

---

---

# Effektive Dynamik inhomogener Kosmologien

Christian Sicka

---

---

München 2003



---

---

# Effektive Dynamik inhomogener Kosmologien

---

---

Dissertation an der Fakultät für Physik  
der Ludwig-Maximilians-Universität München  
vorgelegt von Christian Sicka aus München  
München, den 21.5.2003

Betreuung und Erstgutachten  
Priv.-Doz. Dr. Thomas Buchert

Zweitgutachten  
Prof. Dr. Gerhard Börner

Tag der mündlichen Prüfung: 8.7.2003





# Zusammenfassung

Im Standardmodell der Kosmologie wird von einer homogen-isotropen Materieverteilung ausgegangen. Da Homogenität der sichtbaren Materie, wenn überhaupt, erst auf großen Skalen beobachtbar ist, stellt sich die Frage, welche Bedeutung die Modellparameter des Friedmann-Modells in einem relativ inhomogenen Universum besitzen. Eine Antwort wäre, die Modellparameter als räumliche Mittelwerte von lokalen Feldern zu verstehen. So kann man zum Beispiel die im Friedmann-Modell auftretende homogene Dichte mit der über große Skalen gemittelten Dichte identifizieren. Da aber Mittelung und Zeitentwicklung nicht kommutierende Operationen sind, ist dieses Vorgehen inkonsistent. Wir mitteln in einem konsistenten Ansatz bereits die Ausgangsgleichungen. Die daraus abgeleitete Gleichung hat die Form einer Friedmann-Gleichung mit einer räumlich gemittelten Dichte, sowie einem gemittelten Skalenfaktor. Zusätzlich tritt aber ein Term auf, der die Rückwirkung der Inhomogenitäten auf die Entwicklung des Skalenfaktors darstellt. Er ist damit ein Maß dafür, inwiefern die Zeitentwicklung des gemittelten Skalenfaktors dem Skalenfaktor eines global homogenen Modells folgt. Der in dieser Arbeit entwickelte Formalismus bietet damit die Möglichkeit, inhomogene Modelle mit homogen-isotropen Modellen zu vergleichen.

Als Ausgangsgleichungen für die Mittelung bieten sich die Einsteinschen Gleichungen (ART), sowie im Newtonschen Grenzfall das Euler-Newton-System (NT) an. In beiden Fällen wird als Modell ein nichtrotierendes Staubmedium, das in Strukturbildungsszenarien verbreitete Anwendung findet, zugrunde gelegt. Es stellt sich heraus, dass unter diesen Bedingungen die Einsteinsche Beschreibung im  $3 + 1$  Split auf einen formal ähnlichen Rückwirkungsterm führt wie in der NT, allerdings tritt als zusätzlicher Parameter die gemittelte intrinsische Krümmung der dreidimensionalen Hyperflächen auf, die sich dynamisch deutlich vom Krümmungsparameter bei Friedmann-Modellen unterscheidet. Auch wird in der ART über gekrümmte Hyperflächen bei der Mittelwertbildung integriert. Damit sind die Mittelwerte regional von der Raumkrümmung abhängig, auch wenn man formale Analogien in der Dynamik bei Mittelwerten in der ART und in der NT findet. Will man die Abweichungen der Kenngrößen eines durch Mittelung erhaltenen Modells von denen eines homogen-

isotropen Modells quantifizieren, so hat man zwei Möglichkeiten, wenn man analytisch vorgehen will.

Erstens verwenden wir im Rahmen des Newtonschen Strukturbildungsmodells gebräuchliche Approximationen, wie die lineare Eulersche Störungstheorie und die Zel'dovich-Näherung. In der ART kann man analog zur NT vorgehen und eine verallgemeinerte Form der Zel'dovich-Näherung entwickeln, wobei wir im Vergleich zu früheren Arbeiten keine flache Anfangsmetrik fordern. Die relativistische Zel'dovich-Näherung als zur Zeit bestes Werkzeug in den nichtlinearen Bereich der Strukturbildung vorzudringen zeigt uns die Dynamik des mittleren Krümmungsskalars und des Rückwirkungsterms in dieser Näherung. Die wichtigsten Ergebnisse sind:

- Ein Untersystem der Einsteinschen Gleichungen für Staub wird gefunden, das formal gleich dem Lagrange-Newton-System ist. Damit kann man die relativistische Verallgemeinerung der Zel'dovich-Näherung begründen.
- Wir können Ausdrücke für die Rückwirkung sowohl in der Zel'dovich-Näherung, als auch in deren relativistischer Erweiterung angeben. In dieser Näherung gelingt uns die Darstellung des gemittelten Krümmungsskalars.
- Dabei können wir ein Modell entwickeln, das für ebene und sphärische Symmetrie exakt ist.
- Die Rückwirkung kann man als zeitabhängigen  $\Lambda$ -Term, beziehungsweise als Dunkle-Materie deuten.
- Im Modell treten neben fallenden Moden in höherer Ordnung wachsende Moden auf. So wirken sich Unterstrukturen auf der Raumdomäne zu einem späteren Zeitpunkt in verstärktem Maße aus.

Zweitens kann man in sphärischer Symmetrie von einer radial inhomogenen Dichteverteilung ausgehen. In diesem Spezialfall kennt man eine analytische Lösung und kann die Parameter unseres Modelles als Funktion dieser Lösung angeben. Das gilt sowohl für die NT als auch für die ART. Da in der NT der Rückwirkungsterm bei sphärischer Symmetrie verschwindet, bietet dieser Spezialfall eine gute Möglichkeit Raumkrümmungseffekte zu studieren. Wir entwickeln, abweichend vom üblichen Vorgehen, die Lösung für sphärisch-symmetrischen Staub aus den Einsteinschen Gleichungen im  $3 + 1$ -Split in mitschwimmenden Koordinaten. Auf diesem Weg ist eine direkte Berechnung der intrinsischen Krümmung der raumartigen Hyperflächen möglich. Wir geben dann die im Mittelungsformalismus entwickelten regionalen Parameter als Funktion dieser Lösung an. Anders als in der NT stellt man eine Abhängigkeit von den Anfangswerten auf der gesamten Domäne, statt wie in der NT nur von den Anfangswerten auf dem Rand, fest. Wir demonstrieren diese Abhängigkeit an



einem speziellen Beispiel, bei dem wir eine Überdichte mit Gaußischem Dichteprofil betrachten. Auf den Punkt gebracht haben wir damit Folgendes erreicht:

- Uns gelingt eine exakte Darstellung aller regionalen Parameter bei sphärischer Symmetrie als Funktion der bekannten Lösung.
- Am Beispiel werden die Unterschiede zwischen den regionalen Parametern in der NT und in der ART gezeigt.
- Die Auswirkungen der Mittelung über gekrümmte raumartige Hyperflächen gegenüber dem Eulerschen Raum treten dabei hervor.

Beobachter sind an konkreten Aussagen über die Größe der Abweichungen vom Standard-Friedmannmodell interessiert. Den Ausgangspunkt für uns bietet das Powerspektrum der Dichtefluktuationen. Die geringe Amplitude dieser Fluktuationen macht die Raumkrümmungseffekte, die bei sphärischer Symmetrie diskutiert wurden, vernachlässigbar. Um Näherungslösungen für die Zeitentwicklung des gemittelten Skalenfaktors zu erhalten, die über die lineare Theorie und die Zel'dovich-Näherung hinausgehen, setzt man den Rückwirkungsterm in der Zel'dovich-Näherung in die verallgemeinerte Friedmann-Gleichung ein. Die so erhaltene Differentialgleichung kann numerisch gelöst werden. Damit erhält man ein von der Domänengröße abhängiges und vom globalen Modell abweichendes Verhalten des Skalenfaktors. Im Vergleich der regionalen kosmologischen Parameter mit den Parametern eines Friedmann-Modells zeigt sich die Problematik der Bestimmung von Parametern aus unserer lokalen Umgebung. Konkret bedeutet das<sup>1</sup>:

- Ohne Überdichte auf der Domäne (im Top-Hat Modell erhält man damit keine Abweichung vom Hintergrund) kollabieren im Falle einer  $1\text{-}\sigma$ -Abweichung der Anfangswerte vom Ensemble-Mittel bereits solche Domänen, deren Radius heute im Einstein-De-Sitter Modell 16Mpc beträgt.
- Bei einer  $3\text{-}\sigma$ -Abweichung kann man für Domänen, die sich heute im Einstein-De-Sitter Modell auf 100Mpc Radius ausgedehnt haben, eine 3%ige Abweichung des regionalen Skalenfaktors vom Skalenfaktor des Hintergrundes feststellen.
- Bei den kosmologischen Parametern sind die Auswirkungen der Inhomogenitäten stärker spürbar. In diesem Fall stellt man im Bemsparameter sogar Abweichungen von über 200% fest.

---

<sup>1</sup>Unsere Betrachtungen beziehen sich auf einen Einstein-De-Sitter Hintergrund, wobei wir  $h = 0.5$  annehmen.

- Obwohl der Rückwirkungsparameter relativ klein ist, ist sein nicht verschwindender Wert dafür verantwortlich, dass der regionale Krümmungsparameter (bei  $3\text{-}\sigma$ -Abweichung der Anfangswerte und einer Domäne, die sich heute im Einstein-De-Sitter Modell auf 100Mpc Radius ausgedehnt hätte) um mehr als 100% vom Hintergrundwert abweicht.

Eine kosmologische Konstante könnte auf Skalen von 50Mpc durch den Rückwirkungsterm ersetzt werden. Diese Aussage gilt allerdings nicht für große Skalen, da wir wie üblich Homogenität und Isotropie auf großen Skalen annehmen. Damit weichen die regionalen Parameter bei wesentlich größeren Entfernungen als 100Mpc nicht von den Parametern des Hintergrundes ab.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Effektive Entwicklung von Raumdomänen im Newtonschen Staubmodell</b>	<b>11</b>
2.1	Das Newtonsche Flüssigkeitsmodell . . . . .	11
2.1.1	Euler-Newton-System . . . . .	12
2.1.2	Euler-Newton-System in kinematischen Variablen . . . . .	13
2.1.3	Lagrange-Newton-System . . . . .	14
2.2	Lokale Beschreibung . . . . .	17
2.2.1	Lineare Eulersche Störungstheorie . . . . .	18
2.2.2	Zel'dovich-Näherung . . . . .	20
2.3	Regionale Beschreibung . . . . .	22
2.3.1	Kommutationsregel . . . . .	22
2.3.2	Mittelung des Euler-Newton-System in kinematischen Variablen	23
2.3.3	Verallgemeinerte Friedmann-Gleichung . . . . .	24
2.3.4	Qualitative Diskussion der verallgemeinerten Friedmann-Gleichung . . . . .	25

2.4	Rückwirkung . . . . .	27
2.4.1	Rückwirkung in Linearer Theorie . . . . .	27
2.4.2	Rückwirkung in der Zel'dovich-Näherung . . . . .	29
2.4.3	Rückwirkung bei ebener Symmetrie . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Effektive Entwicklung von Raumdomänen im Rahmen der ART</b>	<b>33</b>
3.1	Staubmodell in der ART . . . . .	33
3.1.1	Einsteinsche Gleichungen . . . . .	34
3.1.2	3+1-Split . . . . .	34
3.1.3	Triaden . . . . .	35
3.1.4	Einsteinsche Gleichungen im Triadenformalismus . . . . .	36
3.1.5	Anfangswerte . . . . .	39
3.2	Lokale Beschreibung . . . . .	39
3.2.1	Relativistische Zel'dovich-Näherung . . . . .	40
3.3	Regionale Beschreibung . . . . .	41
3.3.1	Kommutationsregel in der ART . . . . .	42
3.3.2	Mittelung der Einsteinschen Gleichungen im 3+1-Split . . . . .	42
3.3.3	Kosmologische Parameter . . . . .	43
3.4	Rückwirkung in der ART . . . . .	44
3.4.1	Rückwirkungsterm in der Zel'dovich-Näherung . . . . .	45
3.4.2	Gemittelte Krümmung in der Zel'dovich-Näherung . . . . .	47
3.5	Beobachtungsaspekte . . . . .	52

<b>4</b>	<b>Effektive Entwicklung von Raumdomänen bei sphärischer Symmetrie</b>	<b>55</b>
4.1	Sphärische Symmetrie in der NT . . . . .	55
4.1.1	Rückwirkungsterm . . . . .	56
4.1.2	Analytische Lösung . . . . .	58
4.2	Sphärische Symmetrie in der ART . . . . .	59
4.2.1	Sphärisch-symmetrischer Staub im 3+1-Split . . . . .	60
4.2.2	Skalenfaktor . . . . .	66
4.2.3	Hubble-Parameter . . . . .	66
4.2.4	Rückwirkungsterm . . . . .	67
4.2.5	Gemittelte Krümmung . . . . .	69
4.2.6	Regionale Parameter . . . . .	70
4.3	Sphärische Modelle mit speziellen Anfangsbedingungen . . . . .	71
4.3.1	Schalenkreuzen und Kollaps . . . . .	71
4.3.2	Das Gaußsche Modell . . . . .	75
4.3.3	Das Top-Hat-Modell . . . . .	77
4.3.4	Das Doppel-Top-Hat-Modell . . . . .	78
4.3.5	Vergleich regionaler Parameter . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Quantitativer Vergleich mit dem Friedmann-Modell</b>	<b>89</b>
5.1	Modellannahmen . . . . .	89
5.1.1	Relativistische Effekte . . . . .	91

5.2	Verhalten des Skalenfaktors inhomogener Domänen . . . . .	94
5.2.1	Anfangsbedingungen . . . . .	95
5.2.2	Ebener und Sphärischer Kollaps . . . . .	96
5.2.3	Unsymmetrische Anfangsbedingungen . . . . .	98
5.2.4	Vergleich mit der linearen Eulerschen Näherung . . . . .	103
5.3	Kosmologische Parameter im Vergleich . . . . .	103
5.3.1	Entwicklung des Hubble- und Bremsparameters . . . . .	105
5.3.2	Zeitentwicklung der Kosmologischen Parameter . . . . .	107
<b>A</b>	<b>Anfangsbedingungen</b>	<b>111</b>
A.1	Beziehung des Dichtekontrastes zum Skalarfeld $\psi$ . . . . .	111
A.2	Die gemittelten Invarianten . . . . .	112
A.3	Verteilung der volumengemittelten Invarianten . . . . .	113
A.4	Zahlenwerte . . . . .	115

# Kapitel 1

## Einleitung

Geleitet von der Erfahrung, dass sich in der Gegenwart Beobachtbares mit gewisser Regelmäßigkeit aus einer kontinuierlichen Abfolge in der Erinnerung verblassender Zustände seiner Umwelt ergibt, schafft sich der Mensch Modelle. Dabei werden die beobachtbaren Zustände und Vorgänge auf das Wesentliche reduziert. Modelle haben ihre Nützlichkeit im Bereich der täglichen Entscheidungsfindung hinreichend bewiesen. Verschiedene, von uns modellhaft erfasste Einzelvorgänge und Zustände aus einem übergeordneten Modell heraus zu erklären, macht sich die Physik zur Aufgabe. Das Werkzeug der Physik ist die Mathematik als Lehre vom logischen Schließen. Die theoretische Physik erstellt somit ein mathematisches Modell eines Zustandes oder Vorganges unserer Umwelt. Jedes mathematisches Modell beruht auf Voraussetzungen, die in der Realität praktisch nie exakt erfüllt sind. Zieht man die Logik der Mathematik nicht in Zweifel, liegt es an der Nichterfüllung der Voraussetzungen, wenn das Modell fehlschlägt, das heißt vom Theoretiker Angekündigtes nicht beobachtet wird. Hat man eine Theorie aufgestellt und an einigen Experimenten hinreichend überprüft, so verwendet man diese Theorie universell in allen Bereichen unserer Umwelt. Es wird so lange extrapoliert, bis man einen Widerspruch in der Theorie selbst gefunden hat oder bis sich eine Beobachtung mit dem Modell nicht hinreichend erklären lässt.

Den Endpunkt dieser Extrapolation in Richtung großer Zeitskalen und Raumbereiche stellt die Kosmologie dar. Während bis zu Beginn des letzten Jahrhunderts die Kosmologie eher dem Bereich der Philosophie zugeordnet werden kann, gilt sie durch wesentlich verbessertes Beobachtungsmaterial heute als Teilgebiet der Physik. Anderen empirischen Wissenschaftszweigen gegenüber hat sie aber den Nachteil der großen Raum- und Zeitskala. So liefern Beobachtungen praktisch eine Momentaufnahme dieses einen Kosmos in dem wir leben. Bei physikalischen Disziplinen, deren Theorien durch Laborversuch verifizierbar sind, lernt man Effekte der Umgebung

und Anfangsbedingungen durch Wiederholung der Versuche so zu kontrollieren, dass das Wesentliche sichtbar wird. In der Kosmologie ist ein solches Vorgehen unmöglich. Man kann in diesem Fall nur testen, ob die gesammelten Beobachtungen mit dem Modell, das man sich aus den bekannten und durch Laborversuche bestätigten Theorien zusammengesetzt hat, in Einklang zu bringen ist in dem Vertrauen, dass ein Fortschreiten auf der Größenskala nicht gänzlich neue Theorien hervorbringt. Misslingt das oder bleiben Fragen offen, wird eine neue Theorie gesucht, die in das Gesamtbild passt.

## Friedmann-Gleichung

Die ART, die ihre Gültigkeit im Labor, im Bereich des Sonnensystems (Periheldrehung des Merkur, Lichtablenkung an der Sonne) und außerhalb der Milchstraße (Gravitationslinsen) unter Beweis gestellt hat, bietet sich als grundlegende Theorie der Gravitation an. Die Einsteinschen Gleichungen lauten <sup>1</sup>:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Der Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  der Materieverteilung und die Kosmologische Konstante  $\Lambda$  bestimmen so die Raum-Zeit-Krümmung über den Ricci-Tensor  $R_{\mu\nu}$  und den Ricci-Skalar  $R$ . Auch die NT wird in der Epoche der Strukturbildung häufig verwendet, da sie bei kleinen Gravitationsfeldern und geringen Geschwindigkeiten eine gute Näherung darstellt. In beiden Fällen benutzt man als Modell eine ideale Flüssigkeit, die sich unter dem Einfluss der eigenen Gravitation bewegt. Der Energie-Impuls-Tensor in der ART ist in diesem Fall:

$$T_{\mu\nu} = (\varrho + p)u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}p \quad (1.2)$$

mit dem Druck  $p$  und der Ruheenergiedichte  $\varrho$ . Selbst für eine Flüssigkeit mit der einfachsten Zustandsgleichung, einem drucklosen Staubmedium, existieren sowohl in der NT als auch in der ART keine allgemeinen Lösungen. Einen Ausweg bieten Lösungen mit spezieller Symmetrie. In der Kosmologie hat sich die Annahme von räumlicher Homogenität und Isotropie durchgesetzt<sup>2</sup>. Die innere Geometrie einer solchen Raum-Zeit-Struktur wird durch das Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW-Linienelement) beschrieben:

$$ds^2 = dt^2 - a(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right). \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>Eine ausführlichere Darstellung der Gleichungen und ihrer Herleitung als in dieser kurzen Einleitung findet man zum Beispiel in [58], [13], [50].

<sup>2</sup>genauer: der Homogenität und Isotropie einer raumartigen Hyperfläche



Dabei bezeichnet man  $a(t)$  als Skalenfaktor (er beschreibt die globale Kontraktion oder Expansion) und  $k$  als Krümmung der raumartigen Hyperflächen. Der flache Raum hat die Krümmung  $k = 0$ . Räume mit  $k > 0$  bezeichnet man als elliptisch oder geschlossen, mit  $k < 0$  als hyperbolisch oder offen. Die Zeit  $t$  wird von einem in der Flüssigkeit mitschwimmenden Beobachter gemessen. Mit dem FLRW-Linienelement vereinfachen sich die Einsteinschen Gleichungen zu zwei unabhängigen Differentialgleichungen:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G \varrho}{3}. \quad (1.4)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -8\pi G p. \quad (1.5)$$

Diese Gleichungen, die man auch als die Friedmannschen Differentialgleichungen bezeichnet, bestimmen die Zeitentwicklung des Skalenfaktors  $a(t)$ . Löst man Gl. (1.4) nach  $\varrho a^3$  auf, differenziert nach der Zeit und verwendet Gl. (1.5), so erhält man:

$$\frac{d}{da}(\varrho a^3) = -3pa^2. \quad (1.6)$$

Die Ruheenergiedichte hängt über eine Zustandsgleichung mit der Form  $p = \alpha \varrho$  mit dem Druck zusammen. Die Integration von Gl. (1.6) liefert:

$$\varrho \propto a^{-3(1+\alpha)}. \quad (1.7)$$

Ausschlaggebend für die Entwicklung des Kosmos sind drei Materiearten:

**Staub:** In einem mit staubförmiger Materie gefüllten Kosmos wird  $p = 0$ , also  $\alpha = 0$  angenommen. Gl. (1.4) mit Gl. (1.7) ergibt:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{c}{a^3}, \quad c = \text{const}. \quad (1.8)$$

Der einfachste Staubkosmos mit  $k = 0$  und  $\Lambda = 0$  wird als Einstein-De-Sitter-Modell bezeichnet. Für ihn gilt:

$$a(t) \propto (t/t_0)^{\frac{2}{3}}. \quad (1.9)$$

**Strahlung:** In einem strahlungsdominierten Kosmos gilt die Zustandsgleichung  $p = \varrho/3$ , also  $\alpha = 1/3$ , für relativistische Teilchen. Eingesetzt in Gl. (1.7) und Gl. (1.4) erhält man:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{c}{a^4}, \quad c = \text{const}. \quad (1.10)$$

Im einfachsten Fall ( $\Lambda = 0, k = 0$ ) gilt für den Skalenfaktor:

$$a(t) \propto (t/t_0)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.11)$$

**Vakuum:** Die Zustandsgleichungen für Staub und relativistische Teilchen beruhen auf klassischer Physik. Darüber hinaus werden andere Zustandsgleichungen verwendet. In Inflationsmodellen, bei denen die Dynamik durch ein skalares Potential erzeugt wird, erhält man eine Zustandsgleichung der Form  $p = -\rho$ , also  $\alpha = -1$ . Gl. (1.7) und Gl. (1.4) liefern in diesem Fall:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = c, \quad c = \text{const.} \quad (1.12)$$

Deshalb kann man den  $\Lambda$ -Term als Materie dieser Zustandsgleichung verstehen. Die Auswirkungen einer solchen Materie auf den Skalenfaktor sind im einfachsten Fall ( $k=0$ ):

$$a(t) \propto \exp(ct). \quad (1.13)$$

Diese drei Materiesorten (der  $\Lambda$ -Term wird als Materie interpretiert) dienen im Prinzip zu jedem Zeitpunkt der Entwicklung des Kosmos als Quelle. Es ist üblich, sogenannte kosmologische Parameter einzuführen. Gl. (1.4) kann man umschreiben:

$$\begin{aligned} & \Omega_k + \Omega_\Lambda + \Omega_m + \Omega_r = 1, \\ \text{mit : } \Omega_\Lambda & \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_k \equiv -\frac{k}{H^2} \frac{1}{a^2}, \quad \Omega_m \equiv \frac{\rho_{m0}}{\rho_c} \frac{a_0^3}{a^3}, \quad \Omega_r \equiv \frac{\rho_{r0}}{\rho_c} \frac{a_0^4}{a^4}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Dabei wird  $\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$  als kritische Dichte bezeichnet,  $\rho_{m0}$  und  $\rho_{r0}$  sind die Staub- und Strahlungsdichte zum Zeitpunkt, wenn der Skalenfaktor den Wert  $a_0$  annimmt. Häufig spricht man mit den Kosmologischen Parametern ihre Werte zum heutigen Zeitpunkt an, ohne dies explizit zu erwähnen. Wir verwenden zur Unterscheidung  $\Omega_{x0} \equiv \Omega_x(t_0)$ . Damit gilt:

$$\left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \left( \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{k0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_{m0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{r0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \right) = 1 \quad (1.15)$$

Extrapoliert man zurück in der Zeit und damit zu einem kleineren Skalenfaktor, so wird  $\Omega_\Lambda$  gegenüber den anderen schnell verschwindend klein<sup>3</sup> und auch  $\Omega_k$  strebt schneller gegen 0 als  $\Omega_m, \Omega_r$ . Die Strahlungsdichte wächst in Richtung Urknall schneller als die Staubdichte. Geht man zum heutigen Zeitpunkt von einem materiedominierten Kosmos aus, so gab es einen Zeitpunkt, an dem die beiden Energiedichten von vergleichbarer Größenordnung waren. Davor spricht man von der strahlungsdominierten Ära.

---

<sup>3</sup>Ein anfänglich verschwindend kleiner  $\Lambda$ -Parameter wird oft als unnatürlich angesehen (Fine-Tuning-Problem).

# Standardmodell der Kosmologie

Das Modell, das heute von den meisten Kosmologen verwendet wird<sup>4</sup> beginnt mit einem singulären Skalenfaktor. Dieser Zeitpunkt wird oft als Urknall bezeichnet. Bis zur Planck-Zeit

$$t_p = \left( \frac{\hbar G}{c^5} \right) \approx 10^{-43} s \quad (1.16)$$

hat sich noch kein (GUT-)Modell durchgesetzt. Danach geht man von drei aufeinanderfolgenden Phasen aus, welche durch die, mit der Expansion abnehmenden, Energiedichte gekennzeichnet sind:

**Inflation:** Die Expansion des Kosmos wird von einem Skalarfeld getrieben. Damit dominiert Materie mit der Zustandsgleichung  $p = -\rho$  und der Skalenfaktor wächst exponentiell. Durch einen Phasenübergang stoppt das exponentielle Wachstum und der Kosmos geht in eine strahlungsdominierte Ära über. Der Krümmungsparameter ist nach dieser Phase verschwindend klein. Dichtefluktuationen entstehen durch Fluktuationen des Inflationfeldes und haben ein skaleninvariantes Spektrum, das als Harrison-Zel'dovich-Spektrum bezeichnet wird.

