Vage Sätze können, wie in dem Abschnitt über die Definition aus der Pragmatik

erläutert, richtig und falsch interpretiert werden. Deshalb kann man sagen, solange sie nicht bestimmt sind, hätten sie keinen Wahrheitswert, oder seien zugleich wahr und falsch. Solche Sätze könnte man, Blau folgend, mit dem Wahrheitswert „offen“ bewerten. Dazu folgendes Zitat:

Thus, although it is true that “Any proposition you please, *once you have determined its identity*, is either true or false”; yet *so long as it remains indeterminate and so without identity*, it need neither be true, that any proposition you please is true, nor that any proposition you please is false. So likewise, while it is false that “A proposition *whose identity I have determined* is both true and false”, yet until it is determinate, it may be true that a proposition is true and that a proposition is false. [61] 5.448⁵⁹.

1909 entwickelt Peirce eine triadische Logik, in der Aussagen einen dritten Wahrheitswert annehmen können. Diese triadische Logik lässt vielleicht auch zu, dass Sätze sowohl wahr als auch falsch sind, solange sie nicht auf eine Tatsache festgelegt sind:

Triadic Logic is that Logic which, though not rejecting entirely the Principle of Excluded Middle, nevertheless recognizes that every proposition, S is P is either true, or false, or else has a lower mode of being such that it can neither be determinately P , nor determinately not P , but is at the limit between P and not P . Of course it remains true, as far as the principle of contradiction is concerned that the state of things represented by the proposition can be \mathbf{V} and \mathbf{F} , *verum atque falsum*⁶⁰.

Peirce geht davon aus, dass Naturgesetze sich im infinitesimalen Bereich entwickeln und die zukünftige Entwicklung noch nicht festgelegt ist. Gesetze sollen Aussagen sein, die einen Allquantor enthalten, bzw. in denen der Allquantor versteckt ist. Der Allquantor tritt in Form einer Universalie wie der Stein, der Mensch... auf. Für jeden beliebigen Stein trifft das Prädikat „fällt nach unten“ zu. Dennoch scheint ein kleiner Unterschied zwischen einem Allquantor, wie er in der heutigen klassischen Mathematik verwendet wird, und dem Allquantor, der hier von Peirce verwendet wird, zu bestehen. Peirce behauptet, dass die Aussage für jedes beliebige Beispiel wahr sein wird, er machte aber dennoch keine Aussage über die Gesamtheit der potentiellen Punkte, die ein Kontinuum sind. In dem Peirce’schen Kontinuum ist jeder Punkt beliebig genau bestimmbar. Dennoch können niemals alle Punkte gleichzeitig gegeben sein.

⁵⁹Nach [32], S. 79 ist dieser Text aus dem 1905 geschriebenen *Issues of Pragmaticism* entnommen, d.h. aus MS 290.

⁶⁰Das findet sich in [105] und die entsprechende Manuskriptseite ist in [32], S. 75 abgedruckt. Peirce nennt hier das Nichtwiderspruchsprinzip principle of contradiction.

Kapitel 4

Fünf Eigenschaften des Peirce'schen Kontinuums

Das Peirce'sche Kontinuum läßt sich durch fünf Eigenschaften charakterisieren, die uns in dieser Arbeit begleiten werden. Eine wesentliche Aufgabe dieses Kapitels besteht darin, aus den Schriften von Peirce diese fünf Bedingungen zu extrahieren. Die fünf Bedingungen sind, wie wir sehen werden, zum Teil unscharf, wodurch sich zeigt, dass Peirce bis zum Schluss an der Klärung seines Kontinuumbegriffs gearbeitet hat. Die fünf Bedingungen für das Peirce'sche Kontinuum sind folgende:

1. Unbegrenzte Unterscheidbarkeit.
2. Potentialität.
3. Erfassung des Allgemeinen.
4. Selbstähnlichkeit.
5. Priorität.

Die ersten drei Bedingungen sind Peirce schon in der kantianischen Periode wichtig, die letzten beiden haben für ihn erst in seinen letzten Jahren, der nachcantorschen Periode, Gewicht bekommen. Die vierte Bedingung hat in der vorcantorschen Periode schon einmal zu seinen Kontinuumsvorstellungen gehört.

Es soll ausgeführt werden, wo Unschärfen in den einzelnen Bedingungen zu finden sind und worin sie bestehen. Man wird sehen, dass die Bedingungen in jedem der später vorgestellten Modelle und in Weiterentwicklungen des Peirce'schen Kontinuumsgedankens auf andere Weise erfüllt werden.

4.1 Unterteilbarkeit des Peirce'schen Kontinuums

Die erste Bedingung bedeutet, dass sich im Kontinuum beliebig feine Unterscheidungen treffen lassen sollen. Dabei ist das Wort „beliebig“ unklar. Beliebig könnte zahllos im Sinne Wittgensteins¹ bedeuten, oder so oft wie jede beliebige Kardinalzahl, oder so oft wie jede im Blau'schen Sinne transdefinite Ordinalzahl, oder so oft wie die intuitionistischen reellen Zahlen, oder so oft wie die klassischen reellen Zahlen, die dicht und vollständig sind....

Peirce gibt auf die Frage, was beliebig bedeute, in der kantianischen und in der nachcantorschen Periode unterschiedliche Antworten. In der kantianischen Periode will er, dass Mengen jeder Mächtigkeit im Kontinuum potentiell enthalten sind. In der nachcantorschen Phase ist sich Peirce nicht mehr klar, ob eine Beschreibung des Kontinuums über die Mengentheorie sinnvoll ist. In dieser Zeit gibt er eine unbestimmte Antwort auf die gerade gestellte Frage: Es sollten unbestimmt viele Punkte potentiell enthalten sein, unbestimmt viele könnte aber auch abzählbar viele bedeuten.

In der kantianischen Periode versucht er das Kontinuum durch Mengentheorie zu beschreiben. Dennoch soll das Kontinuum keine Menge sein, da es Mengen aller Mächtigkeiten enthalten soll. Dadurch sollen auch Mengen von Möglichkeiten beliebiger Mächtigkeiten im Kontinuum abgebildet werden können. Wichtig für seine Theorie ist, auf welche Weise das Kontinuum Mengen aller Mächtigkeiten enthält und selbst dabei keine Menge ist.

Da das Kontinuum Mengen aller Mächtigkeiten enthalten soll, ist es wichtig zu sehen, wie man aus Mengen größere Mengen erzeugen kann. Eine Möglichkeit, aus einer gegebenen Menge eine größere Mengen zu erzeugen, ist, die Menge ihrer Teilmengen, also die Potenzmenge zu bilden. Cantor beweist, dass die Potenzmenge immer eine höhere Mächtigkeit hat, als die Menge, aus der sie gebildet wurde. Dies ist das berühmte Theorem von Cantor². Peirce zeigt dies vermutlich unabhängig von Cantor³.

Peirce nimmt in der kantianischen Periode zwei Axiome an.

Das erste wird in der meist verwendeten Mengenlehre ZFC von Zermelo-Fränkel nicht angenommen. Es heißt *allgemeine Kontinuumshypothese*. Die allgemeine Kontinuumshypothese ist eine Verallgemeinerung der Kontinuumshypothese. Diese sagt aus, dass die nächstmächtigere Menge nach den natürlichen Zahlen die reellen Zahlen sind. Auch die Kontinuumshypothese wird in ZFC nicht angenommen. Selbst ohne Verwendung der Kontinuumshypothese kann in ZFC gezeigt werden, dass die Potenzmenge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist mit der Menge der reellen Zahlen. Die Kontinuumshypothese sagt also aus, dass es keine Menge gibt, die von größerer Mächtigkeit ist als die Menge der natürlichen Zahlen und von kleinerer Mächtigkeit als die Potenzmenge der natürlichen Zahlen. Die allgemeine Kontinuumshypothese sagt aus, dass man alle Mächtigkeiten

¹Siehe [130], 4.128.

²Siehe [54], S. 511.

³Siehe dazu [82]; [61], 3.548; [54], S. 511ff.

durch Potenzmengenbildung erhält. Peirce nimmt an, dass die allgemeine Kontinuumshypothese wahr ist, und versucht die Kontinuumshypothese zu beweisen⁴. Er war sich dieses Beweises nicht sicher⁵. Heute weiß man, dass dies innerhalb von ZFC nicht ohne zusätzliche Annahmen möglich ist. Die allgemeine Kontinuumshypothese sagt aus, dass es zu einer Menge A jeweils keine Menge gibt, die von größerer Mächtigkeit als die Menge A ist, und von kleinerer Mächtigkeit als die Potenzmenge von A . Damit wird die Anzahl der Kardinalzahlen festgelegt.

Als zweites Axiom setzt Peirce voraus, dass man die Menge der reellen Zahlen wohlordnen kann.

Definition 4.1 *Eine Menge A heißt genau dann wohlgeordnet durch eine Relation R , wenn A durch R sowohl linear geordnet ist, als auch jede nichtleere Teilmenge ein Element besitzt, das zu jedem anderen Element der Teilmenge in der Relation R steht.*

Dies ist in ZFC eine Folgerung des *Auswahlaxioms*. In der Abkürzung ZFC steht C für Choice, also für das Auswahlaxiom. Verwendet man ZF, so ist äquivalent zur Annahme, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, die Annahme des Auswahlaxioms. Mit Hilfe des Auswahlaxioms kann man von Elementen sprechen, und ihre Existenz annehmen, ohne genaueres über diese Elemente zu wissen.

In der heutigen Mathematik gibt es Strömungen, wie z. B. die intuitionistische Mathematik, die diese Axiome vermeiden.

Peirce will, dass im Kontinuum Mengen aller Mächtigkeiten enthalten sind. Da er die allgemeine Kontinuumshypothese annahm, gibt es in seiner Mengenlehre genau die endlichen Kardinalzahlen, die Kardinalzahl \aleph_0 , die durch die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen gegeben ist, und diejenigen Kardinalzahlen, die man als Mächtigkeiten der Mengen erhält, die durch wiederholte Anwendung der Potenzmengenoperation auf die natürlichen Zahlen entstehen.

Peirce hat einen anderen Mengenbegriff, er nennt das den Mengen entsprechende *Kollektion*. Die Mächtigkeit der Potenzkollektion definiert er als die Anzahl der Möglichkeiten, die jeweilige Kollektion auf zwei Kollektionen zu verteilen. Seine Kollektionen sind sowohl durch ihre Elemente (ineunts) als auch durch eine spezifische Art von fremden Elementen (exeunts) bestimmt. Seine Art, die Potenzkollektion zu definieren, berücksichtigt wohl diesen Unterschied zum Mengenbegriff Cantors⁶. Die Potenzkollektion einer Kollektion könnte als ineunts die Teilkollektionen haben, dazu jeweils als exeunt die Kollektion ohne die Teilkollektionen.

Peirce setzt voraus, dass alle möglichen unendlichen Mengen die Mächtigkeit

$$\aleph_0 \text{ oder } 2^{\aleph_0} \text{ oder } 2^{2^{\aleph_0}} \text{ oder...oder } 2^{2^{\dots^{2^{\aleph_0}}}} \text{ haben.}$$

⁴Siehe [85].

⁵Siehe dazu [85]; [35], S. 625; [54], S. 516-517.

⁶Siehe [85] S. 86.

Die Mächtigkeit des Kontinuums soll der Grenzwert dieser Folge sein. Solche Kollektionen nennt er supermächtig⁷. Er überlegt, dass die Potenzmenge einer solchen Kollektion dieselbe Mächtigkeit haben muss wie die Kollektion, die entsteht, wenn man $(1 + \omega)$ -mal die Potenzmenge der natürlichen Zahlen bildet⁸. Dies ist falsch. Da es schon unendlich viele Folgenglieder gibt, macht es keinen Unterschied, ob man ein weiteres Folgenglied als Erstes einführt. Bildet man hingegen von der supermächtigen Kollektion wieder die Potenzmenge, so greift hier, zumindest falls die Kollektion eine Menge ist, wieder der Satz von Cantor, und die neue Menge hat eine größere Mächtigkeit. Es ist ein ähnlicher Irrtum, wie $1 + \omega$ und $\omega + 1$ für dieselbe Zahl zu halten. Da Peirce die beiden Kollektionen für gleich groß hält, denkt er, es sei widersprüchlich, wenn die supermächtige Kollektion eine Menge wäre. Er war der Meinung, er habe auf diese Weise etwas gefunden, was größer ist als jede Menge, und Mengen jeder Mächtigkeit enthält. Sein Kontinuum soll genau die oben genannten Mächtigkeiten \aleph_0 und 2^{\aleph_0} und $2^{2^{\aleph_0}}$ und...und $2^{2^{\dots^{2^{\aleph_0}}}}$ enthalten. Peirce schreibt zur Bildung der supermächtigen Menge:

But now let us consider a collection containing an individual for every individual of a collection of collections comprising a collection of every abnumeral multitude. That is, this collection shall consist of all finite multitudes together with all possible collections of those multitudes, together with all possible collections of collections of those multitudes, together with all possible collections of collections of collections of those multitudes, and so on *ad infinitum*. [82], S. 158-159.

Zunächst ist zu klären, welche Mengen in der oben beschriebenen Vereinigung enthalten wären. Nach dem ersten Satz des obigen Zitats scheint Peirce für jede Mächtigkeit ein Individuum in seine Kollektion aufnehmen zu wollen. In diesem Fall würde man für jede der oben angegebenen Kardinalzahlen ein Individuum aufnehmen. Man hätte eine Klasse, zusammen mit einer Indexklasse, nämlich der Klasse aller Kardinalzahlen unter der Voraussetzung der allgemeinen Kontinuumshypothese. Die Elemente, die Peirce auf diese Weise in die Klasse aufnehmen würden, wären koordiniert. Koordination verlangt Peirce als Eigenschaft von Kollektionen. Elemente von Kollektionen sollen, um die Eigenschaften kurz zu rekapitulieren, koordiniert, wohlunterschieden, unabhängig und Individuen sein. Es gibt jedoch auch eine andere Leseweise mit nicht koordinierten Elementen

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}^i(\mathbf{N}),$$

wobei $\mathbf{P}^i(\mathbf{N})$ definiert wird durch

⁷Auf englisch supermultitudous, siehe z.B. [85] S. 86.

⁸Siehe [85] S. 86. Diese Stelle wird auch von [35], S. 625 zitiert, der sie aber anders interpretiert.

$$\mathbf{P}^0(\mathbf{N}) = \mathbf{N}.$$

$\mathbf{P}^1(\mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{N})$ sei die Potenzmenge von \mathbf{N} .

$$\mathbf{P}^{i+1}(\mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{P}^i(\mathbf{N})).$$

An anderer Stelle schreibt Peirce, dass Cantor annimmt, dass man durch die Vereinigung aller Mengen, die man durch Potenzmengenbildung ausgehend von \mathbf{N} bilden könne, wieder eine Menge erhält, von der man wieder Potenzmengen bilden könne. Dies sei ähnlich wie bei den natürlichen Zahlen, die keine GröÙte besitzen, und dennoch ergibt ihre Vereinigung die neue Menge der Mächtigkeit \aleph_0 , die damit die Reihe der endlichen Kardinalzahlen fortführt. Peirce hält für falsch, dass die Elemente der neuen Klasse voneinander unabhängig sind.

This collection is evidently of a multitude as great as that of all possible collections of its members. But we have just seen that this cannot be true of any collection whose individuals are distinct from one another. We, therefore, find that we have now reached a multitude so vast that the individuals of such a collection melt into one another and lose their distinct identities. Such a collection is *continuous*. [82], S. 158-159.

Die Elemente der kontinuierlichen Kollektion verschmelzen. Das Verschmelzen verletzt eine weitere Eigenschaft der Kollektionen, nämlich die Unabhängigkeit. Die Unabhängigkeit ist nach Peirce für Kollektionen insofern wichtig, als sie benötigt wird, um durch eine Abbildung die Größe der Kollektion mit der einer anderen Kollektion zu vergleichen. Sie wird also benötigt, um die Mächtigkeit festzustellen. Das Kontinuum hätte dann keine Mächtigkeit mehr und wäre offensichtlich keine Kollektion mehr.

Peirce sagt zu diesen Überlegungen, dass, selbst wenn seine Schlüsse über das überabzählbar Unendliche falsch wären, er dennoch daran festhalten würde, dass das Kontinuum von so großer Mächtigkeit ist, dass die Elemente nicht verschieden bleiben können, sondern verschmelzen⁹. Er erläutert dies am Beispiel der Geraden. Stellt man sich vor, dass eine Kollektion von Klingen die Gerade in kleine Strecken zerschneidet, so hängt die Anzahl der kleinen Strecken davon ab, wieviele Klingen es waren. Man erhält nur dann keine Strecken, wenn die Rasierklingen miteinander verschmelzen. Dieses Verschmelzen soll in dem nächsten Abschnitt erläutert werden.

4.2 Potentialität

Die zweiten Bedingung besagt, dass das Kontinuum potentielle Punkte enthält. Dabei ist unklar, was mit dem Wort „potentiell“ gemeint ist. Peirce schreibt dazu, potentielle Punkte sind „*unbestimmt, aber in jedem Einzelfall bestimmbar*“¹⁰. Er scheint anzunehmen, dass potentielle Punkte miteinander verschmolzen sind.

⁹Siehe [82].

¹⁰Das Zitat findet sich in: [83] und lautet auf englisch: *indeterminate yet capable of determination in any special case*.

Das verleitet den Leser zu der Annahme, dass die durch einen potentiellen Punkt getroffene Unterscheidung wieder gelöscht wird.

Peirce meint, dass schon in kleineren Kollektionen ein Keim von Potentialität zu finden ist. Er stellt fest, dass es um so schwieriger wird, die Elemente einer Menge zu unterscheiden, je größer diese Menge ist¹¹. Die überabzählbaren Kardinalzahlen haben alle nur abzählbar viele Vorgänger. Die Kardinalzahl der Menge der Vorgänger bezeichnet Peirce als *arithm*. Er behauptet, dass die Gleichheit des arithms bei verschiedenen überabzählbaren Kardinalzahlen zeigt, dass bei den überabzählbaren Kollektionen eine Vorstufe des Kontinuums beginnt, eine Kohäsion¹². Peirce fragt sich auch, ob die Punkte deshalb verschmelzen, weil sie auf eine bestimmte Weise angeordnet sind und kommt zu dem Schluss, dass dem nicht so ist¹³.

In einem Abschnitt einer Vorlesung, die Peirce 1898 in Cambridge gehalten hatte, schlägt er Gedankenexperimente vor, die die Natur der potentiellen Punkte verdeutlichen:

Markiert man eine Stelle im Kontinuum und aktualisiert dadurch einen potentiellen Punkt, so wird dadurch die Kontinuität an dieser Stelle unterbrochen. Wenn das Peirce'sche Kontinuum auf einem Kreis angeordnet wird¹⁴, und der Kreis in einem markierten Punkt durchgeschnitten wird, so verdoppelt sich der markierte Punkt. Fügt man den aufgeschnittenen Kreis wieder an den zwei Punkten zusammen, so wird aus den zwei Punkten wieder einer. Verschwindet außerdem die Markierung und damit der Punkt, so ist auch die Unterbrechung der Kontinuität beseitigt.

Peirce macht ein zweites Gedankenexperiment¹⁵. Man nehme den selben, an einem Punkt durchgeschnittenen Kreis wie zuvor. Würde einer der Punkte an einem der durchgeschnittenen Enden des Kreises wegfliegen, so könnte dieser Punkt in eine Menge von Punkten zerfallen, die so groß wäre wie die Menge der irrationalen Zahlen zwischen Null und Eins¹⁶. Man kann also sagen, dass hinter einem markierten Punkt, der eine Unterbrechung der Kontinuität bewirkt, überabzählbar viele potentielle Punkte versteckt sind. Eine Art, wie sich dieses Versteckt-sein formal fassen lässt, ist, Punkte nicht mehr als unteilbar aufzufassen, sondern als infinitesimal lange Intervalle.

Peirce will sein Kontinuum auf einer Geraden anordnen, oder besser auf einem Kreis, um Randpunkte zu vermeiden. Er setzt voraus, dass Mengen beliebiger Mächtigkeit auf einer Geraden angeordnet werden könnten¹⁷.

¹¹Siehe [85], 87, 88, 97-99..

¹²Siehe dazu [85], S. 87/88. Er spricht nach der Einführung des arithms von Interpolationen, die man durchführen könne, sie scheinen Ähnlichkeiten zu haben mit dem Bilden der Potenzmenge, es ist aber nicht klar was er meint. Er scheint schon hier den Zusammenhang zwischen der Ordnung und der Kohäsion klären zu wollen. Er überlegt auch, dass die Menge abzählbarer Folgen von Nullen und Einsen eine überabzählbare Menge ergibt.

¹³Siehe [85], S. 97 ff.

¹⁴Siehe [82].

¹⁵Siehe [82].

¹⁶Siehe [82].

¹⁷Siehe [83].

Peirce nimmt weiter an, dass es im Kontinuum Infinitesimale gibt¹⁸. Diese Annahme geht u.a. auf deren angenehme mathematische Eigenschaften zurück, und auf den Gedanken, wir seien uns eines Momentes bewusst. Ein Moment hat in Peirce' Vorstellung eine wenn auch nur infinitesimale Ausdehnung. Innerhalb dieses Momentes gibt es ein *jetzt*, und ein *jetzt + ε*. Er denkt, Veränderung so besser erklären zu können. In dieser Arbeit kamen Infinitesimale bisher implizit vor, zum Beispiel in den Gedankenexperimenten zu auseinanderfliegenden Punkten.

4.3 Erfassung des Allgemeinen

Die dritten Bedingung sagt aus, dass sich das Kontinuum eignen soll, um Allgemeines zu erfassen. Es ist jedoch nicht klar, was das Wort „allgemein“ bedeutet. Peirce bezeichnet Gesetze als allgemein. Er bezeichnet etwas als allgemein, unter das unbestimmt viele Instantiierungen fallen.

Im folgenden Zitat von 1898 sind die ersten drei Bedingungen zusammengefasst und mit der Allgemeinheit in Zusammenhang gebracht:

That which is possible is in so far *general*, and as general it ceases to be individual. Hence, remembering that the word „potential” means *indeterminate yet capable of determination in any special case*, there may be a *potential* aggregate of all the possibilities that are consistent with certain general conditions; and this may be such, that given any collection of distinct individuals whatsoever, out of that potential aggregate there may be actualized a more multitudinous collection than the given collection. Thus the potential aggregate is with the strictest exactitude greater in multitude than any possible multitude of individuals. But being a potential aggregate only, it does not contain any individual at all. It only contains general conditions which permit the determination of individuals. [82], S. 247.

In der Struktur des Kontinuums sind also nach Peirce Bedingungen enthalten, die das Bestimmen von Individuen bzw. Punkten erlauben. Peirce bringt in seiner fünften Lowell lecture von 1903 Allgemeinheit wie folgt in Zusammenhang mit dem Kontinuum:

Not to trouble you with logical subtilities where I can avoid it, let us say that an assertion is *general* if no amount of actual fact could certainly fulfill the truth of it. It says you *never will* find it falsified. The future never will have been exhausted. A general assertion, leaves it to the hearer to take any instance he can. [93], 390.

¹⁸Siehe [35], [50] für eine ausführliche Behandlung des Themas.

Der von Peirce genannte Zusammenhang zwischen Kontinuum und Allgemeinheit besteht hier darin, dass das Kontinuum ebenso unausschöpflich ist, wie es für die allgemeine Behauptung verlangt wird.

Eine Definition des *perfekten Kontinuums*, aus der nachcantorschen Zeit um 1910, charakterisiert den Zusammenhang zwischen Allgemeinheit und Kontinuum wie folgt:

Definition I. A perfect continuum belongs to the genus of a whole all whose parts without any exception whatsoever conform to one general law to which same law conform likewise all the parts of each single part. *Continuity* is a special kind of *generality*; or conformity to one Idea. More specifically, it is a *homogeneity [regularity]*, or generality among all of certain kind of parts of one whole. Still more specifically, the characters which are the same in all the parts are a certain kind of [relation] relationship of each part to all the coordinate parts; that is, it is a *regularity*. [109], beziffert mit A 15, A16.

In der späten Phase spricht Peirce statt von potentiellen Punkten nur noch von Teilen des Kontinuums. All diese Teile sollen einer gemeinsamen allgemeinen Idee unterliegen. Sie sollen alle zueinander eine gleichartige Relation besitzen. Allgemeinheit wird nach Peirce auch zu den deutlichsten Beispielen für Drittheit gerechnet. Dies liegt daran, dass Allgemeinheit, Gesetze und Gewohnheiten eng zusammenhängen. Gesetze sind allgemein. Sie gelten jeweils nicht nur für eine einzelne Situation, oder für ein einzelnes Ding, sondern für all diejenigen Dinge oder Situationen, die besondere Merkmale haben. Die nicht durch das Gesetz festgelegten Eigenschaften können beliebig variieren.

4.3.1 Kontinuum und Drittheit

Um die Beziehung zwischen Kontinuum und Drittheit zu klären, soll der achten Vorlesung Peirces in *Reasoning and the Logic of Things*¹⁹ gefolgt werden.

Peirce nimmt an, dass die potentiellen Punkte des Kontinuums durch die dyadische Relation R unterschieden werden können. Er weist dann nach, dass die Annahme einer dyadischen Relation mit dieser Eigenschaft zu einem Widerspruch führt, oder den Anforderungen nicht genügt.

Wenn zwei Individuen dadurch unterschieden werden, dass sie in dieser Relation zueinander stehen, so ist offensichtlich, dass kein Individuum zu sich selbst in dieser Relation steht. Man nimmt als nächstes drei Individuen A , B , C . Sei RAB und RBC . Peirce setzt außerdem voraus, dass immer wenn RCA gilt, nicht RAC gilt. Da es um das Kontinuum geht, muss es jedoch eine allgemeine Regel geben, die festlegt, ob RCA oder RAC , denn genau dies ist nach Peirce die Idee der Determination des Potentiellen. Zunächst scheint es gleichgültig, ob RCA oder RAC .

Als erstes soll der Fall betrachtet werden, wenn aus RAB und RBC immer RCA folgt.

¹⁹Siehe [83], S. 248-250.

Nimmt man ein viertes Individuum \mathcal{D} dazu, so gibt es verschiedene Möglichkeiten für die Relation im ersten Fall. Peirce führt sie alle zum Widerspruch, wie das Folgende zeigt:

1. Fall: Sei RAD .
 - (a) Unterfall: Sei RBD . Dann gilt also RAB und RBD , und damit nach der allgemeinen Regel RDA , dies steht im Widerspruch zu RAD .
 - (b) Unterfall: Sei RDB . Dann gilt also nach der allgemeinen Regel RBA , was im Widerspruch zu der Voraussetzung RAB steht.
2. Fall: Sei RDA .
 - (a) Unterfall: Sei RCD . Aus RCD und RDA folgt nach der allgemeinen Regel RAC , und dies ist ein Widerspruch zu RCA .
 - (b) Unterfall: Sei RDC . Ist außerdem RBD , so folgt mit RDC nach der allgemeinen Regel RCB und das ist ein Widerspruch zu RBC . Ist hingegen RDB , so folgt mit RBC nach der allgemeinen Regel RCD und dies steht im Widerspruch zu RDC .

Damit ist gezeigt, dass für die oben angenommene allgemeine Regel die Annahme einer dyadischen Relation zur Unterscheidung von Individuen zum Widerspruch führt. Die andere mögliche allgemeine Regel, nämlich dass aus RAB und RBC RAC folgt, führt nicht zum Widerspruch. Sie führt aber dazu, dass es zwei Ausnahmeindividuen gibt, nämlich eines, das zu allen in der Relation R steht, und eines, zu dem alle in der Relation R stehen. Solche möchte aber Peirce nicht zulassen. Man kann sich dies bildlich an einer geraden Linie vorstellen, die zwei Endpunkte hat. Fügt man die beiden Endpunkte zusammen, so erhält man eine geschlossene Linie. Markiert man auf der geschlossenen Linie, zum Beispiel einem Kreis, drei beliebige nacheinanderliegende Punkte \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , so stehen diese in einer triadischen Relation zueinander.

4.4 Selbstähnlichkeit

Die Selbstähnlichkeit lässt sich formulieren durch den Satz: „Teile eines Kontinuums sind wieder Kontinua.“. Dabei ist unklar, wann etwas „Teil“ eines Kontinuums genannt werden soll. Die Bedingung, dass Teile eines Kontinuums wieder Kontinua sein sollen, zeigt sich auch in dem Zitat aus Manuskript 204 [109] zur Definition eines perfekten Kontinuums, das sich im Abschnitt über das Erfassen von Allgemeinem findet.

Dort erklärt Peirce, was er unter einem Teil versteht:

I begin by defining part of any whole in a sense of the much wider any in current use, though it is not obsolete in the vocabulary of philosophy. In this broadest sense, is anything that is (1) other than the whole, and (2) is such that if the whole were really to be,

no matter what else might be true, then the part must under all conceivable circumstances itself really be, in the same universe of discourse', though by no means necessarily in the same one of those three Universes with which experience makes us all more or less acquainted. Thus, light is a *part* of vision. The existence of the Campanile of San Marco is a *part* of the last sight I had of it; though the part was a thing; while the whole is a mental experience. At any rate, so I, as an adherent of the doctrine of immediate perception; believe; and I might add that the same dear departed embodiment of beauty is a part of my present momentary ?²⁰ of that experience. [109] S. 3, 4.

Peirce schreibt hier, dass ein Teil von *A* etwas anderes ist als *A*. Der Teil ist im selben Diskursuniversum, kann jedoch einer anderen Kategorie angehören. Als Beispiele nennt er Licht, das ein Teil des Sehens ist, und den Campanile als Teil seines letzten Seheindrucks des Markusplatzes. Dabei ist der Seheindruck ein mentales Ereignis und der Campanile ein Ding.

Er definiert später²¹ mehrere Eigenschaften von Teilen, nämlich koexistierend, kopredikamental, material und homogen.

Unter einem *koexistierenden* Teil versteht er einen Teil, der im selben Universum (Möglichkeit, Aktualität, Notwendigkeit), bzw. in derselben der drei Kategorien wie sein Ganzes existiert.

Kopredikamental ist ein etwas engerer Begriff. Peirce greift dabei auf die Liste der zehn Kategorien oder Predikamente von Aristoteles zurück. Peirce war überzeugt, dass es zwei Listen der Kategorien gäbe, eine kurze und eine lange. Die kurze hat im Gegensatz zu der langen die Eigenschaft, dass jede Erfahrung Aspekte aller dieser Kategorien hat. Ein Teil heißt *kopredikamental* zu seinem Ganzen, wenn er sowohl koexistierend ist, als auch zum selben Predikament gehört. Zur Definition eines materialen Teils braucht er zunächst einen weiteren Begriff, nämlich nicht-partitional. Eine nicht-partitionale Eigenschaft eines Teils ist eine Eigenschaft, die nicht durch das Teil-Sein des Teils besteht. Die Definition des materialen Teils wurde von Peirce als kompliziert bezeichnet, er sah an dieser Stelle aber noch keine Vereinfachungsmöglichkeit :

By a *material* part of a real whole, I mean a part which possesses all the real and non-partitional characters which are possessed in common at once by the whole in its unseparated state and by all the parts in an enumeration of all the mutually exclusive parts, which enumeration is such that no further partition into mutually exclusive parts could alter the real and non-partitional characters common to the whole and to all parts. [109], S. 9, 10.

Ein *homogener* Teil ist ein Teil, der all die realen und nicht-partitionalen Eigenschaften seines Ganzen besitzt, insofern dies für einen Teil möglich ist.

²⁰Das Fragezeichen steht für ein unleserliches Wort.

²¹Siehe [109], S. 8.

Ein homogenes Ganzes ist zusammengesetzt aus homogenen Teilen und besitzt keine anderen realen Eigenschaften, als folgende:

- Solche, die allen seinen homogenen Teilen gemeinsam sind,
- solche, die Unterscheidung zwischen Teilen ermöglichen, hier meinte Peirce vielleicht so etwas wie den Ort jedes Teils, falls er einen solchen besitzt,
- solche, die jedes Ganze von solchen homogenen Teilen besitzen muss,
- solche, die die Negation einer partitionalen Eigenschaft sind und
- nicht-partitionale Eigenschaften.

Es ist erstaunlich, dass Peirce am Schluß nicht-partitionale Eigenschaften aufzählt, da jede der vorher von ihm genannten Eigenschaften nicht-partitional ist. Es scheint, dass auch nichthomogene Ganze nicht-partitionale Eigenschaften haben, und die Aufzählung sollte wohl von nichthomogenen Ganzen abgrenzen.