**Strahlungsdominierte Phase:** Der Kosmos ist mit unterschiedlichen Teilchen bevölkert. Überschreitet die Energiedichte im Kosmos die Ruhemasse einer geladenen Teilchenspezies, so wird die Energie der Photonen Teilchen-Antiteilchenpaare erzeugen. Erst später, wenn die Bindungsenergie von Atomkernen und danach die Ionisationsenergie von Atomen unterschritten ist, können sich leichte Elemente bilden. Zu diesem Zeitpunkt, der sogenannten Rekombinationsphase, endet die strahlungsdominierte Ära. Danach wird das Universum durchsichtig, da die Compton-Streuung unbedeutend wird. Die zu dieser Zeit emittierten Photonen bilden den Mikrowellenhintergrund. Zur Berechnung der Dynamik der Dichtefluktuationen in dieser Epoche genügt lineare Theorie. Damit entwickeln sich die Fouriermoden des Fluktuationfeldes unabhängig. Das anfänglich skaleninvariante Spektrum verändert sich aufgrund wechselwirkender Strahlung und Materie sowie der Tatsache, dass sich Fluktuationen, die den Horizont überschreiten, anders entwickeln als solche, die kleiner als der Horizont sind. Der Effekt ist eine Dämpfung der Fluktuationen auf kleinen Skalen.

**Materiedominierte Phase:** Nach der Rekombinationsphase bestimmen dunkle Staubmaterie und die Kosmologische Konstante die Expansion. In der Anfangsphase

---

<sup>4</sup>wegen seiner weiten Verbreitung und auf Grund der Tatsache, dass viele Beobachtungen heute im Sinne dieses Modells interpretiert werden, sei es als Standardmodell bezeichnet

gilt lineare Theorie. Damit wachsen die Dichtefluktuationen an. Haben sie einen Wert um eins erreicht, setzt eine nichtlineare Entwicklung ein, die schneller als die lineare Theorie zu Konzentrationen führt. Diese wirken als Potentialfallen für die spärlich vorhandene baryonische Materie und bilden den Ursprung von Galaxien und Galaxienhaufen, die mit der Zeit virialisieren und sich so von der Expansion des Kosmos abkoppeln. Die heutige Epoche ist gekennzeichnet durch eine Beschleunigung der Expansion, verursacht durch eine Kosmologische Konstante.

## Beobachtung und Standardmodell

Das Standardmodell hat einen Kern, der im Verhältnis zu seinen restlichen Bestandteilen gut abgesichert ist. Er besteht aus zwei Hypothesen von qualitativem Charakter:

- Der Kosmos dehnt sich bis heute aus und kühlt dabei ab.
- Kleinen Dichtefluktuationen wachsen mit der Zeit, so dass aus einem homogenen ein relativ inhomogenes Universum entsteht.

Die Argumente dafür sind die Beobachtung der Mikrowellenhintergrundstrahlung, sowie deren geringe Fluktuationen, die Elementhäufigkeit, der Hubble-Fluss und die inhomogene Galaxienverteilung<sup>5</sup>. Es dürfte schwierig sein, ein Modell zu finden, welches den beiden Hypothesen widerspricht und diese Beobachtungen in ähnlich schlüssiger Weise erklärt.

Die weiteren Bestandteile des Standardmodells sind weniger gesichert. Sie stützen sich vor allem auf die Kosmologischen Parameter. Diese konnten durch Beobachtung der Häufigkeitsverteilung der Elemente, von Supernovae und den Fluktuationen des Mikrowellenhintergrundes<sup>6</sup> eingegrenzt werden mit dem Ergebnis:

$$\Omega_{k0} \approx 0, \quad \Omega_{m0} \approx 0.3, \quad \Omega_{\Lambda 0} \approx 0.7. \quad (1.17)$$

Das stimmt gut mit Inflationsmodellen überein, die einen verschwindend kleinen Krümmungsparameter voraussagen. Zusätzlich erzeugen die einfachsten Inflationsmodelle ein skaleninvariantes Fluktuationsspektrum und sie sind in der Lage, die

---

<sup>5</sup>Man sieht auch auf den größten beobachtbaren Skalen in Galaxienkatalogen noch signifikante morphologische Strukturen (siehe: [41] und Referenzen darin).

<sup>6</sup>neue Ergebnisse siehe: [65] und Referenzen darin

Homogenität des Mikrowellenhintergrundes zu erklären<sup>7</sup>. Damit bietet das Standardmodell einen in sich konsistenten Ansatz.

Es hat allerdings auch Lücken. So ist nur ein geringer Anteil an  $\Omega_{m0}$  bis jetzt als baryonische Materie, Strahlung und Neutrinos direkt beobachtbar. Ein Teil scheint in Galaxien und Galaxiehaufen gravitativ wirksam zu sein. Man hat bis jetzt aber kein physikalisches Modell für diese dunkle Materie. Auch mangelt es an einem physikalischen Mechanismus zur Erzeugung des Inflatonfeldes und direkt nach dem Urknall fehlt eine, die fundamentalen Kräfte vereinigende, Theorie, welche die Anfangsbedingungen für die spätere Entwicklung liefert. Neben diesen Erklärungslücken besteht auf Seiten der Theoretiker ein großes Unbehagen bezüglich des  $\Lambda$ -Parameters. Sein niedriger Wert zu Beginn wird als unnatürlich angesehen.

Es wird gehofft, dass eine grundsätzliche Erweiterung der bisher bekannten Physik eine Lösung bringt. Das bedeutet die Gültigkeit weitergehender, fundamentaler Theorien zu postulieren. Es besteht aber auch die Möglichkeit, dass die Voraussetzung der Homogenität und Isotropie zu ungenau ist, so dass sich gewisse offene Fragen nicht oder in anderer Form stellen. Um dies zu testen, ist ein Formalismus notwendig, der es ermöglicht, Friedmann-Modelle mit inhomogenen Modellen zu vergleichen.

## Effektive Dynamik

Ob das Universum auf Skalen  $> 100Mpc$  als homogen und isotrop angesehen werden kann, ist bis heute nicht sicher. Statistische Analysen deuten darauf hin und die homogen-isotrope Hintergrundstrahlung lässt den Übergang zur Homogenität auf irgend einer Skala  $> 100Mpc$  realistisch erscheinen. Direkt beobachtbar ist allerdings die Inhomogenität der sichtbaren Materie bis zu dieser Größenskala. Wie wirkt sich diese Inhomogenität aus? Zunächst finden alle Beobachtungen auf einer lichtartigen Hyperfläche statt. Mit einer inhomogenen Verteilung der Materie ist auch die Raum-Zeit-Struktur inhomogen, wodurch sich die Interpretation der Beobachtungsdaten ändert. In zweiter Linie ändert sich auch die Dynamik, die durch die ART gegeben ist. Wie groß die Abweichungen vom Friedmann-Modell sind, ist wegen der Nichtlinearität der Grundgleichungen, sowie der unendlichen Reichweite der Gravitationskraft nicht ohne weiteres abzuschätzen. Dies ist erst möglich, wenn man ein Vergleichsmodell hat, das Inhomogenitäten berücksichtigt.

Die Annahme bei Friedmann-Modellen, dass die dort auftretende homogene Dichte mit einer gemittelten Dichte auf einer gewissen Skala identifiziert werden kann, legt

---

<sup>7</sup>Ohne Inflation hätte man kausal nicht zusammenhängende Raumbereiche und damit keine Möglichkeit, durch einen physikalischen Ausgleichsprozess Homogenität zu erzeugen.

die Betrachtung über einen Raumbereich gemittelter Größen nahe. Unter *effektiver Dynamik* verstehen wir die Dynamik dieser Größen. Da Mittelung und Zeitableitung nichtkommutative Operatoren sind, führt eine Mittelung der dynamischen Gleichungen auf Zusatzterme. Man findet eine Gleichung, die im Spezialfall einer homogenen und isotropen Materieverteilung die altbekannte Friedmann-Gleichung ergibt. Im inhomogenen Kosmos enthält diese Gleichung Zusatzterme, die damit die Abweichung vom Friedmann-Kosmos darstellen. Diese sind unter dem Namen Rückwirkungsterm zusammengefasst. Seine Untersuchung, sowie die Auswirkungen auf die Dynamik von Raumdomänen und über Raumdomänen gemittelte Größen steht im Mittelpunkt dieser Arbeit. Da der Mittelungsformalismus in der ART in Analogie zur NT entwickelt wird, verwenden wir beide Theorien als Grundlage. Zusätzlich nehmen wir an, dass der Kosmos mit einer drucklosen Flüssigkeit (Staub) angefüllt ist. Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

- Der erste Abschnitt verwendet die NT als Grundlage. Dabei wird das Newtonsche Flüssigkeitsmodell (2.1.1) kurz vorgestellt. Kinematische Variablen (2.1.2) verdeutlichen den physikalischen Hintergrund. Im Hinblick auf einen Vergleich mit der ART leiten wir das Lagrange-Newton-System her (2.1.3). Exakte Abweichungen vom Friedmann-Modell sind nur in Kenntnis einer allgemeinen Lösung des Newtonschen Staubmodells angebar. In Ermangelung einer solchen ist man bei der Quantifizierung auf Lösungen mit speziellen Symmetrien oder auf analytische Approximationen angewiesen. Wir verwenden die lineare Eulersche Störungstheorie (2.2.1) und die Zel'dovich-Näherung (2.2.2), die an dieser Stelle eingeführt werden. Die Mittelung als Werkzeug eine makroskopische Theorie aus einer lokalen zu erzeugen versetzt uns in die Lage, mit Friedmann-Modellen zu vergleichen. Über die Kommutationsregel (2.3.1) und die Mittelung des Euler-Newton-Systems (2.3.2) kommt man zur verallgemeinerten Friedmann-Gleichung (2.3.3). Sie hat die Form der eigentlichen Friedmann-Gleichung bis auf einen Term, den wir als Rückwirkungsterm bezeichnen. Die Ähnlichkeit verleitet zur Definition von Kosmologischen Parametern auf einer Raumdomäne (2.3.4), wobei dadurch ein zusätzlicher Parameter in die Diskussion eingebracht wird. Zur genäherten Berechnung des Rückwirkungsterms kann man die lineare Eulersche Störungstheorie (2.4.1) und die Zel'dovich-Näherung (2.4.2) verwenden. Diese schließt die eben symmetrische Lösung (2.4.3) als exakte Lösung mit ein.
- Der zweite Abschnitt verwendet die ART als Grundlage, also die Einsteinschen Gleichungen mit dem Energie-Impuls-Tensor einer drucklosen Flüssigkeit. Die Fluidelemente eines solchen Mediums bewegen sich auf Geodäten durch die Raumzeit. Garantiert man Rotationsfreiheit, so ist die Aufspaltung der Raumzeit in raumartige Hyperflächen und eine universelle Zeitkoordinate möglich. Die Einsteinschen Gleichungen (3.1.1) lassen sich dann im sogenannten 3+1-Split formulieren (3.1.2). Die räumliche Mittelung wird jetzt als Mitte-

lung über raumartige Hyperflächen verstanden. In Triaden (3.1.3) erkennt man das Analogon zur Jakobi-Matrix der Transformation auf Lagrange-Koordinaten in der NT, wenn man die Einsteinschen Gleichungen im Triadenformalismus aufschreibt (3.1.4). In diesem Sinne lässt sich die Zel'dovich-Näherung in der ART verallgemeinern (3.2.1). In der ART ist die Mittelwertbildung anders als in der NT nur über skalare Größen definiert. Eine Mittelung der Einsteinschen Gleichungen im 3+1-Split (3.3.2) liefert mit einer Kommutationsregel (3.3.1) auch in der ART eine verallgemeinerte Friedmanngleichung der gleichen Form wie der NT. Zusätzlich existiert aber die gemittelte Hamilton-Constraint-Gleichung. Daher ist es in der ART möglich, zwei Sätze von kosmologischen Parametern zu definieren (3.3.3). Da der gemittelte Krümmungsskalar dreidimensionaler Hyperflächen in der ART zusätzlich in Erscheinung tritt, berechnen wir ihn und den Rückwirkungsterm näherungsweise (3.4.1), (3.4.2).

- Im nächsten Abschnitt beschäftigen wir uns mit den Unterschieden, die eine Formulierung im Rahmen der ART im Vergleich zur NT mit sich bringt am Modell einer sphärisch-symmetrischen Staubverteilung. In der NT verschwindet der Rückwirkungsterm (4.1.1) und die Dynamik einer Raumdomäne ist die eines Friedmann-Kosmos mit gleicher mittlerer Dichte (4.1.2). In der ART helfen, anders als in der NT, geometrischen Überlegungen nicht weiter, so dass man die explizite sphärisch-symmetrische Lösung für ein Staubmedium braucht. Wir kommen zur sogenannten Tolman-Bondi-Lösung über die Einsteinschen Gleichungen im 3+1-Split (4.2.1), was uns zusätzlich Ausdrücke für die intrinsische und die äußere Krümmung der raumartigen Hyperflächen liefert. Jetzt kann man den Skalenfaktor (4.2.2), den regionalen Hubble-Parameter (4.2.3), den Rückwirkungsterm (4.2.4), die gemittelte intrinsische Krümmung (4.2.5) und die regionalen kosmologischen Parameter (4.2.6) als Funktion des Oberflächenradius angeben. Mit verschiedenen Anfangsdichteverteilungen berechnen wir numerisch deren Dynamik (4.3).
- Im nächsten Abschnitt quantifizieren wir die Abweichungen vom Friedmann-Modell. Die Entwicklung des Skalenfaktors einer Raumdomäne liefert hier die numerische Integration der verallgemeinerten Friedmann-Gleichung (5.2), wobei die Anfangswerte (5.2.1) aus dem Powerspektrum bei  $z = 200$  gewonnen werden. Da die Anfangsmetrik in diesem Fall nahezu Euklidisch ist, sind die Unterschiede im Rückwirkungsterm, berechnet mit den Approximationen und den symmetrischen Lösungen, in der ART und der NT, verschwindend. Es werden der ebene und sphärische Kollaps (5.2.2), sowie unsymmetrische Anfangsbedingungen (5.2.3) behandelt. Nach einem Vergleich mit der linearen Theorie (5.2.4) widmen wir uns den Beobachtungsgrößen Hubble- und Bremsparameter (5.3.1). Das Kapitel schließt mit einer Diskussion der Kosmologischen Parameter (5.3.2), die von uns um den Rückwirkungsparameter erweitert worden sind.
- Im Anhang wird erklärt, wie die im letzten Abschnitt verwendeten Anfangs-

daten aus dem Powerspektrum berechnet werden können. Dabei stellen wir zunächst einen Zusammenhang zwischen den Dichtefluktuationen und den, im Zel'dovich-Ansatz auftretenden, Abweichungen der Trajektorien vom Hintergrundmodell her (A.1). Daraus kann man unsere eigentlichen Anfangsdaten, die gemittelten Invarianten des Fluktuationfeldes, berechnen (A.2). Die Anfangsdomäne wird als Kugel gewählt. Die Dichtefluktuationen werden normalerweise als Gaußsches Zufallsfeld behandelt. Wir berechnen daraus die Varianz der als Zufallsgrößen aufgefassten Invarianten und deren Kombinationen (A.3). Um konkrete Zahlenwerte zu erhalten, verwenden wir die Transfer Funktion eines CDM-Modells (A.4).



# Kapitel 2

## Effektive Entwicklung von Raumdomänen im Newtonschen Staubmodell

In Entfernungen kleiner als der Hubble-Radius und unter Ausschluss starker Gravitationsfelder, wie etwa in der Nähe von Schwarzen Löchern, ist der Euklidische Raum eine gute Näherung. Es stellt sich heraus, dass die Lagrangesche Formulierung des Mittelungsprozesses im Newtonschen Fall analog zur Mittelung in der ART betrachtet werden kann. Das motiviert eine genaue Analyse des Verhaltens von mit dem kosmischen Staub mitschwimmenden Domänen im Lagrange-Newton-Bild.

### 2.1 Das Newtonsche Flüssigkeitsmodell

Mit Flüssigkeit ist hier ein Gas bestehend aus nicht kollidierenden oder kollidierenden Teilchen gemeint, das sich nur unter dem Einfluss der Gravitation durch den Euklidischen Raum bewegt. Dieses Gas wird mit einem Kontinuumsmodell beschrieben, wobei die Geschwindigkeit in den einzelnen Raumpunkten als mittlere Geschwindigkeit der Teilchen in einem geeigneten Volumen betrachtet werden kann.

Solch ein Modell lässt sich beispielsweise auf Baryonen (Wasserstoff oder Helium) nach der Rekombination, auf Kalte-Dunkle-Materie bevor es zum “Shell Crossing” kommt und (mit relativistischen Korrekturen) auf die gekoppelte Photon-Baryon-Flüssigkeit anwenden (siehe auch: [9]).

Nimmt man an, dass heute die dominante Materiekomponente im Kosmos aus kalter dunkler Materie besteht, die als Potentialfalle für baryonische Materiekomponenten wirkt, so bestimmt die Dynamik dieses Dunkle-Materie-Staubes den Strukturbildungsprozess.

### 2.1.1 Euler-Newton-System

Das Euler-Newton-System kann methodisch aus zwei unterschiedlichen Überlegungen gefolgert werden. Einmal über die Verteilungsfunktion und die Boltzmann-Gleichung, oder als Ergebnis eines räumlichen “Coarse-Graining”. Da wir an großskaligen Phänomenen interessiert sind, nehmen wir als Ausgangspunkt folgendes System von Gleichungen:

$$\partial_t \varrho = -\nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) \quad (2.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \mathbf{p} \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = \Lambda - 4\pi G \varrho. \quad (2.4)$$

$\varrho(\mathbf{x}, t)$  ist das Massendichtefeld,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  das Geschwindigkeitsfeld,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  die gravitative Feldstärke und  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$  ein isotroper Druckterm;  $\mathbf{x}$  sind nicht-rotierende Eulersche Koordinaten;  $\Lambda$  notiert die Kosmologische Konstante.

Der Druckterm in Gleichung (2.2) kann vernachlässigt werden, wenn die Teilchen der Flüssigkeit selten stoßen. Dieses Modell bezeichnet man als Staub-Modell. Im folgenden werden wir uns auf dieses Modell beziehen.

Mit der Einführung des Gravitationspotentials  $\phi$  folgt die Poisson-Gleichung:

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0 \Rightarrow \mathbf{g} = -\nabla \phi \quad (2.5)$$

$$\Delta \phi = 4\pi G \varrho - \Lambda. \quad (2.6)$$

Die Gleichungen (2.2) und (2.4) beinhalten die Gleichheit von träger und schwerer Masse. Das gesamte Gleichungssystem besteht aus gekoppelten, nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen für die das Gas charakterisierenden dynamischen Variablen  $\mathbf{v}$  und  $\varrho$ . Aus zwei Gründen ist es bisher nicht gelungen, bei beliebigen Anfangsbedingungen, für diese vier Variablen eine allgemeine analytische Lösung anzugeben. Erstens führt die konvektive Ableitung in Gleichung (2.2) zu Nichtlinearitäten, und zweitens benötigt man zur Lösung der Poisson-Gleichung Randbedingungen oder die Kenntnis von  $\varrho$  im ganzen Kosmos.

$\phi$  ergibt sich nach (2.4) und (2.6) zu:

$$\phi(\mathbf{x}) = -G \int d^3\tilde{x} \frac{\varrho(\tilde{\mathbf{x}})}{|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|} - \frac{1}{6}\Lambda x^2. \quad (2.7)$$

Die gesamte Materieverteilung bestimmt die lokale Dynamik in nichtlokaler Weise. Dieses prinzipielle Problem kann man durch die Annahme von Homogenität und Isotropie auf großen Skalen lösen. Bei der Behandlung von inhomogenen Kosmologien stösst man in diesem Punkt auf Schwierigkeiten.

Der  $\Lambda$ -Term kann in der Newtonschen Theorie nicht streng begründet werden. Er wird in die Diskussion miteinbezogen, da er in vielen Strukturbildungsszenarien eine entscheidende Rolle spielt.

Nimmt man Homogenität und Isotropie an, so gilt:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = H(t)\mathbf{x}, \quad H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \varrho(\mathbf{x}, t) = \varrho_H(t),$$

und man folgert aus dem Euler-Newton-System die bekannten Friedmann-Gleichungen für die zeitliche Entwicklung des Skalenfaktors  $a(t)$ :

$$3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 4\pi G\varrho_H(t) - \Lambda = 0, \quad (2.8)$$

oder in integrierter Form

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\varrho_H}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (2.9)$$

Die Integrationskonstante  $k$  kann man im allgemeinrelativistischen Fall mit der konstanten Krümmung  $R$  3-dimensionaler, raumartiger Hyperflächen identifizieren. Der Skalenfaktor  $a(t)$  beschreibt hier die globale Entwicklung.

Da im Kosmos offensichtlich Materiestrukturen vorhanden sind, stellt sich die Frage, ob die Expansion einer großen Raumdomäne, die eine inhomogene Materieverteilung beinhaltet, gleich der homogenen Expansion ist. Es wird sich zeigen, dass dies nicht gilt.

## 2.1.2 Euler-Newton-System in kinematischen Variablen

Um die Bewegung eines Flüssigkeitselements zu beschreiben, ist es sinnvoll, verschiedene kinematische Größen einzuführen. Dazu zerlegt man den Geschwindigkeitsgradienten<sup>1</sup>:

$$v_{i,j} = v_{(i,j)} + v_{[i,j]} \equiv \theta_{ij} + \omega_{ij} \equiv \sigma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} + \omega_{ij}, \quad (2.10)$$

---

<sup>1</sup>Die Ableitung nach Eulerschen Koordinaten wird durch ein Komma gekennzeichnet.

dabei ist:

$$v_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) ; v_{[i,j]} \equiv \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}). \quad (2.11)$$

$\sigma_{ij}$  bezeichnet man als Scherungstensor und  $\sigma \equiv \sqrt{\frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$  als Scherungsrate. Durch  $\sigma$  wird der Grad der Verzerrung eines Fluidelements beschrieben. Die Expansionsrate  $\theta$  steht für selbständige Veränderung und die Rotationsrate  $\omega \equiv |\vec{\omega}|$  für Drehungen des infinitesimalen Flüssigkeitsvolumens.

Differenziert man die Euler-Gleichung (2.2) nach  $x_j$  so gilt:

$$d_t(v_{i,j}) = -v_{i,k}v_{k,j} + g_{i,j}, \quad (2.12)$$

wobei  $d_t$  die Lagrangesche Zeitableitung bedeutet<sup>2</sup>,

$$d_t = \partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla).$$

Setzt man Gleichung (2.10) in (2.12) ein und benutzt die Quellgleichungen (2.3) und (2.4), so erhält man:

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 + 2(\omega^2 - \sigma^2) + g_{k,k} \quad (2.13)$$

$$\dot{\omega}_{ij} = -\frac{2}{3}\theta\omega_{ij} - \sigma_{ik}\omega_{kj} - \omega_{ik}\sigma_{kj} + g_{[ij]} \quad (2.14)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = -\frac{2}{3}\theta\sigma_{ij} - \sigma_{ik}\sigma_{kj} - \omega_{ik}\omega_{kj} + \frac{2}{3}(\sigma^2 - \omega^2)\delta_{ij} \quad (2.15)$$

$$+ \underbrace{g_{(i,j)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}g_{k,k}}_{\equiv E_{ij}}.$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (2.1) ergibt sich außerdem:

$$\dot{\rho} = -\rho\theta. \quad (2.16)$$

Das System von Gleichungen (2.13, 2.14, 2.16) ist äquivalent zum Euler-Newton-System, wenn man die Gültigkeit der Feldgleichungen fordert. Fasst man es als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf, so ist es allerdings nicht geschlossen.

### 2.1.3 Lagrange-Newton-System

Die Lagrangesche Beschreibung einzuführen hat mehrere Gründe: Zum einen ist sie fundamental für das Verständnis des Lagrangeschen Mittels, zum anderen bietet sie

---

<sup>2</sup>Sie wird im Folgenden mit einem Punkt über der abzuleitenden Größe gekennzeichnet ( $d_t A \equiv \dot{A}$ ).

die Möglichkeit, Strukturbildung im Eulersch-nichtlinearen Regime zu verfolgen [71, 26, 25] und es stellt sich heraus, dass die Lagrangesche Formulierung für Newtonschen Staub in Formensprache direkt mit den Gleichungen der ART, für dieses Medium, verglichen werden kann.

Die sogenannte Zel'dovich-Näherung, die zur Berechnung des Rückwirkungsterms herangezogen wird, ist Lagrangesche Störungstheorie erster Ordnung mit Zusatzeinschränkungen.

Anstelle der Lage eines Fluidelements im Euklidischen Raum betrachtet man die Trajektorienschar  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ , wobei  $\mathbf{X}$  die Eulerposition des Teilchens zur Zeit  $t_0$  bezeichnet. Als Koordinatentransformation aufgefasst bedeutet dies:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t_0).$$

Die Funktionaldeterminante der Transformation wird mit  $J$  bezeichnet:

$$J(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}.$$

Der Vorteil Lagrange-Koordinaten anstelle von Eulerschen Koordinaten zu benutzen ist der: Betrachten wir ein Flüssigkeitselement im Euklidischen Raum und verfolgen seine Bewegung, so ändert sich seine Geschwindigkeit entlang seiner Bahn (ausgedrückt durch  $\partial_t \mathbf{v}$ ) und aufgrund der Krümmung seiner Bahn, eingebettet in den Euklidischen Raum (ausgedrückt durch  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ ). Die totale zeitliche Ableitung (Lagrangesche zeitliche Ableitung)  $d_t = \partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$  wird zur partiellen Zeitableitung bei konstantem  $\mathbf{X}$ .

In Lagrangeschen Koordinaten ist die Trajektorie selbst die dynamische Variable, so dass für die totale zeitliche Ableitung gilt:

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \tag{2.17}$$

$$\ddot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{X}, t). \tag{2.18}$$

Damit ist  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$  die einzige Variable, die wir benötigen, um das System vollständig zu charakterisieren. Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung ergeben sich durch Integration. So kann  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$  als Integralkurve des Geschwindigkeitsfelds gesehen werden. Längs dieser Kurve reduziert sich  $d_t$  auf die partielle Ableitung  $\partial_t$ . Den Lagrangeschen Ausdruck für die Entwicklung der Dichte gewinnt man durch differentialgeometrische Betrachtung oder durch ein Massenerhaltungsargument:

$$0 = \dot{M} = d_t \int_{D_t} \varrho(\mathbf{x}, t) d^3 x = d_t \int_{D_0} \varrho(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t) d^3 X = \int_{D_0} d_t(\varrho J) d^3 X.$$

Daher muß der Ausdruck im Integranden verschwinden:

$$0 = d_t(\varrho J) \quad \Rightarrow \quad \varrho(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t) = \varrho_0 J_0$$

wobei  $\varrho_0 \equiv \varrho(\mathbf{X}, t_0)$  und  $J_0 \equiv J(\mathbf{X}, t_0)$ . Wegen  $f(\mathbf{X}, t_0) \equiv \mathbf{X}$  folgt  $J_0 = 1$  und es gilt:

$$\varrho(\mathbf{X}, t) = \frac{\varrho(\mathbf{X}, t_0)}{J(\mathbf{X}, t)}. \quad (2.19)$$

Dies wird auch anschaulich klar: Die Lagrangesche Formulierung gibt Abweichungen von der ursprünglichen Euler-Position an,  $J$  ist somit ein Maß für die Deformation des Flüssigkeitselements längs der Bahnkurve, die durch  $\mathbf{X}$  markiert ist.

Wird die Funktionaldeterminante singulär, so kommt es formal zu unendlich hohen Dichten. Dies geschieht zum Zeitpunkt des ‘Shell-Crossing’. Eine Rücktransformation in den Euler-Raum führt dann auf Mehrstromsysteme (einem Eulerschen Raumpunkt werden dann mehrere Geschwindigkeiten zugeordnet). Das heisst, die Beschreibung in Eulerschen oder Lagrangeschen Koordinaten ist ab diesem Moment nicht mehr äquivalent.

Das Euler-Newton-System lässt sich im Bereich  $J > 0$  auf das Lagrange-Newton-System eindeutig abbilden. Nützlich zur Berechnung ist die Einführung von Funktionaldeterminanten<sup>3</sup>:

$$\mathcal{J}(A, B, C) \equiv \frac{\partial(A, B, C)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = \varepsilon_{ijk} A_{|i} B_{|j} C_{|k}. \quad (2.20)$$

Das Lagrange-Newton-System lautet damit<sup>4</sup> [23]:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{J} \quad (2.21)$$

$$\mathcal{J}(\ddot{f}_i, f_i, f_k) = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{2J} \varepsilon_{ijk} \mathcal{J}(\ddot{f}_i, f_j, f_k) = -4\pi G \varrho + \Lambda. \quad (2.23)$$

Btreibt man Störungsrechnung, so wird der Vorteil dieser Beschreibung offensichtlich. Es genügt, Abweichungen der Teilchenbahnen  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$  von Bahnen im homogen-isotropen Fall zu betrachten, während man in der Eulerscher Beschreibung Störungen in allen dynamischen Variablen einführen muss.

Kleine Abweichungen von Friedmann-Trajektorien können durchaus bedeuten, dass die Dichte stark von der homogenen Dichte abweicht und Strukturbildung kann auch in Störungstheorie niedriger Ordnung bis in den Eulersch-nichtlinearen Bereich verfolgt werden.

Das Lagrange-Newton-System wurde störungstheoretisch untersucht. Dabei macht man den Ansatz:

$$\mathbf{f} = a(\mathbf{X} + \mathbf{p}). \quad (2.24)$$

<sup>3</sup>Dabei bezeichnet  $_{|i} \equiv \frac{\partial}{\partial X_i}$  die Ableitung nach Lagrangeschen Koordinaten.

<sup>4</sup>Über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

Der Skalenfaktor  $a$  ist eine Lösung der Friedmann-Gleichung, deren Quellterm als homogen isotrope Hintergrunddichte  $\varrho_H$  verstanden wird. Das Vektorfeld  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{X}, t)$  bezeichnet dabei die mit  $a$  reskalierte Abweichung der Trajektorien von den Trajektorien des Hintergrundes. Für kleine Abweichungen kann  $\mathbf{p}$  als Störung aufgefasst werden, die ein systematisches störungstheoretisches Vorgehen ermöglicht. Die Schlüsselgleichung dazu liefert obiger Ansatz, eingesetzt in Gl. (2.23). Es gilt:

$$\mathcal{J}(\ddot{f}_i, f_j, f_k) = \frac{\ddot{a}}{a} \mathcal{J}(f_i, f_j, f_k) + 2 \frac{\dot{a}}{a} \mathcal{J}(a\dot{p}_i, f_j, f_k) + \mathcal{J}(a\ddot{p}_i, f_j, f_k). \quad (2.25)$$

Wir definieren den Dichtekontrast:

$$\delta \equiv \frac{\varrho - \varrho_H}{\varrho_H}. \quad (2.26)$$

Damit und mit  $\varepsilon_{ijk} \mathcal{J}(f_i, f_j, f_k) = 6J$ , sowie  $H = \dot{a}/a$  läßt sich Gleichung (2.23) schreiben als:

$$\begin{aligned} 3 \frac{\ddot{a}}{a} + 2H \frac{1}{2J} \varepsilon_{ijk} \mathcal{J}(a\dot{p}_i, f_j, f_k) + \frac{1}{2J} \varepsilon_{ijk} \mathcal{J}(a\ddot{p}_i, f_j, f_k) \\ = -4\pi G \delta \varrho_H - 4\pi G \varrho_H + \Lambda. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Der Skalenfaktor  $a$  soll die Friedmann-Gleichung (2.8) erfüllen. So erhält man:

$$2H \frac{1}{2J} \varepsilon_{ijk} \mathcal{J}(a\dot{p}_i, f_j, f_k) + \frac{1}{2J} \varepsilon_{ijk} \mathcal{J}(a\ddot{p}_i, f_j, f_k) = -4\pi G \delta \varrho_H. \quad (2.28)$$

Die Hintergrunddichte zum Zeitpunkt  $t_0$  sei  $\varrho_H(t_0) \equiv \varrho_{0H}$ . Die Kontinuitätsgleichung für den Hintergrund liefert dann  $\varrho_H = \varrho_{0H}/a^3$ . Bezeichnet man mit  $\delta_0 \equiv (\varrho_0 - \varrho_{0H})/\varrho_{0H}$  den Dichtekontrast zum Zeitpunkt  $t_0$  und benutzt Gleichung (2.21), so ergibt sich nach Multiplikation mit der Funktionaldeterminanten:

$$2H \varepsilon_{ijk} \mathcal{J}(a\dot{p}_i, f_j, f_k) + \varepsilon_{ijk} \mathcal{J}(a\ddot{p}_i, f_j, f_k) = -8\pi G (\varrho_0 - \varrho_{0H} J/a^3). \quad (2.29)$$

Das ist eine Differentialgleichung für das Störungsfeld  $\mathbf{p}$ . Bis hierher ist unsere Rechnung exakt. Auf Gleichung (2.29) wird die Lagrangesche Störungstheorie aufgebaut. Mit der Annahme periodischer Randbedingungen (Torus) kann man zeigen, dass ein Separationsansatz in beliebiger Ordnung möglich ist [34].

## 2.2 Lokale Beschreibung

In Strukturbildungsmodellen finden lokale Näherungsverfahren vor allem in der Frühphase und auf großen Skalen Anwendung. Im Hinblick auf die spätere Anwendung im Mittelungsformalismus und der Verallgemeinerung in der ART werden die Lineare Eulersche Störungsrechnung und die Zel'dovich-Näherung kurz vorgestellt.

## 2.2.1 Lineare Eulersche Störungstheorie

Am besten formuliert man die Lineare Störungstheorie in mitschwimmenden Koordinaten:

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{x}}{a(t)} .$$

Der Gradient und die partielle sowie die totale zeitliche Ableitung transformieren sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \nabla_x &= \frac{1}{a} \nabla_q, \\ \partial_t|_x &= \partial_t|_q + H\mathbf{q} \cdot \nabla_q, \\ d_t &= \partial_t|_x + \mathbf{v} \cdot \nabla_x = \partial_t|_q + \frac{1}{a} \mathbf{u} \cdot \nabla_q. \end{aligned}$$

Abweichungen vom Hintergrundmodell werden durch

die Pekuliargeschwindigkeit:  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v} - H\mathbf{x}$ ,

die Pekuliarexpansionsrate:  $\theta_u \equiv \theta_v - 3H$ ,

die Pekuliarbeschleunigung:  $\mathbf{w} \equiv \mathbf{g} - \frac{\ddot{a}}{a}\mathbf{x}$ ,

und den Dichtekontrast:  $\delta \equiv \frac{\varrho - \varrho_H}{\varrho_H}$ , angegeben.

### Zeitliches Verhalten der Pekuliarexpansionsrate und des Dichtekontrastes im linearen Regime

Transformiert man das Euler-Newton-System auf mitschwimmende Koordinaten und benutzt obige Größen, so erhält man unter Vernachlässigung von Termen quadratischer Ordnung in den Abweichungen vom Hintergrund [59]:

$$\partial_t|_q^2 \delta(\mathbf{q}, t) + 2H\partial_t|_q \delta(\mathbf{q}, t) - 4\pi G \varrho_H \delta(\mathbf{q}, t) = 0, \quad (2.30)$$

$$\text{sowie: } \partial_t|_q \delta(\mathbf{q}, t) = -\frac{1}{a} \theta_u(\mathbf{q}, t). \quad (2.31)$$

Die allgemeine Lösung von Gleichung (2.30) lautet für den Fall des Einstein-De-Sitter Kosmos ( $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$ ):

$$\delta(\mathbf{q}, t) = A(\mathbf{q})a(t) + B(\mathbf{q})a^{-3/2}(t) . \quad (2.32)$$



$A(\mathbf{q})$  und  $B(\mathbf{q})$  sind Konstanten, die durch die Anfangsbedingungen festzulegen sind. Mit Gleichung (2.31) erhält man als allgemeine Lösung für die Pekuliarexpansionsrate:

$$\theta_u(\mathbf{q}, t) = -H(t) \left( A(\mathbf{q})a^2(t) - \frac{2}{3}B(\mathbf{q})a^{-1/2} \right) . \quad (2.33)$$

Der Zeitpunkt  $t_0$  sei so gewählt, dass die fallende Mode in obigem Lösungsansatz so weit abgeklungen ist, dass sie vernachlässigt werden kann. Damit gilt zur Zeit  $t_0$  ( $a(t_0) = 1$ ):

$$\theta_u(\mathbf{q}, t_0) = -H(t_0)A(\mathbf{q})a^2(t_0) \Rightarrow A(\mathbf{q}) = -\frac{1}{H(t_0)a^2(t_0)}\theta_u(\mathbf{q}, t_0) . \quad (2.34)$$

Für den Dichtekontrast erhält man damit zum Zeitpunkt  $t_0$ :

$$\delta(\mathbf{q}, t_0) = -\frac{1}{H(t_0)a(t_0)}\theta_u(\mathbf{q}, t_0) = -\frac{3t_0}{2}\theta_u(\mathbf{q}, t_0) . \quad (2.35)$$

Diese Korrelation des Dichtekontrastes mit der lokalen Expansionsrate zum Zeitpunkt  $t_0$  wird bei der Zel'dovich-Näherung verwendet.  $t_0$  bezeichnet dann den Anfangszeitpunkt, ab dem Strukturbildung in dieser Approximation verfolgt wird.

## Verhalten der Rotation des Geschwindigkeitsfeldes im linearen Regime

Die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes ist definiert als:

$$\vec{\omega} \equiv \frac{1}{2}\nabla_x \times \mathbf{v} = \frac{1}{2a}\nabla_q \times (Ha\mathbf{q} + \mathbf{u}) = \frac{1}{2a}\nabla_q \times \mathbf{u} .$$

Die totale zeitliche Ableitung der Rotation ergibt<sup>5</sup>:

$$\dot{\omega}_i = d_t\left(\frac{1}{2a}\nabla_q \times \mathbf{u}\right)_i = -H\omega_i + \frac{1}{2a}(\nabla_q \times \dot{\mathbf{u}})_i - \frac{1}{2a^2}\epsilon_{ijk}\partial_{q_j}u_l\partial_{q_l}u_k . \quad (2.36)$$

Die Eulergleichung (2.2) lautet in pekuliaren Größen:

$$\dot{\mathbf{u}} + H\mathbf{u} = \mathbf{w} . \quad (2.37)$$

Bildet man die Rotation dieser Gleichung, so gilt mit  $\nabla_q \times \mathbf{w} = 0$ :

$$\frac{1}{2a}\nabla_q \times \dot{\mathbf{u}} + H\frac{1}{2a}\nabla_q \times \mathbf{u} = \frac{1}{2a}\nabla_q \times \dot{\mathbf{u}} + H\vec{\omega} = 0 .$$

Mit Gleichung (2.36) erhält man eine Differentialgleichung für die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes:

$$\dot{\omega}_i = -2H\omega_i - \frac{1}{2a^2}\epsilon_{ijk}\partial_{q_j}u_l\partial_{q_l}u_k . \quad (2.38)$$

---

<sup>5</sup>Ableitungen bezüglich mitschwimmenden Koordinaten werden durch  $\frac{\partial}{\partial q_k} \equiv \partial_{q_k}$  gekennzeichnet.

Mit der totalen zeitlichen Ableitung in mitschwimmenden Koordinaten ergibt sich:

$$\partial_t|_q \omega_i + \frac{1}{a} \mathbf{u} \cdot \nabla_q \omega_i = -2H\omega_i - \frac{1}{2a^2} \epsilon_{ijk} \partial_{q_j} u_l \partial_{q_l} u_k.$$

Sowohl  $\vec{\omega}$  als auch  $\mathbf{u}$  sind pekuliare Größen. Obige Gleichung vereinfacht sich damit in linearer Theorie zu:

$$\partial_t|_q \vec{\omega}(\mathbf{q}, t) = -2H\vec{\omega}(\mathbf{q}, t). \quad (2.39)$$

Damit gilt im Einstein-De Sitter-Kosmos:

$$\vec{\omega}(\mathbf{q}, t) \propto \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-4/3} = \frac{1}{a^2}. \quad (2.40)$$

Das heisst, die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes verschwindet mit der Zeit. Daher kann die Pekuliarbeschleunigung parallel zur Pekuliargeschwindigkeit angenommen werden. Diese Tatsache ist wesentlich bei der Behandlung der Zel'dovich-Näherung, sowie bei der Festlegung der Anfangsbedingungen.

## 2.2.2 Zel'dovich-Näherung

Bei der Zel'dovich-Näherung handelt es sich um einen Ansatz für die Entwicklung des Trajektorien-Feldes im Rahmen der Lagrangeschen Beschreibung [71]. Die Lagrangesche Beschreibung wurde in Abschnitt 3.1.2 eingeführt. Alle Definitionen aus diesem Abschnitt haben im Folgenden Gültigkeit.

Für das reskalierte Abweichungsfeld  $\mathbf{p}$  (Gl.(2.24)) macht Zel'dovich einen Separationsansatz in Raum und Zeit. Der von ihm gefundene Ansatz lautet:

$$f^Z(\mathbf{X}, t) = a(t)(\mathbf{X} + \xi(t)\nabla_0\psi(\mathbf{X})). \quad (2.41)$$

Der Ansatz beschränkt die Allgemeinheit, indem er die Parallelität von Pekuliarbeschleunigung  $\mathbf{w}$  und Pekuliargeschwindigkeit  $\mathbf{u}$  voraussetzt. Das zeigt die Betrachtung der ersten und zweiten Zeitableitung der Trajektorien:

$$\mathbf{u}^Z = \mathbf{v}^Z - \mathbf{v}_H = \dot{a}\mathbf{X} + (a\xi)' \nabla_0\psi - \dot{a}\mathbf{X} = (a\xi)' \nabla_0\psi, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{w}^Z = \mathbf{g}^Z - \mathbf{g}_H = \ddot{a}\mathbf{X} + (a\xi)'' \nabla_0\psi - \ddot{a}\mathbf{X} = (a\xi)'' \nabla_0\psi. \quad (2.43)$$

Setzt man den Ansatz in die Störungsgleichung (2.29) ein, so gilt:

$$(2\mathbf{I} + 4\xi\mathbf{II} + 6\xi^2\mathbf{III})(2\dot{\xi}H + \ddot{\xi}) = -8\pi G\rho_H(\delta_0 - \xi\mathbf{I} - \xi^2\mathbf{II} - \xi^3\mathbf{III}). \quad (2.44)$$

Dabei bezeichnen  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{II}$ ,  $\mathbf{III}$ , die Invarianten der Matrix  $\psi_{|ij}$ . Bei Betrachtung der ersten Ordnung vernachlässigt man Terme, die quadratisch oder kubisch in  $\psi_{|ij}$  sind, das heisst  $\mathbf{II}$ ,  $\mathbf{III}$ . Damit vereinfacht sich obige Gleichung:

$$2\mathbf{I}(2\dot{\xi}H + \ddot{\xi}) = -8\pi G\rho_H(\delta_0 - \xi\mathbf{I}). \quad (2.45)$$

Diese Gleichung erhält man ebenso in Lagrangescher Störungstheorie erster Ordnung, bei der für  $\mathbf{p}$  eine Reihenentwicklung  $\mathbf{p} = \sum_i \varepsilon^i \xi_i \nabla_0 \psi_i$  verwendet wird. Im allgemeinen können Dichte und Geschwindigkeit der Fluidelemente als Anfangsbedingungen unabhängig vorgegeben werden. Wählt man jedoch

$$\delta = -\Delta_0 \psi = -\mathbf{I}, \quad (2.46)$$

so erhält man für  $\xi$  die Differentialgleichung:

$$\ddot{\xi} + 2H\dot{\xi} - 4\pi G \varrho_H (\xi + 1) = 0. \quad (2.47)$$

Setzt man  $b \equiv \xi + 1$  und vergleicht die daraus resultierende Differentialgleichung für  $b(t)$  mit der Differentialgleichung für den Dichtekontrast in linearer Eulerscher Störungstheorie, so stellt man Übereinstimmung fest. Das zeitliche Verhalten von  $b(t)$  ist deshalb gleich dem zeitlichen Verhalten des Dichtekontrastes in linearer Eulerscher Theorie. Es gilt daher für  $\xi$  (mit:  $\Lambda = 0; k = 0$ ):

$$\xi(t) = A(a - 1) + B(a^{-3/2} - 1). \quad (2.48)$$

$A(\mathbf{X})$  und  $B(\mathbf{X})$  sind noch festzulegende Konstanten in der Zeit. Im Unterschied zu der Lagrangeschen Störungstheorie erster Ordnung vernachlässigt Zel'dovich die fallende Mode  $B(a^{-3/2} - 1)$ . Die Zel'dovich-Trajektorien stellen somit eine Unterklasse von Lösungen Lagrangescher Störungstheorie erster Ordnung dar [25]. Mit der Forderung  $A = 1$  gilt:

$$f^Z(\mathbf{X}, t) = a (\mathbf{X} + (a - 1) \nabla_0 \psi) \quad \text{mit} \quad a = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3}. \quad (2.49)$$

Man kann die Argumentation auch umkehren und Gleichung (2.49) als Ansatz verwenden. Dann folgt  $\dot{\xi} = \dot{a}$ ,  $\ddot{\xi} = \ddot{a}$ . Mit Annahme eines Einstein-De-Sitter Hintergrunds liefert Gleichung (2.45) zum Zeitpunkt  $t_0$  dann:

$$l\delta = -\Delta_0 \psi = -\mathbf{I}. \quad (2.50)$$

Mit Gleichung (2.42) kann man eine Beziehung zwischen dem Dichtekontrast und der Pekuliarbeschleunigung zum Zeitpunkt  $t_0$  angeben:

$$\nabla_0 \mathbf{u}^Z = -\frac{2}{3t_0} \delta. \quad (2.51)$$

Die Beschränkung auf die wachsende Mode impliziert also bereits diese Beziehung. Da außerdem die Rotation von  $\mathbf{u}$  verschwindet, bleibt als Anfangsbedingung das Dichtefluktuationfeld  $\delta$  übrig. Die so erzwungene Reduzierung der Freiheitsgrade des Systems ist in unserem Fall günstig, da ohnehin keine Anfangsdaten aus Beobachtungen für die Anfangsgeschwindigkeiten der Fluidelemente zur Verfügung stehen.

Darüber hinaus sind die gemachten Annahmen physikalisch sinnvoll, denn in der Eulerschen, linearen Theorie stellt sich die Beziehung (2.51) nach dem Abklingen der fallenden Mode nach einer gewissen Zeit von selbst ein.

Ein Nachteil ist, dass die lineare Lagrangesche Theorie die Beschleunigung vernachlässigt, die als Folge der Dichteänderung auf die Flüssigkeitselemente wirkt. Das heisst Strukturen laufen wieder auseinander und ihre Bildung erfolgt etwas verlangsamt. Dennoch liefert die Zel'dovich-Näherung bis zum Zeitpunkt des 'Shell-Crossing' Voraussagen, die besonders bei glatten Anfangsfeldern erstaunlich gut mit N-Körper-Rechnungen übereinstimmen.

Die Zel'dovich-Näherung ist sogar exakt, wenn die pekulare Bewegung der Fluidelemente und die Änderung des Dichtekontrastes auf eine spezielle Raumrichtung beschränkt werden [26]. Bei geeigneter Wahl des Bezugssystems verschwinden dann alle Komponenten der Matrix  $\psi_{ij}$  bis auf  $\psi_{11}$ . Damit ist sowohl die zweite Invariante **II** als auch die dritte Invariante **III** von  $\psi_{ij}$  gleich null und die Gleichung (2.45) gilt exakt. Somit stellt die Zel'dovich-Näherung eine Unterklasse von Lösungen mit ebener Symmetrie dar, bei der die Anfangspekulargeschwindigkeit mit dem Anfangsdichtekontrast über die Beziehung (2.51) in Verbindung steht.

## 2.3 Regionale Beschreibung

Will man Strukturbildungsszenarien verstehen, so muss man die Freiheitsgrade des Systems reduzieren. Der Ansatz, der hier verfolgt werden soll, ist die Beschreibung mit auf einer Raumdomäne gemittelten Größen. Dabei hilft die Lagrangesche Sichtweise: Betrachtet man eine Raumdomäne  $D$  zur Zeit  $t$ , so ist das räumliche Mittel eines beliebigen Tensorfeldes  $A$  definiert als [21]:

$$\langle A(\mathbf{x}, t) \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} A(\mathbf{x}, t) d^3x. \quad (2.52)$$

Das Lagrangesche Mitteln zeichnet sich dadurch aus, dass dabei die Domäne den einzelnen Fluidelementen folgt, wobei die Masse innerhalb der Domäne erhalten bleibt, ihre Form sich aber beliebig ändern kann. Hingegen bleibt beim Eulerschen Mittel die Form erhalten, es findet jedoch Materieaustausch statt.

### 2.3.1 Kommutationsregel

Um die totale zeitliche Ableitung einer gemittelten Größe zu berechnen, transformieren wir auf Lagrange-Koordinaten. Integration über ein zeitabhängiges Gebiet

$\mathcal{D} = \mathcal{D}(t)$ , oder kurz  $\mathcal{D}_t$ , reduziert sich auf die Integration über  $\mathcal{D}_{t_0}$ .

$$\begin{aligned} d_t \langle A(\mathbf{x}, t) \rangle_{\mathcal{D}} &= d_t \left( \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}_t} A(\mathbf{x}, t) d^3x \right) = d_t \left( \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}_{t_0}} A(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t) d^3X \right) \\ &= -\frac{\dot{V}_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}}} \langle A(\mathbf{x}, t) \rangle_{\mathcal{D}} + \langle \dot{A}(\mathbf{x}, t) \rangle_{\mathcal{D}} + \langle A(\mathbf{x}, t) \frac{\dot{J}}{J} \rangle_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Setzt man das Integral der Dichte (2.21) in die Kontinuitätsgleichung der Form (2.16) ein, so erhält man:

$$\frac{\dot{J}}{J} = \theta.$$

Den Term  $\dot{V}_{\mathcal{D}}/V_{\mathcal{D}}$  kann man damit weiter umformen:

$$\dot{V}_{\mathcal{D}} = d_t \int_{\mathcal{D}_t} d^3x = \int_{\mathcal{D}_0} \dot{J} d^3X = \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\dot{J}}{J} d^3x = \int_{\mathcal{D}_t} \theta d^3x.$$

Und es gilt:

$$\frac{\dot{V}_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}}} = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}_t} \theta d^3x = \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}.$$

Daher gilt für ein beliebiges auf der Domäne  $D$  definiertes Tensorfeld  $A$  die Kommutationsregel [21]:

$$d_t \langle A \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \dot{A} \rangle_{\mathcal{D}} = \langle A\theta \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}} \langle A \rangle_{\mathcal{D}}. \quad (2.53)$$

Die Mittelwertbildung kommutiert also nicht mit der Zeitentwicklung. Diese Tatsache zeigt, dass die als homogen angenommene Dichte in der Friedmann-Gleichung nicht ohne weiteres mit der gemittelten Dichte im Universum gleichgesetzt werden darf.

### 2.3.2 Mittelung des Euler-Newton-System in kinematischen Variablen

Als Nächstes mitteln wir die Gleichungen für die Zeitentwicklung der kinematischen Größen in der Form (2.13)-(2.16). Unter Verwendung von (2.53) ergibt sich:

$$d_t \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = -\langle \theta \rangle_{\mathcal{D}} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} \quad (2.54)$$

$$d_t \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}} = \Lambda - 4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + \frac{2}{3} \langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - (\langle \theta \rangle_{\mathcal{D}})^2 + 2 \langle \omega^2 - \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}} \quad (2.55)$$

$$d_t \langle \omega_i \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{1}{3} \langle \omega_i \theta \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \omega_i \rangle_{\mathcal{D}} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}} + \langle \sigma_{ij} \omega_i \rangle_{\mathcal{D}} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} d_t \langle \sigma_{ij} \rangle_{\mathcal{D}} &= \frac{1}{3} \langle \theta \sigma_{ij} \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \omega_i \rangle_{\mathcal{D}} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \sigma_{ik} \omega_{kj} \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \omega_{ik} \omega_{kj} \rangle_{\mathcal{D}} \\ &\quad + \frac{2}{3} \langle \sigma^2 - \omega^2 \rangle_{\mathcal{D}} \delta_{ij} + \langle E_{ij} \rangle_{\mathcal{D}}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Zur Herleitung der Gleichung (2.56) wurde  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$  mit  $\omega_{ij} = -\epsilon_{ijk} \omega_k$  benutzt.