In einem perfekten Kontinuum nach Peirce gehorchen alle Teile und das Ganze einem Gesetz, auch die Teile der Teile. Dies mag ein Grund sein, weshalb Peirce Kontinua als eine spezielle Art von Allgemeinheit sieht, weil Gesetze allgemein sind. Die Teile sind dem Ganzen ähnlich, das Ganze hat nur selbstähnliche Teile. Peirce fragt weiter, worin die Regularität zwischen den Teilen besteht, welche Relation die Teile untereinander haben, denn sie sind einander zwar ähnlich, aber doch nicht alle gleich. Er bezeichnet als Relation, die auch die Unterscheidung der Teile ermöglichen, das Aneinanderstoßen (contiguity). Er nennt als Grund, warum diese Relation geeignet sei, dass Kontinuität auch Ununterbrochen-Sein (unbrokenness) bedeutet.

4.5 Priorität

Mit Priorität ist gemeint, dass das Kontinuum mindestens genauso grundlegend ist wie das Diskrete. In dieser Bedingung ist zu klären, was das Wort „genauso“ bedeutet.

Die Begründung für Peirce' Überzeugung, dass das Kontinuum mindestens so grundlegend ist wie das Diskrete, reicht bis in die Metaphysik. Sie hat zu tun mit der engen Verknüpfung zwischen der pragmatischen Maxime und dem Synechismus.

Dazu schreibt Peirce:

The principle of continuity is the idea of fallibilism objectified. For fallibilism is the doctrine that our knowledge is never absolute but always swims, as it were, in a continuum of uncertainty and indeterminacy. Now the doctrine of continuity is that all things so swim in continua... For where there is no continuity, the exact ascertainment of real quantities is too obviously impossible. [61] 1.170 - 1.175.

Das Kontinuierliche ist also grundlegend, es ist nach Peirce zu erwarten, dass die Diskursuniversen und die Wirklichkeit kontinuierlich sind. Das Diskrete ist unser Versuch, eine einfachere, formal leichter zugängliche Beschreibung zu finden. Diese Sicht lässt sich nicht in den formalen Modellen nachweisen, sie gehört zu den metaphysischen Überzeugungen Peirce'. Er hat viele Gründe für diese Überzeugung, da er die Lösung vieler philosophischer Probleme durch den Synchismus erhofft. Er sieht die Möglichkeit, so Gesetz und Induktion, von Evolution und Zufall, von Leib und Seele durch Kontinuität als gemeinsames Prinzip besser zu verstehen. Dies sind Gründe, weshalb Peirce eine Diskretisierung des Kontinuums mit zunehmendem Alter immer mehr ablehnt. Dennoch ist für Peirce auch das Diskrete grundlegend. Das Diskrete entspricht der Zweitheit. Zweitheit steht für Aktualität. Klar unterschiedene, individuierte Einzel Dinge gehören zur Kategorie der Zweitheit, da klar individuierte Dinge weder vage oder möglich, noch allgemein oder notwendig sind. Da alle drei Kategorien gleichermaßen grundlegend sind, gehört auch das Diskrete zu den grundlegenden Dingen.

Kapitel 5

Kontinuum und Konstitution der Wirklichkeit

In diesem Kapitel sollen skizzenhaft einige Themen der Metaphysik und der Erkenntnistheorie erläutert werden. Dabei kommen Gedanken vor, die nicht ausdrücklich bei Peirce stehen, sondern sich aus seinen Schriften ableiten lassen. Es geht darum, eine Art Spaziergang durch den Garten der Peirce'schen Philosophie¹ zu machen. Es soll deutlich werden, dass Peirce gleiche Prinzipien in so verschiedenen Bereichen wie Metaphysik und Erkenntnistheorie sieht. Ein wesentlicher Aspekt von Peirce' Überlegungen zum Kontinuum ist seine Überzeugung, dass der Gedanke des Kontinuums so etwas wie ein allgemeines Schema bietet, das für verschiedene philosophische Fragen ein Schlüssel sein könnte. Einmal sind das Fragen, deren seiner Ansicht nach interessanteste Lösungsversuche auf einen unendlichen Regress führen. Andere Fragen haben mit der Unbestimmtheit der Wirklichkeit zu tun, oder mit der Unbestimmtheit unserer Erkenntnis der Wirklichkeit. Dabei ist für Peirce typisch, dass er die Strukturen unserer Erkenntnisprozesse für dieselben hält, wie die Strukturen der Wirklichkeit. Deshalb hält er es für möglich, dass wir die Wirklichkeit konstituieren können, und dass diese Konstitution auf analoge Weise stattfindet wie die Entstehung der Wirklichkeit.

Zunächst soll anhand der pragmatischen Maxime und Peirce' Wahrheitsbegriff erklärt werden, wie er seine Überzeugung, dass wir die Welt erkennen können, belegt.

¹Einen gute Einführung in die Peirce'sche Philosophie und ihre Entwicklung bietet immer noch [53].

5.1 Pragmatische Maxime

Um die pragmatische Maxime darzustellen und ihren Zusammenhang mit den hier behandelten Themen, wird hauptsächlich den Harvard Lectures [88] gefolgt. Sie haben den Vorteil, dass sie in der kantianischen Periode liegen, und damit innerhalb des in dieser Arbeit besonders untersuchten Zeitraumes.

Die erste Version der pragmatischen Maxime wird 1879 von Peirce in der Revue philosophique veröffentlicht. Er schreibt dort:

Considérer quels sont les effets pratiques que nous pensons pouvoir être produits par l'objet de notre conception. La conception de tous effets est la conception complète de l'objet².

Unser Begriff oder Konzept eines Objektes wird also nach der pragmatischen Maxime dadurch bestimmt, welche Einflüsse dieses Objekt ausübt. Er schreibt kurz vorher, dass die durch das Objekt veränderten Gewohnheiten für den Begriff des Objektes wesentlich ind. Die Gewohnheiten sind deshalb wichtig, weil sie von Dauer sind. Wäre der Einfluss des Objektes nur auf einen Moment beschränkt und würden dabei keine Folgen entstehen, so gäbe es keinen Begriff des Objektes.

1903 schreibt Peirce zur Erläuterung des Pragmatismus:

Pragmatism is the principle, that every theoretical judgement expressible in a sentence in the indicative mood is a confused form of thought whose only meaning, if it has any, lies in its tendency to enforce a corresponding practical maxim expressible as a conditional sentence having its apodosis in the imperative mood.

Hier formuliert Peirce das Prinzip für Sätze. Wichtig für das Verständnis der pragmatischen Maxime ist auch, dass Peirce alle denkbaren Folgen über einen beliebig langen Zeitraum einbeziehen will, besonders solche, die praktische Maximen nach sich ziehen. Peirce schreibt in den Harvard Lectures, er habe die Überlegungen zum Pragmatismus vor langer Zeit ausgeschickt wie Tauben, und nun sei eine neue Brut entstanden, die er kaum mehr erkennen würde.

Interessant ist, wie das Prinzip 1905 skelettiert und zu einem logischen Prinzip wird. Die Aussage wird dahingehend umgewandelt, dass die Bedeutung von etwas in seinen Relationen besteht. Damit wachsen Zeichentheorie, Relationenlogik und Pragmatizismus³ zusammen. Er schreibt:

I have come to think that the common pragmatistic opinion afore said is that *every* thought (unless perhaps certain single ideas each quite *sui generis*) has a meaning beyond the immediate content of

²Der Text findet sich in [64], S. 365. Dieser Abschnitt wird in den Harvard Lectures [88] erneut zitiert. Es findet sich in [69], S. 135.

³Der Name Pragmatizismus wird von Peirce gewählt, um seine Theorie von Überlegungen von James und anderen abzugrenzen, auf die er in den Harvard Lectures mit seiner Rede von der neuen Brut hinweist.

the thought itself as it would be to say of a man that he was a husband in himself or a son in himself, and this is not merely because thought always refers to a real or fictitious object, but also because it supposes itself to be interpretable. [98], S. 362.

Ein weiteres wichtiges Prinzip von Peirce ist seine Definition der Wahrheit. Er schreibt, Wahrheit sei das, was die Forscher während unendlich langer Zeit unter idealen Bedingungen gemeinsam erforschen würden. Für diese Definition dürfte er zwei Gründe gehabt haben. Der erste, von ihm früher erkannte Grund ist, dass er einen zugänglichen Begriff von Wahrheit haben wollte. Der zweite Grund ist, dass Peirce großes Vertrauen in die menschliche Erkenntnisfähigkeit hatte. Die Annahme, dass Menschen die Wahrheit erkennen können, setzt er als Postulat voraus. Dieses Postulat ist verwandt mit seiner Definition von Bedeutung. Die grundsätzliche Zugänglichkeit der Wahrheit ermutigt zur Forschung. Man könnte die Annahme, dass wir die Welt erkennen können, eine pragmatische Arbeitshypothese nennen. Bezweifelt oder verneint man unsere Erkenntnisfähigkeit, so begünstigt dies eine Ablehnung von Forschung. Die Möglichkeit durch Forschen sich der Wahrheit anzunähern wird nicht dadurch ad absurdum geführt, dass wir Einzelnes nicht wissen können, oder Einzelnes heute für unzugänglich halten. Wir können zum Beispiel nicht sicher wissen, ob ein Diamant auch dann hart ist, wenn wir ihn nicht beobachten. In seiner späteren Philosophie war Peirce der Ansicht, dass der Diamant hart ist, auch wenn wir ihn nicht anschauen, da sonst die Härte des Diamanten keine Gesetzmäßigkeit wäre. Denn es gibt neben der Beobachtung der Härte des Diamanten auch noch andere, z.B. chemische und kristallographische Eigenschaften, die auf Härte hinweisen. Deshalb wäre es Unsinn, die Härte des Diamanten als nicht real aufzufassen, nur weil die Kenntnis eines einzelnen Faktums fehlt⁴. Auch können wir nicht wissen, ob gestern Mittag auf dem Baum gegenüber ein Vogel gesessen hat, es sei denn, wir, oder jemand anders hat den Baum zu dieser Zeit genau beobachtet. Peirce schreibt, dass wir heute nicht wissen können, was morgen erforschbar sein wird. Es sei für unser Forschen am fruchtbarsten, wenn wir keine Grenzen setzen⁵. Für die späte Philosophie Peirce' ist miteinzubeziehen, dass Einzelfakten als abgeleitet aus Gesetzen und Kontinua aufgefasst werden. Peirce wäre deshalb ab etwa 1903 damit zufrieden gewesen und der Meinung, die Forscher hätten die Wirklichkeit erfasst, wenn sie die Möglichkeiten bezüglich des Vogels hätten beschreiben können. Peirce geht es bei seiner Überzeugung, dass wir die Wirklichkeit erkennen können, darum, dass wir die Strukturen der Wirklichkeit verstehen können. Dies sei die Vorbedingung des Verständnisses von Einzelfakten. Peirce ist der Überzeugung, dass die Strukturen in unseren Erkenntnisprozessen mit den Strukturen in der Wirklichkeit übereinstimmen. Er nennt die Formulierung solcher Strukturen „Prinzipien der Logik“. Auch die pragmatische Maxime nennt er „Maxime der Logik“⁶.

⁴Das Problem wird von Peirce schon 1878 aufgeworfen. Er schreibt in [71], S. 132, 133, dabei handle es sich um ein Problem der Sprache. Dem widerspricht er 1905 in [97], S. 354-357 ausdrücklich.

⁵Für eine ausführliche Diskussion siehe [42], S. 56 ff.

⁶Die Aussage findet sich in den Harvard Lectures [88]. Siehe [69], S. 133.

Bei seinen Überlegungen über die Möglichkeit des Forschens weist Peirce immer wieder auf die Übereinstimmung hin, die zwischen den Prinzipien der Erkenntnistheorie und der Realität bestehen. Er schreibt zum Beispiel, nachdem er Kritik an antropomorphen Begriffen erwähnt:

I reply that every scientific explanation of a natural phenomenon is a hypothesis that there is something in nature to which the reason is analogous; and that is really so, all the science in its explanations to human convenience are witnesses⁷.

Er bringt auch auf andere Weise sein Vertrauen in unsere Fähigkeit, Wahres zu erkennen zum Ausdruck:

For as I said a few minutes ago, there manifestly is not one drop of principle in the whole vast reservoir of established scientific theory that has sprung from any other source than the power of the human mind to originate ideas that are true⁸.

5.2 Gemeinsame Prinzipien in Metaphysik und Erkenntnistheorie

Hier sollen einige Prinzipien skizzenhaft vorgestellt werden, von denen Peirce annimmt, dass sie sowohl in Metaphysik, als auch in Erkenntnistheorie gültig sind. Zur Behandlung der Peirce'schen Metaphysik sei auf einige Voraussetzungen hingewiesen⁹: Spricht man von evolutionärer Metaphysik, so ergibt sich als Thema auch die Entstehung des Kosmos. Unsere Sprache hat jedoch implizite zeitliche Strukturen, so dass Worte wie zum Beispiel „vorher“ und „nachher“ nur in analoger Bedeutung des logischen Aufeinanderfolgens verstanden werden dürfen. Die evolutionäre Kosmologie muss nach Peirce mathematische und logische Prinzipien verwenden und entsprechend ihrer Themen anpassen. Die Thesen der evolutionären Metaphysik müssen kompatibel sein mit den Thesen der Erkenntnistheorie¹⁰, da diese leichter zugänglich ist, und damit sicherer.

5.2.1 Tychismus und Agapismus

Tychismus und Agapismus sind zwei wesentliche Bausteine der Peirce'schen Metaphysik. Die Grundprinzipien dieser einander ergänzenden Theorien lassen sich wie folgt formulieren:

- Tychismus: Der Zufall ist der Motor der Veränderung¹¹.

⁷Das Zitat ist aus den Harvard Lectures [88]. Es findet sich in [69], S. 193.

⁸Das Zitat ist aus den Harvard Lectures [88]. Es findet sich in [69], S. 153, 154.

⁹Siehe [58].

¹⁰Metaphysik hängt nach der Peirce'schen Klassifikation von der Erkenntnistheorie ab.

¹¹Siehe für die beiden Prinzipien, [66], S. 293 und [74].

- Agapismus: Es besteht die Tendenz zu einer günstigen Entwicklung, wobei günstig je nach Kontext bestimmt wird.

Als Peirce jung war, wurde in seiner Umgebung Darwin's Evolutionslehre intensiv diskutiert. Die Evolution ist zentral in Peirce' Denken. Er nimmt an, dass sich nicht nur Tier- oder Pflanzenarten entwickeln, sondern war der Überzeugung, dass alles sich entwickelt, sogar Gesetze. Auch Erkenntnis oder der Erkenntnisprozess der Menschheit soll sich nach Peirce' Vorstellungen entwickeln. Motor der Veränderung im Kosmos ist nach Peirce der absolute Zufall. Dabei wundert er sich, dass allein über Zufall und Auslese eine wohlgeordnete Entwicklung möglich ist. Deshalb nimmt er einen weiteren Parameter an, der die Entwicklung zu einer größerer Vielfalt steuert, zum Beispiel bei Pflanzen und Tieren zu einer besseren Anpassung an die Umwelt. Die dazugehörige Theorie nannte er Agapismus (agapism).

Die Entwicklung des Erkenntnisprozesses folgt nach Peirce den gleichen Regeln, wie die Evolution. Auch hier nimmt Peirce neben dem Zufall einen weiteren Parameter an. Der Mensch soll die Fähigkeit haben, wahre Ideen zu generieren, auch die Fähigkeit, richtig zu raten, aus den zufällig sich anbietenden Hypothesen besonders vielversprechende herauszugreifen. Der Erkenntnisfortschritt bestimmt, was unter günstig zu verstehen ist. Diese Fähigkeit entspricht dem in der Theorie des Agapismus angesprochenen Parameter.

Peirce hat sich intensiv mit Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt, er hat dabei festgestellt, dass zum Beispiel bei einem unendlich langen Spiel mit der Münze es theoretisch möglich ist, dass die Münze immer auf Zahl fällt. Man könnte sagen, diese Möglichkeit habe infinitesimale Wahrscheinlichkeit.

Bei den Überlegungen zu der Veränderung von Gesetzen verwendet Peirce seine Theorie des Kontinuums. Jedes Gesetz spannt ein Kontinuum realer Möglichkeiten auf, das diejenigen Ereignisse potentiell enthält, die unter das Gesetz fallen können. Nach Peirce sollen sich Gesetze ähnlich wie menschliche Gewohnheiten entwickeln. Bei Gesetzen nimmt Peirce an, dass diese sich durch infinitesimal kleinen Abweichungen verändern. Aus diesen infinitesimal kleinen Abweichungen können nach unendlich vielen Schritten endliche Veränderungen entstehen. Für die unendlich vielen Schritte muss nicht unendlich viel Zeit benötigt werden, da eine unendliche Summe endlicher Zeitabschnitte einen endlichen Zeitabschnitt ergeben kann.

Bei der Evolution nimmt Peirce an, dass sich der Kosmos von unbestimmter Möglichkeit zu einer Erstarrung hin entwickelt, weitgehend bestimmt durch Gesetze, Gewohnheiten des Kosmos. Ebenso sei anzunehmen, dass der Mensch im Laufe der Zeit zunehmend von seinen Gewohnheiten bestimmt werde. Die Entwicklung des Kosmos und die menschliche Entwicklung sollen nach Peirce von Möglichkeit hin zu Gesetzmässigkeit laufen.

5.3 Modalia und die drei Kategorien

Die Modallogik Peirce' findet sich in der hier präsentierten Form hauptsächlich in den Manuskripten nach 1906, sie wird ausführlich von Pape¹² behandelt. Möglichkeit, Aktualität und Notwendigkeit sind nach Peirce drei Seinsweisen. Möglichkeit hat zwei Formen, die Peirce mit possibility und potentiality bezeichnet. Ein Satz über eine dieser drei Seinsweisen ist auf gleiche Weise charakterisiert wie ein vager, ein singulärer oder ein allgemeiner Satz. Dabei ist Vagheit der Erstheit zugeordnet, Singularität der Zweitheit und Allgemeinheit der Drittheit¹³.

Peirce unterscheidet 1910 drei Seinsweisen:

Nevertheless, I consider that I am not going beyond what my subject obligues me to do, in saying that I hold that there are three [categories] modes of Reals;...1st, Would-bes, 2nd, Existent and Actuals, which are definite individuals; 3d Can-bes...¹⁴. [111], S. 9.

Peirce bringt 1909 Vagheit (Uneindeutigkeit) und Allgemeinheit mit den Modalia in Verbindung, nämlich Kann-Sein mit Vagheit und Würde-Sein mit Allgemeinheit:

Uneindeutigkeit beinhaltet wesentlich ein *Kann-Sein (May-Be)*. „Ein Mensch“ ist immer nur ein Mensch, aber er *kann* dies, es *kann* das, es *kann* beides nacheinander *sein*. [106], S. 399.

Ein wahres Allgemeines ist ein *Was-es-auch-immer-sein-sollte* oder ein *Wann-es-auch-immer-da-sein-sollte*, die ihre Allgemeinheit den nachfolgenden *Würde-sein* oder *Da-würde-sein* auferlegen werden. [106], S. 402.

Es zeigt sich, dass Peirce' Definition der Modalia im sprachphilosophischen Sinn mit den Definitionen der Vagheit, Singularität und Allgemeinheit übereinstimmt.

An erster Stelle wollen wir fragen, ob es richtig ist zu sagen, dass es drei Arten der Modalität, *S* ist *P*, *S* könnte *P* sein, *S* muss *P* sein, gibt. Dies unterscheidet sich nur wenig davon zu sagen, dass 1. *P* von *S* *jetzt* wahr ist, 2. *P* von *S* unter *manchen* denkbaren Umständen wahr ist, die ich nicht kenne oder nicht beschreibe, die nicht zu denen der gegenwärtigen Situation gehören und 3. *P* von *S* unter solchen denkbaren Umständen wahr ist, *wie Sie sich entscheiden, sie zu spezifizieren*. [107], S. 417, 418.

¹²Siehe [57], insbesondere die Seiten 61-66.

¹³Diese Übereinstimmungen sind jedoch fließend, und lassen sich nicht in allen Textstellen als Interpretation aufrechterhalten.

¹⁴Peirce hat das in eckige Klammern gesetzte „categories“ durchgestrichen.

Peirce betrachtet hier wieder Aussagen der Form $S \sqsubseteq P$. „ S muss P sein“ hat offensichtlich große Ähnlichkeit mit dem beschriebenen Würde-sein. Damit ist es als Gesetzesaussage zu interpretieren und als Aussage über die Zukunft. Pape schreibt, dass „ S muss P “ sein und „ S würde P “ sein und „ S wird P sein“ äquivalent seien.

„ S könnte P sein“ beinhaltet, dass S auch nicht P sein könnte. „ S ist P “ hingegen beinhaltet keine Unbestimmtheit. „ S muss P sein“ ist nach Peirce nicht so festgelegt, wie es im allgemeinen aufgefasst wird. Es mag nach Peirce Umstände geben, über die nicht sicher gesagt werden kann, dass sie als Umstände für die Wahrheit von P spezifiziert werden. Diese Sicht liegt auch daran, dass Peirce sich vorstellt, dass auch Naturgesetze sich entwickeln, und dass er Naturgesetze als Gewohnheiten der Natur auffasste. Er stellte von der logischen Form her Gewohnheiten, wie die Verwendungsweise eines bestimmten Zeichens auf eine Stufe mit z. B. physikalischen Gesetzen. Seine Auffassung von einem Gesetz, wie z. B. „der Mensch ist sterblich“, hat auch Ähnlichkeiten mit Handlungsanweisungen: Welchen Menschen du auch immer auswählst, du wirst feststellen, er ist sterblich. Oder: Wähle einen Menschen aus, so wirst du feststellen, er ist sterblich.

Wie die drei Begriffe „vage“, „singulär“, „allgemein“, so lassen sich auch die Begriffe „Möglichkeit“, „Aktualität“ und „Notwendigkeit“ mit Hilfe des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten bzw. des Nichtwiderspruchsprinzips definieren:

Now, in this respect, a simple assertory proposition differs just half as much from the assertion of Possibility, or that of a Necessity, as these two differ from each other. For, as we have seen above, that which characterizes and defines an assertion of Possibility is its emancipation of the Principle of Contradiction, while it remains subject to the Principle of Excluded Third; while that which characterizes and defines an assertion of Necessity is that it remains subject to the Principle of Contradiction, but throws off the yoke of the Principle of Excluded Third; and what characterizes and defines an assertion of Actuality, or simple Existence, is that it acknowledges allegiance to both formulae, and is just midway between the two rational „Modals“, as the modified forms are called by the old logicians.¹⁵

So haben die drei Begriffe „vage“, „singulär“, „allgemein“ und die Begriffe „möglich“, „aktual“ und „notwendig“ bei Peirce an manchen Stellen übereinstimmende Definitionen.

Es soll noch ein Zitat angegeben werden, das auf die Verbindung mit den drei Kategorien hinweist und eine sehr weite Interpretation der drei Seinsweisen zeigt.

The three universes I mean are first, the Universe of Ideas, i.e. of arbitrary possibilities; secondly the Universe of Physical Things, together with their single Facts, or actualizations of ideas in them; and

¹⁵Das englische Zitat wurde von Fischer und Turquette [32], S. 79 aus [108] S. 34, 35 entnommen.

thirdly, the Universe of Minds with their Feelings, their Sensations of Physical Facts, and their Molitions (a word coined to express the putting forth of [ment] effort upon a physical thing, in contra distinction to the purpose of such action,) together with everything that pertains to Conduct (which is far to narrow a word) Esthetic, Moral, and Cognitive [-] Impressions;[-Purposes] Instincts; [the Habit taking], the formation of Plans, [and] Purposes, and Ideals; Resolution, the (strengthening) of Determination, and Self-control; Habit taking; the Formation Utterance, and Interpretation of all sorts of mental Signs, whether Icons, Indices, or Symbols; [-] mental Ejaculations, Commands and Interrogatives, and Judgements; Conjectures of Sympathy, Logical Analysis, and Testings, etc.¹⁶. [109], S. 4, 6, 7.

5.3.1 Interpretation der drei Kategorien im Zusammenhang mit Erkenntnis und Schöpfung

Peirce beschreibt die Entstehung des Kosmos als das Entstehen aus reiner Möglichkeit. In dieser reinen Möglichkeit entwickeln sich Gesetze, so dass die Entwicklung von Erstheit zur Drittheit gehen soll. Dabei könnte Schöpfung aufgefasst werden als Interpretation der reinen Möglichkeit.

Pape diskutiert in seinem Vortrag [58] die Entstehung der Zeit bei Peirce¹⁷. Noch „vor“ der Entstehung der Zeit ist das reine Nichts der Möglichkeit (the bare Nothing of Possibility). Mit dem reinen Nichts der Möglichkeit sei der Zustand uneingeschränkter Möglichkeit gemeint, für den die Naturgesetze noch nicht gelten. Der erste Schritt der Evolution ist das Bilden eines eindimensionalen Kontinuums¹⁸. Dadurch ist auch ein Vorher und Nachher entstanden, wie es etwa bei logischen Folgerungen zu finden ist. Die reine Möglichkeit wird damit zu der Möglichkeit von Etwas. Das Sein spezifischer Qualitäten besteht darin, in einem eindimensionalen Kontinuum nach Intensität¹⁹ angeordnet zu sein. All diese Qualitäten sind in dem Punkt der Intensität Null verbunden. Die Krümmungen all dieser Qualitätskontinua ist nicht festgelegt und kann auch für jede Qualität, oder sogar innerhalb einer Qualität unterschiedlich sein. Die Teile der jeweiligen Kontinua stehen zu ihrem Ganzen in der Relation der Selbstähnlichkeit. Außerdem kann es sein, dass sich die verschiedenen Qualitätskontinua schneiden. Diese zufälligen Schnittpunkte nennt Peirce akzidentelle Reaktionen. Die akzidentellen Reaktionen können möglicherweise sequentiell angeordnet werden und damit möglicherweise ein neues Kontinuum bilden. Das sequentielle Anordnen in einem Kontinuum ist das Entstehen einer Regelmässigkeit, oder einer Drittheit.

¹⁶S. 6 ist dabei eine Variante von S. 5. Worte, die von Peirce durchgestrichen wurden, stehen in eckigen Klammern.

¹⁷Dabei folgt er hauptsächlich [84].

¹⁸Siehe [95], S. 127.

¹⁹Peirce nahm wohl an, dass alle Qualitäten kontinuierlich viele unterschiedliche Intensitäten haben könnten.

Peirce nimmt außerdem an, es könnten nicht nur akzidentelle einpunktige Schnitte entstehen, sondern auch mindestens eindimensionale Schnitte, was durch die Annahme mehrdimensionaler Qualitätskontinua erklärlich wird.

Relationen zwischen Qualitäten können nach Peirce außerdem dadurch entstehen, dass Kopien eines Qualitätskontinuums gemacht werden. Die Kopie eines Qualitätskontinuums repräsentiert die Qualität, deren Kopie sie ist. Weiter können sich Folgen solcher Kopien bilden. Diese konstituieren Dimensionen möglicher Qualitäten. Dazu scheint Peirce ein Kontinuum möglicher „feelings“ zu postulieren, das mit entsteht und die Reihenfolge für die sequentielle Anordnung der Kopien und der akzidentellen Reaktionen angibt. Dies repräsentiert eine Regelmässigkeit oder Gesetzmässigkeit und gehört damit zur Drittheit. Dieses Kontinuum möglicher „feelings“ scheint Peirce mit Zeit zu identifizieren.

Ebenso kann man bei der Erfahrung von einem ersten Eindruck ausgehen, bei dem die Dinge noch nicht unterschieden und unbedacht seien, und bei dem noch keine Reaktionen eine Rolle spielten. Nach dem ersten Eindruck kommen Reaktionen hinzu und das Suchen nach Gesetzmässigkeiten. Auch in dem Erkenntnisprozess der Menschheit ist eine ähnliche Struktur zu finden. Am Anfang steht das Ununterschiedene. In den früheren Schriften wird die Erstheit, bzw. das ununterschiedene Wahrgenommene mit dem Ding an sich in Verbindung gebracht. Dieses wird mit Hilfe der Fähigkeit, wahre Hypothesen zu bilden, von den Forschenden unterteilt. Dabei werden Gesetzmässigkeiten entdeckt. In einem beliebig lange dauernden Prozess nähert sich die Menschheit dem beliebig fein Unterteilten an, das in gewisser Weise dem Ersteindruck entspricht, der so seine Unzugänglichkeit verliert.

Manchmal scheint es, als würde Peirce das Kontinuum als das Ununterschiedene betrachten. Unter diesem Aspekt würde es zur Erstheit gehören. Kontinuum als das Ununterschiedene ist Möglichkeit. Für Möglichkeit gilt das Prinzip des Nichtwiderspruchs nicht. Kontinuum als Drittheit bezeichnet dagegen den gesetzmässigen Aspekt des Kontinuums. Für diesen ist das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten nicht gültig.

Das Peirce'sche Kontinuum scheint immer dort aufzutauchen, wo die Grenzen der Unterscheidbarkeit oder Unterschiedenheit erreicht werden. Diese Grenzen sind nicht für alle Kontexte gleich festgelegt, aber es ist anzunehmen, dass es immer solche Grenzen gibt.

Man könnte sagen, dass die Grenzen unserer Unterscheidungsmöglichkeiten die Grenzen unserer Welt seien²⁰. Das, was noch nicht, oder nicht mehr unterscheidbar ist, nehmen wir noch nicht, oder nicht mehr wahr.

5.4 Materie und Geist

Peirce verwendet den Kontinuum-Gedanken, um unendliche Regresse in der Philosophie zulassen zu können. Er ist der Meinung, dass man sowohl die wechsel-

²⁰Ähnlich wie Wittgenstein, der in [130], 5. 6 schreibt: „Die Grenzen unserer Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt“.

seitige Beeinflussung von Materie und Geist, als auch die Verbindung zwischen Zeichen und Bezeichnetem durch einen unendlichen Regress klären kann.

Der Einfluss zwischen Materie und Geist findet in der Zeit statt. Zwischen zwei Zeitpunkten liegt jeweils ein dritter. Der Zustand, der zum dazwischenliegenden Zeitpunkt gehört, wird nach Peirce von dem Zustand, der zum ersten Zeitpunkt gehört, beeinflusst, und beeinflusst den Zustand, der zu dem späteren Zeitpunkt gehört. Dies gilt zum Beispiel für Gefühle und Qualitäten, die eine mit der Zeit abnehmende Intensität haben. Da sie aber dennoch über die Zeit hinweg, wenn auch mit abnehmender Intensität erhalten bleiben, können sich verschiedene Gefühle beeinflussen. Außerdem ist, wenn ein Gefühl präsent ist, ein infinitesimales Kontinuum von Gefühlen präsent. Dies sei nötig, damit die Veränderung der Intensität verstehbar wird. Ein ähnliches Bild hat Peirce bei Ideen einer Person. Die Ideen nehmen in der Zeit ab an Intensität, können jedoch andere Ideen beeinflussen, dadurch, dass sie weiter erhalten bleiben²¹. Erinnerung dürfte dann eine Verstärkung der Ideen sein.

Peirce sieht Materie als Geist, in dem sich die Gesetzmässigkeiten verstärken, und dadurch zu einer Erstarrung geführt haben. Geist ist im Gegensatz zu Materie den Gesetzmässigkeiten nicht in derselben Strenge unterworfen wie Materie. Statt Gesetzmässigkeiten gibt es im Geist Gewohnheiten, die eine Handlung wahrscheinlicher machen als andere. Dies ist keine Schwäche des Geistigen, sondern notwendig, damit Spontanität und geistige Weiterentwicklung möglich wird. Auch Materie ist jedoch nicht vollständig starr, sondern bleibt zur Entwicklung fähig²².

Um das Leib-Seele Problem, oder die Beeinflussung zwischen Materie und Geist aufzuklären, betrachtet Peirce die Realität als kontinuierlich in Ereignisfolgen strukturiert. Nur unter der Annahme unendlicher Ereignisfolgen kann nach Peirce unsere Beobachtung erklärt werden, dass Geist auf Materie, und Materie auf Geist wirkt. Diese Wirkung findet nicht unmittelbar statt, sondern durch eine unendliche Folge²³. Pape [56] bringt diesen Gedankengang mit der Verbindung von Zeichen und Bezeichnetem in Zusammenhang, falls das Bezeichnete etwas Reales, wie zum Beispiel ein Auto ist. Etwas Reales ist in die kontinuierliche Realität eingebunden, und hat insofern unbestimmt viele Eigenschaften. Deshalb muss das Zeichen zum Anknüpfungspunkt unbestimmt vieler Zeichen werden können, will es das reale Etwas darstellen. Unsere Annäherung an das Erfassen eines Gegenstandes geht über den Ersteindruck zum Bilden einer unendlichen Kette von Zeichen.