### 2.3.3 Verallgemeinerte Friedmann–Gleichung

Wir interessieren uns für die mittlere Expansionsrate eines beliebigen Gebietes  $\mathcal{D}_t$ . Relevant ist hierfür die gemittelte Raychaudhuri-Gleichung (2.55). Definiert man den Skalenfaktor eines einfach-zusammenhängenden Gebietes durch

$$a_{\mathcal{D}}^3 \equiv \frac{V_{\mathcal{D}}}{V_0}, \text{ wobei } V_0 \equiv V_{\mathcal{D}}(t_0),$$

so folgt für die mittlere Expansionsrate:

$$\langle \theta \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\dot{V}_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}}} = 3 \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}.$$

Damit formt man die gemittelte Raychaudhuri-Gleichung um:

$$3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} + 4\pi G \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} - \Lambda = \frac{2}{3} (\langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}^2) + 2 \langle \omega^2 - \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}. \quad (2.58)$$

Auf der linken Seite steht die Friedmann-Gleichung (2.8) für eine mittlere Quellendichte  $\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{M}{a_{\mathcal{D}}^3(t)V_0}$ . Die rechte Seite stellt eine Form der Rückwirkung auf den Skalenfaktor des Gebiets dar. Im Folgenden wird er mit dem Buchstaben  $\mathcal{Q}$  gekennzeichnet:

$$\mathcal{Q} \equiv \frac{2}{3} (\langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}^2) + 2 \langle \omega^2 - \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}. \quad (2.59)$$

Die obige Gleichung stellt damit eine verallgemeinerte Friedmann-Gleichung für inhomogene Domänen dar. In späteren Rechnungen wird  $\mathcal{Q}$  häufig als Funktion der ersten und zweiten Invarianten des Geschwindigkeitsgradienten  $v_{i,j}$  verwendet. Dazu sind folgende Ausdrücke nützlich [21]:

$$\mathbf{I}(v_{i,j}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{v} = \theta \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{II}(v_{i,j}) &\equiv \frac{1}{2} ((v_{i,i})^2 - v_{i,j}v_{j,i}) = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) \\ &= \omega^2 - \sigma^2 + \frac{1}{3}\theta^2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{III}(v_{i,j}) &\equiv \frac{1}{3} v_{i,j}v_{j,k}v_{k,i} - \frac{1}{2} (v_{i,i})(v_{i,j}v_{j,i}) + \frac{1}{6} (v_{i,i})^3 \\ &= \frac{1}{3} \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v})\mathbf{v} - (\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \\ &= \frac{1}{9}\theta^3 + 2\theta(\sigma^2 + \frac{1}{3}\omega^2) + \sigma_{i,j}\sigma_{j,k}\sigma_{k,i} - \sigma_{i,j}\omega_i\omega_j. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Der Rückwirkungsterm erhält dann folgende Gestalt:

$$\mathcal{Q} = 2 \langle \mathbf{II}(v_{i,j}) \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{2}{3} \langle \mathbf{I}(v_{i,j}) \rangle_{\mathcal{D}}^2. \quad (2.63)$$

Da die erste und zweite Invariante als Divergenz geschrieben werden können, lässt sich die Berechnung des Rückwirkungsterms auf die Bestimmung von Vektorflüssen durch den Rand der Domäne reduzieren.

Aus den Gleichungen (2.60), (2.61) und (2.63), sowie unter Verwendung des Gaußschen Satzes folgt:

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\partial\mathcal{D}} (\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \right)^2. \quad (2.64)$$

Um zu zeigen, welche Rolle die homogen-isotrope Hintergrundexpansion bei der Berechnung der Rückwirkung spielt, zerlegt man die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in Pekuliar-Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  und Hubble-Fluss  $H\mathbf{x}$ :  $\mathbf{v} = H\mathbf{x} + \mathbf{u}$ . Damit gilt<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} (\langle \mathbf{I}(v_{i,j}) \rangle_{\mathcal{D}})^2 &= \frac{2}{3} \langle 3H + \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{D}}^2 \\ &= 6H^2 + \frac{2}{3} \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{D}}^2 + 4H \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{D}} \\ 2 \langle \mathbf{II}(v_{i,j}) \rangle_{\mathcal{D}} &= \langle \nabla \cdot (2H^2\mathbf{x} + 2H\mathbf{u} + H(\mathbf{x}(\nabla \cdot \mathbf{u}))) \rangle_{\mathcal{D}} \\ &\quad - \langle (\mathbf{x} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \rangle_{\mathcal{D}} \\ &= 6H^2 + 4H \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{D}} + 2 \langle \mathbf{II}(u_{i,j}) \rangle_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Der Rückwirkungsterm hat in pekuliaren Größen ausgedrückt die gleiche Form wie in absoluten Geschwindigkeiten:

$$\mathcal{Q} = 2 \langle \mathbf{II}(u_{i,j}) \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{2}{3} \langle \mathbf{I}(u_{i,j}) \rangle_{\mathcal{D}}^2 \quad (2.65)$$

Das heisst nur Abweichungen vom Hubble-Fluss tragen zur Rückwirkung bei.

### 2.3.4 Qualitative Diskussion der verallgemeinerten Friedmann-Gleichung

Für den beobachtbaren Kosmos ist zweifelsohne die Friedmann-Gleichung mit Rückwirkungsterm die korrekte Beschreibung. Daher muss man dem formal Rechnung tragen.

Der Rückwirkungsterm kann als Quellenterm gesehen werden, der die Expansion beschleunigt oder dämpft. Man definiert daher die effektive Dichte:

$$4\pi G \varrho_{\text{eff}} \equiv 4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{2}{3} (\langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}^2) - 2 \langle \omega^2 - \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}. \quad (2.66)$$

---

<sup>6</sup>Obwohl pekuliare Größen oft in Zusammenhang mit einer Transformation auf mitschwimmende Koordinaten eingeführt werden, seien, der Einheitlichkeit halber, in diesem Kapitel alle auftretenden Größen in Eulerschen, nicht mitschwimmenden Koordinaten gegeben.

Die Friedmann-Gleichung mit der effektiven Dichte lautet:

$$3\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}(t)}{a_{\mathcal{D}}(t)} + 4\pi G\rho_{\text{eff}} - \Lambda = 0. \quad (2.67)$$

Jetzt kann man den Rückwirkungsterm interpretieren: Die Varianz der Expansionsrate ist eine positive Größe. Sie erniedrigt die effektive Dichte, und führt zu einem langsameren Kollabieren der Domäne. Das selbe gilt für die Rotationsrate. Eine Scherung aber erhöht die Dichte und beschleunigt den Kollaps. Bilden sich Strukturen, so verschwindet weder die lokale Scherung noch die Varianz der Expansionsrate auf dem ganzen Gebiet. Ein Abwägen dieser beiden Größen wird also das Vorzeichen der Rückwirkung auf die Zeitentwicklung des Skalenfaktors geben. Die Rotationsrate  $\omega$  spielt auf großen Skalen eine geringe Rolle, da sie im Lauf der Expansion abgeschwächt wird. In der Größenordnung von Galaxien dagegen kann sie zum entscheidenden Term werden. In einer Spiralgalaxie beispielsweise wirkt die Rotation der Kontraktion entgegen. Das negative Vorzeichen von  $\langle\omega^2\rangle_{\mathcal{D}}$  ist damit verständlich.

Es ist notwendig, bei der Diskussion der kosmologischen Parameter den Rückwirkungsterm miteinzubeziehen. Die verallgemeinerte Friedmann-Gleichung in integrierter Form lautet:

$$\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}^2}{a_{\mathcal{D}}^2} + \frac{k_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}^2} - \frac{8\pi GM_{\mathcal{D}}}{3a_{\mathcal{D}}^3 V_0} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{1}{3a_{\mathcal{D}}^2} \int_{t_0}^t dt \tilde{Q} \frac{d}{dt} a_{\mathcal{D}}^2(\tilde{t}). \quad (2.68)$$

Man definiert, wie in der Kosmologie üblich, folgende Parameter, wobei in unserem Fall ein Parameter, der den Rückwirkungsterm enthält, dazukommt.

$$\begin{aligned} \Omega_m^{\mathcal{D}} &\equiv \frac{8\pi G\langle\rho\rangle_{\mathcal{D}}}{3H_{\mathcal{D}}^2} & \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} &\equiv \frac{\Lambda}{3H_{\mathcal{D}}^2} & \Omega_k^{\mathcal{D}} &\equiv -\frac{k_{\mathcal{D}}}{H_{\mathcal{D}}^2 a_{\mathcal{D}}^2} \\ \Omega_Q^{\mathcal{D}} &\equiv \frac{1}{3a_{\mathcal{D}}^2 H_{\mathcal{D}}^2} \int_{t_0}^t dt \tilde{Q} \frac{d}{dt} a_{\mathcal{D}}^2(\tilde{t}). \end{aligned}$$

So gilt mit Gleichung (2.68):

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} + \Omega_k^{\mathcal{D}} + \Omega_Q^{\mathcal{D}} = 1. \quad (2.69)$$

Die experimentelle Bestimmung der Parameter enthält damit einen weiteren Unsicherheitsfaktor, der auch bei Behandlung des Dunkle-Materie-Problems Beachtung finden muss. Alle Dichteparameter sind abhängig von der Mittelungsdomäne; das gilt insbesondere auch für den Krümmungsparameter  $\Omega_k^{\mathcal{D}}$  als Integrationskonstante, die für jede Raumdomäne verschieden sein kann. Bei der quantitativen Diskussion werden wir einige Beispiele für die Entwicklung der regionalen kosmologischen Parameter betrachten.



## 2.4 Rückwirkung

Wie im letzten Kapitel festgestellt wurde, kann man für beliebige Domänen eine Friedmann-Gleichung angeben. Um Abweichungen vom Verhalten einer Domäne im homogen-isotropen Kosmos festzustellen, ist eine Berechnung der Rückwirkung nötig. Zur näherungsweisen Berechnung werden die lineare Eulersche Theorie sowie die Zel'dovich-Näherung herangezogen.

### 2.4.1 Rückwirkung in Linearer Theorie

Zunächst ist eine Transformation auf mitschwimmende Koordinaten nötig. Mitteln eines beliebigen Tensors  $A$  über ein mitschwimmendes Gebiet  $\mathcal{D}_q$  hängt mit dem Mittel über  $\mathcal{D}$  wie folgt zusammen:

$$\langle A \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} A d^3x = \frac{a^3}{a_{\mathcal{D}}^3} \frac{1}{V_0} \int_{\mathcal{D}_q} A d^3q. \quad (2.70)$$

(Hierbei wurde die Definition von  $a_{\mathcal{D}}^3 \equiv \frac{V_{\mathcal{D}}}{V_0}$  benutzt.)

Für die erste und zweite Invariante erhält man in mitschwimmenden Koordinaten:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(u_{i,j}) &= \frac{1}{a} \mathbf{I}(\partial_{q_j} u_i), \\ \mathbf{II}(u_{i,j}) &= \frac{1}{a^2} \mathbf{II}(\partial_{q_j} u_i). \end{aligned}$$

Damit berechnet man den Rückwirkungsterm in pekuliaren Größen als Funktion mitschwimmender Koordinaten mit Hilfe von Gleichung (2.65) zu:

$$\mathcal{Q} = \frac{a}{a_{\mathcal{D}}^3} \frac{2}{V_0} \int_{\mathcal{D}_q} \mathbf{II}(\partial_{q_j} u_i) d^3q - \frac{a^4}{a_{\mathcal{D}}^6} \frac{2}{3V_0^2} \left( \int_{\mathcal{D}_q} \mathbf{I}(\partial_{q_j} u_i) d^3q \right)^2. \quad (2.71)$$

Da in linearer Theorie die Wirbel des Pekuliargeschwindigkeitsfeldes, nach Gleichung (2.40), im Laufe der Zeit abnehmen, kann man für  $t > t_0$  die Pekuliargeschwindigkeit allein aus ihren Quellen bestimmen. Damit ist durch Gleichung (2.33) die Zeitentwicklung von  $\mathbf{u}$  festgelegt:

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}, t) = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1/3} \overset{\circ}{\mathbf{u}}(\mathbf{q}). \quad (2.72)$$

Für die erste Invariante des Pekuliargeschwindigkeitsfeldes erhält man:

$$\mathbf{I}(\mathbf{q}, t) = \theta_u(\mathbf{q}, t) \equiv \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1/3} \overset{\circ}{\mathbf{I}}.$$

Für die zweite Invariante des Pekuliargeschwindigkeitsfeldes gilt dann:

$$\mathbf{II}(\partial_{q_j} u_i) = \frac{1}{2} ((\partial_{q_j} u_i)^2 - \partial_{q_j} u_i \partial_{q_i} u_j) \equiv \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \overset{\circ}{\mathbf{II}}.$$

Der Rückwirkungsterm in linearer Theorie hat damit folgende Form:

$$Q_{\mathcal{D}}^{lin} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2/3} \left( \frac{a^3}{a_D^3} \frac{2}{V_0} \int_{\mathcal{D}_q} \overset{\circ}{\mathbf{II}} d^3 q - \frac{a^6}{a_D^6} \frac{2}{3V_0^2} \left( \int_{\mathcal{D}_q} \overset{\circ}{\mathbf{I}} d^3 q \right)^2 \right). \quad (2.73)$$

Ein Problem stellt die Integration über das mitschwimmende Gebiet  $\mathcal{D}_q$  dar. Zwar bezeichnen  $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$  und  $\overset{\circ}{\mathbf{II}}$  Anfangswerte, diese werden jedoch über eine mitschwimmende Domäne zum Zeitpunkt  $t$  integriert, die sich aus  $\mathcal{D}_0 \equiv \mathcal{D}(t_0)$  entwickelt hat. Hier kann man nur im Kontext der Lagrangeschen Theorie argumentieren, da nur in dieser Theorie die Entwicklung der Domäne mit Hilfe der Teilchentrajektorien nachvollzogen werden kann. Man kann zeigen, dass der Effekt der sich wandelnden Domäne für geringe Abweichungen von der Homogenität, zu vernachlässigen ist. Da die lineare Theorie ausschließlich in diesem Bereich Gültigkeit besitzt, gilt näherungsweise:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_0} \int_{\mathcal{D}_q} \overset{\circ}{\mathbf{II}} d^3 q &\approx \frac{1}{V_0} \int_{\mathcal{D}_0} \overset{\circ}{\mathbf{II}} d^3 X \equiv \langle \overset{\circ}{\mathbf{II}} \rangle_{\mathcal{D}_0}, \\ \frac{1}{V_0} \int_{\mathcal{D}_q} \overset{\circ}{\mathbf{I}} d^3 q &\approx \frac{1}{V_0} \int_{\mathcal{D}_0} \overset{\circ}{\mathbf{I}} d^3 X \equiv \langle \overset{\circ}{\mathbf{I}} \rangle_{\mathcal{D}_0}. \end{aligned}$$

Führt man  $\varepsilon$  als Abweichung des Skalenfaktors vom homogenen Verhalten ein:

$$\varepsilon \equiv \frac{a - a_D}{a_D}, \quad (2.74)$$

so erhält man für den Rückwirkungsterm:

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} Q_{\mathcal{D}}^{lin} &= \left( 2\langle \overset{\circ}{\mathbf{II}} \rangle_{\mathcal{D}_0} - \frac{2}{3}\langle \overset{\circ}{\mathbf{I}} \rangle_{\mathcal{D}_0}^2 \right) + \varepsilon \left( 6\langle \overset{\circ}{\mathbf{II}} \rangle_{\mathcal{D}_0} - 4\langle \overset{\circ}{\mathbf{I}} \rangle_{\mathcal{D}_0}^2 \right) \\ &+ \varepsilon^2 \left( 6\langle \overset{\circ}{\mathbf{II}} \rangle_{\mathcal{D}_0} - 10\langle \overset{\circ}{\mathbf{I}} \rangle_{\mathcal{D}_0}^2 \right) + \varepsilon^3 \left( 2\langle \overset{\circ}{\mathbf{II}} \rangle_{\mathcal{D}_0} - 13\frac{1}{3}\langle \overset{\circ}{\mathbf{I}} \rangle_{\mathcal{D}_0}^2 \right) \\ &- \varepsilon^4 10\langle \overset{\circ}{\mathbf{I}} \rangle_{\mathcal{D}_0}^2 - \varepsilon^5 4\langle \overset{\circ}{\mathbf{I}} \rangle_{\mathcal{D}_0}^2 - \varepsilon^6 \frac{2}{3}\langle \overset{\circ}{\mathbf{I}} \rangle_{\mathcal{D}_0}^2. \end{aligned}$$

In linearer Theorie werden die relativen Abweichungen  $\varepsilon$  des Skalenfaktors der Domäne  $a_D$  vom homogenen Verhalten als gering angenommen. Betrachtet man die nullte Ordnung in  $\varepsilon$  so ergibt sich:

$$Q_{cD}^{lin} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2/3} \left( 2\langle \overset{\circ}{\mathbf{II}} \rangle_{\mathcal{D}_0} - \frac{2}{3}\langle \overset{\circ}{\mathbf{I}} \rangle_{\mathcal{D}_0}^2 \right) = \frac{\overset{\circ}{Q}(\mathbf{X})}{a(t)}. \quad (2.75)$$

Man erkennt, dass die Rückwirkung mit der Zeit abnimmt. Dieses Ergebnis war zu erwarten, da der Rückwirkungsterm ja gerade einen Ausdruck für die Nichtlinearitäten in den Grundgleichungen darstellt, die in linearer Theorie vernachlässigt werden. Im nächsten Schritt benutzen wir zur Berechnung der Rückwirkung eine Näherung die es erlaubt, Strukturbildung bis in den nichtlinearen Bereich zu verfolgen. Diese Näherung basiert auf Lagrangescher Störungstheorie und ist deshalb der Lagrangeschen Mittelungsprozedur angemessener.

## 2.4.2 Rückwirkung in der Zel'dovich-Näherung

Um den Rückwirkungsterm in der Zel'dovich-Näherung zu berechnen, benutzt man am besten folgende Form (siehe: [64], [46]):

$$\mathcal{Q} = 2\langle \mathbf{II}(v_{i,j}) \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{2}{3}\langle \mathbf{I}(v_{i,j}) \rangle_{\mathcal{D}}^2. \quad (2.76)$$

Da die Trajektorienschar bis zum Zeitpunkt des ‘‘Shell-Crossing’’ eine eindeutige Abbildung auf ein Gebiet zur Zeit  $t_0$  ermöglicht, kann die Mittelwertbildung über eine Ausgangsdomäne  $D_0$  erfolgen: Es gilt für ein beliebiges, auf dem Gebiet definiertes Tensorfeld  $A(\mathbf{x}, t)$ :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{\mathcal{D}} &= \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}_t} A d^3x = \frac{V_0}{V_{\mathcal{D}}V_0} \int_{\mathcal{D}_0} AJ(\mathbf{X}, t) d^3X \\ &= \frac{V_0}{V_{\mathcal{D}}} \langle AJ(\mathbf{X}, t) \rangle_{\mathcal{D}_0}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Der Skalenfaktor der Domäne sei definiert als  $a_{\mathcal{D}}^3 \equiv \frac{V_{\mathcal{D}}}{V_0}$ . Damit gilt:

$$\mathcal{Q} = \frac{2}{a_{\mathcal{D}}^3} \langle \mathbf{II}(v_{i,j})J \rangle_{\mathcal{D}_0} - \frac{2}{3a_{\mathcal{D}}^6} \langle \mathbf{I}(v_{i,j})J \rangle_{\mathcal{D}_0}^2. \quad (2.78)$$

Nützlich zur Berechnung ist die Einführung von Funktionaldeterminanten:

$$\mathcal{J}(A, B, C) \equiv \frac{\partial(A, B, C)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = \epsilon_{ijk} A|_i B|_j C|_k.$$

Dabei bezeichnet  $|_i \equiv \frac{\partial}{\partial X_i}$  die Ableitung nach Lagrangeschen Koordinaten. Der Eulersche Geschwindigkeitsgradient in Lagrangekoordinaten lautet:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k} \frac{1}{2J} \epsilon_{klm} \epsilon_{j pq} \frac{\partial f_p}{\partial X_l} \frac{\partial f_q}{\partial X_m} = \frac{1}{2J} \epsilon_{j p q} \mathcal{J}(v_i, f_p, f_q).$$

Damit kann man die Invarianten als Funktionaldeterminanten schreiben [21]:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}(v_{i,j}) &= \frac{1}{2J} \epsilon_{ijk} \mathcal{J}(\dot{f}_i, \dot{f}_j, \dot{f}_k) \\ \mathbf{II}(v_{i,j}) &= \frac{1}{2J} \epsilon_{ijk} \mathcal{J}(\dot{f}_i, \dot{f}_j, f_k) \\ \mathbf{III}(v_{i,j}) &= \frac{1}{6J} \epsilon_{ijk} \mathcal{J}(\dot{f}_i, \dot{f}_j, \dot{f}_k).\end{aligned}$$

Der Rückwirkungsterm lautet dann:

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{a_D^3} \langle \epsilon_{ijk} \mathcal{J}(\dot{f}_i, \dot{f}_j, \dot{f}_k) \rangle_{\mathcal{D}_0} - \frac{1}{6a_D^6} \langle \epsilon_{ijk} \mathcal{J}(\dot{f}_i, \dot{f}_j, \dot{f}_k) \rangle_{\mathcal{D}_0}^2. \quad (2.79)$$

Um die Funktionaldeterminanten zu berechnen, ist es nützlich, von folgenden Rechenregeln für Determinanten Gebrauch zu machen:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(A + D, B, C) &= \mathcal{J}(A, B, C) + \mathcal{J}(D, B, C), \\ \mathcal{J}(A, B, C) &= -\mathcal{J}(A, C, B), \\ \epsilon_{ijk} \mathcal{J}(A_i, B_j, C_k) &= \epsilon_{ijk} \mathcal{J}(A_i, C_j, B_k).\end{aligned}$$

Setzt man den Zel'dovich-Ansatz der Form (2.49) ein, so folgt mit  $c(t) \equiv a(t)\xi(t)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\dot{f}_i, \dot{f}_j, \dot{f}_k) &= \dot{a}a^2 \mathcal{J}(X_i, X_j, X_k) + \dot{c}c^2 \mathcal{J}(\psi_{|i}, \psi_{|j}, \psi_{|k}) \\ &\quad + (2a\dot{a}c + a^2\dot{c}) \mathcal{J}(X_i, X_j, \psi_{|k}) + (2a\dot{c}c + \dot{a}c^2) \mathcal{J}(X_i, \psi_{|j}, \psi_{|k}), \\ \mathcal{J}(\dot{f}_i, \dot{f}_j, f_k) &= \dot{a}^2a \mathcal{J}(X_i, X_j, X_k) + \dot{c}^2c \mathcal{J}(\psi_{|i}, \psi_{|j}, \psi_{|k}) \\ &\quad + (2\dot{a}a\dot{c} + \dot{a}^2c) \mathcal{J}(X_i, X_j, \psi_{|k}) + (2\dot{a}\dot{c}c + a\dot{c}^2) \mathcal{J}(X_i, \psi_{|j}, \psi_{|k}).\end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminanten kann man als Invarianten des Tensorfeldes  $\psi_{|ij}$  schreiben:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} \mathcal{J}(X_i, X_j, X_k) &= 6, \\ \epsilon_{ijk} \mathcal{J}(X_i, X_j, \psi_{|k}) &= 2\mathbf{I}(\psi_{|ij}), \\ \epsilon_{ijk} \mathcal{J}(X_i, \psi_{|j}, \psi_{|k}) &= 2\mathbf{II}(\psi_{|ij}), \\ \epsilon_{ijk} \mathcal{J}(\psi_{|i}, \psi_{|j}, \psi_{|k}) &= 6\mathbf{III}(\psi_{|ij}).\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung definiert man:

$$K \equiv \frac{\dot{\xi}}{\xi}, \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad \mathbf{I}(\psi_{|ij}) \equiv \mathbf{I}_0, \quad \mathbf{II}(\psi_{|ij}) \equiv \mathbf{II}_0, \quad \mathbf{III}(\psi_{|ij}) \equiv \mathbf{III}_0.$$

Damit erhält man die zur Berechnung des Rückwirkungsterms notwendigen Größen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3} \epsilon_{ijk} \mathcal{J}(\dot{f}_i, \dot{f}_j, \dot{f}_k) &= 6H + 2\mathbf{I}_0 \xi(3H + K) \\ &\quad + 2\mathbf{II}_0 \xi^2(3H + 2K) \\ &\quad + 6\mathbf{III}_0 \xi^3(H + K), \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3} \epsilon_{ijk} \mathcal{J}(\dot{f}_i, \dot{f}_j, f_k) &= 6H^2 + 2\mathbf{I}_0 \xi(3H^2 + 2HK) \\ &\quad + 2\mathbf{II}_0 \xi^2(3H^2 + 4HK + K^2) \\ &\quad + 6\mathbf{III}_0 \xi^3(H^2 + 2HK + K^2). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Die Variablen  $H, K, \xi, a$  sind nur Funktionen der Zeit, die auftretenden Invarianten sind Funktionen von  $\psi_{|ij}$ , das heisst von Ableitungen eines skalaren Anfangsfeldes als Funktionen der Lagrange-Koordinaten.

Um den gesamten Rückwirkungsterm in der Zel'dovich-Näherung darzustellen, nützt man aus, dass  $a_{\mathcal{D}}$  in dieser Näherung bereits gegeben ist:

$$a_{\mathcal{D}}^3 = \int_{\mathcal{D}_0} J d^3 X.$$

Mit der Funktionaldeterminanten in der Zel'dovich-Näherung

$$J^Z = a^3(1 + \xi \mathbf{I}_0 + \xi^2 \mathbf{II}_0 + \xi^3 \mathbf{III}_0), \quad (2.82)$$

erhält man:

$$(a_{\mathcal{D}}^Z)^3 = a^3(1 + \xi \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} + \xi^2 \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} + \xi^3 \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}). \quad (2.83)$$

Hier zeigt sich auch die Möglichkeit, das dynamische Verhalten des Skalenfaktors einer Domäne rein kinematisch zu bestimmen.

Die einfachste Form der Rückwirkung in der Zel'dovich-Näherung ergibt sich, wenn man  $\left(\frac{a}{a_{\mathcal{D}}}\right)^6$  in Gleichung (2.79) ausklammert und  $a_{\mathcal{D}}$  mit (2.83) einsetzt:

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{D}}^Z &= \frac{\xi^2}{(1 + \xi \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} + \xi^2 \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} + \xi^3 \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0})^2} \\ &\quad \times \left[ \begin{aligned} &\left( 2 \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} - \frac{2}{3} \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}^2 \right) \\ &+ \xi \left( 6 \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} - \frac{2}{3} \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} \right) \\ &+ \xi^2 \left( 2 \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} - \frac{2}{3} \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}^2 \right) \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Für ein Einstein-De-Sitter Modell gilt:  $\xi \propto a^{-1}$ . Vor dem Term in eckigen Klammern steht damit ein universeller Dämpfungsfaktor. Vernachlässigt man  $\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}$  und  $\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}$  so erhält man das gleiche dynamische Verhalten wie in linearer Eulerscher Theorie.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass unser so gewonnener Rückwirkungsterm in sphärischer Symmetrie verschwindet! Man kann das leicht überprüfen, indem man die Relationen:

$$\langle \mathbf{III} \rangle_{\mathcal{B}} = \frac{1}{27} \langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{B}}^3 \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{B}}^2, \quad (2.85)$$

die im Abschnitt (4.1.1) hergeleitet werden, in obige Gleichung einsetzt. Damit ist unsere Näherung im Falle von sphärischer Symmetrie bereits exakt, obwohl wir eine Approximation eingesetzt haben, die nur für planare Symmetrie exakt ist.

### 2.4.3 Rückwirkung bei ebener Symmetrie

Die Zel'dovich Näherung ist eine exakte dreidimensionale Lösung der Newtonschen Dynamik im Staub-Modell, wenn die Invarianten  $\mathbf{II}_0$  und  $\mathbf{III}_0$  an jedem Punkt verschwinden [26]. Dieses "lokal eindimensionale" Modell enthält als Unterklasse global eben-symmetrische Lösungen [72]. Damit reduziert sich Gleichung (3.81) auf:

$$Q_{\mathcal{D}}^{\text{planar}} = -\frac{2}{3} \frac{\xi^2 \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}^2}{(1 + \xi \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0})^2}. \quad (2.86)$$

Im letzten Abschnitt werden wir den sphärischen Kollaps mit dem ebenen Kollaps quantitativ vergleichen. Negative Werte von  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}$  entsprechen einer überdichten Domäne im Vergleich zum Hintergrund, positive Werte von  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}$  entsprechen einer unterdichten Region. Bei überdichten Domänen divergiert  $Q_{\mathcal{D}}^{\text{planar}}$  zu einem bestimmten Zeitpunkt. Dieses Verhalten kann in Analogie zum stark anisotropen "Pancake Kollaps" gesehen werden.

# Kapitel 3

## Effektive Entwicklung von Raumdomänen im Rahmen der ART

Die ART behandelt, anders als die NT, die Dynamik der Raumzeitstruktur an sich, während die Newtonsche Mechanik eine Beschreibung der Bewegung von Partikeln in einem absoluten Euklidischen Raum mit absoluter Zeit gibt. Erst durch die ART als neue Theorie der Gravitation entsteht ein Modell, das mit der speziellen Relativitätstheorie konsistent ist. Durch die Erweiterung des Mittelungsformalismus in der ART muss man sich nicht mehr auf Domänen beschränken, die klein gegen den Hubble-Radius sind.

### 3.1 Staubmodell in der ART

Staub bezeichnet hier eine drucklose Flüssigkeit. Flüssigkeitselemente bewegen sich rotationsfrei und nur unter dem Einfluss der Gravitation auf geodätischen Trajektorien. Dieses Kontinuumsmodell lässt sich auf kosmische Strukturbildung innerhalb gewisser Skalen anwenden. Die Vierergeschwindigkeit ist dabei als gemittelte Vierergeschwindigkeit zu verstehen, wobei sich die Mittelungsskala aus dem jeweiligen Materiemodell ergibt.

### 3.1.1 Einsteinsche Gleichungen

Die Einsteinschen Gleichungen für Staub lauten:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\rho u_\mu u_\nu - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

mit dem Ricci-Tensor  $R_{\mu\nu}$  als Kontraktion des Riemann-Tensors

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu}, \quad (3.2)$$

seiner Spur  $R$ , der Vierergeschwindigkeit der Flüssigkeitselemente  $u^\mu$ , der kosmologischen Konstanten  $\Lambda$  und der Massendichte  $\rho$ .

### 3.1.2 3+1-Split

Hier betrachten wir die Aufspaltung der Raumzeit in dreidimensionale Hyperflächen, die orthogonal zur Vierergeschwindigkeit gewählt werden. Damit kann man einen Projektionstensor definieren, der auf die Hyperflächen senkrecht zur Vierergeschwindigkeit projiziert.

$$h_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta. \quad (3.3)$$

Die äußere Krümmung wird wie folgt definiert <sup>1</sup>:

$$K_{ij} \equiv -h^\alpha{}_i h^\beta{}_j u_{\alpha;\beta}. \quad (3.4)$$

Die Einsteinschen Gleichungen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung sind gleichwertig zu folgendem System (siehe: [4]) bestehend aus den Bedingungsgleichungen ("Constraints") <sup>2</sup>:

$$\frac{1}{2}(R + K^2 - K^i{}_j K^j{}_i) = 8\pi G\rho + \Lambda, \quad (3.5)$$

$$K^i{}_{j||i} - K_{||j} = 0, \quad (3.6)$$

und den Entwicklungsgleichungen für die Dichte und den beiden Fundamentalformen:

$$\dot{\rho} = K\rho, \quad (3.7)$$

$$\dot{g}_{ij} = -2g_{ik}K^k{}_j, \quad (3.8)$$

$$\dot{K}^i{}_j = KK^i{}_j + R^i{}_j - (4\pi G\rho + \Lambda)\delta^i{}_j. \quad (3.9)$$

<sup>1</sup>griechische Indizes laufen von 0 bis 4, lateinische Indizes laufen von 0 bis 3, ein ; notiert die kovariante Ableitung in Bezug auf die 4-Metrik

<sup>2</sup>ein || notiert die kovariante Ableitung in Bezug auf die 4-Metrik, ein ' bezeichnet die Zeitableitung



Mit  $R^i_j$  bezeichnen wir die intrinsische Krümmung der dreidimensionalen Hyperflächen. Die Gleichung (3.5) bezeichnet man auch als Hamiltonconstraint, die Gleichung (3.6) als Impulsconstraint. Dieses System bildet ein geschlossenes Differentialgleichungssystem für die räumlichen Tensoren. Tatsächlich ist dieses Gleichungssystem überbestimmt. Das hat zur Folge, dass die Anfangsbedingungen nicht frei wählbar sind, sondern die Bedingungsgleichungen erfüllen müssen. Dieses System wurde erfolgreich mit störungstheoretischen Ansätzen untersucht (siehe: [45], [62]).

### 3.1.3 Triaden

Den Triadenformalismus (siehe: [28]) an dieser Stelle einzuführen hat zwei Gründe: Der erste ist, dass die Formulierung der ART mit Triaden analog zu der Lagrangeschen Beschreibung in der NT gesehen werden kann. Der zweite Grund ist, dass damit eine Verallgemeinerung der Zel'dovich-Näherung im Rahmen der ART möglich wird.

Wir betrachten zwei Basissysteme, die denselben dreidimensionalen Raum beschreiben sollen. Dann gibt es Übergangsmatrizen  $\eta^a_i$  die eine Transformation von einem Basissystem in das andere bewirken<sup>3</sup>. Die Triaden sollen invertierbar sein, d.h. wir fordern die Existenz von Matrizen mit der Eigenschaft:

$$e^i_a \eta^b_i = \delta_b^a \quad , \quad e^i_a \eta^a_j = \delta^i_j. \quad (3.10)$$

Aus der Invarianz des Wegelements folgt dann für das Transformationsverhalten der Metriken der beiden Systeme:

$$g_{ij} = \eta^a_i \eta^b_j G_{ab}, \quad (3.11)$$

$$G_{ab} = e^i_a e^j_b g_{ij}. \quad (3.12)$$

Indizes können wie üblich mit der Metrik gehoben und gesenkt werden, wobei zu beachten ist, dass die Metrik nur Indizes im zu dieser Metrik gehörigen Basissystem heben und senken kann. Für beliebige Tensoren  $A$  gilt somit:

$$A_{ia} = g_{ij} A^j_a, \quad (3.13)$$

$$A_{ab} = g_{ab} A^b_i. \quad (3.14)$$

Man erkennt die Analogie zu der Transformation auf Lagrangekoordinaten in der NT, wenn man das Euklidische Linienelement in der Form aufschreibt<sup>4</sup>:

$$dl^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = \delta_{ij} f^i_{|k} f^j_{|l} dX^k dX^l, \quad (3.15)$$

<sup>3</sup>Indizes von a bis l kennzeichnen das eine Basissystem, Indizes von i bis z das andere.

<sup>4</sup>Ein | notiert die Ableitung in Bezug auf Lagrangekoordinaten.

wobei  $x^i$  nicht-rotierende Eulersche Koordinaten, und  $X^k$  Lagrangesche Koordinaten sind, welche entlang der Integralkurven des Geschwindigkeitsfeldes ( $\vec{v} = \dot{\vec{f}}$ ) konstant sind. Deshalb kann man  $\delta_{ij} f^i|_k f^j|_l$  als Lagrangesch-Newton'sche Metrik interpretieren. Wir führen also ein zum Deformationsgradienten  $f^i|_k$  korrespondierendes Objekt in der ART als Einsform ein:

$$\boldsymbol{\eta}^a(t, X^k) = \eta^a_i \mathbf{X}^i, \quad (3.16)$$

In einem Euklidischen Raum sind diese Einsformen exakt  $\boldsymbol{\eta}^a = d\mathbf{f}^a$  und man erhält die Lagrangesch-Newton'sche Metrik. Die Erweiterung im Rahmen der ART besteht nun darin, auch nicht exakte Einsformen zuzulassen. Dann kann man allgemeiner das Linienelement von dreidimensionalen Riemannschen Räumen schreiben als:

$$dl^2 = g_{ij} dX^i dX^j = G_{ab} \boldsymbol{\eta}^a \boldsymbol{\eta}^b = G_{ab} \eta^a_i \eta^b_j dX^i dX^j, \quad (3.17)$$

Die Einführung der Triadenmetrik  $G_{ab}$  und der Matrizen  $\eta^a_i$  bringt eine Eichfreiheit. Diese wird in den meisten Anwendungen dazu genutzt die Triadenmetrik  $G_{ab}$  Euklidisch zu wählen:  $G_{ab} = \delta_{ab}$ . Wir wollen aber in strenger Anlehnung an die Lagrangesche Beschreibung in der Newton'schen Theorie  $\eta^a_i(t_0, X^k) = \delta^a_i$  wählen. Damit gilt für die Triadenmetrik  $G_{ab}(X^k)$ :

$$g_{ij}(t_0, X^k) = G_{ab} \eta^a_i(t_0, X^k) \eta^b_j(t_0, X^k) \equiv G_{ij}(X^k). \quad (3.18)$$

Die Wahl  $G_{ab} = \delta_{ab}$  würde die dreidimensionalen Hyperfläche zum Anfangszeitpunkt dem Euklidischen Raum gleichsetzen. Besonders im Hinblick auf die Erweiterung der Zel'dovich-Näherung ist eine nahe Anlehnung an die Lagrange-Newton-Formulierung von Vorteil.

### 3.1.4 Einsteinsche Gleichungen im Triadenformalismus

Unser Ziel in diesem Kapitel ist, die Einsteinschen Gleichungen im  $3+1$ -Split mit Triaden zu schreiben. Die Triaden werden als mit der Flüssigkeit mitschwimmend angenommen. Das heisst, sie werden entlang der Trajektorien parallel transportiert:

$$(e_a^i)_{;\mu} u^\mu = \dot{e}_a^i - K^i_j e_a^j = 0. \quad (3.19)$$

Die Bedingung für Fermi-transport reduziert sich zur Paralleltransportgleichung, wenn die Bewegung entlang der Geodäten verläuft. Für die Triaden gilt die Gleichung:

$$\dot{\eta}^a_j + \eta^a_k K^k_j = 0. \quad (3.20)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $e_a^i$  so erhält man für die äußere Krümmung:

$$K^i_j = -e_a^i \dot{\eta}^a_j. \quad (3.21)$$

Die inversen Triaden kann man wieder durch die Triaden selbst ausdrücken:

$$e_a^i = \frac{1}{2\mathcal{J}} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \eta^b_j \eta^c_k. \quad (3.22)$$

Dabei haben wir die Determinante von  $\eta^a_i$  mit:

$$\mathcal{J} \equiv \frac{1}{6} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \eta^a_i \eta^b_j \eta^c_k, \quad (3.23)$$

bezeichnet<sup>5</sup>. Damit haben wir die Möglichkeit, die äußere Krümmung allein unter Verwendung der Triaden zu schreiben:

$$K^i_j = -\frac{1}{2\mathcal{J}} \epsilon_{abc} \epsilon^{imn} \dot{\eta}^a_j \eta^b_m \eta^c_n. \quad (3.24)$$

Im Hinblick auf die Berechnung des Rückwirkungsterms sind die skalaren Invarianten des äußeren Krümmungstensors von Interesse:

$$\mathbf{I} \equiv -K^i_i = \frac{1}{2\mathcal{J}} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \dot{\eta}^a_i \eta^b_j \eta^c_k, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{II} \equiv \frac{1}{2} (K^2 - K^l_s K^s_l) = \frac{1}{2\mathcal{J}} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \dot{\eta}^a_i \dot{\eta}^b_j \eta^c_k, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{III} \equiv \det(K^i_j) = \frac{1}{6\mathcal{J}} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \dot{\eta}^a_i \eta^b_j \dot{\eta}^c_k. \quad (3.27)$$

Die Spur der äußeren Krümmung kann man dann folgendermaßen umformen:

$$K = tr(K^j_i) = -\frac{1}{2} tr(g^{ik} \dot{g}_{kj}) = -\frac{1}{2} tr(\ln(g_{ij}))'. \quad (3.28)$$

Benutzt man den Satz:  $tr(\ln M) = \ln \det M$  für reelle symmetrische Matrizen so gilt <sup>6</sup> :

$$K = -\frac{1}{2} (\ln g)' = -(\ln \sqrt{g})'. \quad (3.29)$$

Die Determinante von  $g_{ik}$  kann man durch die Determinante der Triadenmetrik  $G \equiv \det G_{ab}$  und die Determinante der Transformationsmatrix  $\eta^a_i$  (Gleichung (3.23)) ausdrücken:

$$\sqrt{g} = \mathcal{J} \sqrt{G}. \quad (3.30)$$

Beachtet man, dass wir die Triadenmetrik zeitunabhängig gewählt haben, so erhält man für die Spur der äußeren Krümmung das Ergebnis:

$$K = -\frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}}. \quad (3.31)$$

---

<sup>5</sup>der Buchstabe  $\mathcal{J}$  wurde gewählt, um die Analogie in der Funktion der Funktionaldeterminante bei der Transformation auf Lagrange-Koordinaten in der NT und und  $\det \eta^a_i$  zu verdeutlichen.

<sup>6</sup>Wir bezeichnen die Determinante von  $g_{ij}$  mit  $g$ .

Damit sind wir in der Lage, die Einsteinschen Gleichungen mit Triaden zu schreiben. Als erstes betrachten wir die Kontinuitätsgleichung. Wie beim Lagrangeschen Formalismus in der NT ist es möglich, die Kontinuitätsgleichung zu integrieren. Es gilt:

$$(\mathcal{J}\varrho)' = \dot{\mathcal{J}}\varrho + \mathcal{J}K\varrho = \dot{\mathcal{J}}\varrho - \mathcal{J}\frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}}\varrho = 0. \quad (3.32)$$

Damit kann man das Integral dieser Gleichung angeben. Es gilt analog zur Lagrange-Newtonschen Theorie:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\mathcal{J}}. \quad (3.33)$$

Jetzt setzen wir  $K^i_j$  aus Gleichung (3.24) in die übrigen Einsteinschen Gleichungen im 3 + 1-Split ein, wobei wir die dualen Basisvektoren  $\mathbf{e}_a$  durch die Einsformen  $\boldsymbol{\eta}^a$  darstellen:

$$G_{ab}\dot{\eta}^a_{[j}\eta^b_{i]} = 0, \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{2\mathcal{J}}\epsilon_{abc}\epsilon^{imn}(\ddot{\eta}^a_j\eta^b_m\eta^c_n + 2\dot{\eta}^a_j\dot{\eta}^b_m\eta^c_n) = \delta^i_j\left(4\pi G\frac{\varrho_0}{\mathcal{J}} + \Lambda\right) - \frac{1}{2}R^i_j, \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{\mathcal{J}}\epsilon_{abc}\epsilon^{ijk}\dot{\eta}^a_i\dot{\eta}^b_j\eta^c_k = 8\pi G\frac{\varrho_0}{\mathcal{J}} + \Lambda - \frac{1}{2}R, \quad (3.36)$$

$$\left(\frac{1}{2\mathcal{J}}\epsilon_{abc}\epsilon^{imn}\dot{\eta}^a_j\eta^b_m\eta^c_n\right)_{||i} = \left(\dot{\mathcal{J}}/\mathcal{J}\right)_{|j}. \quad (3.37)$$

Dieses Gleichungssystem ist vergleichbar mit den Gleichungen, die von Kasai [45], Matarrese und Terranova [52] aufgestellt wurden. Im Gegensatz zu diesen Autoren verwenden wir in unseren Gleichungen aber ausschließlich die Basiseinsformen. Da der Ricci-Tensor als Funktional der Metrik geschrieben werden kann, welche wiederum in unseren Einsformen formulierbar ist, stellt das obige Gleichungssystem ein geschlossenes (überbestimmtes) System dar. Setzt man den Ricci-Tensor explizit, durch Einsformen ausgedrückt, in das obige Gleichungssystem ein, so ist zu erwarten, dass sich das Gleichungssystem noch komplexer gestaltet. Unser Ziel ist jedoch der Vergleich mit dem Lagrange-Newton-System. Deshalb betrachten wir ein Untersystem. Indem man die Spur von Gleichung (3.35) bildet kann man den Ricci-Skalar im Hamilton-Constraint (3.36) eliminieren. Daraus lässt sich mit Gleichung (3.34) das folgende Untersystem formen:

$$G_{ab}\ddot{\eta}^a_{[j}\eta^b_{i]} = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abc}\epsilon^{ijk}\ddot{\eta}^a_i\eta^b_j\eta^c_k = \Lambda J - 4\pi G\varrho_0. \quad (3.39)$$

Dieses Untersystem kann man direkt mit dem Lagrange-Newton-System (2.22, 2.23) vergleichen. Dabei stellt man Übereinstimmung fest, wenn man die Einsformen  $\eta_i^a$  mit dem Lagrangeschen Deformationstensor  $f^a_{|i}$  identifiziert. Damit können wir bereits in der Lagrange-Newtonschen Theorie gefundene Lösungen in die ART zu übertragen. Insbesondere sind wir in der Lage, eine strenge Begründung für eine allgemeinrelativistische Erweiterung der Zel'dovich-Näherung zu liefern.

### 3.1.5 Anfangswerte

Im letzten Kapitel ist es uns gelungen, ein Untersystem für die Triaden  $\eta^b_j$  zu finden, das die gleiche Form wie das Lagrange-Newton-System in NT besitzt. Zur Lösung des Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung benötigt man die Anfangswerte  $\dot{\eta}^b_j(t_0)$  und  $\eta^b_j(t_0)$  sowie die Anfangsdichte  $\varrho_0$ . Dabei ist  $\eta^b_j(t_0)$  von der Koordinatenwahl abhängig, die physikalischen Anfangsfelder sind  $\varrho_0$  und  $\dot{\eta}^b_j(t_0)$ , was in der NT dem Lagrangeschen Gradienten der Anfangsgeschwindigkeit  $V^i_j(t_0)$  entspricht. Diese Größen bestimmen allerdings nur die Entwicklung der Triaden. Die Metrik ist damit noch unbestimmt. Es gilt:

$$g_{ij} = \eta^a_i \eta^b_j G_{ab}. \quad (3.40)$$

Wir benötigen daher die Anfangsmetrik  $G_{ab}$ . Diese kann man aber nicht unabhängig vorgeben, sondern sie hängt mit obigen Anfangswerten zusammen. Das erkennt man, wenn man die Einsteinschen Gleichungen im 3+1-Split zum Zeitpunkt  $t_0$  betrachtet. Gleichung (3.24) ergibt die äußerer Krümmung zur Zeit  $t_0$ :

$$K^i_j(t_0) = -\frac{1}{\mathcal{J}(t_0)} \delta^i_a \dot{\eta}^a_j(t_0) = -\frac{1}{\mathcal{J}(t_0)} \dot{\eta}^i_j(t_0) = -\dot{\eta}^i_j(t_0). \quad (3.41)$$

Die Entwicklungsgleichung für die Dichte (3.7) liefert keine zusätzliche Bedingung. Die Entwicklungsgleichung für die Metrik (3.8) wurde zu Gleichung (3.41) umgeformt. Damit verbleiben die Gleichungen (3.5, 3.6) zur Bestimmung der Anfangsmetrik  $G_{ab}$ :

$$R(G_{ab}) = 16\pi G \varrho_0 + 2\Lambda - \mathbf{II}(\dot{\eta}^i_j(t_0)), \quad (3.42)$$

$$\dot{\eta}^i_{j||i}(t_0) - \dot{\eta}^k_{k||j}(t_0) = 0. \quad (3.43)$$

In der letzten Gleichung sind dabei die kovarianten Ableitungen bezüglich der Anfangsmetrik  $G_{ab}$  zu bilden. Das Gleichungssystem besteht aus partiellen, nichtlinearen Differentialgleichungen. Damit stösst man bei der Lösung auf ähnliche Probleme wie bei den ursprünglichen Einsteinschen Gleichungen. Man kann aber für bestimmte Anfangsbedingungen  $G_{ab}$  in guter Näherung als flach wählen. Auf diese Möglichkeit kommen wir bei der Betrachtung der relativistischen Zel'dovich-Näherung und den Anwendungen im Rahmen des Standardmodells zurück.

## 3.2 Lokale Beschreibung

In Ermangelung einer exakten Lösung der Einsteinschen Gleichungen bei fehlender Symmetrie, werden Dichteinhomogenitäten mit Hilfe der Störungsrechnung analytisch behandelt. Dabei setzt man die Abweichungen vom homogen-isotropen Kosmos als gering voraus. Gegenüber der Störungsrechnung in der NT hat man damit

auch die Möglichkeit, Fluktuationen die größer als der Horizont sind zu beschreiben. Dafür taucht ein Problem bei Koordinatenwahl auf. Nimmt man Störungen der FLRW-Metrik an, so kann man diese Störterme durch eine Koordinatentransformation verändern. So verhalten sich Störungen in verschiedenen Eichungen unterschiedlich und haben daher unterschiedliche (oder gar keine) physikalische Bedeutung. In der synchronen Eichung wird von mitschwimmenden (Lagrangeschen) Koordinaten ausgegangen. Damit gibt es in der ART kein Analogon zur Eulerschen Störungstheorie. Aufbauend auf diese Koordinatenwahl kann man eine Störungstheorie für die Triaden entwickeln und die Zel'dovich-Näherung in der ART verallgemeinern. Die relativistische Zel'dovich-Näherung stellt damit in der ART ebenso wie in der NT eine Möglichkeit dar, Strukturbildung bis in den nichtlinearen Bereich zu verfolgen.

### 3.2.1 Relativistische Zel'dovich-Näherung

Der Ansatz, der von Zel'dovich [71] zur Beschreibung der nichtlinearen Epoche der Strukturbildung im Rahmen der Newtonschen Theorie vorgeschlagen wurde, konnte über Lagrangesche Störungsrechnung begründet werden [26]. Er ist in der Klasse von Lösungen Lagrangescher Störungstheorie erster Ordnung ohne Rotation bereits enthalten. Aus den Analogiebetrachtungen im Kapitel 3.1.3 kann man den in der Newtonschen Theorie bekannten Ansatz für das Trajektorienfeld in die ART übertragen. Der Ansatz für die Triaden lautet:

$${}^Z\eta_i^a = a(t)(\delta_i^a + \xi(t)Y_i^a) \quad \text{mit} \quad a(t_0) = 1, \xi(t_0) = 0. \quad (3.44)$$

Dabei ist  $\xi(t)$  eine globale Funktion der Zeit, die vom Hintergrundmodell abhängig ist. Die Funktion  $Y_i^a$  ist eine Funktion der Startkoordinaten der Fluidelemente und kann aus den Anfangsbedingungen hergeleitet werden. Mit dieser Wahl der Triaden kann man die Metrik dreidimensionaler Hyperflächen angeben:

$${}^Zg_{ij} = {}^ZG_{ab}{}^Z\eta_i^a{}^Z\eta_j^b = a^2 ({}^ZG_{ij} + \xi(Y_{ij} + Y_{ji}) + \xi^2 G_{ab}Y_i^a Y_j^b). \quad (3.45)$$

Da die Gleichungen des Euler-Lagrange-Systems genau die gleiche Form haben wie ein Teil der Einsteinschen Gleichungen für Staub in Formenschreibweise (3.38, 3.39), kann man die Ergebnisse aus der Newtonschen Theorie einfach übertragen (Kapitel 2.2.2). Wenn also das Feld  $Y_i^a$  die Forderung erfüllt:

$$Y_i^i = Z^i_i = \delta(X, t_0), \quad (3.46)$$

wobei  $Z$  ein beliebiges Skalarfeld, das nur von Anfangskoordinaten abhängt sein darf, dann erhält man für  $\xi(t)$  in einem Einstein-De-Sitter Hintergrund:

$$\xi(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} - 1. \quad (3.47)$$

Eine Verallgemeinerung der Zel'dovich-Näherung in der ART wurde früher schon von Kasai [45] vorgeschlagen. Sein Ansatz für die Triaden lautet:

$${}^Z\eta^a_i = a(t)(\delta^a_i + X^a_i + \xi(t)\psi^a_i) \quad (3.48)$$

Hier tritt ein zusätzliches Feld  $X^a_i$  auf, das die Störung der Anfangsmetrik beinhaltet. Seine Zel'dovich-Metrik hat dann die Form:

$${}^Zg_{ij} = a^2 (\delta_{ij} + 2X_{ij} + 2\xi\psi_{ij}). \quad (3.49)$$

Wir verfolgen den anderen Weg und gehen von einer allgemeinen Anfangsmetrik  $G_{ij}$  aus. Der Grund dafür ist der, dass in der Euler-Lagrangeschen Theorie die Lagrangekoordinaten so gewählt wurden, dass sie mit den Eulerpositionen der Fluidelemente zum Anfangszeitpunkt zusammenfallen. Ein analoges Vorgehen in der ART hat daher eine allgemeine, gekrümmte Anfangsmetrik zur Folge. Darüberhinaus impliziert die Formulierung einer Störungstheorie für Triaden, dass nur diese als Störgrößen aufgefasst werden, und dass die Metrik (als Funktion der Triaden) in der vollen quadratischen Form verwendet werden kann.