Peirce illustriert in einem Brief an Lady Welby von 1909²⁴, auf welche Weise Prädikate kontinuierlich sein können. Er nennt Prädikate dann kontinuierlich, wenn sie auf einen unendlichen Regress führen: Das Prädikat des Satzes „Kain tötet Abel“ lässt sich als „_ tötet _“ schreiben. Peirce versucht das Prädikat weiter auf seine Struktur zurückzuführen, und entfernt das Wort „tötet“. Er erhielt „_ steht in der Relation_zu _“. Peirce fragt sich, ob man noch mehr aus

²¹Siehe dazu [78].

²²Siehe dazu [78].

²³Siehe dazu [87].

²⁴Siehe [113], S. 71, 72.

dem Satz entfernen kann. Er erhält dabei „_“ übt die Funktion des Relatums der Relation aus zu „_“. Man kann so fortfahren und erhält dabei einen unendlichen Regress. Dies zeigt, dass „steht in der Relation“ ein kontinuierliches Prädikat ist. Dies ist die bestmögliche Strukturauflösung, denn bei weiterer Analyse würde man diesem ähnliche, selbst wieder kontinuierliche Prädikate erhalten.

Teil II

Weiterentwicklungen und
Modelle

Es sollen verschiedene mathematische Modelle vorgestellt und daraufhin untersucht werden, ob sie die fünf Eigenschaften des Peirce'schen Kontinuums besitzen. Die fünf Eigenschaften lauten:

- unbegrenzte Unterscheidbarkeit,
- Potentialität der Punkte.
- Erfassung des Allgemeinen,
- Teile von Kontinua sind wieder Kontinua oder Selbstähnlichkeit und
- Priorität der Kontinuums vor dem Diskreten.

Die Formulierung der Eigenschaften, wie sie sich aus den Schriften von Peirce ergibt, erlauben verschiedene Ausdeutungen. Durch die Modelle sollen verschiedene Ausdeutungsmöglichkeiten dargestellt werden.

Kapitel 6

Über Blaus Logik

Ulrich Blau hat, ähnlich wie Peirce in der kantianischen Periode, von der Mengenlehre ausgehend die Grenze der diskret beschreibbaren Vielheiten gesucht. Im Rahmen seines Ansatzes zur Lösung der berühmten, allgemein „Lügner“ genannte Paradoxie hat Blau die Reihe der Ordinalzahlen um die sogenannten transdefiniten Ordinalzahlen erweitert. Um den Lügner ausdrücken zu können, braucht Blau in der Objektsprache ein Wahrheitsprädikat¹. In seiner Erweiterung der Ordinalzahlen um die transdefiniten Ordinalzahlen kommt Blau an eine Grenze der formalen Ausdruckbarkeit. Die Grenze erweist sich bei strenger Berücksichtigung der Mengen-Klassen-Unterscheidung als unüberschreitbar. Durch diese Grenze der formalen Ausdruckbarkeit ist die Wohlordnung aller transdefiniten Ordinale nicht ausdrückbar.

Hier sollen aus dem umfangreichen Werk von Blau Ideen vorgestellt werden, die Ähnlichkeiten mit Peirce'schem Gedankengut haben. Dass solche Ähnlichkeiten zu finden sind, ist in mancher Hinsicht erstaunlich, da Blau in seiner Theorie die starken Annahmen der Mengenlehre noch verstärkt. Blau führt zum Beispiel noch umfassendere Zahlklassen ein, auch expliziert er die starken Annahmen der klassischen Mathematik, indem er einen allwissenden Verifikator theoretisches Hintergrundkonstrukt voraussetzt. Im Gegensatz dazu zieht Peirce, wie die konstruktive Mathematik, das Allwissenheitsprinzip² des Tertium non Datur in Zweifel.

¹Blaus Abhandlungen zu diesen Themen sind der Inhalt eines ca 700-seitigen Skriptes über Logik der Unbestimmtheiten und Paradoxien [9], das in der Bibliothek des Seminars für Philosophie, Logik und Wissenschaftstheorie an der LMU München erhältlich ist. Eine ältere Kurzfassung ist in der Zeitschrift Erkenntnis veröffentlicht [8]. Ausschnitte seiner Überlegungen hat er 2001 in einem Vortrag [10] auf dem Russell-Kongress in München vorgestellt. Dazu wird ein Kongressband erscheinen, in dem seine Überlegungen nachzulesen sind [11]. Da hier Ausschnitte aus seiner umfangreichen Theorie skizziert werden sollen, kann für Beweise in den meisten Fällen nur auf sein Skript verwiesen werden.

²Inwiefern das Tertium non Datur als Allwissenheitsprinzip bezeichnet werden kann, wird in dem Kapitel über konstruktive Mathematik ausgeführt.

6.1 Blaus Reflexionslogik und ihr Zusammenhang mit Vagheit und Allgemeinheit

Ausgangspunkt und Motivation für die Entwicklung der Reflexionslogik bei Blau war der Lügner³. Blau vertritt die These, dass er mit Hilfe der Reflexionslogik mit transdefinit vielen Stufen eine Lösung für den Lügner

A: A ist kein wahrer Satz

gefunden hat. Weiterhin problematisch bleibt aber der epistemische Lügner

B: B ist nicht ein Satz, den ich jetzt glaube.

Blau schlägt vor, dass man zur Lösung des Lügners nicht bei der Frage stehenbleibt, welchen Wahrheitswert A hat, bzw. ob A überhaupt einen hat, sondern darüberhinaus verfolgt, welcher Dynamik unsere Gedankengänge folgen, wenn wir ihn zu verstehen suchen.

Der erste Schritt bleibt dennoch, zu versuchen, den Wahrheitswert zu entwickeln:

- Es ist zu prüfen, ob A wahr ist.
- Wenn ja, so ist A kein wahrer Satz, denn das besagt er. Wenn nein, so trifft zu, was er besagt, also ist A wahr.

In diesen drei Schritten ist offensichtlich eine Schleife enthalten. Man kommt also nie an ein Ende. Solange man sich in dieser Schleife befindet, ist man auf der Reflexionsstufe 0, auf dieser Stufe bleibt der Wahrheitswert *offen*. Sobald man die Schleife als solche erkennt, kann man auf der Reflexionsstufe 1 erneut nach dem Wahrheitswert von A fragen. Da A offen und damit nicht wahr ist, ist der Wahrheitswert von A auf dieser Stufe durch den zweiten Schritt *wahr*. Auf Reflexionsstufe 2 fährt man mit der auf Reflexionsstufe 1 erhaltenen Information fort und erhält durch den zweiten Schritt, dass A *falsch* ist. Dies kann man nun beliebig fortsetzen, und der Wahrheitswert wird oszillieren.

Blau numeriert die Reflexionsstufen später mit Ordinalzahlen.

Für die Untersuchung von Paradoxien benötigen wir eine selbstreferentielle Sprache, das heißt insbesondere, dass Wahrheit innerhalb der Objektsprache ausdrückbar sein soll. Ein weiterer Unterschied zur Prädikatenlogik ist die Feinheit, in der zwischen Innen- und Außensicht unterschieden werden kann. Gewöhnlich unterscheiden wir die Innensicht und Außensicht einer Theorie durch die Objekt-Metasprachen-Unterscheidung. In Blaus Reflexionslogik wird auf jeder Reflexionsstufe eine Innen- und eine Außensicht benötigt.

Es werden deshalb Wahrheitsprädikate W, F, W^*, F^* eingeführt. W, F sind unreflektierte, innere Wahrheitswerte, W^*, F^* stehen für reflektierbare Wahrheit und Falschheit. Die resultierende Logik LR ist eine konservative Erweiterung der klassischen Logik.

³Die informellen Erläuterungen zur Reflexionslogik folgen [9], S. 11, S. 22 ff.

Blau führt⁴ eine formale Sprache \mathcal{LR} ein, die als *Grundsymbole* die *logischen Konstanten* $\neg, \wedge, \forall, =$, die *Grundkonstante* $\ulcorner \neg^5$, die *Hilfssymbole* $()$, $|$, die *Objektkonstanten* a, b, c und die *Objektvariablen* x, y, z enthält, und die *Prädikatkonstanten* P, Q, R , den einstelligen Junktor W , den *Indikator* $*$. Der Indikator bezeichnet die reflektierte Stufe und tritt bei den Grundsymbolen nur als Index von W auf. Von den Objektkonstanten, Objektvariablen und Prädikatkonstanten soll es jeweils endlich viele geben. Durch Numerierung mittels Strichfolgen $|||$ können aus den Grundsymbolen für die Objektkonstanten, Objektvariablen und Prädikatkonstanten jeweils abzählbar viel definiert werden. Auch die Stelligkeit der Prädikate kann durch Strichfolgen angegeben werden, beides wird aber der Einfachheit halber meistens informell mit Indices abgekürzt. Blau führt weitere definierte Symbole ein, wie zum Beispiel \vee, \exists , die er ebenfalls in die Objektsprache aufnimmt. Als Metavariablen verwendet er jeweils die nicht kursiv gedruckten Buchstaben. Ausdrücke in \mathcal{LR} seien alle endlichen Folgen von Grundsymbolen und definierten Symbolen einschließlich der leeren Folge. Er definiert auch Teilausdrücke, die er *de re* nennt, wenn in ihnen keine Anführung vorkommt, und *de dicto*, wenn in ihnen mindestens eine Anführung vorkommt. Dabei sie die Anführung eines Ausdruckes „ A “ der Ausdruck $\ulcorner A \urcorner$. Terme seien die Objektkonstanten, die Objektvariablen und die Anführung beliebiger Ausdrücke. W kann mit einem Stufenindex s versehen werden, der als Metavariablen für den leeren Ausdruck, für $*$ und für Terme stehen kann. „ W^{s*} “ sei als einstelliger Junktor und als Prädikatkonstante mit variabler Stellenzahl zugelassen.

Zur Definition der Semantik der Reflexionslogik LR braucht man Folgendes:

Die Menge der Ausdrücke \mathcal{E} sei. Sei außerdem $\bar{\mathcal{E}}$ die Menge ihrer Anführungen, U_φ das Universum von φ , $D_\varphi := U_\varphi \setminus \mathcal{E}$ der außersprachliche Objektbereich von φ und $\bar{D}_\varphi := \{\bar{d} : d \in D_\varphi\}$ die Menge der Namen, wobei $\bar{d} \notin \mathcal{E}$ und $\bar{U}_\varphi := \bar{\mathcal{E}} \cup \bar{D}_\varphi$ die Menge der Grundbezeichnungen für U_φ ist. Aus den reinen Ausdrücken von \mathcal{LR} erhält man durch nullfache oder mehrfache Substitution von Namen für freie Objektvariablen Ausdrücke von \mathcal{LR}_φ .

Nach Blau ist eine \mathcal{LR} -Interpretation eine Funktion φ , die alle Grundbezeichnungen $\bar{u} \in \bar{U}_\varphi$, alle Objektkonstanten a und alle Prädikatsymbole interpretiert. Dabei soll φ den Folgenden vier Regeln genügen:

1. $\varphi(\bar{u}) = u$.
2. $\varphi(a) \in U_\varphi$.
3. $\varphi(P^n)$ sei ein geordnetes Paar $\langle P_\varphi^+, P_\varphi^- \rangle$, wobei $P_\varphi^+ \cap P_\varphi^- = \emptyset$ und $P_\varphi^+ \cup P_\varphi^- \subset U_\varphi$. P_φ^+ heißt Positivbereich von P^n , P_φ^- heißt Negativbereich von P^n und $P_\varphi^0 := U_\varphi \setminus (P_\varphi^+ \cup P_\varphi^-)$ Neutralbereich von P^n bei φ .
4. $=_\varphi^+ := \{\langle u, u \rangle : u \in U_\varphi\}$; $=_\varphi^- := U_\varphi \setminus \{\langle u, u \rangle : u \in U_\varphi\}$; $=_\varphi^0 \subset D^2\varphi$.

⁴Siehe [9] S. 457 ff. Blaus Skript wird weitgehend gefolgt, um eine Grundlage für weitere Diskussionen herzustellen.

⁵Es ist strittig, ob sie als logische Grundkonstante bezeichnet werden kann. Dazu siehe [9], S. 400.

Diese Definition genügt jedoch nicht für die Bewertung der Formeln in der Blau'schen Reflexionslogik, z.B. wurde W damit nicht interpretiert. Ein φ -Satz ist ein LR -Satz, der durch eine Interpretation φ interpretiert wurde. Bevor die Bewertung von Formeln erklärt wird, sollen zuerst die möglichen Wahrheitswerte der Blau'schen Reflexionslogik und dann der Begriff des allwissenden Verifikators erläutert werden.

6.1.1 Die sechs Wahrheitswerte auf jeder Stufe der Reflexionslogik

In der Reflexionslogik gibt es auf jeder Stufe nicht nur die beiden klassischen Wahrheitswerte, sondern sechs Wahrheitswerte. Einer der zu wahr und falsch hinzukommenden Wahrheitswerte wurde schon vorgestellt: Entsteht bei dem Bestimmen eines Wahrheitswertes eines Satzes auf einer Stufe eine Schleife, so hat der Satz den Wahrheitswert *Offen*. Offene Sätze entstehen also bei semantischen Zirkeln und Regressen. Ein weiterer Wahrheitswert, der *Neutral* heißt, wird vagen Sätzen, bzw. Sätzen mit Kategorien- und Präsuppositionsfehlern zugeordnet. Mit vagen Sätzen sind solche gemeint, die nicht vollständig bestimmt sind. In solch einem Fall steht neutral für eine Art Zwischenwert. Die Wahrheitswerte Neutral und Offen sind können nicht zu einem Wahrheitswert zusammengefasst werden, denn Offen führt im Gegensatz zu Neutral zu einem Oszillieren, das nicht abschließbar ist. Blau nennt solche Wahrheitswerte unfundiert. Zwei zusätzliche Wahrheitswerte entstehen durch Konjunktion und Adjunktion von N und O . Die Konjunktion zweier Sätze ist auch in LR genau dann wahr, wenn beide Sätze wahr sind, und falsch, wenn mindestens einer der beiden Sätze falsch ist. Ebenso ist die Adjunktion zweier Sätze genau dann falsch, wenn beide Sätze falsch sind, und wahr, wenn mindestens einer der beiden Sätze wahr ist. Also ist die Konjunktion eines neutralen und eines offenen Satzes nicht wahr. Und es ist offen, ob der Satz falsch oder neutral ist. Die Adjunktion eines neutralen und eines offenen Satzes ist offensichtlich nicht falsch, es bleibt aber offen, ob sie wahr oder neutral ist.

Würde die Konjunktion von N und O als falsch bewertet, so ginge die erläuterte klassische Charakterisierung der Konjunktion verloren, denn nun gäbe es Konjunktionen, die falsch wären, ohne dass eines der Konjunktionsglieder falsch wäre. Würde die Adjunktion von N und O als wahr bewertet, ginge ebenfalls die erläuterte klassisch logische Charakterisierung der Adjunktion verloren, denn nun gäbe es Adjunktionen, die wahr wären, ohne dass eines der beiden Adjunktionsglieder wahr wäre. Blau wird also durch die strikte Betonung der Sonderstellung der klassischen Logik und damit durch die Forderung einer konservativen Erweiterung zu einer sechswertigen Logik, statt einer heute üblicheren vierwertigen, geführt.

Man erhält dieselben Wahrheitswerte auch durch eine andere, von Varga von Kibéd stammende Überlegung⁶. Dazu seien die Wahrheitswerte Wahr und

⁶Persönliche Mitteilung 2003.

Falsch gegeben⁷, wie es in der klassischen Logik üblich ist, so dass Wahr das Komplement von Falsch ist. Nun soll darauf verzichtet werden, vorauszusetzen, dass es nur diese beiden Wahrheitswerte gibt. Dadurch entsteht ein erweiterter Kontext. In diesem ist das Komplement von Wahr und Falsch nach dem Festlegen der äußeren Grenze des Kontextes ein dritter Wahrheitswert. Dieser heiße Neutral. Nun soll wiederum darauf verzichtet werden, anzunehmen, man habe damit schon alles erfasst. Man erhält dann, nach der Festlegung der äußeren Grenze des Kontextes, der sich durch diesen zweiten Verzicht ergibt, als Komplement der drei bisherigen Wahrheitswerte einen neuen Wahrheitswert, der Offen heiße. Im Fall der Reflexionslogik ist die zweite Kontexterweiterung durch den Reflexionsschritt gegeben. Wird zusätzlich Nichtfalschheit und Wahrheit, und analog Nichtwahrheit und Falschheit unterschieden, so erhält man die Sechswertigkeit. Auf den ersten Blick sieht also die Entstehung des Wertes neutral und des Wertes offen asymmetrisch aus. Betrachtet man jedoch die Definition der metasprachlichen Prädikate $N_\varphi^n := \{A : -WA, -W - A \in W_\varphi^n\}$, so ist dies zu $O_\varphi^n := \{A : -WA, -W - A \notin W_\varphi^n\}$ symmetrisch.

6.1.2 Vagheit, Allgemeinheit und die Blau'schen Wahrheitswerte

Die Unterscheidung zwischen vagen bzw. selbstreferentiellen Sätzen bei Blau entspricht in etwa der Unterscheidung zwischen allgemeinen und vagen Objekten bei Peirce⁸.

Vage Sätze sind nach Blau unterbestimmt. Deshalb ist es sinnvoll, als weiteren Wahrheitswert so etwas wie einen Zwischenwert, nämlich neutral, einzuführen. Tut man dies, so wird damit das Bivalenzprinzip verletzt. Bei allgemeinen Sätzen macht Peirce den Satz, bzw. das Gesetz zu einem Objekt. Dieses ist unterbestimmt. Deshalb ist es sinnvoll, die Sätze, denen Peirce allgemeine Objekte zugeordnet hat, mit dem Blau'schen Wahrheitswert neutral zu bewerten. Dieser verletzt das Bivalenzprinzip, das eine der vielen Peirce'schen Formulierungen des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten war.

Selbstreferentielle Sätze können das Nichtwiderspruchsprinzip verletzen. Blau hat aus dem Verletzen des Nichtwiderspruchsprinzips einen Ausweg dadurch gefunden, dass die verschiedenen Reflexionsstufen und der Wahrheitswert offen eingeführt werden. Peirce sprach von vagen Objekten. Betrachtet man zum Beispiel das Wort „Tasse“, so ist die in diesem Wort zu dem Gegenstand gegebene Information unterbestimmt⁹. Betrachtet man das Wort jedoch so, als bezeichne es das vage Objekt Tasse, das gewissermassen gleichzeitig weiss und nicht weiss, rund und nicht rund, mit Henkel und nicht mit Henkel sei, so ist das vage Objekt überbestimmt. Das vage Objekt Tasse vereinigt in sich alle Möglichkeiten,

⁷Man kann auch diese erst konstruieren.

⁸Varga von Kibéd hat darauf hingewiesen, dass sich Peirce Überlegungen zu Vagheit und Allgemeinheit evtl. erhellen ließen, wenn man annehme, dass Blau von Beschreibungen spräche, Peirce von Objekten. Persönliche Mitteilung 2003.

⁹Brandom und Rescher haben versucht Peirce' Logik der Vagheit und Allgemeinheit durch Überbestimmtheit und Unterbestimmtheit zu erklären. [13].

die für Tassen bestehen. Vage Objekte verletzen damit das Nichtwiderspruchsprinzip. Es bietet sich an, die Sätze, denen Peirce vage Objekte zugeordnet hat, mit dem Wahrheitswert offen zu bewerten¹⁰.

6.2 Der allwissende Verifikator

In der klassischen Mathematik wird das Sprechen von einem erkennenden Subjekt vermieden. Dennoch könnte man sagen, dass ein solches implizit vorausgesetzt wird. Betrachtet man die Regeln der klassischen Logik, und fragt nach der Erkenntniskraft eines Subjektes, das in seiner Erkenntnis diesen Regeln folgt, so erhält man den allwissenden Verifikator, wie ihn Blau eingeführt hat. In seiner Reflexionslogik wurde der allwissende Verifikator \mathbf{V} u.a. eingeführt, um die Wahrheitswertprädikate W^* und F^* auswerten zu können. Der allwissende Verifikator soll die „Realität durch die Augen des Sprechers sehen und seine semantisch relevanten Intentionen (**W1**), alle semantisch relevanten Konventionen seiner Sprache (**W2**) und alle Tatsachen im Sinn von **W1** und **W2** kennen (**W3**)¹¹.“ Das Symbol „*“ gehört nach Blaus Definition zu den Indikatoren, wie „ich“, „jetzt“, „hier“ und bezeichnet die Stufe des Reflektierten. \mathbf{V}^α als der Verifikator auf der α -ten Stufe sieht alle vorangehenden Stufen $\beta < \alpha$ von außen, er erkennt die Wahrheit aller Sätze $W^\beta A$, $F^\beta A$. W^α und F^α wird von ihm als W und F ausgewertet. W^* und F^* werden von dem nicht reflektierenden \mathbf{V}^0 als W^0 und F^0 ausgewertet, was gleichbedeutend ist mit W und F .

Es stellt sich die Frage, ob man den allwissenden Verifikator nicht in eine erweiterte Interpretationsfunktion integrieren könnte, ähnlich wie Burch den Begriff des Geistes von Peirce in eine Interpretationsfunktion zu integrieren sucht¹². Bei Blau ist es wichtig, dass der allwissende Verifikator eine Außenposition in der Logik einnimmt. Dies wird benötigt, da ein wichtiges Thema der Reflexionslogik Selbstreferentialität ist und Ausdrücke mit * ausgewertet werden sollen, wofür eine Außenposition nötig ist.

Mit Hilfe des allwissenden Verifikators kann Blau bei einer gegebenen \mathcal{LR} -Interpretation φ ein gestuftes sechswertiges Verifikationsverfahren einführen¹³, mit dem beliebige Formeln in \mathcal{LR} bewertet werden können. Nachdem der LR -Satz mit der Interpretationsfunktion φ interpretiert wurde, zergliedert der Verifikator \mathbf{V}_φ^n den entstandenen Satz baumförmig¹⁴ in Teilaussagen. Er ist dann verifiziert, wenn jeder Ast nach endlich vielen Schritten einen Endpunkt erreicht. Ein Endpunkt ist dann erreicht, wenn die φ -Interpretation des am Endpunkt stehenden Satzes wahr, falsch, oder neutral ist. \mathbf{V}_φ^n kann alle Sätze, die falsch, neutral oder wahr sind, nach endlich vielen Schritten verifizieren, falsifizieren oder neutralisieren. Die anderen Sätze führen auf mindestens einem

¹⁰Es ist hier allerdings nicht ersichtlich, inwieweit vage Objekte etwas mit Reflexionsschritten zu tun haben.

¹¹Ein weitgehend wörtliches Zitat aus [9], S. 21.

¹²Siehe [18], S. ix.

¹³Dafür wird [9], S. 460 ff. gefolgt

¹⁴Blau weist auf Unterschiede zu Kalkülbäumen hin. Die Sprache \mathcal{LR}_φ der φ -Verifikationen sei u.U. nicht abzählbar.

Ast zu falsch, neutral, zu einem Regress oder zu einer noch offenen Behauptung $W^r C$, $-W^r C$ für ein $r > n$. Nun erkennt \mathbf{V}_φ^{n+1} in einem Reflexionsschritt, dass der Wahrheitswert auf der Stufe n nicht feststellbar ist. Dieses Resultat wird verwendet, um einen Endpunkt der Gestalt $-W^n - B$ oder $-W^n B$ für Verifikationen der Stufe $n + 1$ zu verwenden. Man erkennt an dieser Stelle, warum der Verifikator außerhalb jeder Stufe stehen muss, sonst wäre der Reflexionsschritt an dieser Stelle nicht verstehbar.

Blau definiert an dieser Stelle induktiv nach n den Begriff der $\binom{n}{\varphi}$ -Verifikation eines φ -Satzes C . Eine $\binom{n}{\varphi}$ -Verifikation eines φ -Satzes C ist ein Baum von φ -Sätzen mit dem Ursprung C , in dem jeder Ast endlich ist, und jeder Punkt entweder gemäß einer Nachfolgerregel, oder einer Definitionsbeseitigung einen, zwei, oder unendlich viele direkte Nachfolger hat oder gemäß einer Endregel ein Endpunkt ist. Um eine $\binom{n}{\varphi}$ -Verifikation durchzuführen, wird das Resultat der $\binom{n-1}{\varphi}$ -Verifikation verwendet, wie es für den Wahrheitswert offen erläutert wurde, insofern ist die Definition induktiv.

Durch die Interpretationsfunktion φ und durch die $\binom{n}{\varphi}$ -Verifikation der φ -Sätze kann der Wahrheitswert jedes LR -Satzes auf jeder Stufe festgestellt werden. LR ist konsistent¹⁵ und jeder LR -Satz hat auf jeder Stufe genau einen der sechs Wahrheitswerte¹⁶.

6.3 Blaus größte Zahlen

Blau führt, angeregt durch seine Beschäftigung mit der Mengenlehre und den Lügner, neue Zahlen ein: Transdefinite Ordinale, die größer sind als jede transfinite Ordinalzahl; als Reziproke dazu Infinitesimale, die transdefinit klein sind. Die Konstruktion dieser Zahlen wird hier skizziert, da sie den Konstruktionen ähnlich ist, die Peirce in der kantianischen Periode durchzuführen versuchte.

Blau entwirft ein Zahlensystem, das er S nennt. Als ontologische Basis setzt er das Mengenuniversum $\mathbf{V} := \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathbf{V}_\alpha$ voraus. Dabei ist $\mathbf{V}_0 := \emptyset$, $\mathbf{V}_{\alpha+1} := \mathbf{P}(\mathbf{V}_\alpha)$, \mathbf{P} bezeichnet die Potenzmengenbildung, $\mathbf{V}_\lambda := \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathbf{V}_\alpha$ für Limeszahlen λ . Blau definiert ungewöhnlicherweise auch für echte Klassen eine Potenzklassenbildung $\mathbf{P}(X) := \{x : x \subset X\}$, wobei die Variable x eine Mengenvariable sein soll. Als axiomatische Basis für S verwendet er die imprädikative Klassentheorie B von Bernays [7].

Er setzt auch eine Standardsemantik der imprädikativen Klassentheorie voraus. Die Klassenvariablen sollen dabei über alle Teilklassen von \mathbf{V} variieren, es soll dabei jedoch kein Bereich vorausgesetzt werden, in dem alle Teilklassen von

¹⁵Siehe [9] S. 470.

¹⁶Siehe [9] S. 472.

\mathbf{V} enthalten sind, denn sonst würde die Allklasse zur Menge relativiert. Blau legt Wert darauf, dass die Mengen-Klassen-Unterscheidung erhalten bleibt. Dies wird auch eine Rolle spielen bei der Erläuterung der Grenzen des allwissenden Verifikators.

Zur Definition der transdefiniten Ordinale benötigt Blau den Begriff der Wohlordnung. Eine *Wohlordnung* auf einer Klasse X sei eine zweistellige Relation auf X , die konnex und fundiert ist. Ein *Anfangsabschnitt* einer Wohlordnung W ist eine Teilklassse X_0 von X , die alle Vorgänger bezüglich W ihrer Elemente enthält. Blau fordert dabei nicht, dass jeder echte Anfangsabschnitt einer Wohlordnung eine Menge sein muss, da er sonst nach dem Satz von Mostowski keine transdefiniten Ordinale konstruieren könnte¹⁷. Man kann bei einer auf X gegebenen Wohlordnung W auf einem Anfangsabschnitt X_0 durch den Durchschnitt eine Wohlordnung $W_0 := W \cap X_0^2$ auf X_0 definieren.

Definition 6.1 *W heißt transdefinite Wohlordnung auf X genau dann, wenn ein echter Anfangsabschnitt X_0 von X isomorph zur Klasse aller Ordinalzahlen Ω ist, das durch die Elementrelation geordnet ist. Die Elemente von $X \setminus X_0$ heißen transdefinite Ordinale.*

Man kann zu jeder Wohlordnung W auf X eine größere Wohlordnung W_1 auf X_1 angeben, indem man die Wohlordnung um das Element \emptyset verlängert: Sei $\tilde{X} := \{\{x\} : x \in X\}$, $\tilde{W} := \{\{\{x\}, \{y\}\} : \langle x, y \rangle \in W\}$ und $X_1 := \{\{x\} : x \in X\} \cup \{\emptyset\}$, $W_1 := \{\{\{x\}, \{y\}\} : \langle x, y \rangle \in W\} \cup \{\langle x, \emptyset \rangle : x \in X\}$. W und \tilde{W} sind isomorph, und W_1 verlängert \tilde{W} um die leere Menge. Damit kann es keine größte Wohlordnung geben. Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Ordinalzahlen, die sich zu Ω zusammenfassen lassen, sind diese Ordinale nicht mehr zu einer Klasse zusammenfassbar. Man könnte sie nur zu einer Hyperklasse zusammenfassen und damit wäre die Mengen-Klassen-Unterscheidung verletzt. Blau nennt solches inkomprensible offene Vielheiten. Um auf die inkomprensible offene Vielheit der Ordinale hinweisen zu können, nennt er sie Ω^* . Blau fragt, ob man Ω^* als Grundbegriff einführen, und axiomatisch oder semantisch charakterisieren könnte. Er stellt fest, dass man dazu eine Relation W^* fordern müsste, die die gesamte inkomprensible Vielheit wohlordnen würde. Dies wäre jedoch eine längste Wohlordnung, was nicht möglich ist. Auch kann man die Wohlordnung aller Wohlordnungen nicht angeben. Die Definition würde lauten:

$$W \prec \tilde{W} \text{ gdw } W \text{ ist einem Anfangsabschnitt isomorph.}$$

Blau erhält, dass diese nicht mehr streng konnex ist, sondern nur bis auf Isomorphie:

$$W \prec \tilde{W} \vee W \simeq \tilde{W} \vee \tilde{W} \prec W.$$

Es ist nicht möglich, Äquivalenzklassen isomorpher Wohlordnungen zu bilden, denn dabei müssten Hyperklassen gebildet werden.

Blau schreibt auch, dass Wohlordnungen, die ein Teil der Ordinalzahlklasse Ω sind, kardinal und ordinal bestimmte Mengen seien. Wohlordnungen, die über

¹⁷Siehe [10], S. 40.

die Ordinalzahlklassen Ω hinausreichen, sind kardinal unbestimmt, aber ordinal bestimmt und echte Klassen. Die Wohlordnung aller Wohlordnungen ist ohne bestimmte Länge und nicht mehr als eine Gesamtheit ausdrückbar. Die Grenzen der Ausdruckskraft, damit der Erkenntnis und des allwissenden Verifikators, lassen sich nun leicht angeben: Keine der transdefiniten Ordinale hat eine Kardinalität, da Kardinalität durch eine Abbildung zwischen *Mengen* definiert ist. Ω^* lässt sich nicht mehr ausdrücken, da dazu das Bilden von Hyperklassen nötig wäre. Auf diese Art kann Blau Verschärfungen des Lügners wie „Dieser Satz ist auf allen transfiniten Reflexionsstufen offen“ entkommen. Selbst die weitere Verschärfung des Lügners, „Dieser Satz ist auf allen transdefiniten Reflexionsstufen offen“, die erst durch die Einführung der transdefiniten Ordinale möglich ist, stellt damit kein Problem mehr dar.

6.4 Blaus kleinste Zahlen

Blau möchte letztlich eine Erweiterung der reellen Zahlen bekommen. Er führt Infinitesimale ein, die eine endliche Länge in unendlich viele gleiche Teilstücke unterteilen sollen. Damit sind die Infinitesimale nicht mehr archimedisch. Seiner Ansicht nach ist Teilen so natürlich wie Zählen und führt zu seinen Infinitesimalen. Er möchte, dass das Rechnen mit seinen Infinitesimalen ordinalen Charakter hat. Dadurch unterscheiden sie sich von anderen Arten von Infinitesimalen. Er wünscht für den ω -ten Teil von 1, das $\frac{1}{\omega} \omega = \omega \frac{1}{\omega}$, und das $\frac{1}{\omega}$ auch halbiert

$\frac{1}{\omega+1} 2 = 2 \frac{1}{\omega+1}$ und geviertelt werden könne. Er führt auch transdefinit-kleine Zahlen ein. Die verschiedenen Zahlen, also die transfiniten Ordinalzahlen, die transdefiniten Ordinale, die reellen Zahlen und die transfiniten und transdefiniten Infinitesimale sollen in einer Theorie vereinigt werden. Dazu bedient sich Blau des Dualbaums. Reelle Zahlen kann man, wie unten erläutert, als Äste des reinen Dualbaums auffassen. Dessen Äste werden verlängert, um so einen erweiterten Dualbaum zu erhalten, der all die genannten Zahlen enthält.