Wie von Zel'dovich in der NT vorgeschlagen, so kann man auch in der ART verfahren und den Approximationsansatz direkt in die exakte Formel für die Dichte einsetzen (Gl. (3.33)):

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\det({}^Z\eta^a_i)}. \quad (3.50)$$

Daher bezeichnet man die Zel'dovich-Näherung auch oft als Extrapolation in das nichtlineare Regime. Wir greifen diesen Gedanken auf und berechnen den Rückwirkungsterm sowie die gemittelte intrinsische Krümmung dreidimensionaler Hyperflächen in dieser Näherung.

### 3.3 Regionale Beschreibung

In der ART ist es, anders als in der NT, nicht möglich Tensoren im allgemeinen über ein bestimmtes Gebiet zu integrieren<sup>7</sup>. Wir umgehen dieses beim Mittelungsproblem für Tensoren auftretende Problem durch die Mittelwertbildung von skalaren Größen. Wir sind also interessiert an der Mittelung eines Skalarfeldes  $\psi$  (gegeben als Funktion von Lagrange-Koordinaten und der Zeit) über ein Gebiet  $\mathcal{D}$  einer raumartigen Hyperfläche. Die Voraussetzung dabei ist, dass die Raumzeit einem solchen 3+1-Split unterzogen werden kann, was für Staub bewiesen wurde.

---

<sup>7</sup>Eine Übersicht über die verschiedenen Möglichkeiten in der ART zu Mitteln gibt Stoeger: [66].

### 3.3.1 Kommutationsregel in der ART

Wir definieren die Mittelung über das Volumenintegral:

$$\langle \psi \rangle_{\mathcal{D}} \equiv \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \psi(\mathbf{X}, t) \sqrt{g} d^3 X. \quad (3.51)$$

$\psi$  ist ein beliebiges Skalarfeld auf der dreidimensionalen Hyperfläche. Das Volumen der Raumdäne selbst ist daher gegeben durch:

$$V_{\mathcal{D}} \equiv \int_{\mathcal{D}} \sqrt{g} d^3 X. \quad (3.52)$$

Der dimensionslose Skalenfaktor des Gebietes wird definiert als:

$$a_{\mathcal{D}}(t) \equiv \left( \frac{V_{\mathcal{D}}}{V_0} \right)^{1/3}. \quad (3.53)$$

Mit  $V_0$  ist hier das Volumen des Gebietes zum Anfangszeitpunkt gemeint. Die Zeitentwicklung von  $a_{\mathcal{D}}(t)$  ist dann ein Maß für die effektive Dynamik der Raumdäne. Die Domäne folgt den Trajektorien der Fluidelemente. Damit gilt Massenerhaltung:

$$M_{\mathcal{D}} \equiv \int_{\mathcal{D}} \varrho \sqrt{g} d^3 X = \text{const.} \text{ und damit } \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{M_{\mathcal{D}}}{V_0 a_{\mathcal{D}}^3}. \quad (3.54)$$

Als nächstes berechnen wir die Änderungsrate unseres betrachteten Raumvolumens, indem wir die Zeitableitung des Volumens geteilt durch das Volumen betrachten. Da  $d_t$  und  $d^3 X$  kommutieren gilt:

$$\frac{\dot{V}_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}}} = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} (\sqrt{g}) \cdot d^3 X = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \frac{(\sqrt{g}) \cdot}{\sqrt{g}} \sqrt{g} d^3 X = -\langle K \rangle_{\mathcal{D}}. \quad (3.55)$$

Mit den Gleichungen (3.51, 3.55) kann man die Kommutationsregel angeben. Für ein beliebiges Skalarfeld  $\psi$  gilt (siehe: [20]):

$$\langle \psi \rangle_{\mathcal{D}} \cdot - \langle \dot{\psi} \rangle_{\mathcal{D}} = \langle \psi \rangle_{\mathcal{D}} \langle K \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \psi K \rangle_{\mathcal{D}}. \quad (3.56)$$

Diese Gleichung hat wiederum die gleiche Form wie die Kommutationsregel, die bereits in der Lagrange-Newtonschen Theorie hergeleitet wurde. In der ART übernimmt die negative äußere Krümmung die gleiche Rolle wie die lokale Expansionsrate in der Lagrange-Newtonschen Beschreibung.

### 3.3.2 Mittelung der Einsteinschen Gleichungen im 3+1-Split

Mittelt man die Raychaudhuri-Gleichung, so ergibt sich die verallgemeinerte Friedmann-Gleichung:

$$3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} + 4\pi G \frac{M_{\mathcal{D}}}{V_0 a_{\mathcal{D}}^3} - \Lambda = \mathcal{Q}, \quad (3.57)$$



oder in integrierter Form <sup>8</sup>:

$$3 \left( \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \right)^2 - 8\pi G \frac{M_{\mathcal{D}}}{V_0 a_{\mathcal{D}}^3} + \frac{3k_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}^2} - \Lambda = \frac{2}{a_{\mathcal{D}}^2} \int_{t_0}^t d\tilde{t} \mathcal{Q} a_{\mathcal{D}} \dot{a}_{\mathcal{D}}. \quad (3.58)$$

Dabei kann der Rückwirkungsterm  $\mathcal{Q}$  in der ART mit Hilfe der äußeren Krümmung geschrieben werden:

$$\mathcal{Q} = 2\langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{2}{3}\langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{D}}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{I} \equiv -K, \quad \mathbf{II} \equiv \frac{1}{2}(K^2 - K^i_j K^j_i). \quad (3.59)$$

So weit ist alles ganz analog zur Lagrange-Newtonschen Beschreibung. In der ART gibt es jedoch eine weitere Gleichung, die eine Beziehung zwischen skalaren Größen darstellt. Bildet man den Mittelwert der Hamilton-Constraint-Gleichung (3.5) so ergibt sich:

$$3 \left( \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \right)^2 - 8\pi G \frac{M_{\mathcal{D}}}{V_0 a_{\mathcal{D}}^3} + \frac{1}{2}\langle R \rangle_{\mathcal{D}} - \Lambda = -\frac{\mathcal{Q}}{2}. \quad (3.60)$$

Diese Gleichung hat kein Analogon in der Lagrange-Newtonschen Beschreibung. Subtrahiert man Gleichung (3.60) von Gleichung (3.58), so erhält man den Zusammenhang der Integrationskonstanten  $k_{\mathcal{D}}$  mit dem gemittelten Krümmungsskalar und der Rückwirkung:

$$\frac{3k_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}^2} - \frac{1}{2}\langle R \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{2}{a_{\mathcal{D}}^2} \int_{t_0}^t d\tilde{t} \mathcal{Q} a_{\mathcal{D}} \dot{a}_{\mathcal{D}} + \frac{\mathcal{Q}}{2}. \quad (3.61)$$

Damit ist die Integrationskonstante  $k_{\mathcal{D}}$  über den Rückwirkungsterm und den gemittelten Krümmungsskalar zum Zeitpunkt  $t_0$  bestimmt:

$$k_{\mathcal{D}} = \frac{1}{6}(\langle R \rangle_{\mathcal{D}}(t_0) + \mathcal{Q}(t_0)). \quad (3.62)$$

Nur bei  $\mathcal{Q} = 0$  besteht ein direkter Zusammenhang zwischen  $k_{\mathcal{D}}$  und der Krümmung dreidimensionaler, raumartiger Hyperflächen. Dann gilt:  $k_{\mathcal{D}} = a_{\mathcal{D}}^2 \langle R \rangle_{\mathcal{D}} / 6$ .

### 3.3.3 Kosmologische Parameter

In der Kosmologie hat sich die Diskussion immer mehr auf die sogenannten kosmologischen Parameter des Friedmann-Modells konzentriert. Zum Vergleich mit dem Friedmann-Modell stellen wir analog Parameter auf, die über Mittelwerte von Größen auf abgeschlossenen Raumbereichen definiert werden. Genaugenommen haben wir in der ART zwei Möglichkeiten, solche Parameter zu definieren. Die erste Möglichkeit

---

<sup>8</sup>Die Integrationskonstante  $k_{\mathcal{D}}$  wurde so gewählt, dass sie bei Homogenität und Isotropie dem üblichen Krümmungsparameter  $k$  des Robertson-Walker-Linienelementes entspricht.

besteht darin, die verallgemeinerte Friedmann-Gleichung (3.57) einmal zu integrieren. Die Parameter werden dann analog zu den bereits in der NT verwendeten Parametern definiert<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned}\Omega_m^{\mathcal{D}} &\equiv \frac{8\pi G \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}}}{3H_{\mathcal{D}}^2}, & \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} &\equiv \frac{\Lambda}{3H_{\mathcal{D}}^2}, \\ \Omega_k^{\mathcal{D}} &\equiv -\frac{k_{\mathcal{D}}}{H_{\mathcal{D}}^2 a_{\mathcal{D}}^2}, & \Omega_{\mathcal{Q}_E}^{\mathcal{D}} &\equiv \frac{2}{3a_{\mathcal{D}}^2 H_{\mathcal{D}}^2} \int_{t_0}^t d\tilde{t} \mathcal{Q} a_{\mathcal{D}} \dot{a}_{\mathcal{D}}.\end{aligned}\tag{3.63}$$

Einen zweiten Satz von Parametern erhält man, wenn man von der gemittelten Hamilton-Constraint-Gleichung (3.60) ausgehend folgende Parameter definiert:

$$\begin{aligned}\Omega_m^{\mathcal{D}} &\equiv \frac{8\pi G \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}}}{3H_{\mathcal{D}}^2}, & \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} &\equiv \frac{\Lambda}{3H_{\mathcal{D}}^2}, \\ \Omega_R^{\mathcal{D}} &\equiv -\frac{\langle R \rangle_{\mathcal{D}}}{6H_{\mathcal{D}}^2}, & \Omega_{\mathcal{Q}_H}^{\mathcal{D}} &\equiv -\frac{\mathcal{Q}}{6H_{\mathcal{D}}^2}.\end{aligned}\tag{3.64}$$

Beide Sätze von Parametern ergeben im Grenzfall einer homogen-isotropen Materieverteilung die üblichen Parameter des Friedmann-Modells. Wie aber die Integrabilitätsbedingung Gl.(3.61) zeigt, hängt  $k_{\mathcal{D}}$  nicht allein von der intrinsischen Krümmung der raumartigen Hyperflächen ab. Damit ist es physikalisch sinnvoller, den Parameter  $\Omega_R^{\mathcal{D}}$  als Krümmungsparameter zu sehen und somit den zweiten Satz von Parametern zu favorisieren. Für beide Sätze von Parametern gilt:

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} + \Omega_k^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}_E}^{\mathcal{D}} = 1.\tag{3.65}$$

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} + \Omega_R^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{Q}_H}^{\mathcal{D}} = 1.\tag{3.66}$$

Diese dimensionslosen kosmologischen Parameter sind von der Größe der Domäne, über die gemittelt wird, abhängig. Je kleiner der betrachtete Raumbereich ist, desto größer ist die Rückwirkung der Inhomogenitäten. Es stellt sich deshalb die Frage, ab welcher Entfernung in unserer lokalen Umgebung “Messungen” der Friedmann-Parameter in Wirklichkeit “Messungen” der regionalen Parameter sind.

## 3.4 Rückwirkung in der ART

Im Abschnitt 3.3 ist es uns gelungen, eine verallgemeinerte Friedmann-Gleichung für den Skalenfaktor einer Domäne auf einer dreidimensionalen Hyperfläche anzugeben. Der darin auftretende Rückwirkungsterm ist eine Funktion der äußeren Krümmung. Die Situation ist hier nicht besser als in der NT. Um den Rückwirkungsterm exakt angeben zu können, wäre die Kenntnis der äußeren Krümmung an jedem Punkt

---

<sup>9</sup>Um die beiden über den Rückwirkungsterm definierten Rückwirkungsparameter zu unterscheiden, kennzeichnen wir den durch Mittelung der Raychaudhuri-Gleichung gewonnenen Rückwirkungsparameter mit  $\Omega_{\mathcal{Q}_E}^{\mathcal{D}}$  und den durch Mittelung der Hamilton-Constraint Gleichung gewonnenen Rückwirkungsparameter mit  $\Omega_{\mathcal{Q}_H}^{\mathcal{D}}$ .

der Domäne auf der raumartigen Hyperfläche notwendig. Das wiederum erfordert die allgemeine Lösung der Einsteinschen Gleichungen für Staub im 3 + 1-Split. Will man also quantitative Aussagen über die Relevanz des Rückwirkungsterms treffen, so ist man auf Symmetrieanahmen und Approximationen angewiesen. Die Zel'dovich-Näherung in der ART als Extrapolation ins nichtlineare Regime bietet sich auch hier an (siehe auch: [62], [61]). Daraus lassen sich einige Kernaussagen über das Verhalten nichthomogener Raumbereiche ableiten.

### 3.4.1 Rückwirkungsterm in der Zel'dovich-Näherung

Im Abschnitt 3.2.1 haben wir einen Ansatz für die Triaden gewählt, der aus einer Analogiebetrachtung zur Zel'dovich-Näherung in der NT gewonnen wurde. Der Rückwirkungsterm ist als Funktion der äußeren Krümmung bekannt (3.3).

$$\mathcal{Q} = \langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{2}{3} \langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{D}}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{I} = -K, \quad \mathbf{II} = \frac{1}{2}(K^2 - K^i_j K^j_i). \quad (3.67)$$

Unsere Domäne wird als mit der Flüssigkeit mitschwimmend angenommen. Damit kann man ein Gebiet  $\mathcal{D}$  zur Zeit  $t$  bis zum Zeitpunkt des “Shell-Crossing” bijektiv auf ein Gebiet zum Anfangszeitpunkt  $\mathcal{D}_0$  abbilden. Die Mittelwertbildung über ein Gebiet zum Zeitpunkt  $t$  lässt sich damit auf die Mittelwertbildung über eine Anfangsdomäne zurückführen. Für ein beliebiges Skalarfeld  $\psi$  gilt:

$$\langle \psi \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{V_0}{V_{\mathcal{D}} V_0} \int_{\mathcal{D}_0} \psi \sqrt{g} d^3 X = \frac{V_0}{V_{\mathcal{D}}} \langle \psi \sqrt{g} \rangle_{\mathcal{D}_0} . \quad (3.68)$$

Unser Ziel ist es, den Rückwirkungsterm ganz mit Triaden zu schreiben. Am besten benutzt man die Relation (Herleitung analog zur Herleitung von Gleichung 3.21):

$$K^a_b = -\dot{\eta}^a_i e^i_b. \quad (3.69)$$

Die inversen Triaden kann man wiederum durch die Triaden selbst ausdrücken:

$$e^i_b = \frac{1}{2\mathcal{J}} \varepsilon_{bcd} \varepsilon^{ikl} \eta^c_k \eta^d_l. \quad (3.70)$$

Damit kann man die äußere Krümmung schreiben als:

$$K^a_b = -\frac{1}{2\mathcal{J}} \varepsilon_{bcd} \varepsilon^{ikl} \dot{\eta}^a_i \eta^c_k \eta^d_l. \quad (3.71)$$

Durch Spurbildung dieser Gleichung erhält man die erste Invariante:

$$K^a_a = -\frac{1}{2\mathcal{J}} \varepsilon_{acd} \varepsilon^{ikl} \dot{\eta}^a_i \eta^c_k \eta^d_l. \quad (3.72)$$

Die zweite Invariante der äußeren Krümmung ist definiert als:

$$\mathbf{II} \equiv \frac{1}{2}(K^2 - K^a{}_b K^b{}_a). \quad (3.73)$$

Mit Gleichung (3.71) kann man die zweite Invariante ganz mit unseren Triaden ausdrücken:

$$\mathbf{II} = \frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \dot{\eta}^a{}_i \dot{\eta}^b{}_j \eta^c{}_k. \quad (3.74)$$

Jetzt kann man den Zel'dovich-Ansatz

$${}^Z \eta^a{}_i = a(t)(\delta^a{}_i + \xi(t)Y^a{}_i) \quad \text{mit} \quad a(t_0) = 1, \xi(t_0) = 0 \quad (3.75)$$

einsetzen. Zur Berechnung der ersten und zweiten Invarianten der äußeren Krümmung haben wir von den folgenden Rechenregeln Gebrauch gemacht:

$$\epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \delta^a{}_i \delta^b{}_j \delta^c{}_k = 6, \quad (3.76)$$

$$\epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \delta^a{}_i \delta^b{}_j = 2\delta^k{}_c, \quad (3.77)$$

$$\epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \delta^a{}_i = \delta^k{}_c \delta^j{}_b - \delta^k{}_b \delta^j{}_c. \quad (3.78)$$

Wenn man zur Vereinfachung die Größen:

$$K \equiv \frac{\dot{\xi}}{\xi}, \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad \mathbf{I}(Y^a{}_i) \equiv \mathbf{I}_0, \quad \mathbf{II}(Y^a{}_i) \equiv \mathbf{II}_0, \quad \mathbf{III}(Y^a{}_i) \equiv \mathbf{III}_0$$

definiert, so kann man wie in der NT die Invarianten schreiben als:

$$\begin{aligned} \frac{2\mathcal{J}}{a^3} \mathbf{I} &= 6H + 2\mathbf{I}_0 \xi(3H + K) \\ &+ 2\mathbf{II}_0 \xi^2(3H + 2K) \\ &+ 6\mathbf{III}_0 \xi^3(H + K) \quad , \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\mathcal{J}}{a^3} \mathbf{II} &= 6H^2 + 2\mathbf{I}_0 \xi(3H^2 + 2HK) \\ &+ 2\mathbf{II}_0 \xi^2(3H^2 + 4HK + K^2) \\ &+ 6\mathbf{III}_0 \xi^3(H^2 + 2HK + K^2) \quad . \end{aligned} \quad (3.80)$$

Wir haben unsere Variablen so definiert, dass die weitere Berechnung des Rückwirkungsterms identisch mit der Rechnung in NT verläuft:  $\mathcal{J}$  kann man in der Zel'dovich-Näherung schreiben (Gl. (2.82)). Damit erhält man den Rückwirkungs-

term in dieser Näherung:

$$\begin{aligned}
Q_{\mathcal{D}}^Z &= \frac{\xi^2}{(1 + \xi \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} + \xi^2 \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} + \xi^3 \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0})^2} \\
&\times \left[ \begin{aligned}
&\left( 2 \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} - \frac{2}{3} \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}^2 \right) \\
&+ \xi \left( 6 \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} - \frac{2}{3} \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} \right) \\
&+ \xi^2 \left( 2 \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} - \frac{2}{3} \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}^2 \right)
\end{aligned} \right] . \tag{3.81}
\end{aligned}$$

Die Unterschiede zur NT bestehen in der unterschiedlichen Definition der Größen. Während in der NT das Störungsfeld als Gradientenfeld bereits gegeben ist und damit eine exakte Einsform darstellt, ist die Störung  $Y$  als Abweichung vom Friedmann-Modell ebenso wie die Triaden eine allgemeine Einsform. Außerdem sind mit den Mittelwerten in der ART zum Zeitpunkt  $t_0$  Mittelwerte über gekrümmte, raumartige Hyperflächen gemeint.

### 3.4.2 Gemittelte Krümmung in der Zel'dovich-Näherung

Um Näherungslösungen für die Dynamik der auf der Domäne gemittelten Krümmung zu erhalten, ist es möglich, zwei unterschiedliche Wege zu verfolgen. Einmal kann man  $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}$  aus dem Hamilton-Constraint bestimmen, ein zweiter Weg besteht in der Berechnung aus der Geometrie und damit aus der Metrik. Wir werden für beide Wege  $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}$  mit Hilfe der Zel'dovich-Näherung berechnen.

#### Berechnung der Krümmung aus dem Hamiltonconstraint:

Das gemittelte Hamiltonconstraint nach  $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}$  aufgelöst ergibt:

$$\langle R \rangle_{\mathcal{D}} = 16\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - 2 \langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{D}} + 2\Lambda . \tag{3.82}$$

Die gemittelte Dichte kann man weiter umformen:

$$\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\langle \varrho(t_0) \rangle_{\mathcal{D}_0}}{a_{\mathcal{D}}^3} = \frac{1}{a_{\mathcal{D}}^3} \varrho_H(t_0) (1 + \langle \delta(t_0) \rangle_{\mathcal{D}_0}) = \frac{a^3}{a_{\mathcal{D}}^3} \varrho_H(t) (1 + \langle \delta(t_0) \rangle_{\mathcal{D}_0}) . \tag{3.83}$$

Gehen wir von einem Hintergrundmodell mit  $\Lambda$ -Term und mit Krümmungskonstante aus, so gilt:

$$16\pi G \varrho_H = 6H^2 + \frac{6k}{a^2} - 2\Lambda . \tag{3.84}$$

Setzt man die beiden obigen Gleichungen in Gleichung (3.82) ein, so erhält man:

$$\langle R \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{a^3}{a_D^3} (6H^2 + \frac{6k}{a^2} - 2\Lambda)(1 + \langle \delta(t_0) \rangle_{\mathcal{D}_0}) - 2\langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{D}} + 2\Lambda. \quad (3.85)$$

Um eine Näherungslösung für  $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}$  zu erhalten, setzen wir für alle zeit- und orts-abhängigen Größen ihre mit dem Zel'dovich-Ansatz berechneten Ausdrücke ein. Die gemittelte zweite Invariante lässt sich darstellen als:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{a^3}{a_D^3} & [3H^2 + \xi \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} (3H^2 + 2HK) \\ & + \xi^2 \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} (3H^2 + 4HK + K^2) \\ & + 3\xi^3 \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} (H^2 + 2HK + K^2)]. \end{aligned}$$

Wir ziehen  $\Lambda$  in der Gl.(3.85) in die Klammer und verwenden die in der Zel'dovich-Näherung gültige Beziehung:

$$\frac{a_D^3}{a^3} = 1 + \xi \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} + \xi^2 \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} + \xi^3 \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}. \quad (3.86)$$

Damit gelingt eine näherungsweise Darstellung von  $\langle R \rangle_{\mathcal{D}}$  aus bekannten Zeitfunktionen und gemittelten Anfangsfeldern mit einem universellen Vorfaktor.

$$\begin{aligned} \langle R \rangle_{\mathcal{D}}^Z = \frac{a^3}{a_D^3} & [6k/a^2 + (6H^2 + \frac{6k}{a^2} - 2\Lambda) \langle \delta(t_0) \rangle_{\mathcal{D}_0} \\ & + 2\xi \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} (3H^2 + 2HK - \Lambda) \\ & + 2\xi^2 \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} (3H^2 + 4HK + K^2 - \Lambda) \\ & + 3\xi^3 \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} (H^2 + 2HK + K^2 - 1/3\Lambda)]. \end{aligned}$$

Um diese Lösung besser interpretieren zu können, gehen wir zu einem Einstein-De-Sitter-Modell als Hintergrund über: ( $\Lambda = 0; k = 0; \xi = a = (t/t_0)^{\frac{2}{3}}$ ). Damit erhält man für  $\langle R(t_0) \rangle_{\mathcal{D}_0}$ :

$$\langle R(t_0) \rangle_{\mathcal{D}_0} = \frac{4}{9t_0^2} (10 \langle \delta(t_0) \rangle_{\mathcal{D}_0} - 2 \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}). \quad (3.87)$$

Unter Verwendung dieses Ergebnisses kann man die genäherte mittlere Ricci-Krümmung auf folgende Art schreiben:

$$\begin{aligned} \langle R \rangle_{\mathcal{D}}^Z = \frac{a^3}{a_D^3} & \left( \frac{\langle R(t_0) \rangle_{\mathcal{D}_0}}{a^2} - \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} \frac{4}{9t_0^2} \left( \frac{16}{a} - \frac{22}{a^2} - \frac{6}{a^3} \right) \right. \\ & \left. - \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0} \frac{4}{9t_0^2} \left( 24 - \frac{48}{a} + \frac{30}{a^2} - \frac{6}{a^3} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Der erste Term in der Klammer ist uns bereits aus dem homogen-isotropen Fall bekannt. Der zweite und dritte Term ist zum Zeitpunkt  $t_0$  zwar jeweils eine Ordnung kleiner, da sie jedoch weniger stark gedämpft werden, gewinnen sie mit fortschreitender Zeit an Wichtigkeit. Nimmt man die relativistische Zel'dovich-Näherung als Extrapolation ins nichtlineare Regime ernst, so muss davon ausgegangen werden, dass kleinskalige Inhomogenitäten, die sich in  $\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}$  und  $\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}$  niederschlagen, für die gemittelte Ricci-Krümmung in zunehmendem Maße eine Rolle spielen.