Als Modell der reellen Zahlen sollen die Folgen der Länge ω mit den Werten 0 oder 1 verwendet werden. Dazu kann die erste auftretende 0 als Kommastrich interpretiert werden. Manche reellen Zahlen erhalten auf diese Weise eine doppelte Bezeichnung. Dies lässt sich vermeiden, wenn alle Folgen gestrichen werden, die ab einer gewissen Stelle nur noch Einsen enthalten. Als Variante \mathbb{R} , die sich leichter transfinit verallgemeinern ließe, nennt Blau die Folgen, an deren erster Stelle eine beliebige natürliche Zahl steht, und an deren weiteren Stellen 0 oder 1 stehen, wobei wieder alle Folgen gestrichen werden, die ab einer gewissen Stelle nur noch Einsen enthalten. Die Ordnung auf \mathbb{R} richtet sich nach dem ersten Unterschied. Ist F eine solche Folge, so sei die natürliche Zahl $F(0)$ der Anfangswert der reellen Zahl, der Bruchwert sei $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{F(n)}{2^n}$ und hat einen Wert kleiner 1.

Zur Erweiterung des Dualbaums auf transfinit lange Äste, so dass die transfi-

niten Ordinalzahlen und die transfiniten Infinitesimale integriert werden können, verwendet Blau Normalformen zur Darstellung von Ordinalen. Auch helfen diese, Doppelrepräsentationen einer Zahl auszuschließen. Wieder sollen Folgen ausgeschlossen werden, die an einer gewissen Stelle nur noch den Wert 1 haben. Als Anfangswert sollen jetzt auch transfiniten Ordinalen zugelassen sein. Blau führt als nächstes transdefinite reelle Zahlen ein. Die Äste des Dualbaums sollen nun transdefinit lang sein, und als Anfangswert sind neben natürlichen Zahlen und Ordinalzahlen auch transdefinite Ordinalen zugelassen. Er beweist dann für Klassenprädikate, dass jedes beschränkte Klassenprädikat eine kleinste obere Schranke besitzt.¹⁸

6.5 Blau, Peirce und die fünf Bedingungen

Blau beabsichtigt mit seiner Theorie, die die größten und kleinsten Zahlen umfasst, bis an die Grenzen des formal Ausdrückbaren zu gehen. Dies versucht auch Peirce in der kantianischen Periode, denn es soll *unbegrenzte Unterscheidbarkeit* im Kontinuum möglich sein. In der nachcantorschen Periode versucht Peirce dies zu erreichen, indem er so etwas wie eine offene Vielheit sucht, die Mengen aller Kardinalitäten enthält. Blaus Ω^* hat solche Eigenschaften. Peirce gibt in der nachcantorschen Periode auf, das Kontinuum, das sich an den Grenzen der Unterscheidungsmöglichkeiten zu zeigen scheint, durch Mengenlehre zu beschreiben. Auch Blau hält dies für ein hoffnungsloses Unterfangen, und schreibt, auch durch die transdefinit kleinen Zahlen sei man nicht „über eine Fußnote zu Zenon hinausgekommen“¹⁹. Blau hält das Kontinuum, und die damit verbundenen Fragen wie Vagheit und Bewegung für durch formale Überlegungen nicht fassbar. Peirce denkt anders darüber und hofft in der nachcantorschen Periode, dem Kontinuum durch topologische Überlegungen und Überlegungen zu dem Thema Zeit näher zu kommen.

Peirce forderte außerdem die *Potentialität*²⁰ der Punkte im Kontinuum. Blaus bis ins transdefinite verlängerter Dualbaum besteht aus wohlunterschiedenen Elementen. Insofern enthält sein Dualbaum keine potentiellen Punkte. Potentielle Punkte sollen bei Peirce jedoch immer genau dann auftreten, wenn die Grenzen der Unterscheidungsmöglichkeiten erreicht werden. In Blaus Theorie werden diese Grenzen erreicht, wie sich an der inkomprehensiblen offenen Vielheit Ω^* gezeigt hat.

Die *Erfassung des Allgemeinen* ist in Blaus Theorie insofern möglich, als in ihr nahezu alles formal Ausdrückbare formulierbar sein dürfte. Außerdem sind die Blau'schen Wahrheitswerte geeignet, um Peirce' allgemeine und vage Sätze zu bewerten.

Peirce wünscht auch, dass das Kontinuum *selbstähnlich* ist, also Teile des Kontinuums wieder Kontinua sind. Der Dualbaums X ist selbstähnlich, wenn

¹⁸Eine genaue Darstellung dieser Erweiterung der reellen Zahlen findet sich in [10].

¹⁹[10], S. 39.

²⁰Schräggedruckt stehen in diesem Abschnitt die fünf Bedingungen für das Peirce'sche Kontinuum.

man als seine Teile beispielsweise alle Abschnitte $T \subseteq X$ nimmt, die all ihre Nachfolger ihrer Elemente enthalten. Diese Teile sind selbst wieder Dualbäume und passen zur Forderung von Homogenität als Relation zwischen den Teilen bei Peirce.

Zur *Priorität* gibt es bei Peirce und Blau Übereinstimmungen und Abweichungen. Blau geht in seiner formalen Theorie ganz klar von einem Primat des Diskreten aus. Er ist jedoch der Meinung, dass das Kontinuierliche ebenso grundlegend sei, nur hält er es im Letzten nicht für formal ausdrückbar. Seiner Ansicht nach sind klare Identitätsbedingungen und Wohlunterschiedenheit ein Charakteristikum von allem Formalen, da Formales mit Hilfe von Mengentheorie beschrieben würde.

Kapitel 7

Konstruktive Sicht des Kontinuums

In der konstruktiven Mathematik gibt es viele verschiedene Schulen. Beeson¹ charakterisiert die konstruktive Mathematik durch folgende zwei Prinzipien:

1. „Es gibt ein x “ meint, dass x explizit angegeben werden kann.
2. Wahrheit hat keine Bedeutung a priori. Ein Satz φ ist wahr, wenn sich ein Beweis für φ finden lässt.

Troelstra und van Dalen [126] nennen als Schulen der konstruktiven Mathematik u.a. den Finitismus, Bishops konstruktive Mathematik, konstruktiv rekursive Mathematik und den Intuitionismus. Hier soll Bishops konstruktive Mathematik und der Intuitionismus betrachtet werden. Brouwer hat sich im Intuitionismus Gedanken auch zu den philosophischen Grundlagen der Mathematik gemacht; er hält wie Peirce die Mathematik für grundlegender als die Logik. Brouwers Kontinuum hat van Dalen als sirupartig bezeichnet. Es hat damit Eigenschaften, die Peirce von einem Kontinuum erwartet; es lassen sich nämlich aus dem intuitionistischen Kontinuum schlecht einzelne Punkte entfernen. Bishops konstruktive Mathematik ist formal konsistent mit der intuitionistischen, mit der klassischen und der konstruktiv rekursiven Mathematik; deshalb eignet sie sich dazu, einige grundlegende Prinzipien der konstruktiven Mathematik zu verdeutlichen. In Bishops konstruktiver Mathematik wird als Grundlage die intuitionistische Logik verwendet.

7.1 Intuitionistische Logik

In der konstruktiven Mathematik wird wenig Wert auf Logik gelegt; zu ihrem Aufbau ist nach Ansicht vieler konstruktiver Mathematiker Logik nicht notwendig. Es gibt einige Versuche, die Intuition, was konstruktive Mathematik sein

¹Siehe [4], S. 247.

soll, in Worte zu fassen. Diese verschiedenen Versuche lassen sich jedoch vermutlich nicht in einer formale Definition zusammenfassen. Niebergall² vergleicht verschiedene Charakterisierungen der konstruktiven Mathematik und versucht so durch eine formale Definition festzuhalten, wann eine Theorie konstruktiv genannt werden kann. Er testet verschiedene Definitionen, von denen aber keine seinen Ansprüchen genügt.

Logik soll nach Ansicht der meisten konstruktiven Mathematiker aus der mathematischen Praxis abstrahiert werden, so dass sie die Regeln wiedergibt, die in der mathematischen Praxis sowieso befolgt werden. Heyting hat 1930 [37], [38], [39] und 1934 [40] versucht, diese Regeln zu formulieren.

7.1.1 BHK-Interpretation der Junktoren und Quantoren

Die Brouwer-Heyting-Kolmogorov-Interpretation der Junktoren und Quantoren führt Beweise von Sätzen auf die Beweise ihrer Teilsätze zurück.

1. $\varphi \wedge \psi$ ist bewiesen, wenn sowohl der Beweis von φ als auch der Beweis von ψ vorliegt.
2. $\varphi \vee \psi$ ist bewiesen, wenn entweder ein Beweis von φ oder ein Beweis von ψ vorliegt. Dies schließt ein, dass bekannt ist, welcher der beiden Sätze bewiesen ist.
3. Ein Beweis von $\varphi \rightarrow \psi$ ist eine Konstruktion, die erlaubt, aus jedem Beweis von φ einen Beweis von ψ zu konstruieren.
4. Einen Beweis von $\neg\varphi$ ist eine Konstruktion, die erlaubt, aus jedem Beweis von φ einen Widerspruch zu erhalten, also einen Beweis von \perp .
5. Ein Beweis von $\forall x \in D Ax$ ist eine Konstruktion, die einen Beweis von $d \in D$ umwandelt in einen Beweis von Ad .
6. Einen Beweis von $\exists x \in D Ax$ erhält man, indem man einen Existenzzeugen x_0 angibt, also indem man für ein x_0 zeigt $x_0 \in D$ und Ax_0 .

Die Bedeutung der BHK-Interpretation hängt davon ab, was man unter Konstruktion versteht. Der Begriff „Konstruktion“ lässt sich verschieden definieren. Eine Definitionsmöglichkeit ist, unter Konstruktion einen Algorithmus zu verstehen, der in endlich vielen Schritten etwas berechnet. Diese Definition wird in Bishops konstruktiver Mathematik verwendet. Eine präzise Definitionsmöglichkeit mit Hilfe rekursive Funktionen findet sich in der konstruktiv rekursiven Mathematik.

Einige Äquivalenzen aus der klassischen Mathematik gelten hier nicht, so zum Beispiel $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, es gilt nur $\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. Auch ist $\varphi \rightarrow \psi$ nicht äquivalent zu $\neg\varphi \vee \psi$.

²Siehe [55], S. 141 ff.

7.1.2 Allwissenheitsprinzipien

Aus der BHK-Interpretation der Junktoren und Quantoren ergeben sich andere logische Axiome als die klassischen:

Eine Eigenschaft P heie *entscheidbar*, wenn für beliebige x ($Px \vee \neg Px$) gilt. Dies bedeutet, dass man für das gegebene x nachprüfen kann, welches der beiden gilt, Px oder $\neg Px$. Aus der Entscheidbarkeit eines Prädikates lässt sich jedoch nicht ableiten, dass

$$\forall n \in \mathbf{N} Pn \vee \neg \forall n \in \mathbf{N} Pn.$$

Diese Formel würde in der BHK-Interpretation bedeuten: Entweder liegt für $\forall n \in \mathbf{N} Pn$ oder für $\neg \forall n \in \mathbf{N} Pn$ ein Beweis vor. Falls für $\forall n \in \mathbf{N} Pn$ ein Beweis vorläge, hieße das, dass es eine Konstruktion geben müsste, die einen Beweis für Pn ergäbe, wenn sie auf beliebiges $n \in \mathbf{N}$ angewendet würde unter Verwendung der Daten, die n als natürliche Zahl ausweisen. Falls für $\neg \forall n \in \mathbf{N} Pn$ ein Beweis vorläge, müsste es eine Konstruktion geben, die aus einem Beweis für $\forall n \in \mathbf{N} Pn$ einen Widerspruch, wie zum Beispiel $0 = 1$ ableiten würde. Nähme man als P zum Beispiel die Goldbach'sche Vermutung³, so würde $\forall n \in \mathbf{N} Pn \vee \neg \forall n \in \mathbf{N} Pn$ bedeuten, dass man einen Beweis oder eine Widerlegung der Goldbachschen Vermutung vorliegen hätte. Dies erklärt, warum Prinzipien wie das Tertium non Datur $\forall \varphi \varphi \vee \neg \varphi$ manchmal Allwissenheitsprinzipien genannt werden.

In der konstruktiven Mathematik wird häufig mit binären Folgen argumentiert. Man kann zum Beispiel die berechenbare Folge

$$a_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } Pn \\ 1 & \text{falls } \neg Pn \end{cases}$$

betrachten. $\forall n \in \mathbf{N} Pn \vee \neg \forall n \in \mathbf{N} Pn$ ist äquivalent zu $\forall n \in \mathbf{N} (a_n = 0) \vee \neg \forall n \in \mathbf{N} (a_n = 0)$.

Definition 7.1 *Das schwache limitierte Prinzip der Allwissenheit (WLPO) lautet: Für jede berechenbare binäre Folge $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ gilt $\forall n \in \mathbf{N} (a_n = 0) \vee \neg \forall n \in \mathbf{N} (a_n = 0)$.*

WLPO ist ein nichtkonstruktives Prinzip, da es implizieren würde, dass ein Beweis der Goldbach'schen Vermutung vorläge. WLPO ist sowohl in Bishops konstruktiver Mathematik, als auch in der intuitionistischen Mathematik nicht beweisbar. Dies gilt auch für das stärkere Prinzip LPO.

Definition 7.2 *Das limitierte Prinzip der Allwissenheit (LPO) lautet: Für jede berechenbare binäre Folge $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ gilt: $\forall n \in \mathbf{N} (a_n = 0) \vee \exists n \in \mathbf{N} (a_n = 1)$.*

Häufig verwendet werden in der konstruktiven Mathematik sogenannte Brouwer'sche Gegenbeispiele. Dies sind keine Gegenbeispiele im üblichen Sinn, sondern Beweise meist mit Hilfe von Beispielen, die intuitionistisch zeigen, dass aus

³Das doppelte jeder natürlichen Zahl gröſser 1 ist die Summe zweier Primzahlen.

dem zu widerlegenden Satz ein konstruktiv nicht akzeptables Prinzip, wie das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten, oder Abschwächungen ableitbar sind.

Ein weiterer Unterschied im Vergleich zur klassischen Mathematik ist, dass für einen Existenzbeweis jeweils ein Existenzzeuge angegeben werden muss. In der konstruktiven Mathematik herrscht auch eine Ablehnung gegenüber dem Auswahlaxiom, das aus einer Menge „blind“ auswählt, ohne dass eine Konstruktion angegeben wird, wie man das ausgewählte Element erhält. Außerdem kann vom Auswahlaxiom das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten intuitionistisch abgeleitet werden. Deshalb wird in der konstruktiven Mathematik meist versucht, das Auswahlaxiom zu vermeiden, oder es werden nur Abschwächungen davon verwendet.

Für die konstruktive Mathematik musste eine neue Mengenlehre entworfen werden, da man auch aus dem Fundierungsaxiom zusammen mit dem Paar-mengenaxiom, Aussonderungsaxiom und Extensionalitätsaxiom das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten intuitionistisch ableiten kann.

Dies lässt sich leicht zeigen. Sei \emptyset die leere Menge, φ ein gegebener Satz. Sei $S := \{x : (x = \{\emptyset\}) \vee (x = \emptyset \wedge P)\}$. Nehmen wir an, diese Menge habe ein \in -minimales Element. Jedes Element von S ist gleich \emptyset oder gleich $\{\emptyset\}$. Ist \emptyset das minimale Element, so P . Ist hingegen $\{\emptyset\}$ das minimale Element, so gilt $\neg P$.

7.2 Konstruktive reelle Zahlen

Reelle Zahlen werden in Bishops konstruktiver Mathematik wie in der klassischen Mathematik als Cauchy-Folgen oder als Dedekind-Schnitte eingeführt. Cauchy-Folgen vervollständigen die rationalen Zahlen bezüglich der Metrik. Dedekind-Schnitte oder auf ähnliche Weisen definierte reelle Zahlen vervollständigen die rationalen Zahlen bezüglich der Ordnung. In der konstruktiven Mathematik können im Gegensatz zur klassischen Mathematik, je nachdem welche Axiome vorausgesetzt werden, die reellen Zahlen, die man durch Cauchy-Folgen erhält, verschieden sein von jenen reellen Zahlen, die man durch Dedekind-Schnitte erhält.

7.2.1 Cauchy-Folgen

Im Folgenden wird die Abschwächung

$$\text{AC}_{00}!: \forall n \in \mathbf{N} \exists_1 m A(n, m) \rightarrow \exists \alpha \forall n A(n, \alpha_n)$$

des Auswahlaxioms vorausgesetzt.

Zur Definition der Cauchy-Folgen wird in der konstruktiven Mathematik der Cauchy-Modul benötigt, der angibt, wie schnell eine Folge konvergiert⁴.

Definition 7.3 *Eine Fundamentalfolge ist eine Folge $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von rationalen Zahlen, zusammen mit ihrem Cauchymodul, einer Folge $(\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}}$, so dass:*

$$\forall k, m, m' \mid r_{\gamma_k+m} - r_{\gamma_k+m'} \mid < 2^{-k}.$$

⁴Siehe für den folgenden Abschnitt [126], S. 251 ff.

Nun ist einzuführen, wann Fundamentalfolgen koinzidierend heißen, um wie in der klassischen Mathematik Äquivalenzklassen bilden zu können. Das Bilden von Äquivalenzklassen wird in der konstruktiven Mathematik manchmal abgelehnt, da dabei über alle Folgen quantifiziert werden muss. Es lässt sich auch vermeiden.

Definition 7.4 Zwei Fundamentalfolgen $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ heißen koinzidierend (\approx), wenn gilt:

$$\forall k \exists n \forall m (|r_{n+m} - s_{n+m}| < 2^{-k}).$$

Die Menge der Cauchy-reellen Zahlen \mathbf{R}^C besteht aus den Äquivalenzklassen der Fundamentalfolgen bezüglich der Äquivalenzrelation \approx .

Es lassen sich auch Cauchy-Folgen von reellen Zahlen definieren, diese sind Folgen von Folgen.

Definition 7.5 $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ heißt Cauchy-Folge von reellen Zahlen mit dem Modul (α, β) , $\alpha : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$; $\beta : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$. Jedes x_n ist gegeben durch eine Fundamentalfolge $(r_{n,m})_{m \in \mathbf{N}}$ mit dem Modul $(\alpha_{n,m})_{m \in \mathbf{N}}$. Dabei soll gelten:

$$\forall k, m, m' (|x_{\beta_k+m} - x_{\beta_k+m'}| < 2^{-k}),$$

wobei

$$|x_m - x_{m'}| < 2^{-k} :\Leftrightarrow \forall i \in \mathbf{N}, 1 \leq i (|r_{m,i} - r_{m',i}| < 2^{-k}).$$

Die rationalen Zahlen können als konstante Folgen in \mathbf{R}^C eingebettet werden. Es kann gezeigt werden, dass \mathbf{R}^C Cauchy-vollständig, also metrisch vollständig ist. Dazu wird folgender Satz benötigt.

Theorem 7.1 Sei $(r_n)_{n \in \mathbf{N}} = x \in \mathbf{R}^C$, $y \in \mathbf{R}^C$, $z \in \mathbf{R}^C$, $r \in \mathbf{Q}$. Es gilt Folgendes:

- Wenn $\forall n (|r_n - r_{n+m}| \leq 2^{-k})$, dann ist $|x - r_n| \leq 2^{-k}$.
- $|x - y| \leq r \Leftrightarrow x - r \leq y \leq x + r$.
- Wenn $|x - y| \leq r$ und $|y - z| \leq r'$, dann ist $|x - z| \leq r + r'$.

Nun kann die Cauchy-Vollständigkeit von \mathbf{R}^C gezeigt werden.

Theorem 7.2 Jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von reellen Zahlen konvergiert zu einem Limes $x \in \mathbf{R}^C$.

Beweis. Sei (α, β) ein Modul für $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, und sei γ gegeben durch $\gamma_0 = \beta_0$, $\gamma_{n+1} = \max(\gamma_n, \beta_{n+1}) + 1$. Dann ist auch (α, γ) ein Modul für $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Sei

$s_n := r_{\alpha_{\gamma_n, n}, \gamma_n}$. Damit ist $|x_{\gamma_n} - s_n| < 2^{-n}$, und so erhält man, da γ_{n+m} und $\gamma_{n+m'}$ für $m, m' > 0$ größer sind als γ_n ,

$$\begin{aligned} |s_{n+m} - s_{n+m'}| &\leq |s_{n+m} - x_{\gamma_{n+m}}| + |x_{\gamma_{n+m}} - x_{\gamma_{n+m'}}| + |x_{\gamma_{n+m'}} - s_{n+m'}| \\ &< 2^{-n+m} + 2^{-n} + 2^{-n+m'} < 2^{-n+2}. \end{aligned}$$

Also ist $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine reelle Zahl x und $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergiert gegen x mit dem Modul $(\gamma_{n+3})_{n \in \mathbf{N}}$:

$$\begin{aligned} |x - x_{\gamma_{n+3}+m}| &\leq |x - s_{n+3}| + |s_{n+3} - x_{\gamma_{n+3}}| + |x_{\gamma_{n+3}} - x_{\gamma_{n+3}+m}| \\ &< 2^{-n-3} + 2^{-n-3} + 2^{-n-3} < 2^{-n}. \end{aligned}$$

■

Es lässt sich unter Verwendung konstruktiver Prinzipien nicht zeigen, dass \mathbf{R}^C auch ordnungsvollständig ist. Es lässt sich aber zeigen, dass jede beschränkte Teilmenge $S \subset \mathbf{R}^C$, die zusätzlich folgende Bedingung erfüllt:

$\forall a, b \in \mathbf{Q} : a < b \ (\forall x \in S \ x \leq b) \vee (\exists x \in S \ x > a)$ ⁵, eine kleinste obere Schranke besitzt.

7.2.2 Dedekind-Schnitte

Hier sollen verschiedene Möglichkeiten⁶ vorgestellt werden, reelle Zahlen mit Hilfe von so etwas Ähnlichem wie Dedekind-Schnitten zu definieren. Dies ist hier auch deshalb interessant, da Peirce in der Cantor'schen Periode Definitionen versuchte, die Dedekinds ähnelten. In der konstruktiven Mathematik lassen sich verschiedene, klassisch äquivalente Definitionen unterscheiden. Weitere Unterscheidungen erhält man durch die Annahme verschiedener Abschwächungen des Auswahlaxioms. Man benötigt folgende Definitionen:

Definition 7.6 Eine Menge $S \subset \mathbf{Q}$ heißt

- beschränkt, wenn gilt: $\exists r (r \in S)$ und $\exists s (s \notin S)$;
- streng monoton, wenn gilt: $\forall r, s (r < s \wedge \neg r \in S \rightarrow r \in S)$;
- offen, wenn gilt: $\forall r \in S \exists s \in S (r < s)$;
- schwach beschränkt, wenn gilt: $\neg \exists r (r \in S)$ und $\neg \exists s (s \notin S)$;
- lokalisiert, wenn gilt: $\forall r, s (r < s \rightarrow r \in S \vee s \notin S)$.

Definition 7.7 Eine Menge $S \subset \mathbf{Q}$ heißt

- erweiterte reelle Zahl, wenn S beschränkt, streng monoton und offen ist,

⁵Siehe [15], S. 19.

⁶Siehe zum folgenden Abschnitt [126], S. 270 ff.

- Dedekind reelle Zahl, wenn S beschränkt, streng monoton, offen und lokalisiert ist,
- klassisch reelle Zahl, wenn S schwach beschränkt, streng monoton und offen ist.

Die Menge der erweiterten reellen Zahlen sei mit \mathbf{R}^{be} , die der Dedekind reellen Zahlen mit \mathbf{R}^d , die der klassisch reellen Zahlen mit \mathbf{R}^e bezeichnet.

Dabei ist offensichtlich $\mathbf{R}^d \subset \mathbf{R}^{be} \subset \mathbf{R}^e$. Gleichheit zwischen reellen Zahlen sei durch Gleichheit zwischen Mengen rationaler Zahlen erklärt.

Dedekind reelle Zahlen können durch rationale Zahlen approximiert werden. Erweiterte reelle Zahlen können nicht durch rationale Zahlen approximiert werden.

Theorem 7.3 *Es gilt*

1. $\forall n \in \mathbf{N} \forall S \in \mathbf{R}^d \exists r \in S, r' \notin S (|r - r'| < 2^{-n})$,
2. $\forall n \in \mathbf{N} \forall S \in \mathbf{R}^e \neg \exists r \in S, r' \notin S (|r - r'| < 2^{-n})$.

Beweis. Zu 1 : Sei $S \in \mathbf{R}^d$, $r \in S$, $t \in S$. Wähle $r = r_0 < r_1 < \dots < r_k = t$, so dass $|r_{i+1} - r_i| < 2^{-n-1}$ für $i < k$. Da S lokalisiert ist, gilt

$$\forall r, s (r < s \rightarrow r \in S \vee s \notin S),$$

deshalb gibt es eine endliche Folge $m_0, \dots, m_{k-1} \in \{0, 1\}$, so dass

$$m_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } r_i \in S \\ 1 & \text{falls } r_i \notin S \end{cases}.$$

Sei j das kleinste j , so dass $m_j \neq 0$. Ist $j = k$, so ist $r_{k-1} \in S$, $r_k \notin S$. Falls $j = 0$, so ist $r_0 \in S$, $r_1 \notin S$. Falls $0 < j < k - 1$, ist $r_{j-1} \in S$, $r_{j+1} \notin S$ und $|r_{j+1} - r_{j-1}| < 2^{-n}$.

Zu 2 : Hier ist zu zeigen, dass $\forall r, s (r < s \rightarrow \neg (r \in S \vee s \notin S))$. Daraus erhält man $\neg \forall i < k (r_i \in S \vee r_{i+1} \notin S)$, wählt dann r_0, r_1, \dots, r_k wie oben und erhält nach mehrmaligem Umformen das gewünschte Ergebnis. ■

Die erweiterten und beschränkt erweiterten reellen Zahlen sind ordnungsvollständig. Um dies zeigen zu können, soll zunächst die $<$ - und \leq -Relation eingeführt werden:

Definition 7.8 $S \leq T :\Leftrightarrow S \subset T$. Sei $r \in \mathbf{Q}$, und sei $S + r := \{r + s : s \in S\}$; $S < T :\Leftrightarrow \exists r > 0 (S + r \subset T)$.

Nun kann gezeigt werden, dass die Menge der klassisch reellen Zahlen und die Menge der erweiterten Zahlen ordnungsvollständig sind.

Theorem 7.4 \mathbf{R}^e und \mathbf{R}^{be} sind ordnungsvollständig, d.h.

- jede bewohnte, beschränkte Teilmenge M ($\exists r, s \forall x \in M (r \in x \wedge s \notin x)$) von \mathbf{R}^{be} hat ein Supremum in \mathbf{R}^{be} ,
- jede bewohnte, schwach beschränkte Teilmenge von \mathbf{R}^e hat ein Supremum in \mathbf{R}^e .

Beweis. Sei M eine bewohnte, beschränkte Teilmenge von \mathbf{R}^{be} . Das Innere der Menge $\bigcup \{x : x \in M\}$ ist offensichtlich eine obere Schranke, auch ist sie offen und beschränkt, sie ist also das gewünschte Supremum. Sei W eine bewohnte, schwach beschränkte Teilmenge von \mathbf{R}^e . Das Innere der Menge $\mathbb{C}\bigcup \{x : x \in M\}$ ist das gewünschte Supremum. ■

\mathbf{R}^e und \mathbf{R}^{be} können als die - bis auf Isomorphie - einzigen Ordnungsvervollständigungen bezüglich schwach beschränkter bzw. beschränkter Teilmengen charakterisiert werden.

Unter der Voraussetzung, dass

$$AC_{00}: \forall n \in \mathbf{N} \exists m A(n, m) \rightarrow \exists \alpha \forall n A(n, \alpha_n)$$

gilt, kann man zeigen, dass \mathbf{R}^d und die Cauchy reellen Zahlen ordnungsisomorph sind.

7.2.3 Das konstruktive Kontinuum und die fünf Bedingungen

Im Kapitel über den geschichtlichen Hintergrund wurde gezeigt, dass Peirce in der Cantor'schen Phase das Kontinuum definiert als zusammenhängend bezüglich der Ordnungstopologie. Es wurde weiter dargelegt, dass Peirce in dieser Zeit und später den Begriff der Ordnung für zentral hält bei der Definition des Kontinuums. Dies liegt auch daran, dass die Zeit als Kontinuum nach Peirce' Ansicht dazu dient, eine Ordnung bezüglich des Vorher und Nachher einzuführen.

Reelle Zahlen, die durch Cauchy-Folgen definiert werden, sind Cauchy-vollständig, aber nicht ordnungsvollständig. Für die durch die Dedekind'schen Schnitte definierten reellen Zahlen wurde gezeigt, dass sie ordnungsvollständig, aber nicht Cauchy-vollständig sind. Zwischen diesen beiden Definitionen besteht in der klassischen Mathematik kein Unterschied, in der konstruktiven Mathematik aber sehr wohl. Interessant ist auch, dass sich das konstruktive Kontinuum sehr gut durch Infinitesimale erweitern lässt, und dass frühe Theorien von Infinitesimalen, wie die von Schmieden und Laugwitz [123] zu weiten Teilen konstruktiv sind [124].

Im konstruktiven Kontinuum liegt insofern *unbegrenzte Unterscheidbarkeit*⁷ vor, als jeweils die Ordnungsvollständigkeit bzw. die Cauchy-Vollständigkeit nachgewiesen wurde.

Die Potentialität der Punkte im konstruktiven Kontinuum zeigt sich dadurch, dass man die jeweilige reelle Zahl nicht im gleichen Sinn als gegeben

⁷Schräggedruckt stehen in diesem Abschnitt die fünf Bedingungen für das Peirce'sche Kontinuum.

auffassen kann, wie in der klassischen Mathematik. Eine Cauchy-Folge z.B. hat unendlich viele Folgenglieder. Deshalb kann sie nicht wie in der klassischen Mathematik als gegeben aufgefasst werden, da der idealisierte Mathematiker nur endlich viele Schritte vollziehen kann. Statt dessen sind ihre rationalen Annäherungen gegeben. Aus diesem Grund lässt sich i.A. nicht entscheiden, ob eine reelle Zahl gleich Null ist oder nicht. Es lässt sich auch nicht für alle reelle Zahlen entscheiden, ob sie jeweils größergleich, oder kleinergleich Null sind, denn dies würde ein abgeschwächtes Allwissenheitsprinzip implizieren. Statt dessen wird in Beweisen oft verwendet, dass, wenn strittig ist, ob x Null ist oder nicht, man für ein festgelegtes rationales δ , z.B. 2^{-n} sehr wohl entscheiden kann, ob $x \leq \delta$ oder ob $x \geq -\delta$ ist.

Im konstruktiven Kontinuum gilt das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten nicht. Insofern kann man sagen, das konstruktive Kontinuum ist geeignet zur *Erfassung des Allgemeinen*.

Zu der Frage der *Selbstähnlichkeit*, also ob Teile eines Kontinuums wieder Kontinua sind, ist zu sagen, dass man jeweils mit Näherungen rechnet. Man arbeitet in gewissem Sinn mit kleinen Intervallen, die selbst wieder Kontinua sind.

In Bishops konstruktiver Mathematik wird ausgegangen von diskreten Elementen. Man kann also nicht von einer *Priorität* des Kontinuums in der Bishop-schen konstruktiven Mathematik sprechen.

7.3 Das intuitionistische Kontinuum

Im Intuitionismus des frühen XX. Jahrhunderts spielte die Intuition eine wichtige Rolle. Die Wahrheit einer Aussage könne daran erkannt werden, dass sie intuitiv einsichtig sei [41]. Die Intuition sei dabei *nichts anderes als die Fähigkeit, bestimmte Begriffe und Schlüsse, die im gewöhnlichen Denken regelmäßig auftreten, gesondert zu betrachten*⁸. Brouwers Auffassung, was die grundlegende Intuition der Mathematik sei, hatte sich im Laufe seines Lebens verändert. Eine erste Auffassung dazu fand sich in seiner Dissertation, eine zweite in den späteren Schriften. Die erste ähnelte der Peirce'schen Sicht insofern, als Brouwer Diskretheit und Kontinuität für gleich grundlegend hielt. Brouwer wählte auch wie Peirce die Zeit als Ausgangspunkt für seine Überlegungen zum Kontinuum. Brouwer ging von einer Grundintuition aus, die Kontinuität und Diskretheit umfasste, und beschrieb dann zwei Intuitionen, die komplementär zueinander seien:

In the following we shall go further into the basic intuition of mathematics (and of every intellectual activity) as the substratum, divested of all quality, of any perception of change, a unity of continuity and discreteness, a possibility of thinking together different entities, connected by a 'between', which is never exhausted by the insertion of new entities. [16], S. 17.

⁸[41], S. 12.

Er fuhr fort indem er das Verhältnis von Kontinuum und Diskretem genauer beschrieb. Kontinuität und Diskretheit seien komplementär zueinander und nicht voneinander trennbar. Keines der beiden lasse sich aus dem anderen konstruieren. Deshalb gehörten beide zur Basis jeder mathematischen Konstruktion. Er sprach auch von etwas Ähnlichem wie Mengenbildung, nämlich von dem Bilden einer Einheit aus Verschiedenem.