### Berechnung der Krümmung über die Metrik in der relativistischen Zel'dovich-Näherung

Unser Ziel ist die Berechnung des 3-Ricci-Skalars:

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} R^k{}_{ikj} . \quad (3.89)$$

Dazu ist die Kenntnis des Riemannschen Krümmungstensors

$$R^k{}_{ikj} = \partial_k \Gamma^k{}_{ij} - \partial_j \Gamma^k{}_{ik} + \Gamma^l{}_{ij} \Gamma^k{}_{lk} - \Gamma^l{}_{ik} \Gamma^k{}_{lj} , \quad (3.90)$$

mit

$$\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$$

notwendig. Die relativistische Zel'dovich-Näherung geht von einer Störung der Übergangsmatrizen auf Lagrangekoordinaten aus. Die Darstellung der kontra und kovarianten Metrikkomponenten in Form dieser Übergangsmatrizen ist durch

$$g_{ij} = \eta^a{}_i \eta^b{}_j G_{ab} , \quad g^{ij} = e^i{}_a e^j{}_b G^{ab}$$

gegeben. Die inversen Übergangsmatrizen  $e^i{}_a$  kann man nach folgender Formel berechnen:

$$e^i{}_a = \frac{1}{2 \det \eta^a{}_i} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} \eta^b{}_j \eta^c{}_k . \quad (3.91)$$

Macht man den Ansatz

$$\eta^a{}_i = a(\delta^a{}_i + \xi Y^a{}_i) ,$$

so erhält man für die kovarianten Metrikkomponenten:

$$g_{jm} = a^2 (G_{jm} + \xi(Y_{jm} + Y_{mj}) + \xi^2 G_{ab} Y^a{}_j Y^b{}_m) . \quad (3.92)$$

Hierbei ist zu beachten, dass  $\xi$  und  $a$  reine Funktionen der Zeit sind, wobei  $Y^a{}_j$  und  $G_{ab}$  rein ortsabhängige Größen darstellen. Die Berechnung der kontravarianten

Komponenten der Metrik ist aufwändiger, da erst die Matrizen  $\eta_i^a$  invertiert werden müssen. Die Komponenten der inversen Matrizen lassen sich mit Hilfe der Regeln

$$\begin{aligned}\varepsilon_{abc}\varepsilon^{ijk}\delta_i^a\delta_j^b\delta_k^c &= 6, \\ \varepsilon_{abc}\varepsilon^{ijk}\delta_i^a\delta_j^b &= 2\delta_c^k, \\ \varepsilon_{abc}\varepsilon^{ijk}\delta_i^a &= \delta_b^j\delta_c^k - \delta_c^j\delta_b^k\end{aligned}$$

in der relativistischen Zel'dovich-Näherung schreiben als:

$$e^i_a = \frac{a^2}{2\det\eta_i^a} (2\delta_a^i + 2\xi\delta_a^i Y_k^k - 2\xi Y_a^i + \xi^2\varepsilon_{abc}\varepsilon^{ijk}Y_j^b Y_k^c) . \quad (3.93)$$

Damit erhält man für die kontravarianten Komponenten der Metrik:

$$\begin{aligned}g^{ij} &= \frac{a^4}{(\det\eta_i^a)^2} [G^{ij} + \xi(2Y_k^k G^{ij} - Y^{ij} - Y^{ji}) \\ &\quad + \xi^2(Y_k^k G^{ij} - Y_k^k Y^{ij} - Y_k^j Y^{ji} + Y_a^i Y_d^j G^{ad} \\ &\quad + \frac{1}{2}\varepsilon_{def}\varepsilon^{jlm}Y_l^e Y_m^f G^{id} + \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\varepsilon^{ijk}Y_j^b Y_k^c G^{aj}) \\ &\quad + \xi^3(\frac{1}{2}\varepsilon_{def}\varepsilon^{jlm}Y_l^e Y_m^f (G^{id}Y_k^k - Y_a^i G^{ad}) \\ &\quad + \frac{1}{2}Y_k^k \varepsilon_{abc}\varepsilon^{ijk}Y_j^b Y_k^c (Y_k^k G^{aj} - Y_d^j G^{ad})) \\ &\quad + \xi^4(\varepsilon_{def}\varepsilon^{jlm}\varepsilon_{abc}\varepsilon^{ijk}Y_j^b Y_k^c Y_l^e Y_m^f G^{ad})] . \quad (3.94)\end{aligned}$$

Bei der weiteren Berechnung des Krümmungstensors werden Terme die höherer Ordnung in  $Y$  sind vernachlässigt. Damit vereinfacht sich die ko- und kontravariante Metrik zu:

$$g^{ij} = \frac{a^4}{(\det\eta_i^a)^2} (G^{ij} + 2\xi Y_k^k G^{ij} - 2\xi Y^{(ij)}) , \quad (3.95)$$

$$g_{ij} = a^2 (G_{ij} + 2\xi Y_{(ij)}) . \quad (3.96)$$

(mit:  $Y^{(ij)} = \frac{1}{2}(Y^{ij} + Y^{ji})$ ;  $Y_{(ij)} = \frac{1}{2}(Y_{ij} + Y_{ji})$ ). Im Vorfaktor des Ausdruckes für die kontravarianten Metrikkomponenten sind noch Terme höherer Ordnung in  $Y_j^i$  enthalten. Um sie zu eliminieren, berechnet man  $\det\eta_i^a$  in der relativistischen Zel'dovich-Näherung, wobei höhere Ordnungen in  $Y$  vernachlässigt werden:

$$\det\eta_i^a \approx a^3(1 + \xi\eta_k^k) . \quad (3.97)$$

Damit kann man den Nenner in Gleichung (3.95) entwickeln und erhält:

$$g^{ij} = \frac{1}{a^2}(G^{ij} - 2\xi Y^{(ij)}) . \quad (3.98)$$



Ein Konsistenztest zeigt, dass die Gleichung

$$\delta^i_k = g^{ij} g_{jk} \approx (G^{ij} - 2\xi Y^{(ij)})(G_{jk} + 2\xi Y_{(jk)}) = \delta^i_k + O(Y^{ij} Y_{jk}) \quad (3.99)$$

bis auf Terme von höherer Ordnung in  $Y$  erfüllt ist. Damit erhält man für die Christoffelsymbole linear in  $Y^i_j$ :

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{\circ}{\Gamma}^k_{ij} + 2\xi (G^{kl} \varphi_{lji} + Y^{(kl)} M_{lji}), \quad (3.100)$$

mit

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Gamma}^k_{ij} &\equiv \frac{1}{2} G^{kl} (G_{lj|i} + G_{li|j} - G_{ij|l}), \\ \varphi_{lji} &\equiv Y_{(lj|i} + Y_{(li|j} - Y_{(ij|l}), \\ M_{lji} &\equiv G_{lj|i} + G_{li|j} - G_{ij|l}. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck für die Christoffelsymbole kann man verwenden, um den dreidimensionalen Ricci-Tensor zu berechnen. (Alle Größen, die nur von der Anfangsmetrik  $G^{ik}$  abhängen, werden mit einem  $\circ$  über dem Symbol gekennzeichnet):

$$\begin{aligned} R_{ij} = \overset{\circ}{R}_{ij} + 2\xi &\left[ G^{kl}{}_{|k} \varphi_{lji} + G^{kl} \varphi_{lji|k} + \varphi^{(kl)}{}_{|k} M_{lji} + \varphi^{(kl)} M_{lji|k} \right. \\ &- G^{kl}{}_{|j} \varphi_{lki} - G^{kl} \varphi_{lki|j} - \varphi^{(kl)}{}_{|j} M_{lki} - \varphi^{(kl)} M_{lki|k} \\ &+ \overset{\circ}{\Gamma}^k_{lk} (G^{lm} \varphi_{mji} + Y^{(lm)} M_{mji}) \\ &+ \overset{\circ}{\Gamma}^l_{ij} (G^{km} \varphi_{mkl} + Y^{(km)} M_{mkl}) \\ &- \overset{\circ}{\Gamma}^k_{lj} (G^{lm} \varphi_{mki} + Y^{(lm)} M_{mki}) \\ &\left. - \overset{\circ}{\Gamma}^l_{ik} (G^{km} \varphi_{mjl} + Y^{(km)} M_{mjl}) \right]. \quad (3.101) \end{aligned}$$

Wendet man auf den dreidimensionalen Ricci-Tensor in der obigen Näherung die genäherte kontravariante Metrik an, so erhält man den Ricci-Skalar in drei Dimensionen erster Ordnung in  $Y$ :

$$\begin{aligned} R = \frac{\overset{\circ}{R}}{a^2} + \frac{2\xi}{a^2} G^{ij} &\left[ G^{kl}{}_{|k} \varphi_{lji} + G^{kl} \varphi_{lji|k} + \varphi^{(kl)}{}_{|k} M_{lji} + \varphi^{(kl)} M_{lji|k} \right. \\ &- G^{kl}{}_{|j} \varphi_{lki} - G^{kl} \varphi_{lki|j} - \varphi^{(kl)}{}_{|j} M_{lki} - \varphi^{(kl)} M_{lki|k} \\ &+ \overset{\circ}{\Gamma}^k_{lk} (G^{lm} \varphi_{mji} + Y^{(lm)} M_{mji}) \\ &+ \overset{\circ}{\Gamma}^l_{ij} (G^{km} \varphi_{mkl} + Y^{(km)} M_{mkl}) \\ &- \overset{\circ}{\Gamma}^k_{lj} (G^{lm} \varphi_{mki} + Y^{(lm)} M_{mki}) \\ &- \overset{\circ}{\Gamma}^l_{ik} (G^{km} \varphi_{mjl} + Y^{(km)} M_{mjl}) \\ &\left. - \frac{2\xi}{a^2} Y^{(ij)} \overset{\circ}{R}_{ij} \right]. \quad (3.102) \end{aligned}$$

Die Rechnung zeigt, dass die nullte Ordnung in  $Y$ , das ist genau der Ricci-Skalar unserer Anfangsmetrik, mit wachsendem Skalenfaktor gedämpft wird. Dies ist in Übereinstimmung mit früheren Berechnungen von Kasai. Darüber hinaus gibt es einen Zusatzterm, der weniger stark gedämpft wird und der linear in  $Y$  ist.

### 3.5 Beobachtungsaspekte

Wir haben regionale kosmologische Parameter definiert, die unser Modell festlegen. Die Frage stellt sich im Anschluss daran, ob die von Beobachtern gemessenen kosmologischen Parameter den Parametern unseres regionalen Modells entsprechen.

Erstens kann man anmerken, dass alle Beobachtungen auf dem Lichtkegel gemacht werden. Wir mitteln jedoch über raumartige Hyperflächen. Da der Lichtkegel in unserer näheren Umgebung aber nur wenig von der raumartigen Hyperfläche abweicht, mag der Effekt in Regionen, in denen wir Strukturbildung verfolgen, eine untergeordnete Rolle spielen. Das gilt mit Sicherheit nicht für CMB-Beobachtungen.

Zweitens sind kosmologische Parameter keine direkten physikalischen Beobachtungsgrößen, sondern müssen aus diesen (z.B. Rotverschiebung, scheinbare Helligkeit, absolute Helligkeit) erst berechnet werden. Dazu wird ein Friedmann-Modell benutzt. Ein solches Vorgehen lässt nur folgende Schlussfolgerung zu: *Wenn der Kosmos in ausreichender Näherung homogen und isotrop ist, dann leben wir in einem speziellen Friedmann-Kosmos mit den von uns aus Beobachtungen berechneten Parametern.* In einem nicht in ausreichender Näherung homogen und isotropen Kosmos sind diese Parameter im Prinzip bedeutungslos. Die Frage ist, ob diese in einem inhomogenen Kosmos unter falschen Voraussetzungen berechneten Parameter trotzdem in unserem regionalen Modell verwertbar sind, ob und wenn welche Bedeutung sie in diesem Kontext haben?

Einen Ansatz die Beobachtungsparameter in unserem Modell wiederzufinden, ist die Abbildung der unregelmäßig gekrümmten raumartigen Hyperfläche auf eine Hyperfläche konstanter Krümmung. Dieser Prozess wird auch als *Glätten* bzw. Renormierung bezeichnet (für eine Zusammenfassung der wichtigsten Resultate siehe: [15]).

Die Idee, geometrische Inhomogenitäten durch eine geeignete Deformation der Metrik in der Hyperfläche zu glätten (siehe: [29] und Referenzen darin) wird auf unser Problem übertragen, indem wir an die Glättungsprozedur folgende Bedingungen stellen: Erstens soll der Glättungs-Fluss auf geometrische Skalierungs-Eigenschaften von Variablen auf der raumartigen Domäne basieren. Zweitens wollen wir *regional* und *Lagrangesch* glätten, das heisst, die Metrik und andere geometrische und Materieva-

riablen sollen auf einem geodätischen Ball (mit während der Deformation konstanter Masse) geglättet werden. Diese Forderungen (Details siehe: [16]) werden von einem (global normierten) sogenannten Ricci-Deformations-Fluss der Metrik erfüllt, der ausführlich in der mathematischen Literatur diskutiert wird (siehe: [39], [30], [31]).

Einige Ergebnisse seien kurz erläutert (eine genaue Herleitung findet man in: [16]): Wir stellen die regional gemittelte Dichte und die dazu korrespondierende, in einem geglätteten Ball  $\bar{\mathcal{B}}$  gemessene und gemittelte Dichte gegenüber:

$$\langle \varrho \rangle_{\mathcal{B}_0} = \frac{M_{\mathcal{B}_0}}{V_{\mathcal{B}_0}} ; \quad \langle \varrho \rangle_{\bar{\mathcal{B}}} = \frac{M_{\bar{\mathcal{B}}}}{V_{\bar{\mathcal{B}}}}. \quad (3.103)$$

Nach Voraussetzung sind die beiden Massen gleich, daher zeigt sich der Unterschied zwischen den beiden gemittelten Dichten im Volumen, das einmal dem Volumen einer geglätteten Domäne, im anderen Fall dem Volumen einer ungleichmäßig gekrümmten Domäne entspricht:

$$\langle \varrho \rangle_{\mathcal{B}_0} = \langle \varrho \rangle_{\bar{\mathcal{B}}} \frac{V_{\bar{\mathcal{B}}}}{V_{\mathcal{B}_0}}. \quad (3.104)$$

Ein weiteres Resultat (das explizit den Glättungsfluss mit einschließt) zeigt die Relation der (konstanten) regionalen Krümmung im geglätteten Modell zur wirklichen, regional gemittelten Krümmung:

$$\bar{R}_{\bar{\mathcal{B}}} = \langle R \rangle_{\mathcal{B}_0} \left( \frac{V_{\mathcal{B}_0}}{V_{\bar{\mathcal{B}}}} \right)^{2/3} - \mathcal{Q}_{\mathcal{B}_0}^R, \quad (3.105)$$

wobei wir ein neues Maß für die Rückwirkung geometrischer Inhomogenitäten eingeführt haben. Wir bezeichnen es mit *regionaler Krümmungs-Rückwirkung*:

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{B}_0}^R \equiv \int_0^\infty \frac{V_{\mathcal{B}_\beta}(\beta)}{V_{\bar{\mathcal{B}}}} \left[ \frac{1}{3} \langle (R(\beta) - \langle R(\beta) \rangle_{\mathcal{B}_\beta})^2 \rangle_{\mathcal{B}_\beta} - 2 \langle \tilde{R}^{ab}(\beta) \tilde{R}_{ab}(\beta) \rangle_{\mathcal{B}_\beta} \right] d\beta, \quad (3.106)$$

wobei  $\tilde{R}_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{3}g_{ab}R$  den spurfreien Teil des Ricci-Tensors  $R_{ab}$  innerhalb der Hyperfläche bezeichnet. Der eine Teile der *regionalen Krümmungs-Rückwirkung* besteht aus Fluktuationen der skalaren Krümmung, während der andere Teil metrische Anisotropien widerspiegelt. Je nachdem welcher Teil dominiert bekommt man einen zu kleinen oder zu großen Wert für die wirkliche gemittelte skalare Krümmung.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die wirklichen Quellen in der verallgemeinerten Friedmann-Gleichung wie wir sie in Abschnitt (3.3.2) definiert haben mit heutigen Methoden nicht gemessen werden. Gemessen werden jene Quellen, die wir theoretisch durch Glättung der Hyperfläche erhalten. Sie sind gegenüber den wirklichen Quellen mit einem ‘‘Friedmann-Bias’’ behaftet. Eine Ausführliche Darstellung dieses Formalismus führt allerdings aus dem Rahmen dieser Arbeit hinaus.



# Kapitel 4

## Effektive Entwicklung von Raumdomänen bei sphärischer Symmetrie

Sphärisch-symmetrische Lösungen besitzen einen Sonderstatus. So beruhen ein Großteil der Anwendungen in der ART (schwarze Löcher, Sternkollaps, Planetenbahnen) auf dieser Lösungsklasse. Ebenso verhält es sich in der NT. Hier versucht man mit dem Top-Hat-Modell die Bildung von Dichtekonzentrationen im stark nichtlinearen Regime zu erklären. Für uns bedeutet sphärische Symmetrie die Möglichkeit, die in den beiden vorangehenden Abschnitten formal eingeführten regionalen Größen für konkrete Modelle zu berechnen und es wird deutlich, wie die Raumkrümmung die effektive Entwicklung von Raumdomänen beeinflusst.

### 4.1 Sphärische Symmetrie in der NT

In der NT ist die Kraft auf ein Staubteilchen auf dem Rand der Sphäre nur von der Gesamtmasse innerhalb der Sphäre abhängig. Bei sich im Laufe der zeitlichen Entwicklung nicht überschneidenden Sphäregrenzen wird seine Bewegung, und damit die Bewegung der gesamten Sphäre, durch eine Friedmann-Gleichung ohne Rückwirkung beschrieben. Folglich verschwindet der Rückwirkungsterm. Diese Bewegungsgleichung findet man auch in der ART, nur dass in diesem Fall die auftretenden Größen eine andere Bedeutung besitzen.

### 4.1.1 Rückwirkungsterm

Wir betrachten den sphärisch-symmetrischen Fall mit verschwindender Rotation des Geschwindigkeitsfeldes. Die Raumdomäne  $\mathcal{D}$  sei die 3-Sphäre  $\mathcal{B}$  mit dem Radius  $R$  zur Zeit  $t_0$  und dem Mittelpunkt im Symmetriezentrum. Der Radius der Sphären-grenze wird mit  $r_{\mathcal{B}}$  bezeichnet.

Das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  reduziert sich auf  $v(r, t)\mathbf{e}_r$ , wobei  $\mathbf{e}_r$  den Einheitsvektor in radialer Richtung bezeichnet. Die gemittelte erste Invariante des Tensorfeldes  $v_{i,j}$  ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{V_{\mathcal{B}}} \int_{\mathcal{B}} dV \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{V_{\mathcal{B}}} \int_{\partial \mathcal{B}} d\mathbf{S} \cdot v \mathbf{e}_r \\ &= \frac{3}{4\pi r_{\mathcal{B}}^3} v(r_{\mathcal{B}}) 4\pi r_{\mathcal{B}}^2 = 3 \frac{v(r_{\mathcal{B}})}{r_{\mathcal{B}}}.\end{aligned}$$

Die gemittelte zweite Invariante kann, wie gezeigt, auch als Divergenz eines Vektorfeldes aufgefasst werden:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{2V_{\mathcal{B}}} \int_{\mathcal{B}} dV \nabla \cdot ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2V_{\mathcal{B}}} \int_{\partial \mathcal{B}} d\mathbf{S} \cdot ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Im einzelnen gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) &= v(r) \mathbf{e}_r \left( (\mathbf{e}_r \partial_r + \mathbf{e}_{\vartheta} \frac{1}{r} \partial_{\vartheta} + \mathbf{e}_{\varphi} \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_{\varphi}) v(r) \mathbf{e}_r \right) \\ &= v(r) \mathbf{e}_r \left( \partial_r v(r) + \frac{2v(r)}{r} \right) = \mathbf{e}_r \left( v(r) \partial_r v(r) + \frac{2v^2(r)}{r} \right) \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \left( v(r) \mathbf{e}_r (\mathbf{e}_r \partial_r + \mathbf{e}_{\vartheta} \frac{1}{r} \partial_{\vartheta} + \mathbf{e}_{\varphi} \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_{\vartheta}) \right) v(r) \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r v(r) \partial_r v(r)\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{2V_{\mathcal{B}}} \int_{\partial \mathcal{B}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_r \left( v(r) \partial_r v(r) + \frac{2v^2}{r} - v(r) \partial_r v(r) \right) \\ &= \frac{1}{2V_{\mathcal{B}}} \int_{\partial \mathcal{B}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_r \frac{2v^2(r)}{r} = 3 \frac{v^2(r_{\mathcal{B}})}{r_{\mathcal{B}}^2} \\ &= \frac{1}{3} \langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{B}}^2.\end{aligned}$$

Daraus folgt für den Rückwirkungsterm:

$$\mathcal{Q} = 2\langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{B}} - \frac{2}{3} (\langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{B}})^2 = 0. \quad (4.1)$$

Genau dieses Resultat ist auch zu erwarten. Schreibt man auch die dritte Invariante als Divergenz Gl.(2.62), so erhält man für ihren Mittelwert:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{III} \rangle_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{6V_{\mathcal{B}}} \int_{\partial \mathcal{B}} d\mathbf{S} \cdot (\nabla \cdot (\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v})) \cdot \mathbf{v} \\ &\quad - \frac{1}{3V_{\mathcal{B}}} \int_{\partial \mathcal{B}} d\mathbf{S} \cdot ((\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Einzelne Terme haben wir bereits oben berechnet. Damit erhält man für den Ausdruck, der in beiden Integralen vorkommt:

$$\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{e}_r \frac{2v^2(r)}{r}.\quad (4.3)$$

Des Weiteren braucht man die Terme:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{e}_r \frac{2v^2}{r} &= \left( \mathbf{e}_r \partial_r + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \partial_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \right) \cdot \mathbf{e}_r \frac{2v^2}{r} = 4 \frac{v}{r} \partial_r v + 2 \frac{v^2}{r^2}, \\ \left( \nabla \cdot \mathbf{e}_r \frac{2v^2}{r} \right) \mathbf{v} &= \left( 4 \frac{v^2}{r} \partial_r v + 2 \frac{v^3}{r^2} \right) \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{e}_r \frac{2v^2}{r} \cdot \nabla &= \mathbf{e}_r \frac{2v^2}{r} \cdot \left( \mathbf{e}_r \partial_r + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \partial_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \right) = 2 \frac{v^2}{r} \partial_r, \\ \left( \mathbf{e}_r \frac{2v^2}{r} \cdot \nabla \right) &= 2 \frac{v^2}{r} \partial_r (v \mathbf{e}_r) = \left( 2 \frac{v^2}{r} \partial_r v \right) \mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Damit kann man die gemittelte dritte Invariante in sphärischer Symmetrie angeben:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{III} \rangle_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{3V_{\mathcal{B}}} \int_{\partial \mathcal{B}} d\mathbf{S} \cdot \left( 2 \frac{v^2}{r} \partial_r v + \frac{v^3}{r^2} - 2 \frac{v^2}{r} \partial_r v \right) \mathbf{e}_r \\ &= \frac{1}{3V_{\mathcal{B}}} \int_{\partial \mathcal{B}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_r \frac{v^3}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi r_{\mathcal{B}}^3} 4\pi r_{\mathcal{B}}^2 \frac{v^3}{r_{\mathcal{B}}^2} = \frac{v^3}{r_{\mathcal{B}}^3} = \frac{1}{27} \langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{B}}^3.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Dieses Resultat wurde im Abschnitt 2.4.2 benutzt, um zu zeigen, dass der Rückwirkungsterm in der Zel'dovich-Näherung bei sphärischer Symmetrie ein exaktes Resultat liefert.

**Bemerkung zur Scherung:** Betrachtet man den Rückwirkungsterm in anderer Gestalt, so kann man weitere Schlussfolgerungen ziehen. Für kugelförmige Domänen um ein Zentrum sphärischer Symmetrie ergibt sich:

$$\mathcal{Q} = \frac{2}{3} (\langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{B}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{B}}^2) + 2 \langle \omega^2 - \sigma^2 \rangle_{\mathcal{B}} = 0.$$

Bei einer inhomogenen Materieverteilung gilt:

$$\langle \langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{B}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{B}}^2 \rangle_{\mathcal{B}} = \langle (\theta - \langle \theta \rangle_{\mathcal{B}})^2 \rangle_{\mathcal{B}} > 0.$$

Mit  $\langle \omega^2 \rangle_{\mathcal{B}} \geq 0$  kann die Rückwirkung nur verschwinden wenn  $\langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{B}} > 0$ . Damit ist folgende Behauptung gezeigt:

In einer sphärisch-symmetrischen radial-inhomogenen Materieanordnung kann die Scherung nicht in jedem Punkt verschwinden.

Das gilt natürlich auch für alle kosmologischen Modelle, für die der Rückwirkungsterm global verschwindet, insbesondere für Torusmodelle [21].

## 4.1.2 Analytische Lösung

Nach Newton verhält sich ein Teilchen auf der Oberfläche einer Kugel um ein Symmetriezentrum so, als wäre die Gesamtmasse in deren Mittelpunkt vereinigt. Nimmt man die Kugel als unsere Domäne zur Anfangszeit an, so können wegen der Massenerhaltung in der Domäne weder Teilchen den Rand überholen, noch kann die Domäne andere Gestalt als Kugelform annehmen. Die Bewegungsgleichung des Radius der sphärischen Domäne entspricht der radialen Bewegung eines Probesteilchens auf dem Rand:

$$\ddot{r} + G \frac{M}{r^2} = 0.$$

Dabei bezeichnet  $M$  die Masse der Domäne. Für eine sphärische Domäne gilt  $V_{\mathcal{B}} = a_{\mathcal{B}}^3 V_0 = 4/3\pi r^3 V_0$  und damit:

$$3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{B}}}{a_{\mathcal{B}}} + 4\pi G \frac{M}{a_{\mathcal{B}}^3 V_0} = 3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{B}}}{a_{\mathcal{B}}} + 4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{B}} = 0.$$

Das entspricht der Friedmanngleichung ohne  $\Lambda$ -Term und zeigt, dass in sphärischer Symmetrie nur das Verschwinden des Rückwirkungsterms mit Newtons "Theorem der Eisernen Sphären" vereinbar ist.