Having recognized, that the intuition of continuity, of ‘fluidity’, is as primitive, as that of several things forming together a unit, the latter being at the basis of every mathematical construction, we are able to state properties of the continuum as a ‘matrix of points to be thought of as a whole’. [16], S. 17.

Später nannte er die Grundintuition der Mathematik die Intuition der Zwei-Einigkeit. Er schrieb, intuitionistische Mathematik habe ihren Ursprung in der Wahrnehmung des Vergehens der Zeit. Dabei würde wahrgenommen, dass ein Zeitpunkt in zwei Teile zerfalle. Der erste Teil würde von dem zweiten abgelöst, würde aber im Gedächtnis behalten. Dies sei ein intellektuelles Urphänomen, Intuition der Zwei-Einigkeit genannt. Die intuitionistische Mathematik sei eine vom menschlichen Geist vollzogene sprachlose Konstruktion, die sich in restloser Exaktheit aus dieser Intuition entwickle.

In der zuletzt beschriebenen Grundintuition lassen sich zwei Aspekte der Brouwer’schen Philosophie der Mathematik ablesen. Er bezog ein, dass die Mathematik immer von einem Subjekt vollzogen werden müsse. Er sah den Vorgang der Konstitution mathematischer Gegenstände als sprachlos an. Er zog damit einen scharfen Trennungsstrich zwischen Mathematik und Sprache. In der Sprache seien Missverständnisse nicht auszuschließen. Nach Brouwer wäre das primäre deshalb nicht die Sprache, sondern die mentale Konstruktion. Er lehnte deshalb Versuche ab, die das Ziel hatten, die formale Sprache oder die Logik als Grundlage für die Mathematik zu verwenden. Dies führte ihn dazu, Cantors Mengenlehre und Hilberts Programm abzulehnen⁹.

7.3.1 Das kreative Subjekt

Passend zu der Beschreibung der Grundintuition der Mathematik führte Brouwer den idealisierten Mathematiker, auch kreatives Subjekt genannt, ein. Nach Dummet¹⁰ wurde das kreative Subjekt in die intuitionistische Mathematik eingeführt, um den Aspekt der Zeit in die Mathematik integrieren zu können. Da in der intuitionistischen Mathematik Wahrheit durch Beweisbarkeit, und Beweisbarkeit durch die Konstruktion eines Beweises erklärt sind, und Konstruktionen in der Zeit stattfinden, ist dies nötig. Anlass für das Einführen des kreativen Subjektes war auch, dass Brouwer es in seinen Gegenbeispielen verwenden wollte. So wollte er zum Beispiel zeigen, dass Negation nicht immer aus mathematischen Aussagen eliminierbar ist. Außerdem benötigte er das kreative Subjekt zur Einführung von Wahlfolgen.

⁹Siehe [115], S. 48.

¹⁰Siehe [29], S. 336.

Zur Einführung des kreativen Subjektes sei Zeit in diskrete Abschnitte unterteilt. Das kreative Subjekt sei ein idealisierter Mathematiker, der zu jedem der n Zeitabschnitte wisse, ob eine Aussage bisher bewiesen worden sei oder nicht. Daraus folgte jedoch wiederum nicht, dass das Subjekt weiss, ob zu irgendeinem Zeitpunkt etwas bewiesen werden würde. Dies führte bei den reellen Zahlen dazu, dass man nach Brouwer zeigen kann, dass es absurd ist, dass eine reelle Zahl gleich Null ist, es aber dennoch nicht gezeigt werden kann, dass die Zahl wirklich verschieden ist von Null. Geht man dazu von den im letzten Abschnitt definierten Cauchy-Folgen aus, so erhält man folgendermaßen eine Fundamentalfolge¹¹:

Sei P eine mathematische Aussage. Man erhält wie folgt eine Folge rationaler Zahlen:

Falls zu dem Zeitpunkt n das kreative Subjekt weder einen Beweis von P noch von $\neg P$ hat, so sei $r_n = 0$. Falls das kreative Subjekt zwischen den Zeitpunkten $n - 1$ und n einen Beweis für P gefunden hat, so sei $r_n := 2^{-n}$ für jedes $m > n$. Falls das kreative Subjekt zwischen den Zeitpunkten $n - 1$ und n einen Beweis für $\neg P$ gefunden hat, so sei $r_n := -2^{-n}$ für jedes $m > n$. Da r_n eine Cauchy-Folge ist, konvergiert sie gegen eine reelle Zahl r . Könnte gezeigt werden, dass die Folge gegen $r = 0$ konvergiert, so ergäbe sich, dass es für das kreative Subjekt sowohl absurd wäre, P gezeigt zu haben, als auch $\neg P$ gezeigt zu haben. Also wäre $\neg P \wedge \neg \neg P$ gezeigt, was absurd ist. Deshalb kann r nicht Null sein. Würde man voraussetzen, dass r damit schon echt verschieden von Null sein müsse¹², so erhielte man, dass $P \vee \neg P$ bewiesen wäre. Da man dies für beliebige mathematische Aussagen P durchführen kann, erhielte man das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten.

Man darf deshalb in der intuitionistischen Mathematik daraus, dass es für eine bestimmte reelle Zahl absurd ist, gleich Null zu sein, nicht folgern, dass sie echt ungleich Null ist. Insofern ist aus dieser Aussage die Negation nicht eliminierbar.

7.3.2 Wahlfolgen

Brouwer modifizierte seine Ansicht, dass die Kontinuität genauso grundlegend sei wie das Diskrete, als er die Möglichkeit fand, das Kontinuum mit Hilfe der Wahlfolgen darzustellen. In Bishops konstruktiver Mathematik werden die Cauchy-Folgen als durch Regeln gegeben aufgefasst. Brouwer führte Folgen ein, die durch Regeln nicht, oder nur teilweise begrenzt wurden. Es könnte die freie Wahl des kreativen Subjektes für eine Folge zum Beispiel nur durch die Vorgabe

$$|x_m - x_n| \leq m^{-1} + n^{-1}, \forall m, n > 0$$

begrenzt sein. Brouwer fasste die Wahlfolgen [26] als Wege oder Elemente in einem Baum auf, der dem folgenden Gesetz genügt:

¹¹Siehe [15], S. 116.

¹²Dies erhält man zum Beispiel, wenn man $A \leftrightarrow \neg \neg A$ voraussetzt.

- Ist $(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ Element des Teilbaumes, so ist auch (a_0, a_1, \dots, a_n) Element des Teilbaumes.
- Für jede endliche Folge (a_0, a_1, \dots, a_n) in dem Teilbaum gibt es eine Folge $(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$, die auch Element des Teilbaumes ist.

Die intuitionistische Mathematik unterscheidet sich von anderen Arten der konstruktiven Mathematik durch die Auffassung zu den Wahlfolgen. Aus dieser Auffassung ergeben sich Axiome, nämlich die Stetigkeitsprinzipien und der Fächersatz. Das *schwache Stetigkeitsprinzip für Zahlen* lautet nach van Dalen in heutiger Sprache:

$$\forall \alpha \exists x A(\alpha, x) \Rightarrow \forall \alpha \exists m \exists x \forall \beta [\bar{\beta}m = \bar{\alpha}m \rightarrow A(\beta, x)].$$

Dabei laufen α, β über den Wahlfolgen, m, x über natürlichen Zahlen und $\bar{\alpha}m$ sei das Anfangssegment von α der Länge m .

Betrachtet man eine Funktion $\Phi : \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{N}$, die über allen Wahlfolgen definiert ist, so ergibt sich als vernünftige Annahme, dass Φ stetig sein muss, da im allgemeinen bei Wahlfolgen nicht mehr als ein Anfangssegment als bekannt vorausgesetzt werden kann. Man erhält also $\forall \alpha \exists x \forall \beta (\bar{\beta}m = \bar{\alpha}m \rightarrow \Phi(\beta) = \Phi(\alpha))$. Zusammen mit einem Auswahlprinzip ergibt sich dann das Stetigkeitsprinzip¹³. Es setzt eine lokale Stetigkeit voraus, lokal in dem Sinn, dass für jedes einzelne α und seine Umgebung ein m bestimmt wird. Dies lässt sich jedoch, um die Intuition Brouwers des Kontinuums auszuschöpfen, noch verstärken. Es ist vernünftig anzunehmen, dass wir wissen, ob ein Anfangsabschnitt von α genügt, um $\Phi(\alpha)$ zu berechnen. Damit lässt sich eine Umgebungsfunktion $\varphi : \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{N}$ zu Φ berechnen:

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\alpha}n) &= \\ &= \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \bar{\alpha}n \text{ ist nicht lang genug, um } \Phi(\alpha) \text{ zu berechnen.} \\ m+1 & \Leftrightarrow \bar{\alpha}n \text{ ist lang genug, um } \Phi(\alpha) \text{ zu berechnen u. } \Phi(\alpha) = m. \end{cases} \end{aligned}$$

Für die Umgebungsfunktion gilt, dass $\forall \alpha \exists x \varphi(\bar{\alpha}x) \neq 0$, und

$$\forall n, m (\varphi n \neq 0 \rightarrow \varphi n = \varphi(n * m)),$$

wobei mit $*$ die Konkatenation bezeichnet sei. Es soll ausgedrückt werden, dass neue Information den berechneten Wert nicht ändert. Die Klasse der Umgebungsfunktionen K_0 sei also definiert durch: $\varphi \in K_0 : \Leftrightarrow \forall \alpha \exists n \varphi(\bar{\alpha}n) \neq 0 \wedge \forall n, m (\varphi n \neq 0 \rightarrow \varphi n = \varphi(n * m))$. Sei dann $\varphi(\alpha) = n : \Leftrightarrow \exists m (\varphi(\bar{\alpha}m) = n + 1)$. Als globales Stetigkeitsprinzip erhält man:

$$\forall \alpha \exists x A(\alpha, x) \Rightarrow \exists \varphi \in K_0 \forall \alpha (A(\alpha, \varphi(\alpha)))$$

Dabei erhält man durch φ eine Art Auswahlfunktion. Der Vollständigkeit halber ist noch anzumerken, dass in manchen axiomatischen Systemen der intuitionistischen Mathematik noch ein weiteres Stetigkeitsprinzip für Funktionen angegeben wird.

¹³Dies wird ausführlich diskutiert in van Dalens Artikel [26], und kurz dargestellt in [126], S. 208 ff.

Bridges und Richman [15] nennen nur ein Stetigkeitsprinzip und formulieren es in der Sprache von Bishops konstruktiver Mathematik wie folgt:

Sei N eine Teilmenge von $\mathbf{N}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{N}$, und sei angenommen, dass für jedes $\alpha \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ ein n existiere, so dass $(\alpha, n) \in N$. Es soll also eine Funktion gegeben sein, die n für jedes α ausrechnen kann. Da die Konstruktion im allgemeinen bei einer Wahlfolge nur von einem Anfangsabschnitt abhängen kann, muss für eine andere Folge mit gleichem Anfangsabschnitt dasselbe n berechnet werden. Dadurch erhält man eine stetige Auswahlfunktion. Das Stetigkeitsprinzip besteht aus zwei Teilen:

Axiom 7.5 1. Jede Funktion $\Phi : \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{N}$ ist stetig.

2. Wenn N eine Teilmenge von $\mathbf{N}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{N}$ ist, und für jedes $\alpha \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ ein $n \in \mathbf{N}$ existiert, so dass $(\alpha, n) \in N$, dann gibt es eine Funktion $\varphi : \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{N}$, so dass für jede Wahlfolge $\alpha \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ $((\alpha, \varphi(\alpha)) \in N)$.

Bridges und Richman zeigen, dass dieses Prinzip inkonsistent ist mit verschiedenen Allwissenheitsprinzipien. Man erhält daraus auch, dass jede Funktion $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ punktweise stetig ist.

In der intuitionistischen Mathematik wird noch ein weiteres Axiom vorausgesetzt, der sogenannte Fächersatz.

Sei der Monoid \mathbf{N}^* definiert als die Menge der endlichen Folgen natürlicher Zahlen zusammen mit der Konkatenation als Verknüpfung und der leeren Folge als neutralem Element.

Definition 7.9 Eine Teilmenge $\sigma \subset \mathbf{N}^*$ heißt Fächer, wenn für alle $\alpha \in \sigma$ die Menge $\{n \in \mathbf{N} : \alpha(n) \in \sigma\}$ endlich ist und wenn σ unter Einschränkungen abgeschlossen ist¹⁴. Ein Weg α in einem Fächer sei eine Folge, so dass $\bar{\alpha}n \in \sigma$ für alle n , oder für jedes n , das kleiner ist als die Länge von α . Ein Weg α wird von B blockiert, wenn $\bar{\alpha}n \in B$; andernfalls heißt B von α verfehlt. B heißt Barriere von σ , wenn jeder unendliche Weg von B blockiert wird. Eine Barriere heißt gleichmäßig, wenn es ein $N \in \mathbf{N}$ gibt, so dass $\bar{\alpha}n$ für alle unendlichen Wege $\alpha \in \sigma$, wenn also N von α unabhängig ist.

Axiom 7.6 Der als Axiom angenommene Fächersatz lautet: Jede Barriere, für die gilt $\alpha \in \sigma \vee \alpha \notin \sigma$, ist gleichmäßig.

Aus dem Fächersatz lässt sich ableiten, dass jeder kompakte metrische Raum überdeckungskompakt ist. Daraus lässt sich das Prinzip der gleichmäßigen Stetigkeit herleiten, es ist sogar äquivalent zum Fächersatz.

Theorem 7.7 Jede punktweise stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist auf jedem kompakten $X_0 \subset X$ gleichmäßig stetig.

Aus den Stetigkeitsprinzipien und dem Fächersatz erhält man, dass das intuitionistische Kontinuum unzerlegbar ist, dass, wenn $\mathbf{R} = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$,

¹⁴Eine Folge α heißt Einschränkung einer Folge β genau dann, wenn $\beta = \bar{\alpha}n$ für ein n .

gilt $\mathbf{R} = A$ oder $\mathbf{R} = B$. Van Dalen erklärt [25], dass dies zeige, dass das intuitionistische Kontinuum viel fester zusammenhänge als das klassische Kontinuum. Die Unzerlegbarkeit sei stärker als der Zusammenhang. Außerdem seien im klassischen Kontinuum die einzigen zusammenhängenden Mengen Abschnitte. Im intuitionistischen Kontinuum könne man außerdem im Gegensatz zum klassischen Kontinuum keinen einzelnen Punkt wegnehmen, da das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten fehle. Er bezeichnet deshalb das klassische Kontinuum als gefrorenes intuitionistisches Kontinuum. Zum Verhältnis des klassischen und des intuitionistischen Kontinuums lässt sich auch sagen, dass Brouwer das klassische Kontinuum als das reduzierte Kontinuum¹⁵ bezeichnete. Er war der Ansicht, dass durch die Wahlfolgen eine viel größere Vielfalt entstehe. Das klassische Kontinuum ist auch intuitionistisch gesehen nur eine Spezies, und keine Menge. Brouwer definierte für das intuitionistische Kontinuum eine abgeschwächte Ordnung, eine sogenannte virtuelle Ordnung, die gegeben ist durch $\neg a < b$. Er bewies, dass die virtuelle Ordnung die bestmögliche Erweiterung der natürlichen Ordnung war.

Brouwer lag also wie Peirce daran, eine Ordnung auf dem Kontinuum einzuführen.

7.3.3 Das intuitionistische Kontinuum und die fünf Bedingungen

Im intuitionistischen Kontinuum lassen sich insoweit *unbegrenzt Unterscheidungen* treffen¹⁶, als die Wahlfolgen eine sehr große Vielfalt ergeben. Durch die sirupartige Eigenschaft des intuitionistischen Kontinuums hat der einzelne Punkt ähnliche Eigenschaften wie die *potentiellen Punkte*. Dies zeigt sich auch daran, dass man keine einzelnen Punkte aus dem intuitionistischen Kontinuum entfernen kann. Auch im intuitionistischen Kontinuum lässt sich nicht ohne weiteres entscheiden, ob eine reelle Zahl gleich Null ist oder nicht, da das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten nicht gilt. Damit eignet sich das intuitionistische Kontinuum ebenso wie das konstruktive Kontinuum, *zur Erfassung von Allgemeinem*.

Da von Wahlfolgen nur Anfangsabschnitte gegeben sind, rechnet man mit Näherungen. Diese geben Intervalle an, die selbst wieder Kontinua sind. Da innerhalb jedes Intervalls wieder kleinere Intervalle enthalten sind, kann man von *Selbstähnlichkeit* sprechen.

In seiner Dissertation hielt Brouwer das Diskrete und das Kontinuierliche für komplementäre Intuitionen, die nicht auseinander ableitbar seien, damit ist die Priorität gegeben. Später konstruierte er das Kontinuum aus den Wahlfolgen. Er hielt dann wohl das Kontinuum nicht mehr für mindestens genauso grundlegend wie das Diskrete.

¹⁵Siehe zu den folgenden Zeilen die Euleitung von van Dalen zu [17].

¹⁶Schräggedruckt stehen in diesem Abschnitt die fünf Bedingungen für das Peirce'sche Kontinuum.

Kapitel 8

Bells Logik der Wahrnehmung

Bell betrachtet die Unbestimmtheit in unserer Wahrnehmung. Diese Wahrnehmung ist nicht beliebig fein, sie lässt sich durch eine Zahl charakterisieren. Die Zahl ist ein Mass der Unterscheidungsfähigkeit dessen, der wahrnimmt. Bell definiert sogenannte Proximitätsräume (proximity-spaces), die zur Modellierung der Wahrnehmung dienen sollen. Solche Räume können Eigenschaften haben, die Teilen des Raumes nicht zukommen. Bell ordnet den Teilen der Räume Attribute zu, so dass die algebraischen Eigenschaften der entsprechenden Verbände logische Bedeutung gewinnen. Es soll im Folgenden ausgehend von dem Begriff des Verbands die Logik der topologischen Räume und der Proximitätsräume betrachtet werden. Verbände werden nach Johnstone [44] eingeführt¹, die Betrachtung der Proximitätsräume geschieht nach Bells Artikel *Continuity and Logic of perception* [5].

8.1 Räume und algebraische Strukturen

Zunächst sind einige Definitionen nötig:

Definition 8.1 Sei S eine Menge. Eine zweistellige Relation \leq heißt partielle Ordnung auf S genau dann, wenn \leq reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Die Teilmengenrelation ist auf der Menge der Teilmengen jeder beliebigen Menge X eine partielle Ordnung.

Definition 8.2 Sei S eine partiell geordnete Menge, X eine Teilmenge von S . Ein Element $s \in S$ heißt kleinste obere Schranke (größte untere Schranke) genau dann, wenn

1. $x \leq s$ für jedes $x \in X$ ($s \leq x$ für jedes $x \in X$).

¹Manchmal wird auch [127] herangezogen.

2. Für jedes y mit $x \leq y$ für alle $x \in X$ gilt $s \leq y$ (Für jedes y mit $y \leq x$ für alle $x \in X$ gilt $y \leq s$).

Definition 8.3 Ein Verband ist eine partiell geordnete Menge S , in der jede endliche Teilmenge eine kleinste obere Schranke und eine größte untere Schranke besitzt. Bezeichne $a \vee b$, bzw $\bigvee \{a, b\}$ die kleinste obere Schranke von $\{a, b\} \subset S$ und $a \wedge b$, bzw $\bigwedge \{a, b\}$ die größte untere Schranke von $\{a, b\} \subset S$. Sei außerdem $0 := \bigvee \emptyset \in S$, und sei $1 := \bigwedge X \in S$. Ein Verband heißt vollständig, wenn jede Teilmenge eine kleinste obere Schranke und eine größte untere Schranke besitzt.

Ein Beispiel sind Verbände von Teilmengen: Nimmt man als zugrundeliegende partielle Relation die Teilmengenrelation, so erhält man folgendermaßen einen Verband: Sei S eine Menge, \mathcal{L} eine Familie von Teilmengen von S .

1. Seien $a, b \in \mathcal{L}$. Sei $a \wedge b \in \mathcal{L}$ die größte untere Schranke, d.h. $a \wedge b \in \mathcal{L}$ ist das größte Element von \mathcal{L} , das sowohl in a als auch in b enthalten ist.
2. Sei $a \vee b \in \mathcal{L}$ die kleinste obere Schranke, d.h. $a \vee b \in \mathcal{L}$ ist das kleinste Element von \mathcal{L} , in dem sowohl a als auch b enthalten sind.

Nach Bell heißt \mathcal{L} *Verband von Teilmengen*. Falls alle Teilmengen von S in \mathcal{L} enthalten sind, erhält man als größte untere Schranke den Durchschnitt und als kleinste obere Schranke die Vereinigung.

Für beliebige Verbände \mathbf{S} kann man leicht zeigen, dass $(S, \vee, 0)$ ein kommutativer Monoid ist, in dem jedes Element idempotent ist. Zu einem beliebigen kommutativen Monoid gibt es genau eine partielle Ordnung, so dass 0 das kleinste Element ist, und durch $\bigvee X$ die kleinste obere Schranke von einer Menge X bezeichnet wird. Entsprechendes gilt für den Monoid $(S, \wedge, 1)$. Fügt man als Bedingung noch eine Rechenregel, nämlich das *absorptive Gesetz* hinzu, so erhält man für die beiden Monoide eine übereinstimmende partielle Ordnung.

Für Verbände gelten folgende Rechenregeln: Seien $a, b, c \in \mathbf{S}$.

1. $a \vee a = a$; $a \wedge a = a$.
2. $a \vee b = b \vee a$; $a \wedge b = b \wedge a$. *absorptives Gesetz*
3. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$; $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.
4. $a \vee 0 = a$; $a \wedge 1 = a$.
5. $a \wedge (a \vee b) = a$; $a \vee (a \wedge b) = a$.

Manche Verbände erfüllen auch das Distributivgesetz:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Gilt das Distributivgesetz, so auch

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Auf manchen Verbänden ist eine weitere Operation definiert, nämlich das Bilden eines *Komplements*.

Definition 8.4 $\sim a \in \mathbf{S}$ heißt Komplement von $a \in \mathbf{S}$, wenn $\sim a \wedge a = 0$ und $\sim a \vee a = 1$. Ein Verband \mathbf{S} heißt Boole'sche Algebra, wenn jedes $a \in \mathbf{S}$ ein Komplement $\sim a$ besitzt und wenn \mathbf{S} distributiv ist.

Lemma 8.1 Für beliebige Elemente $a, b, c \in \mathbf{S}$ gibt es höchstens ein $x \in \mathbf{S}$, so dass $x \wedge a = b$ und $x \vee a = c$. Also ist die Komplementbildung eindeutig.

Beweis. Nimm an, es gäbe $x, y \in \mathbf{S}$, die beide die genannte Eigenschaft hätten. Dann gilt $x = x \wedge (x \vee a) = x \wedge c = x \wedge (y \vee a) = (x \wedge y) \vee (x \wedge a) = (x \wedge y) \vee b = x \wedge y$. Ebenso können wir zeigen, dass $y = y \wedge x$. Außerdem ist b eine untere Schranke von $\{x, y\}$. ■

Definition 8.5 Ein Verband \mathbf{S} heißt Heyting-Algebra, wenn für beliebige $a, b \in \mathbf{S}$ ein Element $(a \rightarrow b)$ existiert, so dass gilt:

$$c \leq (a \rightarrow b) \text{ gdw } c \wedge a \leq b.$$

Ein Morphismus zwischen Heyting-Algebren erhält kleinste obere Schranken und größte untere Schranken. Außerdem erhält er den Pfeil \rightarrow . Eine Heyting-Algebra heißt vollständig, wenn das unendliche Distributivgesetz erfüllt ist, bzw. wenn sie ein vollständiger Verband ist.

Lemma 8.2 Jede Boole'sche Algebra ist eine Heyting-Algebra.

Beweis. Setze $\sim a \vee b := a \rightarrow b$. Sei $c \leq \sim a \vee b$. Dann gilt $c \wedge a \leq (\sim a \vee b) \wedge a = a \wedge (\sim a \vee b)$. Wegen des Distributivgesetzes gilt: $a \wedge (\sim a \vee b) = (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = (a \wedge b)$. Es gilt also $c \wedge a \leq a \wedge (\sim a \vee b) = (a \wedge b) \leq b$. Es bleibt noch zu zeigen, dass aus $c \wedge a \leq b$ folgt, dass $c \leq \sim a \vee b$. Sei also $c \wedge a \leq b$. Dann gilt $\sim a \vee b \geq \sim a \vee (c \wedge a) = (\sim a \vee c) \wedge (\sim a \vee a) = (\sim a \vee c) \wedge 1 = \sim a \vee c \geq c$. ■

Definition 8.6 Sei \mathbf{S} eine Heyting-Algebra, $a \in \mathbf{S}$. Dann heiße $a^* := (a \rightarrow 0)$ Pseudokomplement von a . Es gilt $a \wedge a^* = 0$, aber im allgemeinen nicht $a \vee a^* = 1$.

Denn $(a \rightarrow 0) \leq (a \rightarrow 0)$, also $(a \rightarrow 0) \wedge a \leq 0$.

Lemma 8.3 Eine Heyting-Algebra \mathbf{S} ist genau dann eine Boole'sche Algebra, wenn für beliebige $a \in \mathbf{S}$ gilt $(a^*)^* = a$.

Beweis. Sei \mathbf{S} eine Heyting-Algebra. Dann bleibt zu zeigen, dass $a^* \vee a = 1$. Durch das Pseudokomplement wird wegen der zusätzlichen Bedingung eine Bijektion definiert. Sie dreht die partielle Ordnung um. Damit werden auch kleinste obere Schranken in größte untere Schranken umgewandelt. Es gilt also $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$. Nach der Definition des Pseudokomplements ist die Gleichung $a \wedge a^* = 0$ erfüllt. Also gilt auch $(a \wedge a^*)^* = a^* \vee a^{**} = a^* \vee a = 1$. Ist \mathbf{S} eine Boole'sche Algebra, so ist $(a^*)^* = \sim \sim a = a$, da das Komplement eindeutig ist. ■

Im allgemeinen ist jedoch in Heyting-Algebren die dem Tertium non Datur entsprechende Gleichung $a^* \vee a = 1$ nicht erfüllt.

Definition 8.7 Sei \mathcal{L} ein Verband von Teilmengen. \mathcal{L} heißt zusammen mit der Operation $*$: $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ nach Bell $*$ -Verband von Teilmengen.

\mathcal{L} ist nicht notwendig eine Heyting-Algebra, da es nicht klar ist, ob das unendliche Distributivgesetz erfüllt ist. Häufig auftretende Verbände sind die Topologien.

Die Menge der offenen Mengen eines topologischen Raums bildet einen $*$ -Verband von Teilmengen, der eine Heyting-Algebra ist.

Sei T ein topologischer Raum, $\mathbf{S} \subset \mathbf{P}(T)$ sei die Menge der offenen Mengen. \mathbf{S} ist durch \subseteq partiell geordnet.

1. Seien $A, B \in \mathbf{S}$. $A \vee B := A \cup B$. Nach der Definition der topologischen Räume ist \mathbf{S} unter Vereinigung abgeschlossen. Sogar unendliche Vereinigungen sind wieder in \mathbf{S} .
2. Seien $A, B \in \mathbf{S}$. $A \wedge B := A \cap B$. Nach der Definition der topologischen Räume gilt, dass der Durchschnitt einer endlichen Menge offener Mengen wieder offen ist.

Topologische Räume sind Heyting-Algebren. Offensichtlich gilt $\emptyset \in \mathbf{S}$. Also

$$\cup \emptyset = \{x | x \in T \wedge \exists A \in \emptyset : x \in A\} = \emptyset = 0.$$

Außerdem gilt

$$\cap \emptyset = \{x | x \in T \wedge \forall A \in \emptyset : x \in A\} = T = 1.$$

Topologien sind außerdem distributiv: Da für beliebige drei Elemente a, b, c der Potenzmenge von T gilt $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, trifft dies auch für die Elemente von $\mathbf{S} \subset \mathbf{P}(T)$ zu. \mathbf{S} ist sogar eine Heyting-Algebra. Es genügt also zu zeigen, dass für je zwei Elemente $a, b \in \mathbf{S}$ gilt, dass $(a \rightarrow b) \in \mathbf{S}$ ist. Dabei wird $(a \rightarrow b)$ nicht wie in der Boole'schen Algebra $\mathbf{P}(T)$ als $\sim a \vee b$ definiert, da die Negation von a der Boole'schen Algebra $\mathbf{P}(T)$ $\sim a$ offensichtlich eine abgeschlossene, und deshalb im allgemeinen keine offene Menge ist. Statt dessen definiert man $(a \rightarrow b)$ anhand der Gleichung, die erfüllt werden soll. Sei also $(a \rightarrow b) := \bigvee \{c : c \wedge a \leq b\}$. Offensichtlich ist $(a \rightarrow b) \in \mathbf{S}$. Es bleibt also zu zeigen, dass

$$c \leq (a \rightarrow b) \text{ gdw } c \wedge a \leq b.$$

Auf Topologien gilt das unendliche Distributivgesetz:

$$a \cap \bigcup_{i \in I} a_i = \bigcup_{i \in I} (a \cap a_i).$$

Nach der Definition von \wedge, \vee, \bigvee gilt also

$$\begin{aligned} a \wedge (a \rightarrow b) &= a \wedge \bigvee \{c : c \wedge a \leq b\} = \\ &= \bigvee \{c \wedge a : c \wedge a \wedge a \leq b \wedge a\} = \\ &= \bigvee \{c \wedge a : c \wedge a \leq b \wedge a\}. \end{aligned}$$

Deshalb gilt für $c \leq (a \rightarrow b)$ auch $c \wedge a \leq b$. Gelte nun $c \wedge a \leq b$, dann ist $c \in \{c : c \wedge a \leq b\}$, also $c \leq (a \rightarrow b)$. Also ist \mathbf{S} eine Heyting-Algebra. Als Negation $\sim a$ in der Heyting-Algebra \mathbf{S} kann man das Innere der Komplementmenge von a wählen. Damit ist \mathbf{S} ein $*$ -Verband².

Durch die Potenzmenge $\mathbf{P}(T)$ ist eine Boole'sche Algebra definiert, wobei \vee die Vereinigung sei und \wedge der Durchschnitt. 0 ist die leere Menge \emptyset und 1 der ganze Raum T . $\mathbf{P}(T)$ ist deshalb Boole'sch, weil $\mathbf{P}(T)$ distributiv ist und weil jedes Element von $\mathbf{P}(T)$ ein Komplement besitzt. Die Topologie $\mathbf{P}(T)$ zum Raum T heißt *diskrete Topologie*.

Definition 8.8 Ein Raum ist ein Paar $\mathbf{S} = (S, \mathcal{L})$, bestehend aus einer Menge S und einem $*$ -Verband \mathcal{L} von Teilmengen von S . Elemente von \mathcal{L} heißen Teile von \mathbf{S} . \mathcal{L} heißt der Verband der Teile von \mathbf{S} .

Topologische Räume sind Räume. Auch Proximitätsräume sind Räume. Die von Bell eingeführten Proximitätsräume sollen nun definiert werden. Dazu werden Proximitätsstrukturen eingeführt.

Definition 8.9 Eine Proximitäts-Struktur ist eine Menge S zusammen mit einer symmetrischen reflexiven zweistelligen Relation \approx .

Bell verwendet Proximitätsräume für die Quantenlogik [6] und zur Modellierung der menschlichen Wahrnehmung. Menschen können Punkte, die sehr nahe beieinander liegen, nicht unterscheiden. In diesem Zusammenhang kann man Elemente von S als Punkte auffassen, wobei die Relation \approx bezeichnet, wann zwei Punkte ununterscheidbar sind. Diese Relation ist offensichtlich im allgemeinen nicht transitiv.

Definition 8.10 Das Sensum eines Punktes x sei die größte Umgebung eines Punktes x , in dem alle von x verschiedenen Punkte mit x in der Relation \approx stehen, also

$$Q_x = \{y \in S : x \approx y\}.$$

Möchte man die menschliche Wahrnehmung modellieren, so kann man Q_x auch als die kleinste wahrnehmbare Umgebung um x auffassen.

Definition 8.11 Vereinigungen von Familien von Sensa seien die Teile von \mathbf{S} , jeder Teil von \mathbf{S} hat also die Form:

$$\bigcup_{x \in X} Q_x.$$

Dabei sei X eine Teilmenge von S .

Teile von \mathbf{S} entsprechen also den wahrnehmbaren Teilmengen von S , falls man Wahrnehmung modelliert.

²Siehe [127] S. 35.

Die Familie der Teile von \mathbf{S} ist ein $*$ -Verband von Teilmengen, der mit \mathcal{L} bezeichnet werden soll. Seien $a, b \in \mathcal{L}$. Sei die kleinste obere Schranke von $a, b \in \mathcal{L}$ durch die mengentheoretische Vereinigung definiert $a \vee b := a \cup b$. Sei außerdem die größte untere Schranke von $a, b \in \mathcal{L}$ durch die mengentheoretische Vereinigung der Sensa aller im mengentheoretischen Durchschnitt enthaltenen Mengen definiert

$$a \wedge b := \bigcup_{x \in a \cap b} Q_x$$

. Das Pseudokomplement sei wie folgt definiert:

$$U^* = \{y \in S : \exists x \notin U. x \approx y\}.$$

Die natürlichsten Proximitätsstrukturen erhält man, wenn man als Sensa die metrischen Umgebungen in einem bestimmten Abstand verwendet, also

$$x \approx y \Leftrightarrow d(x, y) \leq \varepsilon.$$

Für $\varepsilon = 0$ erhält man als Proximitätsrelation die Identitätsrelation, dann erhält man denselben Raum, als wenn man S mit der diskreten Topologie versehen würde. Denn, falls $x \approx y \Leftrightarrow x = y$, dann ist

$$Q_x = \{y \in S : x \approx y\} = \{x\}.$$

Also sind alle einelementigen Teilmengen von S Teile von \mathbf{S} . Damit sind alle Teilmengen von S Teile von \mathbf{S} , da die Vereinigung von Teilen wieder Teile sind.

Beispiel 8.1 Sei $\hat{\mathbf{R}}$ die Menge der nonstandard-reellen Zahlen (im Sinne von Robinson oder Schmieden-Laugwitz). Stellt man sich ein Wesen vor, das alle Punkte mit endlichem Abstand unterscheiden kann, aber keine Punkte, die einen infinitesimalen Abstand haben, so kann man als \approx die Relation der infinitesimalen Nähe einführen. Dann erhält man einen Proximitätsraum. Die Relation ist transitiv, da die Summe endlich vieler infinitesimaler Abstände wieder einen infinitesimalen Abstand ergibt.

Bell schreibt in seinem Artikel von 1986, dass

Lemma 8.4 1. ein Proximitätsraum $\mathbf{S} = (S, \mathcal{L})$ genau dann ein topologischer Raum ist, wenn seine Proximitätsrelation transitiv ist und

2. der $*$ -Verband der Teile \mathbf{S} von einem Proximitätsraum mit einer transitiven Proximitätsrelation isomorph zu dem $*$ -Verband der Teile eines diskreten Raumes ist.

Beweis. Zu 1. Sei \mathbf{S} ein Proximitätsraum, dessen Proximitätsrelation transitiv ist. Nach der Definition der Proximitätsräume ist \mathcal{L} gegen Vereinigungen abgeschlossen. Es bleibt also zu zeigen, dass der endliche Durchschnitt von Teilen von \mathbf{S} wieder ein Teil von \mathbf{S} ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass der Durchschnitt von Sensa wieder ein Teil von \mathbf{S} ist. Seien also Q_x, Q_y Sensa. Sei außerdem

$z \in Q_x \cap Q_y$. Dann gilt $z \approx x$ und $z \approx y$, wegen der Symmetrie von \approx auch $x \approx z$. Mit der Transitivität von \approx erhält man $x \approx y$, für beliebiges $a \in Q_y$ erhält man $a \approx y, y \approx x$ und damit $a \approx x$. Es gilt also $Q_x = Q_y$, also $Q_x \cap Q_y = Q_x$ und damit ist $Q_x \cap Q_y$ ein Sensum, wie zu zeigen war.

Sei nun \mathbf{S} ein Proximitätsraum, der ein topologischer Raum ist. Zu zeigen ist, dass seine Proximitätsrelation transitiv ist. Zu zeigen ist für beliebige y, y', y''

$$y \approx y' \wedge y' \approx y'' \rightarrow y \approx y''.$$

Da \mathbf{S} ein topologischer Raum und ein Proximitätsraum ist, stimmt die größte untere Schranke einer endlichen Menge von Teilen des topologischen Raums mit der des Proximitätsraums überein. Insbesondere gilt also für zwei Teile $a, b \in \mathcal{L}$ $a \cap b = \bigcup_{x \in a \cap b} Q_x$. Also gilt $a \cap a = a = \bigcup_{x \in a} Q_x$. Sei nun $y' \approx y$.

Dann ist $y' \in Q_y = \bigcup_{x \in Q_y} Q_x$. Insbesondere ist $Q_{y'} \subset Q_y$. Sei $y'' \approx y'$, dann ist $y'' \in Q_{y'} \subseteq Q_y$, also $y \approx y''$.

zu 2. Sei $\mathbf{S} = (S, \mathcal{L})$ ein Proximitätsraum mit transitiver Proximitätsrelation. Zu zeigen ist, dass es eine Menge X gibt, deren Potenzmenge $*$ -verbandisomorph zu \mathbf{S} ist. Die Potenzmenge von $S/\approx = \{[x] : x \in S\}$ mit $[x] = \{y : y \approx x\}$ ist eine solche Menge, wie durch folgende Isomorphie ersichtlich wird.

$$I : (\mathbf{P}(S/\approx)) \rightarrow \mathbf{S}, \{[x]\} \mapsto Q_x, a \mapsto \bigcup_{[x] \in a} Q_x.$$

I ist wohldefiniert, da, wenn x, y zwei Repräsentanten von $[x]$ sind, dann ist $Q_x = \{z : z \approx x\} = \{z : z \approx x \wedge x \approx y\} = \{z : z \approx y\} = Q_y$. Die Vereinigung einer Menge von Mengen bleibt auch nachdem sie abgebildet wird die kleinste obere Schranke, d.h es gilt

$$I(a \cup b) = \bigcup_{[x] \in a \cup b} Q_x = \bigcup_{[x] \in a} Q_x \cup \bigcup_{[x] \in b} Q_x = I(a) \cup I(b).$$

Dann ist noch zu zeigen, dass der Durchschnitt einer endlichen Menge von Mengen nach der Abbildung durch I die größte untere Schranke bleibt, d.h.

$I(a \cap b) = \bigcup_{x \in I(a) \cap I(b)} Q_x$. Es gilt $I(a \cap b) = \bigcup_{[x] \in a \cap b} Q_x$. Außerdem gilt

$$\bigcup_{x \in I(a) \cap I(b)} Q_x = \bigcup_{x \in \left(\bigcup_{[x] \in a} Q_x \cap \bigcup_{[x] \in b} Q_x \right)} Q_x.$$

Sei $y \in I(a \cap b)$. Dann gibt es $[x] \in a \cap b$ mit $y \approx x$. Da $a \cap b \subseteq \bigcup_{[x] \in a} Q_x \cap \bigcup_{[x] \in b} Q_x$,

ist auch

$$I(a \cap b) = \bigcup_{[x] \in a \cap b} Q_x \subset \bigcup_{x \in \left(\bigcup_{[x] \in a} Q_x \cap \bigcup_{[x] \in b} Q_x \right)} Q_x.$$

Sei außerdem $z \in \bigcup_{x \in I(a) \cap I(b)} Q_x$. Dann gibt es $w \in \bigcup_{[x] \in a} Q_x \cap \bigcup_{[x] \in b} Q_x$ mit $w \approx z$. Für w gibt es $[w'] \in a$ mit $w \approx w'$ und $[w''] \in b$ mit $w \approx w''$. Also gilt, da \approx transitiv ist, $z \approx w'$ und $z \approx w''$, also $z \in \bigcup_{[x] \in a \cap b} Q_x$. In $\mathbf{P}(S/\approx)$ ist die Negation von a genau das mengentheoretische Komplement von a . Also gilt

$$I(\{[x] : x \in S \wedge x \notin a\}) = (\{x : x \approx y \wedge y \notin a\}),$$

damit bleibt die Negation erhalten. Also ist gezeigt, dass I ein $*$ -Verbandsisomorphismus ist. ■

8.2 Anwendung für die Logik

Bisher wurden verschiedene Räume und deren Eigenschaften betrachtet. Dies hat zunächst keine logische Bedeutung.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie man Teilen dieser Räume Attribute zuschreiben kann. Attribute wie „Härte“ oder „Röte“ kommen entweder Teilen, oder aber dem ganzen Raum zu. Jedes Attribut ist mit einer propositionalen Funktion verbunden, nämlich „kommt das Attribut A zu“. Bell nimmt in seinem Vortrag [5] an, dass es eine Reihe von primitiven, unzerlegbaren Attributen gibt. Attribute können durch logische Operatoren wie \wedge, \vee, \neg zu molekularen Attributen verbunden werden. Zu einem gegebenen Raum \mathbf{S} kann man eine Sprache \mathbf{L} mit Attributen wie folgt interpretieren, also den Attributen Teilräume von \mathbf{S} zuweisen:

Die Attribute seien mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Jedem primitiven Attribut A werde ein Teil $[A]_{\mathbf{S}}$ zugeordnet. Dieser Teil sei der größte Teil, auf den A zutrifft.

Folgende Definition dient zur weiteren Zuordnung von Teilräumen und zusammengesetzten Attributen:

$$\begin{aligned} [A \wedge B]_{\mathbf{S}} & : = [A]_{\mathbf{S}} \wedge [B]_{\mathbf{S}}, \\ [A \vee B]_{\mathbf{S}} & : = [A]_{\mathbf{S}} \vee [B]_{\mathbf{S}}, \\ [\neg A]_{\mathbf{S}} & : = [A]_{\mathbf{S}}^*. \end{aligned}$$

Damit kann auch eine Inklusionsrelation definiert werden:

$$A \sqsubseteq_{\mathbf{S}} B \Leftrightarrow [A]_{\mathbf{S}} \subseteq [B]_{\mathbf{S}}.$$

Zusammengesetzten Attributen werden entsprechend den obigen Gleichungen Teile von \mathbf{S} zugeordnet. Ist nun ein Teil U von \mathbf{S} eine Teilmenge von dem durch ein beliebiges Attribut definierten $[A]_{\mathbf{S}}$, so sagt man A wird von U bedeckt $U \subseteq [A]_{\mathbf{S}}$. Es gibt noch eine zweite Relation zwischen einem Teil U und einem Attribut A , nämlich $U \triangleleft_{\mathbf{S}} A$, sie heißt U manifestiert A . Für einfache Relationen entspricht sie der Bedeckungs-Relation.

Für die zusammengesetzten Attribute sei die Manifestiert-Relation durch folgende Gleichungen definiert

$$\begin{aligned} U \triangleleft_{\mathbf{S}} A \wedge B & : \Leftrightarrow U \triangleleft_{\mathbf{S}} A \text{ und } U \triangleleft_{\mathbf{S}} B, \\ U \triangleleft_{\mathbf{S}} A \vee B & : \Leftrightarrow \text{Es gibt } W, V, \text{ so dass } W \cup V = U \text{ u. } V \triangleleft_{\mathbf{S}} A \text{ u. } W \triangleleft_{\mathbf{S}} B, \\ U \triangleleft_{\mathbf{S}} \neg A & : \Leftrightarrow V \triangleleft_{\mathbf{S}} A \Rightarrow V \subseteq U^* \text{ für jeden Teil } V \text{ von } \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Die Manifestiert-Relation fällt für topologische und diskrete Räume mit der Bedeckungs-Relation zusammen, nicht jedoch für Proximitätsräume. Die Bedeckungsrelation ist durch eine einfache Teilmengenrelation definiert. Da bei topologischen und diskreten Räumen die kleinste obere Schranke und die größte untere Schranke durch Vereinigung bzw. Durchschnitt definiert sind, stimmen dort die beiden Relationen überein. Die Bedeckungs- und Manifestiert-Relation sind – auch bei Proximitätsräumen – gleich für primitive Attribute. Sind zwei primitive Attribute gegeben, so ist die Bedeckungsrelation und die Manifestiert-Relation auch für ihre Konjunktion gleich. Ist ein primitives Attribut gegeben, so stimmt die Bedeckungsrelation und die Manifestiert-Relation für ihre Negation überein. Betrachtet man hingegen die Bedeckungsrelation und die Manifestiert-Relation der Disjunktion zweier primitiver Attribute, so stimmen die beiden Relationen bei Proximitätsräumen nicht überein.

Bell motiviert die Definition von \wedge und \vee anhand des gewöhnlichen Gebrauchs von \wedge und \vee .

$$\begin{aligned} \text{Sei } A \wedge B & \subseteq_{\mathbf{S}} A, A \wedge B \subseteq_{\mathbf{S}} B \text{ und,} \\ \text{wenn für jedes Attribut } C & \subseteq_{\mathbf{S}} A, C \subseteq_{\mathbf{S}} B \text{ gilt, so gelte auch } C \subseteq_{\mathbf{S}} A \wedge B. \end{aligned}$$

Möchte man Bells besonders auf Proximitätsräume zugeschnittenen Äußerungen für andere Verbände verwenden, so kann man sagen $[A \wedge B]_{\mathbf{S}}$ sollte die größte untere Schranke der Teile $[A]_{\mathbf{S}}$ und $[B]_{\mathbf{S}}$ von \mathbf{S} sein. Also sollte dementsprechend für beliebige Teilräume U und V von \mathbf{S} gelten, dass $U \wedge V$ die größte untere Schranke in \mathbf{S} von U und V sei.

Ebenso soll für je zwei Teile U und V von \mathbf{S} $U \vee V$ die kleinste obere Schranke von U und V in \mathbf{S} sein.

Außerdem soll ein leeres Attribut vorausgesetzt werden, nämlich \perp mit $[\perp]_{\mathbf{S}} = \emptyset$. Auch sollte $[A]_{\mathbf{S}} \wedge [A]_{\mathbf{S}}^* = [A]_{\mathbf{S}} \wedge [\neg A]_{\mathbf{S}} = [A \wedge \neg A]_{\mathbf{S}} = [\perp]_{\mathbf{S}} = \emptyset$ gelten, also sollte vorausgesetzt werden, dass $U \wedge U^* = \emptyset$, wie es in der Definition von $*$ -Verbänden festgesetzt ist.

8.3 Verbindung zwischen Kontexten und Räumen

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wurden zwei Arten von $*$ -Verbänden näher betrachtet. Nun sollen diesen beiden $*$ -Verbänden, nämlich Proximitätsräumen und topologischen Räumen, passende Kontexte zugeordnet werden.

Bell zeigt in seinem Artikel, dass für Proximitätsräume die Nicht-Persistenz typisch ist. Ein Attribut A heißt \mathbf{S} persistent genau dann, wenn gilt

$$V \subseteq U \& U \triangleright_{\mathbf{S}} A \Rightarrow V \triangleright_{\mathbf{S}} A.$$

Bell wendet die durch die Proximitätsräume gegebene Logik u.a. für die menschliche Wahrnehmung an. Betrachtet man z.B. ein Schachbrett, das abwechselnd rote und blaue Felder hat, und wählt man für $Q_x = \{y : |x - y| < \varepsilon\}$ die Umgebungen, die den Durchmesser ε haben, so kann es eine Teilmenge U des Schachbretts geben, die teilweise rot und teilweise blau gefärbt ist, aber deren roter, bzw. blauer Teil kleiner ist als jedes Q_x . Dann ist diese Menge nicht $ROT \vee BLAU$, da die Definition

$$\begin{aligned} U \triangleleft_{\mathbf{S}} ROT \vee BLAU &\Leftrightarrow \text{Es gibt } W, V, \\ \text{so dass } W \cup V &= U \text{ und } V \triangleleft_{\mathbf{S}} ROT \text{ und } W \triangleleft_{\mathbf{S}} BLAU \end{aligned}$$

nicht erfüllt ist. Dennoch ist das ganze Schachbrett $ROT \vee BLAU$. Also ist das Schachbrett ein Beispiel für einen nicht persistenten Proximitätsraum.

Um dieses Beispiel genauer analysieren zu können, soll festgestellt werden, welche Teile eines Proximitätsraumes das Attribut $\neg\neg A$ manifestieren.

Lemma 8.5 *Es gilt: $U \triangleleft_{\mathbf{S}} \neg\neg A \Leftrightarrow \exists W \supseteq U : W \triangleleft_{\mathbf{S}} A$.*

Beweis. Nach Definition von

$$U \triangleleft_{\mathbf{S}} \neg A \text{ gilt } U \triangleleft_{\mathbf{S}} \neg\neg A \Leftrightarrow (Z \triangleleft_{\mathbf{S}} A \Rightarrow Z \subseteq V^* \Rightarrow V \subseteq U^*).$$

Es genügt also zu zeigen:

$$(Z \triangleleft_{\mathbf{S}} A \Rightarrow Z \subseteq V^* \Rightarrow V \subseteq U^*) \Leftrightarrow \exists W \supseteq U : W \triangleleft_{\mathbf{S}} A.$$

„ \Leftarrow “: Sei U eine Menge, die eine Obermenge Z besitzt, die A manifestiert. Zeige unter dieser Voraussetzung $Z \subseteq V^* \Rightarrow V \subseteq U^*$. Sei also $Z \subseteq V^*$. Nach Voraussetzung gilt: $U \subseteq Z \subseteq V^*$. Außerdem gilt $V^{**} \subseteq U^*$, da $S \setminus V^* \subseteq S \setminus U$, da $V^{**} = \bigcup_{x \in S \setminus V^*} Q_x$ und $U^* = \bigcup_{x \in S \setminus U} Q_x$. Da $V \subseteq V^{**}$, gilt auch $V \subseteq U^*$, was zu beweisen war.

„ \Rightarrow “: Ist umgekehrt U eine Menge, die $\neg\neg A$ manifestiert, so ist zu zeigen, dass es einen Teil Z gibt, der A manifestiert. Dies lässt sich zeigen durch Induktion über den Aufbau der Attribute.

Falls A primitiv ist, gilt $U \triangleleft_{\mathbf{S}} A$ gdw $U \subseteq [A]_{\mathbf{S}}$. Also gilt

$$U \triangleleft_{\mathbf{S}} A \Leftrightarrow U \triangleleft_{\mathbf{S}} \neg\neg A.$$

Falls A nicht primitiv ist, ist besonders der Fall zu berücksichtigen, in dem A eine Disjunktion ist. Sei also $A := (B \vee C)$.

Es gilt $U \triangleleft_{\mathbf{S}} \neg\neg (B \vee C) \Leftrightarrow (W \triangleleft_{\mathbf{S}} (B \vee C) \Rightarrow W \subseteq V^* \Rightarrow V \subseteq U^*)$. Nach Definition des Manifestierens für die Disjunktion gilt

$$\begin{aligned} U \triangleleft_{\mathbf{S}} \neg\neg (B \vee C) &\Leftrightarrow (\text{Es gibt } W_1, W_2, \text{ so dass} \\ W_1 \triangleleft_{\mathbf{S}} B \& W_2 \triangleleft_{\mathbf{S}} C \& W_1 \cup W_2 &= W \Rightarrow W \subseteq V^* \Rightarrow V \subseteq U^*). \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt: $(W_1 \triangleleft_S B \Rightarrow W_1 \subseteq V_1^* \Rightarrow V_1 \subseteq U_1^*) \Leftrightarrow U_1 \triangleleft_S \neg\neg B \Leftrightarrow \exists W_1 \supseteq U_1 : W_1 \triangleleft_S B$ und $(W_2 \triangleleft_S C \Rightarrow W_2 \subseteq V_2^* \Rightarrow V_2 \subseteq U_2^*) \Leftrightarrow U_2 \triangleleft_S \neg\neg C \Leftrightarrow \exists W_2 \supseteq U_2 : W_2 \triangleleft_S C$.

Sei $U_1 := \bigcup_{x \in U \& Q_x \subseteq [B]_S} Q_x$, $U_2 := \bigcup_{x \in U \& Q_x \subseteq [C]_S} Q_x$. Falls es für U_1 oder U_2

keine Teilmenge gibt, die gleichzeitig ein Teil von S ist, so soll U_1 bzw. U_2 als leer angenommen werden. Für jedes U lässt sich ein kleinerer Teil \bar{U} von S definieren: $\bar{U} = U_1 \cup U_2$. Dieser Teil manifestiert auch $\neg\neg(B \vee C)$. Nimm o.B.d.A an, $U = \bar{U}$. Wähle W als $W_1 \cup W_2$. ■

8.4 Bells Logik und die fünf Bedingungen für das Peirce'sche Kontinuum

Es soll nun betrachtet werden, welche der fünf Peirce'schen Bedingungen erfüllt sind, und wie die als unklar erkannten Worte in den Bedingungen durch die Bell'sche Logik der Wahrnehmung interpretiert werden.

Unbegrenzte Unterscheidbarkeit ist in der Bell'schen Wahrnehmungslogik nur insofern gegeben, dass man in jedem Proximitätsraum bis zu einer endlichen Grenze ε unterschieden werden kann, und dieses ε beliebig klein sein darf. Dies reicht für eine Wahrnehmungslogik aus, da wir mit Messgeräten, oder unseren Sinnesorganen auch nur endliche Abstände bis jeweils zu einem ε messen können.

Die *Potentialität* der Punkte ist hier durch die über einer Menge liegende Verbandsstruktur und die darauf definierte Logik gegeben. Die Punkte der Menge sind wohlunterschieden und die Ununterscheidbarkeit, das Verschmelzen tritt erst durch die auf der Menge definierte Verbandsstruktur auf. Peirce würde dies vermutlich kritisieren.

In der Bell'schen Wahrnehmungslogik wird kein Bezug zu Gesetzmässigkeiten oder *Allgemeinem* hergestellt. Peirce verlangt, dass in einer Logik des Allgemeinen das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten außer Kraft gesetzt wird. Hier ist $\neg\neg A \Rightarrow A$ für Attribute nicht mehr gültig. In dem Kapitel über die Peirce'sche Logik war dies eine der Peirce'schen Formulierungen des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten. Peirce sah Kontinua als Darstellung von Universalien. Vielleicht hätte er dies hier auch als Möglichkeit gegeben gesehen, da Teilen des Raumes die Attribute zugeordnet werden können, und jedes Teil viele unzugängliche potentielle Punkte umfasst.

In der vierte Bedingung geht es um *Selbstähnlichkeit*, und darum, dass Teile eines Kontinuums wieder Kontinua sind. Auf einem Teilraum dürfte sich wieder eine Proximitätsstruktur definieren lassen, ähnlich wie in der Teilraumtopologie. Damit ist ein Teilraum wieder ein Proximitätsraum. Außerdem sind die Strukturen des Raumes durch Räume definiert, ähnlich wie Peirce es will, der in der nachcantorschen Phase sagt, ein Kontinuum sei durch die Relation der Teile untereinander gegeben. Hier ist jedoch keine Relation des Aneinanderstossens o.ä. gegeben, sondern nur eine Relation der Koexistenz. Peirce hätte es vermutlich gefallen, dass sich die logischen Eigenschaften aus den Eigenschaften des Raumes ergeben.

Bell hat als Grundlage für seiner Konstruktion eine Menge mit wohlunterschiedenen Elementen verwendet, also hat das Diskrete hier *Priorität*. Er ist nicht direkt von einem Verband ausgegangen, der die entsprechenden Eigenschaften hat. Insofern verwendet er die Proximitätsstruktur nicht als das Grundlegende, sondern als das Abgeleitete. Vielleicht könnte man, ähnlich wie dies in der punktfreien Topologie getan wird, vom Teil des Raumes als grundlegendem Begriff ausgehen.

8.5 Punktfreie Topologie und die fünf Bedingungen

In der Einführung zur Verbandstheorie wurden topologische Räume als Beispiele für Verbände angeführt. Genauso wie bei den Proximitätsräumen könnten auch hier Teilen, nämlich den offenen Mengen, Attribute zugeordnet werden, so dass die topologische Struktur logische Bedeutung bekommt. In der punktfreien Topologie [44] und auch in der formalen Topologie [121], die eine konstruktive Weiterführung der punktfreien Topologie ist, wird die offene Menge als grundlegender Begriff verwendet.

Je nachdem was für eine Topologie gegeben ist, ist die *Feinheit der Unterscheidungen*³ dadurch gegeben, ob es viele oder wenige offene Mengen in der Topologie gibt. Die feinsten Topologien sind durch die Potenzmenge einer Menge gegeben.

Punkten können aus einer Topologie manchmal nachträglich konstruiert werden, insofern könnte man sagen, sie seien durch die Topologie *potentiell gegeben*.

Wieder ist der Raum durch Teile gegeben. Die Teile erfüllen allgemeine Bedingungen, wie sie durch eine Topologie gegeben sind. Auch hier wird wie bei den Proximitätsräumen normalerweise keine Verbindung zur *Allgemeinheit* hergestellt. Peirce definierte allgemeine Aussagen dadurch, das sie dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten nicht genügen. Dies ist auch der Fall in den zu topologischen Räumen gehörenden Algebren, die Heyting-Algebren sind.

Auf Topologien können Teilraumtopologien definiert werden. Insofern sind die offenen Mengen wieder topologische Räume, insofern sind sie *selbstähnlich*. Auch hier ist die Struktur des Raumes durch Teile des Raumes gegeben. Die Relation der Teile untereinander ist die der Koexistenz.

In der formalen Topologie wird die offene Menge als das Grundlegende gesehen, und der Punkt als das abgeleitete. Peirce könnte zusammenhängende offene Mengen als Kontinua anerkannt haben, so dass zumindest die Basis des topologischen Raumes Kontinua wären. Der Punkt, als von anderen Punkten wohlunterschieden, könnte dem Diskreten entsprechen. Mit Hilfe von Mereologie oder der punktfreien Topologie können Modelle gefunden werden, in denen das Kontinuierliche *Priorität* vor dem Diskreten hat.

³Schräggedrucktes soll in diesem Abschnitt auf die fünf Eigenschaften des Peirce'schen Kontinuums hinweisen.

Kapitel 9

Ein Modell für das Peirce'sche Kontinuum

Im Folgenden soll ein Modell beschrieben werden, das die Bedeutung der Infinitesimale in Peirce' Theorie berücksichtigt. Auch modelliert es das Immer-Verfeinern-Können und das Nicht-aus-kleinsten-Teilen-Bestehen des Peirce'schen Kontinuums.

Peirce spricht an manchen Stellen von Punkten, als wären sie Bereiche. Parker [59] beschreibt das Peirce'sche Kontinuum als aus infinitesimalen Intervallen zusammengesetzt. Diese Intervalle entsprechen den teilbaren Punkten Peirce'. Folgt man diesem Gedanken, so muss das als Punkt wahrgenommene infinitesimale Intervall wieder aus infinitesimalen, sozusagen subinfinitesimalen Intervallen zusammengesetzt gedacht werden. Dieser Vorstellung soll hier unter Verwendung des Modells von Myrvold und der Logik der Wahrnehmung von Bell gefolgt werden.

Anschließend soll betrachtet werden, wie man in einer ähnlichen Konstruktion der schrittweisen Verfeinerung aus den natürlichen Zahlen etwas ähnliches wie die reellen Zahlen erhält.

Von diesen Ansätzen sollen dann die Gemeinsamkeiten betrachtet, und so eine Anwendung für die Erkenntnistheorie gefunden werden.

9.1 Myrvolds Modell

Myrvold entwickelt ein Modell des Kontinuums¹, das auf den Peirce'schen Ideen aufbaut. Das Modell hat folgende Eigenschaften:

- Es kann auf einer Geraden angeordnet werden,
- es enthält Mengen jeder Mächtigkeit,

¹Siehe [54], S 535-537.

- hinter jedem Punkt der Geraden können überabzählbar viele Punkte versteckt sein.

Dieses Modell soll hier als Grundlage dienen und in leicht veränderter Form vorgestellt werden. Es besteht in einer mittels der Ordinalzahlen numerierten Hierarchie von Mengen, deren erste die reellen Zahlen sind. Man kann die weiteren Mengen als Erweiterungen der reellen Zahlen verstehen. Myrvold beschreibt dies durch das Hinzufügen von neuen Zahlen, die infinitesimal sind, deren Gestalt jedoch nicht näher erläutert wird. Myrvold benötigt nur, dass für eine solche Zahl ε und für beliebige Ordinalzahlen α und β gilt: $\varepsilon^\alpha < \varepsilon^\beta$ für $\alpha > \beta$. In der Non-Standard-Analysis [119] werden die reellen Zahlen um kleinste und größte Zahlen erweitert. Hier sollen dagegen die reellen Zahlen nur um kleinste Zahlen erweitert werden. Dabei soll eine von Myrvold nur angedeutete Notation verwendet werden, in der die reellen Zahlen zwar angereichert werden, aber nicht um etwas, das wir normalerweise als Infinitesimale bezeichnen. Die neuen Zahlen sind aber kleiner als jede reelle Zahl, wenn man eine passende Ordnung einführt:

Sei das Auswahlaxiom vorausgesetzt. Seien x_i im Folgenden reelle Zahlen.

Sei die Menge $\mathbf{R}_1 := \mathbf{R}$. Sei die Menge $\mathbf{R}_n := \mathbf{R}^n$. Für beliebige Ordinalzahlen α sei \mathbf{R}_α die Menge der wohlgeordneten Folgen $\mathbf{R}_\alpha := \{(x_i)_{i < \alpha} : x_i \in \mathbf{R}\}$. Die Mächtigkeit von \mathbf{R}_α ist $(2^\omega)^{\#\alpha}$. Aus dem Wohlordnungssatz folgt, dass es für jede Kardinalzahl κ ein \mathbf{R}_α gibt, dessen Mächtigkeit mindestens κ ist. Die Elemente von \mathbf{R}_α können folgendermassen linear geordnet werden:

$$x < y \Leftrightarrow \exists i < \alpha \quad x_i \neq y_i \wedge \forall j < i \quad x_j = y_j \wedge x_i < y_i.$$

Es lassen sich auf diesen Mengen problemlos eine Addition und eine skalare Multiplikation definieren: Die Addition soll komponentenweise erfolgen. Sei o.B.d.A. $\beta < \alpha$. Sei $(y_j^\alpha)_{j < \beta}$ dasjenige Tupel, das entsteht, wenn das Tupel $(y_j)_{j < \beta}$ durch Nullen verlängert wird, bis es ein α -Tupel ist, also $(y_i^\alpha)_{i < \alpha} := ((y_j)_{j < \beta}, 0, \dots, 0)$. Nun lässt sich die Addition unter Verwendung der reellen Addition wie folgt definieren:

$$(x_i)_{i < \alpha} + (y_j)_{j < \beta} := (x_i)_{i < \alpha} + (y_i^\alpha)_{i < \alpha} = (x_i + y_i^\alpha)_{i < \alpha}.$$

Die skalare Multiplikation, also die Multiplikation mit einer reellen Zahl erfolgt ebenfalls komponentenweise. Sei r eine reelle Zahl. Dann ist $r \cdot (x_i)_{i < \alpha} = (r \cdot x_i)_{i < \alpha}$. Zwischen manchen Tupeln lässt sich auch eine Multiplikation definieren. So soll die Multiplikation mit einem Tupel, das der j -ten Stelle Eins ist und sonst Null, immer definiert sein: $(x_i)_{i < \alpha} \cdot (0, \dots, 1, \dots, 0) := (0, \dots, x_j, \dots, 0)$. Es ergibt sich ein α -Tupel, das an an der j -ten Stelle den Eintrag x_j hat. Diese Multiplikation lässt sich auf verschiedene Weise auf eine größere Menge von Tupeln fortsetzen. Eine Möglichkeit ist die komponentenweise Multiplikation, sie ist auf beliebigen Tupeln definiert: Sei o.B.d.A. $\beta < \alpha$. Seien $(x_i)_{i < \alpha}$ und $(y_j)_{j < \beta}$ beliebige Tupel. Dann ist die komponentenweise Multiplikation definiert durch $(x_i)_{i < \alpha} \cdot (y_j)_{j < \beta} = (x_i)_{i < \alpha} \cdot (y_j^\alpha)_{j < \alpha} = (x_i y_i^\alpha)_{i < \alpha}$. Diese Multiplikation

ist kommutativ und assoziativ. Eine weitere Multiplikation lässt sich analog zu der Multiplikation zwischen Polynomen definieren. Sie bietet sich an, da Myrvold die neu hinzugefügten Zahlen oft wie Polynome schreibt. Sie ist aber zunächst ausschließlich auf Tupeln definiert, die nur an endlich vielen Stellen ungleich Null sind: Seien $(x_i)_{i < \alpha}$ und $(y_j)_{j < \beta}$ Tupel, die nur an endlich vielen Stellen ungleich Null sind. Seien $(i_\nu)_{0 \leq \nu \leq n}$ und $(j_\mu)_{0 \leq \mu \leq m}$ endliche Folgen, so dass für jede Ordinalzahl γ gilt $(\gamma \neq i_\nu \Rightarrow x_\gamma = 0)$ und $(\gamma \neq j_\mu \Rightarrow y_\gamma = 0)$. Dabei sei n die größte Ordinalzahl, für die $x_n \neq 0$ ist, und m die Ordinalzahl, für die $y_m \neq 0$ ist. Dann lässt sich die Multiplikation wie folgt definieren:

$$(x_i)_{i < \alpha} \cdot (y_j)_{j < \beta} := \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m x_{i_\nu} \cdot y_{j_\mu} \cdot (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

wobei die Eins jeweils an der $(i_\nu + j_\mu)$ -ten Stelle steht. Die Multiplikation ist wie die Multiplikation von Polynomen kommutativ und assoziativ.

Durch die lineare Ordnung der \mathbf{R}_α

$$x < y \Leftrightarrow \exists i < \alpha x_i \neq y_i \wedge \forall j < i x_j = y_j \wedge x_i < y_i$$

kann die Erweiterung von \mathbf{R} zu \mathbf{R}_α als Erweiterung um Infinitesimale gelesen werden. Denn alle Tupel, deren Länge größer eins ist, und deren erster Eintrag Null ist, sind kleiner als jede reelle Zahl und damit infinitesimal. Denkt man an Peirce' Idee, dass ein Punkt in mehrere, auch überabzählbar viele Punkte zerfallen kann, so lässt sich diese Idee in diesem Modell wiederfinden. Jeder Punkt bzw. jede reelle Zahl x „enthält“ alle Tupel, die mit ebendieser reellen Zahl beginnen, also zerfällt x in $x \times \mathbf{R}$. Betrachtet man hingegen den Punkt (x, y) , so sind in ihm die Punkte $(x, y) \times \mathbf{R}$ „enthalten“.

Die Myrvold'sche Schreibweise, die jetzt vorgestellt werden soll, macht deutlich, inwieweit die \mathbf{R}_α Erweiterungen um Infinitesimale sind. Die Schreibweise bedeutet das Gleiche wie oben und dient lediglich der Anschaulichkeit. Die Tupel lassen sich wie folgt auch als Polynome lesen: Myrvold fasst die \mathbf{R}_α für $\alpha > 1$ als Erweiterung von \mathbf{R} um Infinitesimale auf. Dazu führt er eine neue Zahl ε ein, die größer Null ist und kleiner als jede reelle Zahl. Er führt die Mengen \mathbf{R}_α wie folgt ein: Sei

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 & : = \mathbf{R}, \\ \mathbf{R}_2 & : = \{x : \exists x_1, x_2 \in \mathbf{R} : x = x_0 + \varepsilon x_1\}, \\ \mathbf{R}_n & : = \{x : \exists x_i \in \mathbf{R} : x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon^{n-1} x_{n-1}\}, \\ \mathbf{R}_{\omega+1} & : = \{x : \exists x_i \in \mathbf{R} : x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon^n x_n + \dots + \varepsilon^\omega x_\omega\}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise soll \mathbf{R}_α für eine beliebige Ordinalzahl definiert werden. Die Potenzen von ε sollen jeweils neu hinzugefügt werden, und sie sollen nach Myrvold einer Regel genügen. Die Regel lautet: Sei $ab < ac$ für $b < c$ und $0 < a$ auch dann gültig, wenn b infinitesimal ist. Die Multiplikation ist jedoch nicht für beliebige neue Zahlen erklärt. Myrvold möchte mit dieser Regel wohl gewährleisten, dass $\varepsilon^\kappa < \varepsilon^\alpha$ für $\alpha < \kappa$. Er schreibt auch, dass jede der Mengen

\mathbf{R}_α einer Menge wohlgeordneter Folgen der Form $\{x_i : i < a\}$ entspricht. Auf diesen Tupeln oder Folgen kann man, wie oben gezeigt, Addition und Multiplikation definieren. Es gilt für die beide der vorgestellten Multiplikationen, dass $\varepsilon^\kappa < \varepsilon^\alpha$ für $\alpha < \kappa$. In Myrvolds Schreibweise sieht man deutlicher, inwieweit man \mathbf{R}_κ als Verfeinerung von \mathbf{R}_α auffassen kann, falls $\alpha < \kappa$. Fasst man die \mathbf{R}_α als Menge von Folgen auf, so kann man die Kardinalität besonders einfach berechnen. \mathbf{R}_α hat $(2^\omega)^{\#\alpha}$ Elemente, wobei $\#\alpha$ die zu α gehörende Kardinalzahl ist. Aus dem in Myrvolds Modell vorausgesetzten Wohlordnungssatz erhält man, dass es für jede Kardinalzahl κ ein \mathbf{R}_α gibt, dessen Mächtigkeit mindestens κ ist.

Keine der einzelnen Mengen \mathbf{R}_α ist ein Peirce'sches Kontinuum. Die Vereinigung all der Mengen hat jedoch insofern Ähnlichkeiten mit dem Peirce'schen Kontinuum, als sie Mengen beliebiger Kardinalität enthält. Die Punkte können wie verlangt auf einer Geraden angeordnet werden. Man sieht hier schon andeutungsweise, inwieweit hinter jedem „Punkt“ überabzählbar viele Punkte verborgen sind. Deutlicher lässt sich das im nächsten Modell darstellen. Die Konstruktion kann allerdings nicht ein Verschmelzen der Punkte modellieren.

9.2 Verbindung von Myrvolds Modell und der Logik der Wahrnehmung Bells

Die Punkte, die man bei Myrvolds Modell auf den einzelnen Verfeinerungsstufen erhält, lassen sich als infinitesimal lange Intervalle auffassen. Die infinitesimalen Intervalle der α -ten Stufe sollen α -infinitesimale Intervalle heißen. In dem Modell, das jetzt definiert wird und auf dem Myrvold'schen aufbaut, gibt es wieder für jede Ordinalzahl α eine Stufe der Verfeinerung der reellen Zahlen². Ein Element oder Punkt der α -ten Stufe ist ein α -infinitesimales Intervall. Innerhalb des α -infinitesimalen Intervalls soll auf der Stufe α nichts unterscheidbar sein. Auf der $(\alpha + 1)$ -ten Stufe sollen die α -infinitesimalen Intervalle in überabzählbar viele $(\alpha + 1)$ -infinitesimale Intervalle auflösbar sein. Das legt nahe, die Punkte von \mathbf{R}_α , die α -infinitesimalen Intervalle, als *Sensa* aufzufassen, die die feineren Punkte von $\mathbf{R}_{\alpha+1}$ enthalten.

Durch dieses Modell lässt sich noch deutlicher erkennen, auf welche Weise hinter einem Punkt überabzählbar viele Punkte versteckt sein können. Man erhält folgende Konstruktion:

Sei $\mathbf{R}_1 := \mathbf{R}$. Seien die *Sensa* von \mathbf{R}_1 die jeweiligen Einermengen $S_x^1 = \{x\}$. $\mathcal{R}_1 = (\mathbf{R}_1, R_1)$ ist der Proximitätsraum, der durch \mathbf{R}_1 und den durch die *Sensa* definierten $*$ -Verband von Teilen R_1 definiert ist. Hier ist die Identität die Proximitätsrelation.

Seien \mathbf{R}_2 definiert als $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \setminus \{0\}$ zusammen mit der Addition, die oben im Abschnitt über Myrvolds Modell definiert wurde. Es sollen für jedes \mathbf{R}_α eine Menge von Teilmengen eingeführt werden, durch die man einen Verband, genauer gesagt eine Proximitätsstruktur definieren kann. Diese Mengen werden

²Die Idee des Immer-Weiter-Verfeinerns nennt auch Herron [35], S. 612 ff.

Verbandsmengen genannt. Seien die Verbandsmengen von \mathbf{R}_2 für beliebige $x \in \mathbf{R}$ definiert als $S_x^2 = x \times \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Jedes S_x^2 kann also mit einer reellen Zahl, nämlich mit x identifiziert werden. Durch $\mathcal{R}_2 = (\mathbf{R}_2, R_2)$, den durch \mathbf{R}_2 und den durch die Verbandsmengen S_x^2 definierten $*$ -Verband von Teilen R_2 wird ein Proximitätsraum definiert. \mathbf{R}_3 sei definiert durch $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \setminus \{0\}$ zusammen mit der obigen Addition.

Durch die Definition der Multiplikation auf der Vereinigung aller Myrvold'schen \mathbf{R}_α und durch die Definition der Kleinerrelation ist gewährleistet, dass für jedes beliebige y das Element $(0, 0, y)$ kleiner ist als jedes Element von \mathbf{R}_1 und \mathbf{R}_2 .

Die Verbandsmengen von \mathbf{R}_3 für beliebige $x \in \mathbf{R}^2$ sind definiert als $S_x^3 = x \times \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Jede Verbandsmenge S_x^3 kann mit einem Element von $\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$ identifiziert werden. Sei $x = (x_0, x_1)$. Falls $x_1 = 0$, soll S_x^3 mit $x_0 \in \mathbf{R}_1$ identifiziert werden. Falls $x_1 \neq 0$ soll S_x^3 mit $x \in \mathbf{R}_2$ identifiziert werden. Für eine beliebige natürliche Zahl n sei \mathbf{R}_n definiert als $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Die Verbandsmengen von \mathbf{R}_n für beliebige $x = (x_0, \dots, x_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1}$ seien definiert durch $S_x^n = x \times \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Außerdem heie \bar{x} *versteckt hinter* x , wenn $\bar{x} \in S_x^n$. Mehrfach bzw. k -fach *versteckt hinter* x heißt $\bar{x} \in \mathbf{R}_n$, wenn es $x^0, \dots, x^k \in \bigcup_{i=1}^n \mathbf{R}_i$ gibt, mit $x = x^0 \in \mathbf{R}_{i_0}, \bar{x} = x^k \in \mathbf{R}_n, x^1 \in \mathbf{R}_{i_1}, \dots, x^k \in \mathbf{R}_{i_k}, i_0 < \dots < i_k = n$ und dabei x^j hinter x^{j-1} versteckt ist.

Wieder können die Verbandsmengen von \mathbf{R}_n identifiziert werden mit den Elementen von $\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathbf{R}_i$. Für $x_{n-2} \neq 0$ gilt $x \in \mathbf{R}_{n-1}$, in diesem Fall soll S_x^n mit x identifiziert werden. Falls für alle $n-1 > k > i-1$ gilt $x_k = 0$ und $x_{i-1} \neq 0$, so werde S_x^n mit $(x_0, \dots, x_{i-1}) \in \mathbf{R}_i$ identifiziert. Sei $n > 1$ eine beliebige natürliche Zahl. Sei R_n die Menge der Verbandsmengen von \mathbf{R}_n . Man erhält eine Familie bijektiver Abbildungen: $f_n : R_n \rightarrow \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathbf{R}_i$; $S_x \mapsto x$; $x \mapsto S_x$.

Lemma 9.1 $\mathcal{R}_n = (\mathbf{R}_n, R_n)$ ist ein Proximitätsraum, er ist gegeben durch \mathbf{R}_n und den durch die Verbandsmengen R^n definierten $*$ -Verband von Teilen \mathcal{R}_n . Seine Proximitätsrelation ist transitiv.

Beweis. Sei für $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{R}_n$ für $n > 1$ wie folgt eine Proximitätsrelation definiert:

$$\bar{x} \approx_n \bar{y} \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathbf{R}_i : \bar{x}, \bar{y} \in S_x^n.$$

Es ist zu zeigen: \approx_n ist reflexiv. Für jedes Element $\bar{x} = (x_0, \dots, x_{n-1})$ von \mathbf{R}_n gilt entweder, dass $x_{n-2} \neq 0$ ist, dann gehört (x_0, \dots, x_{n-2}) zu \mathbf{R}_{n-1} , oder $x_{n-2} = 0$ und $x_{n-3} \neq 0$, dann ist (x_0, \dots, x_{n-3}) in \mathbf{R}_{n-2} oder man erhält für ein anderes i mit der Eigenschaft $n-1 > i-1 > k$, so dass $x_k = 0$ und $x_{i-1} \neq 0$, dann ist $(x_0, \dots, x_{i-1}) \in \mathbf{R}_i$. Für das jeweilige $x = (x_0, \dots, x_{i-1}) \in \mathbf{R}_i$ gilt: $x \in \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathbf{R}_i : \bar{x} \in S_x^n$. Offensichtlich ist, dass \approx_n symmetrisch ist.

Zu zeigen ist, dass \approx_n transitiv ist. Sei $*^0$ diejenige Funktion, die die letzte Ziffer des jeweiligen Tupels streicht, um dann die Nullen am Ende des neuen

Tupels zu streichen, also

$$*^0 : \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathbf{R}_i; x \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}),$$

so dass für alle $n-1 > k > i-1 > 0$ gilt $x_k = 0$ und $x_{i-1} \neq 0$, wobei x_{n-2} auch ungleich Null sein darf. $*^0(\bar{x})$ ist überall eindeutig definiert. Damit ist zu einem gegebenen \bar{x} eindeutig ein x bestimmt, für das gilt $\bar{x} \in S_x^n$. Aus der Eindeutigkeit ergibt sich die Transitivität der Relation \approx_n . Aus der Existenz und Eindeutigkeit des x folgt zusammen mit der Definition der Proximitätsrelation, dass die durch \approx_n sich ergebenden Sensa $Q_{\bar{x}}^n$ für ein beliebiges $\bar{x} \in \mathbf{R}_n$ identisch sind mit der entsprechenden Verbandsmenge, also $S_x^n = Q_{\bar{x}}^n$. ■

Lemma 9.2 Die Räume $\mathcal{R}_n = (\mathbf{R}_n, R_n)$ sind isomorph zu einem diskreten Raum, nämlich $\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathbf{R}_i$.

Beweis. Die Existenz eines Isomorphismus folgt aus dem Satz von Bell, dass ein Proximitätsraum mit transitiver Proximitätsrelation zu einem diskreten Raum isomorph ist. Der Isomorphismus ist definiert durch die Abbildung f_n . ■

Nun zurück zu der Definition der \mathbf{R}_α .

\mathbf{R}_ω seien die ω -langen Folgen, also \mathbf{R}^ω , wieder zusammen mit der oben definierten Addition. Die Verbandsmengen von \mathbf{R}_ω seien für $x \in \mathbf{R}_\omega$ die Eimengen $S_x^\omega = \{x\}$. $\mathbf{R}_{\omega+1}$ sei $\mathbf{R}_\omega \times \mathbf{R}$, zusammen mit der oben definierten Addition. Das Sensum von $\mathbf{R}_{\omega+1}$ für $x \in \mathbf{R}^\omega$ sei $S_x^{\omega+1} = x \times \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Ähnlich kann \mathbf{R}_α für beliebige Ordinalzahlen α definiert werden. $\mathcal{R}_\alpha = (\mathbf{R}_\alpha, R_\alpha)$ ist der Proximitätsraum, der durch \mathbf{R}_α und den durch die Sensa definierten $*$ -Verband von Teilen R_α definiert ist. Bei Limeszahlen sind die Sensa die Singletons der Elemente von \mathbf{R}_α .

Wie in Myrvolds Modell können die \mathbf{R}_α linear geordnet werden, falls man das Auswahlaxiom annimmt.

Die \mathbf{R}_α sind als disjunkt definiert. So kann jedes \mathbf{R}_α für beliebige Nachfolgerzahlen α als Inneres eines „Punktes“ von $\bigcup_{i=1}^{\alpha-1} \mathbf{R}_i$ gesehen werden.

Damit ist erklärt, inwieweit Punkte hinter Punkten verborgen sind. Diese Eigenschaft bedeutet in gewissem Sinn auch ein Verschmelzen der Punkte, da die Punkte auf einer Ebene in denen einer niedrigeren Ebene eingeschmolzen sind. Man könnte sich auch die reellen Zahlen, also die erste Ebene, in einer nullten Ebene, einem Punkt verschmolzen denken, dann wäre das Modell selbstähnlich.

9.2.1 Ebenen der Verfeinerung im Endlichen

Erinnert man sich an die von Myrvold bevorzugte Notation, so kann man in ähnlicher Weise verfeinern, um aus den natürlichen Zahlen \mathbf{N} in ω -vielen Verfeinerungsschritten so etwas ähnliches wie \mathbf{R} zu erhalten. Dabei kann man ein beliebiges $1 < m \in \mathbf{N}$ wählen, und $\varepsilon = \frac{1}{m}$ setzen. Die Verbandsmengen werden ähnlich definiert. Je nachdem, wie man sie im Einzelnen definiert, erhält man eine Proximitätsrelation, die transitiv ist oder nicht. Ist die Proximitätsrelation

transitiv, so ist der Raum \mathbf{Q}_n zu der Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathbf{Q}_n$ isomorph, wie \mathbf{R}_n zu der Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathbf{R}_n$. Auch lässt sich das Hinter-einem-Punkt-versteckt-sein ohne Schwierigkeiten modellieren. Ein Punkt x ist genau dann hinter einem Punkt \bar{x} versteckt, wenn x in der Verbandsmenge von \bar{x} enthalten ist.

Sei $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{N}$. Die Verbandsmengen sind definiert als Singletons der Elemente von \mathbf{Q}_1 . Durch die Verbandsmengen erhält man einen $*$ -Verband der Teile \mathcal{Q}_1 . Durch $\mathcal{Q}_1 = (\mathbf{Q}_1, Q_1)$ ist ein Proximitätsraum definiert. Die Elemente von \mathbf{Q}_2 seien $y =: x_0 + \varepsilon x_1$ für beliebige $x_0 \in \mathbf{N}$, $x_1 \in \{1, \dots, m-1\}$. Die Verbandsmengen von \mathbf{Q}_2 für $x \in \mathbf{Q}_1$ seien $S_x^2 = \{y : y = x + \varepsilon x_1, x_1 \in \{1, \dots, m-1\}\}$, damit erhält man einen $*$ -Verband der Teile \mathcal{Q}_2 . Durch $\mathcal{Q}_2 = (\mathbf{Q}_2, Q_2)$ ist ein Proximitätsraum definiert. Die Elemente von \mathbf{Q}_k seien $y =: x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon^{k-1} x_{k-1}$ für beliebige $x_0 \in \mathbf{N}$, $x_1, \dots, x_{k-2} \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $x_{k-1} \in \{1, \dots, m-1\}$. Die Verbandsmengen von \mathbf{Q}_k für $x \in \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathbf{Q}_{i-1}$ seien $S_x^k = \{y : y = x + \varepsilon^k x_k, x_k \in \{1, \dots, m-1\}\}$. Mit der Definition der Verbandsmengen erhält man wie oben einen $*$ -Verband der Teile \mathcal{Q}_k . Durch $\mathcal{Q}_k = (\mathbf{Q}_k, Q_k)$ ist ein Proximitätsraum definiert. Die Elemente von \mathbf{Q}_ω seien $y =: x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon^k x_k + \dots$ für beliebige $x_0 \in \mathbf{N}$, $\forall i \in \mathbf{N} \quad x_i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Bei den hier gewählten Mengen ist die Darstellung eindeutig, es werden also nicht mehrere Folgen zu einer Zahl zusammengefasst, wie etwa bei den rationalen Zahlen, wo $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ gleichgesetzt werden. Auch eine Zahl wie $0,99999\dots$ wird für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ als unterschiedlich von 1 aufgefasst, da sie sich auf jeder Stufe unterscheiden, und die Proximitätsrelation auf der ω -ten Stufe die Gleichheit ist. Die Verbandsmengen von \mathbf{Q}_ω für $x \in \mathbf{Q}_\omega$ seien die Singletons $S_x^\omega = \{x\}$. Sei die entsprechende Proximitätsrelation definiert wie oben, sei also für beliebige $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{Q}_n$

$$\bar{x} \approx_n \bar{y} \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathbf{Q}_i : \bar{x}, \bar{y} \in S_x^n.$$

Nach Definition lässt sich jede Zahl \bar{x} in \mathbf{Q}_n darstellen als $(-1)^{\text{sign}\bar{x}} \sum_{i=1}^n \varepsilon^i x_i$ für $x_0 \in \mathbf{N}, x_i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $x_n \in \{1, \dots, m-1\}$, diese Darstellung ist eindeutig. Da dies für jedes n gilt, gilt es mit vollständiger Induktion auch für die Folgen von \mathbf{Q}_ω . Wähle nämlich $x_i := \max\{w : |\bar{x}| - w\varepsilon^i > 0\}$. Daher gibt es für jedes \bar{x} genau ein $x \in \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathbf{Q}_i : \bar{x}, \bar{y} \in S_x^n$. Auf gleiche Weise wie oben lässt sich sehen, dass die Relation \approx_n reflexiv und symmetrisch ist.

Man könnte die Verbandsmengen auch so definieren, dass die Darstellung nicht mehr eindeutig ist. Damit wäre x nicht mehr eindeutig und so die Proximitätsrelation nicht mehr eindeutig. Dazu genügt es, überlappende Verbandsmengen zu definieren. Es ergäben sich als $\mathcal{Q}_k = (\mathbf{Q}_k, Q_k)$ nicht persistente Proximitätsräume. Dies würde das Konzept des potentiellen Punkts bei Peirce auf eine andere Weise modellieren. Die Verschmelzung in der Logik würde deutlicher sichtbar, da Räume mit nicht transitiver Proximitätsrelation nicht persistent sind.

Würde man die x_i nicht auf $\{1, \dots, m-1\}$ einschränken, so würde man er-

stens manche Zahlen doppelt erhalten, und zweitens wären die \mathbf{Q}_k nicht disjunkt. Sowohl für die endliche Verfeinerung, als auch für die infinitesimale Verfeinerung scheint es natürlich, die Proximitätsrelation der ω -ten Verfeinerungsebene als Identitätsrelation zu wählen. Der Schritt zu Beginn scheint gleich groß wie der Schritt bei ω .

9.3 Zuschreiben von Prädikaten

Bell hat in seiner Logik der Wahrnehmung Teilen von Proximitätsräumen Prädikate zugeordnet. Wir haben Familien von Proximitätsräumen, nämlich $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ und $(\mathcal{Q}_n)_{n \in \omega}$ betrachtet. Auf jeder dieser „Ebenen der Differenzierung“ kann man Teilen Prädikate zuschreiben. Es ist jedoch anzunehmen, dass auf den verschiedenen Ebenen auch teilweise verschiedene Prädikate zugeordnet werden können. Bei endlichen Größenunterschieden ist das bekannt. Ein Molekül hat keine Farbe, ein Auto aber sehr wohl. Das Molekül und das Auto gehören verschiedenen Größenordnungen an.

Für das Zuschreiben von Prädikaten soll wie bei Bell vorgegangen werden: Seien die Prädikate mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet, wobei der untere Index angeben soll, in welchen Ebenen das Prädikat zuschreibbar sei, es kann dort also auch ein Tupel von Ordinalzahlen stehen. Aussagen auf einer Ebene folgen den von Bell geschilderten Gesetzen. Gemischte Aussagen wie etwa „dieses rote Auto ist aus Molekülen zusammengesetzt“, sollen als Konjunktion gelesen werden. U ist rot und U ist aus Molekülen zusammengesetzt. $(U \triangleleft_n R^n)_{1 \leq n \leq k} \wedge (U \triangleleft_l M)_{j_1 \leq l \leq j_2}$.

9.4 Die fünf Bedingungen für das Peirce'sche Kontinuum und die Modelle

Durch $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ und $(\mathcal{Q}_n)_{n \in \omega}$ wurde gezeigt, wie ein Immer-feiner-werden der Unterscheidungen ineinander geschachtelt werden kann, damit ist *unbegrenzte Unterscheidbarkeit* gegeben. Es hat sich gezeigt, dass eine ähnliche Konstruktion auf verschiedenen Feinheitsebenen möglich ist, nämlich ausgehend von den rationalen Zahlen, oder ausgehend von den reellen.

Eng mit dem Immer-weiter-Unterscheiden bei verschiedenen Größenordnungen verknüpft ist die *Potentialität der Punkte*. Die Punkte als kleine Intervalle enthalten jeweils potentiell neue Punkte, die aber noch miteinander verschmolzen sind. Sie sind wie Peirce' potentielle Punkte noch unbestimmt, aber im Einzelfall bestimmbar. Im Einzelfall insofern, als zumindest bei $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ nicht alle subinfinitesimalen Intervalle als gleichzeitig gegeben betrachtet werden sollten. Auf jeder Ebene des Modells, das von den reellen Zahlen ausgeht, ist der entsprechende Verband einem diskreten Verband isomorph. Dasselbe gilt für $(\mathcal{Q}_n)_{n \in \omega}$ falls die Darstellung der Zahlen so gewählt wurde, dass die Proximitätsräume persistent sind.

Definiert man $(Q_n)_{n \in \omega}$ so, dass die Proximitätsräume nicht persistent sind, so gilt für das Zuschreiben von Prädikaten $\neg\neg A \Rightarrow A$ nicht, was eine Formulierung des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten bei Peirce war. Insofern besteht eine Verbindung zur *Allgemeinheit*, da Peirce allgemeine Sätze als solche definiert hatte, bei denen das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten nicht gilt.

Das Kontinuum wurde hier durch *selbstähnliche* Teile definiert. Jeder Punkt hat als infinitesimales Intervall die gleiche Struktur wie die ganzen reellen Zahlen. Damit haben die Teile untereinander die Relation der Ähnlichkeit, was zu Peirce' Homogenitätsforderung passt.

Die fünfte Bedingung betrifft die *Priorität* des Kontinuierlichen vor dem Diskreten. Hier ist eher das Diskrete als grundlegend anzusehen, da das Modell aus Diskretem, also wohlunterschiedenem Einzelnen konstruiert wird.

Kapitel 10

Über die Grenzen der Unterscheidbarkeit

Peirce verwendet das Wort „Kontinuum“ für zwei unterschiedliche Begriffe, die wie zwei Seiten einer Medaille sind. Die erste Verwendung des Wortes „Kontinuum“ entspricht der Weise, in der sich Kontinuität als Erstheit zeigt, die zweite der Weise, in der sich Kontinuität als Drittheit zeigt. Der Erstheitsaspekt des Kontinuums ist das Ununterschiedene. Der Drittheitsaspekt des Kontinuums findet sich dann, wenn die Unterscheidbarkeit an ihre Grenzen stößt. Peirce nimmt an, dass in Denken und Wirklichkeit die gleichen Strukturen bestehen. Folgt man diesem Gedanken, dann sollten Grenzen der Unterschiedenheit und Grenzen der Unterscheidbarkeit mit gleichen logischen Mitteln untersucht und beschrieben werden. Es ist unklar, inwieweit der Unterschied zwischen Unterschiedenheit und Unterscheidbarkeit auf einer Wahl des Beschreibenden beruht.

Es ist eine offene Frage, inwieweit die Grenzen der Unterscheidbarkeit und die Grenzen der Ausdrückbarkeit auf ein gemeinsames Prinzip zurückzuführen sind. Es ist zu vermuten, dass Peirce in seiner Theorie des Kontinuums beides erfassen will.

Es wurden drei Theorien, nämlich die von Bell, die der konstruktiven reellen Zahlen und die von Blau betrachtet. In allen dreien stößt innerhalb der Theorie die Möglichkeit zu Unterscheiden an eine Grenze.

In der Bell'schen Theorie zeigen sich diese Grenzen durch Flächen unter einer gewissen Größe; man könnte anschaulich sagen, rote Pixel und blaue Pixel, die ausreichend klein sind, verschwimmen zu einer neuen Farbe, nämlich $\neg\neg(\text{rot} \vee \text{blau})$.

In der konstruktiven Mathematik findet sich diese Grenze in Form von reellen Zahlen, die man nicht voneinander, oder von Null unterscheiden kann.

In Blau's Theorie besteht die Grenze in der Tatsache, dass transdefinite Ordinale keine Kardinalität mehr besitzen, der Unmöglichkeit eine grösste Wohlordnung zu benennen, und der Unausdrückbarkeit von Ω^* .

Zu den drei Theorien gehören jeweils Subjekte, im ersten Fall der idealisierte

Mensch, im zweiten Fall der idealisierte Mathematiker, der beliebig lang, aber nicht unendlich lang Zeit hat, im dritten Fall der allwissende Verifikator.

Aufgrund dieser Ergebnisse soll postuliert werden, dass bei jeder Theorie die Möglichkeit der Unterscheidung an Grenzen stößt, die mit einer Ununterscheidbarkeit verknüpft sind. Ist es wahr, dass bei jeder Theorie Grenzen auftreten, so müsste auch dieses Postulat an eine Grenze stoßen. Damit wäre es selbst-aufhebend. Der gewünschte Inhalt des Postulates zeigt¹ sich eher, als man ihn aussprechen könnte.

Das Auftreten der Grenze der Möglichkeit der Unterscheidung hängt mit dem Ausmaß der Unterscheidungsfähigkeit des erkennenden Subjekts zusammen. Die Grenze ist für den idealisierten Menschen, den idealisierten Mathematiker und den allwissenden Verifikator anders. Der Erkenntnisprozess verläuft gewöhnlich in Stufen, von groben Unterscheidungen hin zu feineren. Jede Stufe kann für die Beschreibung bestimmter Sachverhalte besonders geeignet sein, zum Beispiel Galaxie, Stern, Erde, ... , Molekül, Atom

In der kantianischen Periode versucht Peirce das Kontinuum durch besonders große Mengen oder Klassen zu beschreiben. Später, in der nachcantorschen Periode verzichtet Peirce darauf, das Kontinuum durch die Kardinalität beschreiben zu wollen. Statt dessen schreibt er, es könnten auch nur abzählbar viele potentielle Punkte im Kontinuum enthalten sein. Es kommt ihm nicht mehr auf die Anzahl der Punkte an, sondern nur auf das Ununterscheidbare der potentiellen Punkte. Außerdem scheint er den Gedanken des Kontinuums oft zu verwenden wie ein allgemeines Denkschema. Man könnte sagen, das Peirce'sche Kontinuum taucht dann auf, wenn die Möglichkeit der Unterscheidung an Grenzen stößt. Vielleicht hatte Peirce in den letzten Jahren seines Lebens so etwas gesucht und geahnt.

Kontinuum als Erstheit ließe sich beschreiben durch punktfreie Topologie oder Mereologie. Eine andere Möglichkeit wäre, von Spencer-Brown [125] auszugehen und die Theorie der Unterscheidung zu betrachten, die u.a. besagt, dass jede Unterscheidung Innen, Aussen und Grenze entstehen lässt. In Theorien wäre der Schritt von Innen nach Aussen gegeben durch Reflexion, also den Übergang von Objektsprache zur Metasprache.

Die Übergänge zwischen dem Kontinuum als Erstheit, zwischen dem Diskreten, das am ehesten der Zweitheit entspricht und dem Kontinuum als Drittheit lassen sich als Kreislauf sehen. Dieser Kreislauf lässt sich sowohl durch einen Erkenntnisprozess, als auch durch den Evolutionsprozess veranschaulichen:

Zum Evolutionsprozess wurden Peirce's Überlegungen durch die Diskussionen seiner Zeit über die Darwin'schen Ideen angeregt. Die Evolution beginnt nach Peirce mit Erstheit, also mit Ununterschiedenem. Bei der Entstehung von Leben könnte man beispielsweise das Ununterschiedene als Ursuppe bezeichnen. Diese differenziert sich zunehmend, was der Zweitheit entspricht. Mit der Zeit entwickelten sich darin Gesetzmässigkeiten, so entsteht Drittheit. Überhandnehmen von Gesetzmässigkeiten führt zurück zum Verschwinden von Veränderungsprozessen und damit letztlich wieder zur Ununterschiedenheit.

¹Zeigen ist hier im Sinne Wittgensteins [130] gemeint. Siehe 5.6 ff.

Beim Erkenntnisprozess beginnt der Kreislauf mit dem einfachen, noch nicht bedachten, und undifferenzierten Ersteindruck. Dann beginnt das Unterteilen, wobei das Wahrgenommene fortlaufend diskretisiert wird. Dies lässt sich als Zweitheitsaspekt des Erkenntnisprozesses auffassen. Irgendwann, nach fortlaufendem Weiter-Unterteilen, kann die Grenze des Unterscheidungsvermögens der Erkennenden erreicht werden. Dann wird die Grenze zwischen den unterteilten Abschnitten oder Punkten unscharf. Die Grenzen werden wieder verwischt, und man erhält ein bezüglich der Ununterschiedenheit ähnliches Bild, wie am Anfang. Peirce sieht den Erkenntnisprozess des einzelnen Menschen und der gesamten Menschheit auf die oben genannte Weise. Er nimmt an, dass die Wirklichkeit ein Kontinuum ist und dass wir die Veranlagung haben, bei diesem Erkenntnisprozess zur Wirklichkeit passende Annahmen zu machen. Er folgert auf die oben beschriebene Weise, dass die Menschheit der Wirklichkeit immer näher kommen kann, der Prozess hätte als Limes die Wirklichkeit selbst.

Zusammenfassung

Charles S. Peirce (1839 - 1914), der amerikanische Philosoph, Logiker, Mathematiker und Naturwissenschaftler hat sich, beeinflusst von Aristoteles, Leibniz, Kant und Cantor intensiv mit dem Thema Kontinuum auseinandergesetzt. Er denkt, die Welt sei durch drei Kategorien beschreibbar, die er „Erstheit“, „Zweitheit“ und „Drittheit“ nennt. Im Sensorischen entspricht Erstheit dem bloßen Fühlen, Zweitheit der Reaktion auf Erlebtes und Drittheit dessen intellektueller Verarbeitung. Diese Dreiteilung führt Peirce auf das Logische zurück mit Hilfe monadischer, dyadischer und triadischer Relationen. Peirce hat ein anderes Verständnis von Relation und Reduktion als heute üblich. Deshalb gibt es in seiner Logik irreduzible triadische Relationen. Auch sein Mengenbegriff unterscheidet sich von dem heutigen. Aus den über 80 000 Seiten der Peirce'schen Manuskripte lassen sich für sein Kontinuum folgende fünf Eigenschaften abgrenzen: Das Kontinuum ist beliebig fein unterteilbar, es enthält potentielle Punkte, es ist zum Erfassen von Allgemeinem geeignet, seine Teile sind wiederum Kontinua und es ist mindestens so grundlegend wie Diskretes. Peirce war der Überzeugung, dass der Gedanke des Kontinuums so etwas wie ein allgemeines Schema bietet, das für verschiedene philosophische Fragen ein Schlüssel ist, besonders in der Erkenntnistheorie und der Metaphysik. Peirce scheint sowohl Erkenntnisprozesse, als auch die Evolution als eine Art Kreislauf gesehen zu haben. Der Kreislauf besteht für ihn in den Übergängen zwischen dem Kontinuum als Erstheit, dem Diskreten, das am ehesten der Zweitheit entspricht und dem Kontinuum als Drittheit. Seine Gedanken sind auch heute noch interessant für eine Konstitution der Wirklichkeit, und für alle philosophischen Fragen, deren Lösungsversuche auf einen unendlichen Regress führen. Peirce möchte vage und allgemeine Sätze charakterisieren durch das Nichtwiderspruchsprinzip und das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten. Dieser Teil seiner Logik lässt sich erhellen durch die Blau'schen Wahrheitswerte Neutral und Offen.

Anhand der Eigenschaften des Peirce'schen Kontinuums werden moderne Nicht-Standardmodelle betrachtet. Damit soll geklärt werden, auf welche Weise die genannten fünf Eigenschaften des Kontinuums erfüllt sein könnten. Drei Modelle werden vorgestellt: Eines folgt einer Erweiterung der reellen Zahlen von Blau, eines beschäftigt sich mit dem konstruktiven Kontinuum und eines ergibt sich aus Bells Logik der Wahrnehmung. Jedes dieser Modelle führt zu Grenzen der Unterscheidbarkeit oder Ausdrückbarkeit. Aus diesen drei Modellen ergibt

sich die Hypothese, dass sich in Theorie und Praxis stets Grenzen zeigen in der Möglichkeit zu unterscheiden. Es scheint, dass dann, wenn nicht mehr unterschieden werden kann ein Peirce'sches Kontinuum auftaucht. In einem vierten Modell wird dem Ausmaß der Feinheit der Unterscheidung nachgegangen. Bei jeder Körnung kann man eine weitere, feinere Ebene finden; in diesem Modell werden Peirce'sche Punkte als infinitesimale Intervalle interpretiert, die subinfinitesimale Intervalle enthalten.

Lebenslauf

Geboren am 9.5.1971 in Erlangen

Eltern: Dr.med.Dr.med.dent. Ingrid Zink, geborene Woelcke

Prof. Dr.rer.nat.Dr.med.Dipl.-Phys. Peter Zink

1971-1977 Adelsdorf, bei Erlangen.

1977-1981 Hannover, Grundschule.

1981-1987 Internat Hochalpines Töchterinstitut Fetan (Schweiz), Gymnasium,
neusprachlicher Zweig.

1987-1990 Lyceum Alpinum Zuoz (Schweiz), Gymnasium, mathematischer Zweig.

7/1990 Abitur und Matura (Schweizer Hochschulreife) am Lyceum Alpinum
Zuoz abgelegt.

11/1990 Beginn des Mathematikstudiums an der Ludwig-Maximilians-Universität
München.

5/1996 Diplom in Mathematik (Nebenfach Logik und Wissenschaftstheorie)
mit magna cum laude, Diplomarbeit über Schnittvielfachheit und Abbil-
dungsgrad mit summa cum laude.

9/1996-8/1997 Tätigkeit als Koordinatorin eines Radioschulprogrammes in
Honduras (Mittelamerika), Unterricht für Tutoren in Englisch, Spanisch
und Mathematik.

11/1997 Beginn des Philosophiestudiums an der Hochschule für Philosophie
SJ München.

11/1997-7/1998 Ablegen von 9 Zusatzprüfungen zur Zulassung zur Promotion
in besonders kurzer Zeit, diese wurden in Rom als Bakkalaureat (entspricht
Zwischenprüfung) anerkannt.

10/1998 Beginn des Lizentiatsstudiums an der Pontificia Università Gregoria-
na, Rom.

5/1999 Internationaler Kongress in Venedig "Reuniting the Antipodes, Con-
structive and Nonstandard Views of the Continuum", Einladung zum Vor-
trag und zur Veröffentlichung eines Artikels.

- 12/1999** Abgabe der Lizentiatsarbeit über Peirce und das Kontinuum“, mathematischer Begriff und philosophische Anwendung“.
- 2/2000** Abschluß des Lizentiats in Philosophie mit summa cum laude.
- 5/2000** Beginn des Doktorstudiums im Grenzgebiet zwischen Mathematik und Philosophie bei Prof Link am Seminar für Philosophie, Logik und Wissenschaftstheorie der LMU. Aufnahme in das Graduiertenkolleg Sprache, Information, Logik.
- 11/2000-3/2001** Betreuen der von Prof. Dr. phil. Dipl.-Math. MA. Link gehaltenen Vorlesung Logik I.
- 6/2001** Kongreß One Hundred Years of Russels Paradox, an Vorbereitung beteiligt.
- 9/2001** Arbeit mit den Peirce-Manuskripten an der Pontificia Università Gregoriana, Rom.
- 10/2003** Abgabe der Dissertation mit dem Titel Kontinuum und Konstitution der Wirklichkeit. Analyse und Rekonstruktion des Peirce’schen Kontinuum-Gedankens.“
- 2/2004** Abschlußprüfung des Doktorstudiums in Form einer Disputation.

Literaturverzeichnis

- [1] ²Anscombe, G.: An Introduction to Wittgenstein's Traktatus. Hutchinson University Library, London, 4. Aufl., 1971
- [2] Aristoteles [3. Jhdt. n. Chr.]: *Physikvorlesung*. In: *Aristoteles Werke in deutscher Übersetzung*, (Hrsg. Flashar, H.) Bd. 11, Akademie Verlag Berlin, Berlin, 3. Ausgabe, 1979
- [3] Aristoteles [3. Jhdt. n. Chr.]: *ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΥΣ ΦΥΣΙΚΗ ΑΚΡΟΑΣΙΣ*. *Aristotele's Physics, a revised Text with Introduction and Commentary*. (Hrsg. Ross, W.), Oxford at the Clarendon Press, Oxford, 3. Ausgabe, 1960
- [4] Beeson, M.: *Foundations of Constructive Mathematics*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1985
- [5] Bell, J.: *Continuity and the Logic of Perception*. 2001 aktualisiertes Manuskript eines 2000 in London gehaltenen Vortrags.
- [6] Bell, J.: A New Approach to Quantum Logic. *British Journal for the Philosophy of Science* 37, 1986
- [7] Bernays, P.: *Zur Frage der Unendlichkeitsschemata in der axiomatischen Mengenlehre*. In: *Essays on the Foundations of Mathematics*. S. 3-49, (Hrsg. Fränkel, A.), Jerusalem, 1961
- [8] Blau, U.: Die Logik der Unbestimmtheiten und Paradoxien (Kurzfassung). *Erkenntnis* 22, 365-459, 1985
- [9] Blau, U.: *Die Logik der Unbestimmtheiten und Paradoxien*. Seminar für Philosophie, Logik und Wissenschaftstheorie, LMU München, 2000
- [10] Blau, U.: *Die Bedeutung der größten und kleinsten Zahlen für die ältesten Paradoxien*. Deutsche Fassung des Vortrags zum Kongress: *One Hundred Years of Russell's Paradox*, 2001

²Abweichend von der üblichen Zitationsweise wird bei Werken, deren Entstehungsjahr für das Verständnis wichtig ist, insbesondere denen von Peirce, das Entstehungsjahr direkt nach dem Namen angegeben.

- [11] Blau, U.: *The Significance of the largest and smallest Numbers for the oldest Paradoxes*. Erscheint in: *One Hundred Years of Russell's Paradox. Papers from the Centenary Munich Conference*. (Hrsg. Link, G.), München, 2004
- [12] Brady, G.: *From Peirce to Skolem, a neglected chapter in the history of logic*. Studies in the History and Philosophy of Mathematics, Vol. 4, Elsevier North-Holland, Amsterdam London New York Oxford Paris Shannon Tokyo, 2000
- [13] Brandom, R., Rescher, N.: *The Logic of inconsistency. A study in Non-Standard Possible-World Semantics and Ontology*. American philosophical quarterly, Library of Philosophy, Vol. 5, Oxford, 1980
- [14] Breger, H.: *Le Continu chez Leibniz. S. 76-85* in: *Le Labyrinthe du Continu*. (Hrsg. Salanskis, Sinaceur), Colloque de Cerisy, Springer, Paris, 1992
- [15] Bridges, D., Richman, F.: *Varieties of Constructive Mathematics*. London Mathematical Society, Lecture Note Series 97, Cambridge University Press, Cambridge, 1987
- [16] Brouwer, L. E. J. [1907]: *On the foundations of Mathematics*. Thesis, Amsterdam, in: Brouwer, L. E. J.: *Collected Works. Philosophy and Foundations of Mathematics*. (Hrsg. Heyting, A.), North-Holland Publishing Company, Amsterdam Oxford, 1975
- [17] Brouwer, L. E. J. [1927]³: *Intuitionismus*. (Hrsg. van Dalen, D.), BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim Leipzig Berlin, 1992
- [18] Burch, R.: *Peirce's Reduction thesis: the foundations of topological logic*. Texas Tex University Press, Texas, 1991
- [19] Burch, R.: *Peirce's Reduction Thesis*. In: *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce* (Hrsg. Houser, N. et al.), S. 234-251, Indiana University Press, Bloomington, 1997
- [20] Burch, R.: *On the Applications of Relations to Relation*. In: *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce* (Hrsg. Houser et al.), S. 206-233, Indiana University Press, Bloomington, 1997
- [21] Cantor, G. [1883]: *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. In :*Gesammelte Abhandlungen mathematischen Inhalts*, S. 165-204 (Hrsg. Zermelo, E.) , Springer, Berlin, 1980.
- [22] Cantor, G. [1891]: *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*. Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung I, S. 75-78, 1891

³Hier wurde das Jahr der Berliner Gastvorlesungen angegeben, die in dem Buch enthalten sind.

- [23] Cantor, G. [1895⁴, 1897]: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. In: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen Inhalts*. (Hrsg. Zermelo, E.), S. 282-356, Springer, Berlin, 1980
- [24] Chauviré, C.: *Peirce et la signification. Introduction à la logique du vague*. Presses Universitaires de France, Paris, 1995
- [25] van Dalen, D.: How connected is the intuitionistic Continuum. *Journal of Symbolic Logic*, 62 (4), 1147-1150, 1997
- [26] van Dalen, D.: Arguments for the Continuity-Principle. *The Bulletin of Symbolic Logic* 8 (3), 329-347, 2002
- [27] Dedekind, R. [1872]: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Viehweg, Braunschweig, cit. in [54].
- [28] Dipert, R.: *Peirce's Philosophical Conception of Sets*. In: *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*. (Hrsg. Houser, N. et al.), Indiana University Press, Bloomington Indianapolis, 1997
- [29] Dummett, M.: *Elements of Intuitionism*. Clarendon Press, Oxford, 1977
- [30] Edwards, P. (Hrsg.): *The Encyclopedia of Philosophy*. Collier, Macmillan, London, 1967
- [31] Euklid [3. Jhdt. v. Chr.] : *Die Elemente*. Buch 1-13, (dt. Übersetzung und Hrsg. Thae C.), 5 Teile (1933-1937), Nachdruck in einem Band, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1971
- [32] Fisch, M., Turquette, A.: Peirce's Triadic Logic. *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 2 (2), 71-85, 1966
- [33] Fisch, M.: *Peirce and Leibniz*. In: *Peirce, Semeiotic and Pragmatism*. (Hrsg. Fisch, M., Ketner, K.), Indiana University Press, Bloomington, 1986
- [34] Fisch, M.: *Peirce's Aristotle: The Greek Influence in His later Philosophy*. In: *Peirce, Semeiotic and Pragmatism*. (Hrsg. Fisch, M., Ketner, K.), Indiana University Press, Bloomington, 1986
- [35] Herron, T.: Charles Sanders Peirce's Theories of Infinitesimals. *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 33 (3), 590 - 645, 1997
- [36] Herzberger, H.: *Peirce's Remarkable Theorem*. In: *Pragmatism and Purpose: Essays Presented to Thomas A. Goudge*, (Hrsg. Sumner, L. et al.), University of Toronto Press, Toronto Buffalo London, 1981.

⁴Es sind hier zwei Artikel zusammengefasst, die 1895 und 1897 in den Bänden 46 und 49 der mathematischen Annalen erschienen sind.

- [37] Heyting, A. [1930]: Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse*, 42-56, 1930
- [38] Heyting, A. [1930]: Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik II. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse*, 57-71, 1930
- [39] Heyting, A. [1930]: Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik III. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse*, 158-169, 1930
- [40] Heyting, A. [1934]: Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. *Erkenntnis* 2, 106-115, 1934
- [41] Heyting, A. [1934]: *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus, Beweistheorie*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (Hrsg. Schriftleitung des Zentralblattes für Mathematik), Springer, Berlin Heidelberg New York, 1934
- [42] Hookway, C.: *Truth, Rationality and Pragmatism. Themes from Peirce*. Clarendon Press, Oxford, 2000
- [43] Houser, N., Roberts, D., van Evra, J. (Hrsg.): *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*. Indiana University Press, Bloomington Indianapolis, 1997
- [44] Johnstone, P.: *Stone Spaces*. Cambridge Studies in advanced mathematics 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982
- [45] Kant, I. [1781, 1787]: *Kritik der reinen Vernunft*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, Sonderausgabe 1998
- [46] Lane, R.: Peirce Entanglement with the Principle of Excluded Middle and Contradiction. *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 33 (3), 680-793, 1997
- [47] Laugwitz, D.: *Mathematische Modelle zum Kontinuum und zur Kontinuität*. *Philosophia Naturalis* 34, 265-312, 1992
- [48] Leibniz, G. [1702]: *Schriften zur Logik und zur philosophischen Grundlegung von Mathematik und Naturwissenschaft*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1992
- [49] Leisenring, A.: *Mathematical Logic and Hilbert's ε -Symbol*. Macdonald Technical & Scientific, London, 1969
- [50] Levy, S.: Charles S. Peirce's Theory of Infinitesimals. *International Philosophical Quarterly*, 31 (2), 127-140, 1991

- [51] Link, G.: *Colloquium Logicum*. Skript zur Vorlesung Logik 1, Seminar für Philosophie, Logik und Wissenschaftstheorie der LMU München, Wintersemester 2001/2002
- [52] Mittelstraß, J. (Hrsg.) : *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*. Metzler, Stuttgart Weimar, 1995
- [53] Murphey, M.: *The Development of Peirce's Philosophy*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1961
- [54] Myrvold, W.: *Peirce on Cantor's Paradox and the Continuum*. Transactions of the Charles S. Peirce Society 31 (3), 508-541, 1995
- [55] Niebergall, K.: *Grundlagen der Mathematik. Reduzierbarkeit und Ontologie*. Habilitationsschrift, Ludwig-Maximilians-Universität München, 2003
- [56] Pape, H.: *Der mathematische Begriff des Kontinuums als Modell einer Metaphysik der Semiotik*. In: Peirce, C.: *Semiotische Schriften*. Vol. 1, S. 27-47, (Hrsg. Pape, H.), Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1993.
- [57] Pape, H.: *Modallogik der Diskursuniversen*. In: Peirce, C.: *Semiotische Schriften*. Vol. 3, S. 56-67, (Hrsg. Pape, H.), Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1993
- [58] Pape, H.: *Peirce on the Ontology of emergent Time*. Vortrag in einem Seminar des Peirce Edition Projects zu dem Thema „How rational is Peirce's evolutionary cosmology“, 1999
- [59] Parker, K.: *The Continuity of Peirce's Thought*. Vanderbilt University Press, Nashville London, 1998
- [60] Peirce, C.: *The Charles S. Peirce Papers. microfilm edition*. Harvard University Library, Photographic Service, Cambridge, 1966
- [61] Peirce, C.: *Collected Papers*. (Hrsg. Hartshorne, C. et al.), Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1931-1958⁵
- [62] Peirce, C. [1857-1866]: *Writings of Charles S. Peirce. A chronological edition*. Vol. 1 (Hrsg. Fisch, M. et al.), Indiana University Press, Bloomington, 1982
- [63] Peirce, C. [1867-1871]: *Writings of Charles S. Peirce. A chronological edition*. Vol. 2 (Hrsg. Moore, E. et al.), Indiana University Press, Bloomington, 1984
- [64] Peirce, C. [1872-1878]: *Writings of Charles S. Peirce. A chronological edition*. Vol. 3 (Hrsg. Kloesel, J. et al.), Indiana University Press, Bloomington, 1986

⁵Diese Schriften werden in der üblichen Dezimalnotation zitiert. Vor dem Punkt steht die Nummer des Bandes, nach dem Punkt die Nummer des Paragraphen.

- [65] Peirce, C. [1879-1884]: *Writings of Charles S. Peirce. A chronological edition*. Vol. 4 (Hrsg. Kloesel, J. et al.), Indiana University Press, Bloomington, 1986
- [66] Peirce, C. [1884-1886]: *Writings of Charles S. Peirce. A chronological edition*. Vol. 5 (Hrsg. Kloesel, J. et al.), Indiana University Press, Bloomington, 1993
- [67] Peirce, C. [1886-1890]: *Writings of Charles S. Peirce. A chronological edition*. Vol. 6 (Hrsg. Houser, N. et al.), Indiana University Press, Bloomington, 2000
- [68] Peirce, C. [1867-1893]: *The essential Peirce. Selected Philosophical Writings*. Vol. 1, (Hrsg. Houser, N., Kloesel, C.), Indiana University Press, Bloomington, 1992
- [69] Peirce, C. [1893-1913]: *The essential Peirce. Selected Philosophical Writings*. Vol. 2, (Hrsg. Houser, N. et al.), Indiana University Press, Bloomington, 1998
- [70] Peirce, C. [1870]: *Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conception of Boole's calculus of logic*. *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences*, S. 317-378, reprinted in: Peirce, C.: *Collected Papers*. (Hrsg. Hartshorne, C. et al.), Vol. 3, S. 16-26, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1933, und in: Peirce, C.: *Writings of Charles S. Peirce, A chronological edition*. Vol. 3, S. 359-429, (Hrsg. Kloesel, J. et al.), Indiana University Press, Bloomington, 1986
- [71] Peirce, C. [1878]: *How to make our ideas clear*. In: Peirce, C. [1867-1893]: *The essential Peirce. Selected Philosophical Writings*. Vol. 1, S. 124-141 (Hrsg. Houser, N., Kloesel, C.), Indiana University Press, Bloomington, 1992
- [72] Mitchell, O. [1883]: *On a New Algebra of Logic*. In: Peirce, C. (Hrsg.): *Studies in Logic*, Little & Brown, Boston, reprinted John Benjamin, Amsterdam, 1983.
- [73] Peirce, C. (Hrsg.) [1883]: *Studies in Logic*, Little & Brown, Boston, reprinted John Benjamin, Amsterdam, 1983.
- [74] Peirce, C. [1884]: *Design and Chance*. S. 544-554, in: Peirce, C. [1879-1884]: *Writings of Charles S. Peirce. A chronological edition*. Vol. 4, (Hrsg. Kloesel, J. et al.), Indiana University Press, Bloomington, 1986
- [75] Peirce, C. [1885]: *On the algebra of logic*, *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences*, S. 317-378, reprinted in Peirce, C.: *Collected Papers*, (Hrsg. Hartshorne, C. et al.), Vol. 3, S. 16-26, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1933, und in: Peirce, C.: *Writings*

- of Charles S. Peirce. *A chronological edition*. Vol. 3 , S. 359-429, (Hrsg. Kloesel, J. et al.), Indiana University Press, Bloomington, 1986
- [76] Peirce, C. [1868]: *Questions Concerning Certain Faculties Claimed for Man*. S. 11-28, In: *The essential Peirce*. Vol. 1 (Hrsg. Peirce Edition Project), Indiana University Press, Bloomington Indianapolis, 1992
- [77] Peirce, C. [1868]: *Some Consequences of four incapacities*. S. 28-56, in: *The essential Peirce*. Vol. 1 (Hrsg. Peirce Edition Project), Indiana University Press, Bloomington Indianapolis, 1992
- [78] Peirce, C. [1892]: *The Law of Mind*. S. 312-334, In: *The essential Peirce*. Vol. 1 (Hrsg. Peirce Edition Project), Indiana University Press, Bloomington Indianapolis, 1992
- [79] Peirce, C. [1894]: *What is a Sign*. S. 4-5, in: *The essential Peirce*. Vol. 2 (Hrsg. Peirce Edition Project), Indiana University Press, Bloomington Indianapolis, 1998
- [80] Peirce, C. [nach 1895]: *MS 821*. S. 34-35, in: *The Charles S. Peirce Papers. microfilm edition*. Harvard University Library, Photographic Service, Cambridge, 1966
- [81] Peirce, C. [1896]: *MS 520*. S. 1-2, in: *The Charles S. Peirce Papers. Microfilm edition*. Harvard University Library, Photographic Service, Cambridge, 1966
- [82] Peirce, C. [1898]: *The Logic of Relatives*. In: *Reasoning and the Logic of Things*. (Hrsg. Ketner, K.), Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1992
- [83] Peirce, C. [1898]: *The Logic of Continuity*. In: *Reasoning and the Logic of Things*. (Hrsg. Ketner, K.), Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1992
- [84] Peirce, C. [1898]: *MS 942. Logic of Events*. In: *The Charles S. Peirce Papers. microfilm edition*. Harvard University Library, Photographic Service, Cambridge, 1966
- [85] Peirce, C. [1895-1900]: *Multitude and Continuity*. S. 84-88, 97-100, in: *The New Elements of Mathematics*. Vol. 3, (Hrsg. Eisele, C.), Mouton Publishers, The Hague, Paris, Humanities Press, Atlantic Highlands N. J., 1976
- [86] Peirce, C. [1900]: *A. Georg Cantor (L 73). Zwei Briefe an Georg Cantor, vom 21. und 23. Dez. 1900*. In: *The New Elements of Mathematics*, Vol. 3, S. 767-779, (Hrsg. Eisele, C.), Mouton Publishers, The Hague, Paris, Humanities Press, Atlantic Highlands N. J., 1976

- [87] Peirce, C. [1902]: *Brief an J. Royce, L 385*. in: *The New Elements of Mathematics*, Vol. 2 (2), (Hrsg. Eisele, C.), Mouton Publishers, The Hague, Paris, Humanities Press, Atlantic Highlands N. J., 1976
- [88] Peirce, C. [1903]: *Pragmatism as a principle and method of right thinking: The 1903 Harvard lectures on pragmatism*. State University of New York Press, Albany, 1997. Auch veröffentlicht in: Peirce, C. [1893-1913]: *The essential Peirce. Selected Philosophical Writings*. Vol. 2, S. 135-242, (Hrsg. Houser, N. et al.), Indiana University Press, Bloomington, 1998
- [89] Peirce, C. [1903]: *MS 9*. In: *The Charles S. Peirce Papers, microfilm edition*, Harvard University Library, Photographic Service, Cambridge, 1966⁶
- [90] Peirce, C. [1903]: *Phänomen und Logik der Zeichen*. (Hrsg. Pape, H.), Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1998.
- [91] Peirce, C. [1903]: *Harvard Lectures on Pragmatism III. On Phenomenology*. S. 145-160, in: *The essential Peirce*. Vol. 2 (Hrsg. Peirce Edition Project), Indiana University Press, Bloomington Indianapolis, 1998
- [92] Peirce, C. [1903]: *Kategoriale Strukturen und graphische Logik (H., Logischer Traktat Nr. 2 und zwei Teile der dritten Lowell Vorlesung)*. In: Peirce, C.: *Semiotische Schriften*. Vol. 2, S. 98-166, (Hrsg. Pape, H.), Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1990
- [93] Peirce, C. [1903]: *Lowell Lecture V 471*. In: *The New Elements of Mathematics*. Vol. 3, S. 389-391, (Hrsg. Eisele, C.), Mouton Publishers, The Hague, Paris, Humanities Press, Atlantic Highlands N. J., 1976
- [94] Peirce, C. [1904]: *Semiotics and Significs*. S. 22-35, (Hrsg. Hardwick, S.), Indiana University Press, Bloomington and London, 1976
- [95] Peirce, C. [1904]: *The New Elements of Mathematics*. Vol. 4, S. 189, (Hrsg. Eisele, C.), Mouton Publishers, The Hague Paris, Humanities Press, Atlantic Highlands N. J., 1976
- [96] Peirce, C. [1904]: *Das Gewissen der Vernunft: Eine praktische Untersuchung der Theorie der Entdeckung, in welcher die Logik als Semiotik aufgefaßt wird*. In: Peirce, C.: *Semiotische Schriften*, Vol. 2, S. 166-238, (Hrsg. Pape, H.), Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1990.
- [97] Peirce, C. [1905]: *Issues of Pragmaticism*. S. 346-359, in: Peirce, C. [1867-1893]: *The essential Peirce. Selected Philosophical Writings*. Vol. 1, (Hrsg. Houser, N., Kloesel, C.), Indiana University Press, Bloomington, 1992
- [98] Peirce, C. [1905]: *The Basis of Pragmaticism in Phaneroscopy*. S. 360-370, in: Peirce, C. [1867-1893]: *The essential Peirce. Selected Philosophical Writings*. Vol. 1, (Hrsg. Houser, N., Kloesel, C.), Indiana University Press, Bloomington, 1992

⁶Die Manuskriptnummer MS 9 ist diejenige, die auch in [118] angegeben wird.

- [99] Peirce, C. [1905]: *Die Grundlagen des Pragmatizismus*. S. 289-392, in: Peirce, C.: *Semiotische Schriften*. Vol. 2, (Hrsg. Pape, H.), Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1990
- [100] Peirce, C. [1905]: *L 224 Brief an William James*. S. 809-835, in: *New Elements of Mathematics*, Vol. 3, (Hrsg. Eisele, C.), Mouton Publishers, The Hague, Paris, Humanities Press, Atlantic Highlands N. J., 1976
- [101] Peirce, C. [1903-1906]: *Semiotische Schriften*. Vol. 2, (Hrsg. Pape, H.), Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1990.
- [102] Peirce, C. [1906-1908]: *Semiotische Schriften*. Vol. 3, (Hrsg. Pape, H.), Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1993.
- [103] Peirce, C. [1906-1908]: *Prolegomena zu einer Apologie des Pragmatizismus*. S. 132-193, in: Peirce, C.: *Semiotische Schriften*, Vol. 3, (Hrsg. Pape, H.), Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1993
- [104] Peirce, C. [nach 1900]: *MS 1174*. In: *The Charles S. Peirce Papers. microfilm edition*. Harvard University Library, Photographic Service, Cambridge, 1966
- [105] Peirce, C. [1909]: *Logic Notebook (MS 339). February 23, 1909*. In: *The Charles S. Peirce Papers. microfilm edition*, Harvard University Library, Photographic Service, Cambridge, 1966⁷
- [106] Peirce, C. [1909]: *Signific und Logik (1. Version). MS 641*. In: Peirce, C.: *Semiotische Schriften*. Vol. 3, S. 386-412, (Hrsg. Pape, H.), Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1993
- [107] Peirce, C. [1909]: *Signific und Logik (2. Version). MS 642*. in: Peirce, C.: *Semiotische Schriften*. Vol. 3, S. 412-421, (Hrsg. Pape, H.), Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1993
- [108] Peirce, C. [1910]: *The Art of Reasoning Elucidated (MS 678)*. S. 34-35, in: *The Charles S. Peirce Papers. microfilm edition*. Harvard University Library, Photographic Service, Cambridge, 1966
- [109] Peirce, C [1910]: *MS 204*. In: *The Charles S. Peirce Papers. microfilm edition*. Harvard University Library, Photographic Service, Cambridge, 1966
- [110] Peirce, C. [1910]: *MS 680*. In: *The Charles S. Peirce Papers. microfilm edition*. Harvard University Library, Photographic Service, Cambridge, 1966
- [111] Peirce, C. [1910]: *MS 663*. In: *The Charles S. Peirce Papers. microfilm edition*. Harvard University Library, Photographic Service, Cambridge, 1966

⁷Die angegebenen Manuskriptseiten sind in [32], S. 73-75 abgedruckt.

- [112] Peirce, C. [vermutlich spät]: *N-Valued Logic*. In: *The New Elements of Mathematics*. Vol. 3, (Hrsg. Eisele, C.), Mouton Publishers, The Hague, Paris, Humanities Press, Atlantic Highlands N. J., 1976
- [113] Peirce, C., Welby, V. [1898-1912]: *The Correspondence between Charles S. Peirce and Victoria Lady Welby*. (Hrsg. Hardwick, C.), Indiana University Press, Bloomington and London, 1977
- [114] Peirce, C. [Datum unbekannt]: *MS 151*. In: *The Charles S. Peirce Papers, microfilm edition*, Cambridge: Harvard University Library, Photographic Service, 1966
- [115] Placek, T.: *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity. A critical Exposition for Arguments for Intuitionism*. Synthese Library, Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science, (Hrsg. Hintikka, J. et al.), Vol. 279, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 1999
- [116] Potter, V., Shields, P.: Peirce's Definitions of Continuity. *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 13 (1), 20-34, 1977
- [117] Potter, V.: *Peirce's Philosophical Perspectives*, (Hrsg. Colapietro, V.), Fordham University Press, New York, 1996
- [118] Robin, R.: *Annotated Catalogue of the Papers of Charles S. Peirce*. University of Massachusetts Press, Amherst, 1967
- [119] Robinson, A.: *Non-standard Analysis*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1966
- [120] Russell, B.: *The Principles of Mathematics*. Routledge, London, 1997.
- [121] Sambin, G.: Intuitionistic formal Spaces - a first Communication. In: *Mathematical Logic and its Applications*, (Hrsg. Skordev, D.), S. 187-204, Conf. Pros. (Druzhba, Bulgarien, 1986), Plenum, New York London, 1987
- [122] Schramm, M.: *Die Bedeutung der Bewegungslehre des Aristoteles für seine beiden Lösungen der zenonischen Paradoxie*. Vittorio Klostermann, Frankfurt am Main, 1962
- [123] Schmieden, C., Laugwitz, D.: Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. *Mathematische Zeitschrift* 69, 1-39, 1958
- [124] Schuster, P: A constructive Look at Generalised Cauchy Reals. *Math. Logic Quarterly* 46 (2), 125-134, 2000
- [125] Spencer-Brown, G.: *Laws of Form*, Allan & Unwin, London, 1969
- [126] Troelstra, A. S., van Dalen, D.: *Constructivism in Mathematics. An Introduction*. Vol. 1, Studies in Logic and Foundations of Mathematics, Vol. 121, (Hrsg. Barwise, J. et al.), Elsevier Science Publishers, North Holland, 1988

- [127] Vickers, S.: *Topology via Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989
- [128] Walther, E.: *Charles Sanders Peirce, Leben und Werk*. Agis Verlag, Baden-Baden, 1989
- [129] Weyl, H. [1918]: *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Verlag von Veit und Comp., Leipzig, 1918
- [130] Wittgenstein, L. [1921]: *Tractatus Logico-Philosophicus. Logisch-Philosophische Abhandlungen*, Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1984
- [131] Zermelo, E. [1904]: Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen* 59, 514 - 516, 1904
- [132] Zink, J.: *Peirce and the Continuum from a philosophical Point of View*, in: *Reuniting the Antipodes, Constructive and Nonstandard Views of the Continuum*. Symposion Proceedings, San Servolo, Venice, Italy, May 16-22, 1999, (Hrsg. Schuster, P., Berger, U., Osswald, H.), Synthese Library, Vol. 306, Kluwer Academic Press, Dordrecht Boston London, 2001
- [133] Zink J. :*Über Peirce und das Kontinuum. mathematischer Begriff und philosophische Anwendung*. Lizentiatsarbeit, Pontificia Università Gregoriana, Rom, 1999