Man kann alternativ dazu auch von der Energieerhaltungsgleichung ausgehen. Damit lautet die Bewegungsgleichung für eine Sphäre mit dem (mitschwimmenden)

Radius  $r$ :

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{GM}{r} = \frac{E}{m} \quad (4.5)$$

Dabei ist  $E$  die Gesamtenergie des Probesteilchens auf dem Rand und  $m$  seine Masse. Es ist klar, dass bei Vorgabe der Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{r}(t_0)$ , der Sphärgrenze und des Anfangsradius  $r(t_0)$  die Bewegung der Sphärgrenze nicht von der Masse



des Probeteilchens abhängt. Da wir einen Vergleich mit der ART anstreben, führen wir analog zum Volumenskalenfaktor  $a_B$  einen Oberflächensklenfaktor  $s_B^2 \equiv \frac{S}{S_0}$  als Wurzel des Quotienten aus Oberfläche der betrachteten Sphäre zum Zeitpunkt  $t$  und zum Anfangszeitpunkt  $t_0$  ein. In der NT ist diese Unterscheidung eigentlich unnötig, da  $s_B = a_B = r/R$  gilt. Wir definieren des Weiteren:

$$w_R \equiv \frac{2GM}{R^3} = \frac{8}{3}\pi G \langle \rho_0 \rangle_{B_0}, \quad k_R \equiv -\frac{2E}{mR^2}. \quad (4.6)$$

Damit ist  $w_R$  proportional zur gemittelten Anfangsdichte multipliziert mit der Gravitationskonstanten,  $k_R$  ist in der NT interpretiert proportional zur Gesamtenergie des Probeteilchens pro Masse des Probeteilchens und Oberfläche der Kugel. Eingesetzt in Gl. (4.5) erhält man:

$$\dot{s}_B - \frac{w_R}{s_B} + k_R = 0. \quad (4.7)$$

In der ART taucht diese Gleichung für den Oberflächensklenfaktor in gleicher Form auf. Dann hängt  $k_R$  mit der intrinsischen Krümmung zusammen,  $w_B$  lässt sich aus der Ruhedichteverteilung auf der raumartigen Hyperfläche zum Zeitpunkt  $t_0$  berechnen, kann aber bei einer gekrümmten Raumdomäne nicht mehr als proportional zur gemittelten Anfangsdichte angesehen werden (siehe auch: [6]). Die Lösungen der Gleichung (4.7), sowie die Betrachtung spezieller Anfangswerte werden wir im Rahmen der ART behandeln.

## 4.2 Sphärische Symmetrie in der ART

In der Newtonschen Theorie konnten wir das Verschwinden des Rückwirkungsterms bei einer sphärisch-symmetrischen Materie-Anordnung zeigen. Dabei hatten wir davon profitiert, dass es möglich war, die erste und zweite Invariante des Geschwindigkeitsgradienten als Divergenz zu schreiben. Über die Anwendung des Gauß-Theorems kann daher in der Newtonschen Theorie die Berechnung des Rückwirkungsterms auf die Berechnung von Oberflächenintegralen reduziert werden. Das erweiterte Gauß-Theorem in der ART lautet (übertragen auf unsere Situation der Integration über dreidimensionale gekrümmte Hyperflächen):

$$\int_{\mathcal{D}} P^i{}_{||i} \mathcal{J} d^3X = \int_{\mathcal{D}} (\mathcal{J}P^i)_{,i} d^3X = \int_{\partial\mathcal{D}} P^i n_i \mathcal{J} d^2X. \quad (4.8)$$

Dabei bezeichnet  $n_j$  die Flächennormale und  $P^i$  ein Vektor-Feld auf der Domäne. Will man analog zur Newtonschen Theorie vorgehen, so muss man physikalische Felder suchen, deren kovariante Ableitung (immer bezogen auf unsere dreidimensionale Hyperfläche) die erste und zweite Invariante der äußeren Krümmung ergeben:

$$P^i{}_{||i} = K \quad , \quad Z^i{}_{||i} = \frac{1}{2}(K^2 - K^i{}_j K^j{}_i). \quad (4.9)$$

Es zeigt sich, dass solche physikalischen Felder  $P^i, Z^i$ , die diese Bedingung erfüllen i.A. nicht existieren. Man ist deshalb gezwungen, schrittweise vorzugehen.

### 4.2.1 Sphärisch-symmetrischer Staub im 3+1-Split

Die Betrachtung von sphärischer Symmetrie in der ART hat eine lange Tradition. Für ein Staub-Medium ist eine exakte Lösung, die sogenannte LTB-Lösung gefunden worden [11]. Wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde, ist bei einer drucklosen, rotationsfreien Flüssigkeit die Aufteilung der Raumzeit in eine Eigenzeit  $t$  der Fluidelemente und dreidimensionale, raumartige Hyperflächen möglich. Setzt man zusätzlich sphärische Symmetrie voraus, so hat das Linienelement die Form:

$$ds^2 = -dt^2 + z^2(t, R)dR^2 + r^2(t, R)d\Omega^2. \quad (4.10)$$

Die Koordinate  $R$  wird als mitschwimmende (Lagrangesche) Koordinate aufgefasst.  $z(t, R)$  und  $r(t, R)$  sind beliebige Funktionen, wobei man  $r(t, R)$  als das Analogon zum Newtonschen Radialabstand versteht, in dem Sinne, dass die Oberfläche der dreidimensionalen Kugel mit diesem Linienelement gleich  $4\pi r^2$  ist<sup>1</sup>. Um die Bewegungsgleichungen für  $z(t, R)$  und  $r(t, R)$  zu bekommen, muss man den Ansatz für die Metrik aus dem Linienelement (4.42) in die Einsteinschen Gleichungen einsetzen. Dabei wurde in der Vergangenheit mit der vierdimensionalen Formulierung gearbeitet. Wir verwenden dagegen, um eine geschlossene Darstellung zu erreichen, die Einsteinschen Gleichungen im 3 + 1 Split, wie sie im letzten Abschnitt hergeleitet wurden. Das hat außerdem den Vorteil, dass Größen, wie die intrinsische Krümmung der dreidimensionalen Hyperflächen, direkt aus dem Ansatz für die Metrik gewonnen werden. Die kovarianten Metrikkomponenten kann man aus dem Linienelement (4.42) ablesen:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} z^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Die kontravarianten Metrikkomponenten sind mit  $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$ :

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} z^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (r^2 \sin^2 \theta)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Für den äußeren Krümmungstensor der dreidimensionalen Hyperflächen erhält man aus der Entwicklungsgleichung für die Metrik (3.8):

$$K^i_j = -\frac{1}{2}g^{ik}\dot{g}_{kj} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{z}}{z} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{r}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{r}}{r} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

---

<sup>1</sup>Wir werden daher  $r$  in Folgendem immer als Oberflächenradius bezeichnen

und damit die erste und zweite Invariante der äußeren Krümmung:

$$\mathbf{I} = -K^i{}_i = \frac{\dot{z}}{z} + 2\frac{\dot{r}}{r}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{II} = \frac{1}{2}((K^i{}_i)^2 - K^i{}_j K^j{}_i) = \left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2 + 2\frac{\dot{z}\dot{r}}{zr}. \quad (4.15)$$

Um die Integrale über Raumdomänen zu berechnen, wie sie im Rückwirkungsterm vorkommen, ist zusätzlich die Kenntnis von  $\sqrt{g}$  (in der Lagrangeschen Sprechweise  $\mathcal{J}$ ) nötig:

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det(g_{ij})} = zr^2 \sin \theta. \quad (4.16)$$

Neben der äußeren Krümmung  $K^i{}_j$  braucht man die intrinsischen Krümmung  $R^i{}_j$  und die kovarianten Ableitung von  $K^i{}_j$  auf der Hyperfläche. Die Christoffel-Symbole werden nach der Formel

$$\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}(g_{jl,i} + g_{li,j} - g_{ij,l}) \quad (4.17)$$

mit der Metrik aus Gleichung (5.6) berechnet:

$$\begin{aligned} \Gamma^1{}_{11} &= \frac{z'}{z}, & \Gamma^1{}_{22} &= -\frac{rr'}{z^2}, & \Gamma^1{}_{33} &= -\frac{rr'}{z^2} \sin^2 \theta, \\ \Gamma^2{}_{12} &= \Gamma^2{}_{21} = \frac{r'}{r}, & \Gamma^2{}_{33} &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma^3{}_{23} &= \Gamma^3{}_{32} = \cot \theta, & \Gamma^3{}_{13} &= \Gamma^3{}_{31} = \frac{r'}{r}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die restlichen Christoffel-Symbole verschwinden. Die Impuls-Constraint-Gleichungen (3.6) für diese Wahl der Metrik sind:

$$0 = K^j{}_{j||1} - K^j{}_{1||j} = 2 \left( -\frac{r'}{r} + \frac{r'\dot{z}}{rz} \right). \quad (4.19)$$

$$0 = K^j{}_{j||2} - K^j{}_{2||j} = 0. \quad (4.20)$$

$$0 = K^j{}_{j||3} - K^j{}_{3||j} = 0. \quad (4.21)$$

Die zeitliche Integration von Gleichung (4.19) liefert

$$z = \frac{r'}{W(R)}, \quad (4.22)$$

wobei  $W(R)$  eine beliebige Funktion der Lagrange-Koordinate  $R$  darstellt. Günstiger im Hinblick auf die physikalische Interpretation ist die Einführung einer Funktion <sup>2</sup>  $f(R)$  mit  $W = \sqrt{1 + f(R)}$ .

$$z = \frac{r'}{\sqrt{1 + f}}. \quad (4.23)$$

---

<sup>2</sup>man kann  $f$  als Gesamtenergie der Raumdomäne in der NT verstehen.

Da in obiger Rechnung der Energie-Impuls-Tensors nicht eingeht, gilt die Gleichung (4.19) für beliebige, sphärisch-symmetrische Materiemodelle, die in mitschwimmenden Koordinaten formulierbar sind. Oft wird daher das Linienelement gleich in der Form

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{(r')^2}{1+f(R)}dR^2 + r^2d\Omega^2 \quad (4.24)$$

angegeben. Für die intrinsische Krümmung der dreidimensionalen Hyperflächen gilt mit den Christoffel-Symbolen aus (4.18):

$$R_{ik} = \Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^k_{ik,j} + \Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{lk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{lj} =$$

$$\begin{pmatrix} -2\frac{r''}{r} + 2\frac{z'r'}{zr} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{rr''}{z^2} + \frac{rr'z'}{z^3} - \frac{r'^2}{z^2} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\theta \left( -\frac{rr''}{z^2} + \frac{rr'z'}{z^3} - \frac{r'^2}{z^2} + 1 \right) \end{pmatrix}.$$

Daraus entsteht der gemischte Tensor:

$$R^j_k = g^{ji}R_{ik} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{z^2} \left( \frac{r''}{r} - \frac{z'r'}{zr} \right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z^2} \left( \frac{r''}{r} - \frac{r'z'}{rz} + \frac{r'^2}{r^2} \right) + \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z^2} \left( \frac{r''}{r} - \frac{r'z'}{rz} + \frac{r'^2}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der aus der Impuls-Constraint-Gleichung berechneten Funktion  $z$  gemäß Gleichung (4.23) liefert

$$R^j_k = \begin{pmatrix} -\frac{f'}{rr'} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f'}{2rr'} - \frac{f}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f'}{2rr'} - \frac{f}{r^2} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

und für den dreidimensionalen Ricci-Skalar:

$$R = -2 \left( \frac{f'}{rr'} + \frac{f}{r^2} \right). \quad (4.26)$$

Jetzt lassen sich die restlichen Einsteinschen-Gleichungen im 3+1 Split für sphärisch-symmetrischen Staub angeben. Aus den drei Entwicklungsgleichungen für die äußere Krümmung (3.9) bekommt man zwei unabhängige Gleichungen:

$$\frac{\ddot{r}'}{r'} + 2\frac{\dot{r}\dot{r}'}{rr'} - \frac{f'}{rr'} = 4\pi G\rho + \Lambda. \quad (4.27)$$

$$\frac{\dot{r}^2}{r} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{\dot{r}\dot{r}'}{rr'} - \frac{f'}{2rr'} - \frac{f}{r^2} = 4\pi G\rho + \Lambda. \quad (4.28)$$

Die Hamilton-Constraint-Gleichung wird zu:

$$\frac{\dot{r}^2}{r^2} + 2\frac{\dot{r}\dot{r}'}{rr'} - \frac{f'}{rr'} - \frac{f}{r^2} = 8\pi G\rho + \Lambda. \quad (4.29)$$

Subtrahiert man Gleichung (4.29) vom Zweifachen der Gleichung (4.28) so ergibt sich:

$$2\ddot{r}r + \dot{r}^2 - f = \Lambda r^2. \quad (4.30)$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$\dot{r}^2 = f + \frac{F}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad (4.31)$$

wobei  $F$  eine beliebige Funktion der Lagrange-Koordinate  $R$  darstellt. Löst man Gleichung (4.31) nach  $f$  auf und setzt den Ausdruck in die Gleichung (4.29) ein, so gilt für die Funktion  $F$ :

$$\frac{F'}{r^2 r'} = 8\pi G\rho. \quad (4.32)$$

Die Gleichungen (4.30,4.31,4.32) kann man alternativ zu obiger Ableitung auch direkt aus der vierdimensionalen Schreibweise der Einsteinschen Gleichungen ableiten. Dies entspricht der klassischen Vorgehensweise [11]. Lösungen dieser Gleichungen sind unter dem Namen Tolman-Bondi-Lösung bekannt. Gleichung (4.31) hat die Form einer Friedmann-Gleichung. Um diese Analogie näher zu betrachten, untersuchen wir die physikalische Bedeutung der freien Funktionen  $F(R)$  und  $f(R)$ . Die verbleibende Freiheit bei der Wahl der Koordinate  $r$  nutzen wir und setzen:

$$r(t_0, R) \equiv R. \quad (4.33)$$

Diese Wahl wird analog zur Lagrangeschen Beschreibung in der Newtonschen Theorie getroffen, wo wir die Gleichheit der Eulerschen und der Lagrangeschen Koordinaten zum Zeitpunkt  $t_0$  fordern.  $F(R)$  kann man mit Gleichung (4.32) aus der Dichteverteilung  $\rho_0$  zum Zeitpunkt  $t_0$  berechnen:

$$F' = 8\pi G\rho_0 R^2. \quad (4.34)$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt mit  $F(0) = 0$ :

$$F = 8\pi G \int_0^R \rho_0 \tilde{R}^2 d\tilde{R}. \quad (4.35)$$

Dabei ist bemerkenswert, dass die Integration nicht über den gekrümmten Raum erfolgt. Definiert man eine Masse  $m_R$  analog zur Masse im Eulerschen, flachen Raum:

$$m_R \equiv 4\pi \int_0^R \rho_0 \tilde{R}^2 d\tilde{R}, \quad (4.36)$$

einen von der Domäne und damit dem Anfangsradius  $R$  abhängigen Skalenfaktor, der hier nicht das Volumen skaliert <sup>3</sup>

$$s_{\mathcal{B}} \equiv \frac{r}{R}, \quad (4.37)$$

sowie eine weitere Funktion  $k_R(R)$  mit

$$k_R \equiv -\frac{f}{R^2}, \quad (4.38)$$

so wird aus Gleichung (4.31):

$$\frac{\dot{s}_{\mathcal{B}}^2}{s_{\mathcal{B}}^2} - \frac{2Gm_R}{R^3 s_{\mathcal{B}}^3} + \frac{k_R}{s_{\mathcal{B}}^2} - \frac{\Lambda}{3} = 0. \quad (4.39)$$

Das ist exakt die Friedmanngleichung, nur dass hier die Oberflächenskalisierung von der Größe der Sphäre abhängig ist. Fordert man zusätzlich Homogenität so führt  $s_{\mathcal{B}}(R, t) = a(t)$ ,  $m_R = \varrho_H(4\pi/3)R^3 s_{\mathcal{B}}^3$  und  $k_R(R) = k$  auf die übliche Darstellung der Friedmann-Gleichung. Gleichung (4.39) lässt sich noch kompakter schreiben:

$$\dot{s}_{\mathcal{B}}^2 - \frac{w_R}{s_{\mathcal{B}}} + k_R - s_{\mathcal{B}}^2 \frac{\Lambda}{3} = 0. \quad (4.40)$$

Dabei ist  $w_R \equiv \frac{2Gm_R}{R^3}$  nicht wie in der NT proportional zur mittleren Dichte zum Zeitpunkt  $t_0$  multipliziert mit der Gravitationskonstanten, da in der ART bei der Mittelwertbildung über die gekrümmte raumartige Hyperfläche integriert werden muss. Die Beziehung zur Dichte  $\varrho_0$ , die als Quelle in den Feldgleichungen auftaucht, zeigt Gleichung (4.36):

$$w_R = \frac{8\pi G}{R^3} \int_0^R \varrho_0 \tilde{R}^2 d\tilde{R}. \quad (4.41)$$

Der funktionale Zusammenhang von  $w_R$  mit der Ruhedichte ist also derselbe wie in der NT, allein die physikalische Bedeutung von  $\frac{1}{3R^3} \int_0^R \varrho_0 \tilde{R}^2 d\tilde{R}$  als mittlere Dichte zum Zeitpunkt  $t_0$  geht in der ART verloren.

Kann man eine Lösung für Gleichung (4.39) angeben, so ist damit die Dynamik des Linienelementes der raumartigen Hyperflächen

$$ds^2 = \frac{(s_{\mathcal{B}}R)^2}{1 - k_R R^2} dR^2 + (s_{\mathcal{B}}R)^2 d\Omega^2 \quad (4.42)$$

festgelegt. Mit Kenntnis der Metrik ist man jetzt in der Lage Mittelwerte über dreidimensionale, raumartige Gebiete zu berechnen. Mit Gl.(4.16) und Gl.(4.23), sowie der Definition Gl.(4.38) gilt:

$$V_{\mathcal{B}} \langle \psi \rangle_{\mathcal{B}} = \int_0^{R_{\mathcal{B}}} \psi \sqrt{g} dR = \frac{4\pi}{3} \int_0^{R_{\mathcal{B}}} \psi \frac{((s_{\mathcal{B}}R)^3)'}{\sqrt{1 - k_R R^2}} dR. \quad (4.43)$$

---

<sup>3</sup> $s_{\mathcal{B}}$  ist eine Skalierung des Oberflächenradius, wir bezeichnen diese Größe deshalb als Oberflächenskalisierung

Im Spezialfall der sphärischen Symmetrie sind damit alle von uns definierten Kenngrößen zur Charakterisierung der effektiven Dynamik eines Raumgebietes berechenbar.

## Lösungen

Wir behandeln Modelle mit  $\Lambda = 0$ . Damit vereinfacht sich Gleichung (4.40):

$$\dot{s}_{\mathcal{B}}^2 - \frac{w_R}{s_{\mathcal{B}}} + k_R = 0. \quad (4.44)$$

Lösungen dieser Gleichung kann man in Parameterform angeben [50]. Man unterscheidet drei Fälle:

- $k_R = 0$ :

$$s_{\mathcal{B}} = \left( \frac{9w_R}{4} \right)^{1/3} (t - t_a)^{2/3}. \quad (4.45)$$

- $k_R > 0$ :

$$s_{\mathcal{B}} = \frac{w_R}{2k_R} (1 - \cos x); \quad t - t_a = \frac{w_R}{2k_R^{3/2}} (x - \sin x). \quad (4.46)$$

- $k_R < 0$ :

$$s_{\mathcal{B}} = \frac{w_R}{-2k_R} (\cosh x - 1); \quad t - t_a = \frac{w_R}{2(-k_R)^{3/2}} (\sinh x - x). \quad (4.47)$$

Dabei sind  $w_R, k_R, t_a$  Funktionen von  $R$ .  $t_a$  ist eine Integrationskonstante und bezeichnet den Anfang der Expansion der einzelnen Schale, wenn man in der Zeit zurück extrapoliert. Unsere Koordinatenwahl legt  $t_a$  über die Forderung  $s_{\mathcal{B}} = 1$  bei  $t = 0$  fest. Damit gilt:

- $k_R = 0$ :

$$t_a = \frac{2}{3\sqrt{w_R}}. \quad (4.48)$$

- $k_R > 0$ :

$$t_a = \frac{w_R}{2k_R^{3/2}} (x_0 - \sin x_0) \quad \text{mit} \quad x_0 \equiv \arccos \left( 1 - \frac{2k_R}{w_R} \right). \quad (4.49)$$

- $k_R < 0$ :

$$t_a = \frac{w_R}{2(-k_R)^{3/2}} (\sinh x_0 - x_0) \quad \text{mit} \quad x_0 \equiv \operatorname{arccosh} \left( 1 - \frac{2k_R}{w_R} \right). \quad (4.50)$$

Das Anfangswertproblem reduziert sich auf die Wahl der Funktionen  $w_R, k_R$ .

## 4.2.2 Skalenfaktor

In Newtonscher Theorie kann man aus rein geometrischen Überlegungen folgern, dass der Rückwirkungsterm im Falle einer sphärisch-symmetrischen Materieverteilung verschwindet. Die Skalierung des Eulerschen Radiusvektors zur dritten Potenz entspricht der Skalierung des Volumens. Das gilt nicht in der ART. Das Volumen der Domäne kann mit Hilfe der Metrik berechnet werden:

$$V_{\mathcal{B}} = 4\pi \int_0^{R_{\mathcal{B}}} zr^2 dR = 4\pi \int_0^{R_{\mathcal{B}}} \frac{1}{\sqrt{1 - k_R R^2}} r' r^2 dR. \quad (4.51)$$

Für den von uns über das Volumen definierten Skalenfaktor gilt damit

$$a_{\mathcal{B}}^3 = \frac{V_{\mathcal{B}}}{V_0} = \frac{4\pi}{3V_0} \int_0^{R_{\mathcal{B}}} \frac{1}{\sqrt{1 - k_R R^2}} (s_{\mathcal{B}}^3 R^3)' dR \quad (4.52)$$

und für das Volumen zum Zeitpunkt  $t_0$ :

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} \int_0^{R_{\mathcal{B}}} \frac{1}{\sqrt{1 - k_R R^2}} (R^3)' dR. \quad (4.53)$$

Zwar erfüllt jetzt  $s_{\mathcal{B}}$  als Oberflächenskalierung eine Friedmann-Gleichung ohne Rückwirkung. Bei der Dynamik von  $a_{\mathcal{B}}$  kann jedoch der Rückwirkungsterm anders als in der NT auch bei sphärischer Symmetrie nicht vernachlässigt werden.

## 4.2.3 Hubble-Parameter

Wir berechnen den regionalen Hubble-Parameter  $H_{\mathcal{B}} = \frac{\dot{a}_{\mathcal{B}}}{a_{\mathcal{B}}}$ . Auch er ist natürlich, wie der über das Volumen definierte Skalenfaktor, eine Funktion der Domänengröße  $R_{\mathcal{B}}$ . Nach Bildung der Zeitableitung erhält man:

$$H_{\mathcal{B}} = \frac{\dot{a}_{\mathcal{B}}}{a_{\mathcal{B}}} = \frac{\dot{V}_{\mathcal{B}}}{3V_{\mathcal{B}}}. \quad (4.54)$$

Integration und Zeitableitung kommutieren, so dass sich die Zeitableitung auf den Integranden in Gl. (4.51) überträgt:

$$\dot{V}_{\mathcal{B}} = 4\pi \int_0^{R_{\mathcal{B}}} \frac{1}{\sqrt{1 - k_R R^2}} (s_{\mathcal{B}}^2 \dot{s}_{\mathcal{B}} R^3)' dR. \quad (4.55)$$

Die zeitliche Ableitung von  $s_{\mathcal{B}}$  kann man mit Hilfe von Gl. (4.40) als Funktion der Anfangswerte und  $s_{\mathcal{B}}$  schreiben. Damit gilt:

$$H_{\mathcal{B}} = \frac{4\pi}{3V_{\mathcal{B}}} \int_0^{R_{\mathcal{B}}} \frac{1}{\sqrt{1 - k_R R^2}} (s_{\mathcal{B}} (s_{\mathcal{B}} w_R - s_{\mathcal{B}}^2 k_R + s_{\mathcal{B}}^4 \Lambda/3)^{1/2} R^3)' dR. \quad (4.56)$$



Wobei das Volumen  $V_B$  der Sphäre durch

$$V_B = \frac{4\pi}{3} \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1 - k_R R^2}} (s_B^3 R^3)' dR \quad (4.57)$$

gegeben ist. Damit kann man in Kenntnis der Lösung  $s_B(t, R)$  und der Anfangswerte  $w_R(R), k_R(R)$  den regionalen Hubble-Parameter für eine sphärisch-symmetrische Materieverteilung zu jeder Zeit und für jeden Radius angeben.

#### 4.2.4 Rückwirkungsterm

Jetzt werden wir den Rückwirkungsterm in der ART für sphärisch-symmetrischen Staub berechnen. Die erste und zweite Invariante der äußeren Krümmung sind aus den Gleichungen (4.14,4.15) bekannt. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= 2\langle \mathbf{II} \rangle_B - \frac{2}{3} \langle \mathbf{I} \rangle_B^2 \\ &= \frac{2}{V_B} \int_B \left( \left( \frac{\dot{r}}{r} \right)^2 + 2 \frac{\dot{z} \dot{r}}{z r} \right) \mathcal{J} d^3 X - \frac{2}{3V_B^2} \left( \int_B \left( \frac{\dot{z}}{z} + 2 \frac{\dot{r}}{r} \right) \mathcal{J} d^3 X \right)^2 \\ &= \frac{8\pi}{V_B} \int_0^{R_B} (\dot{r}^2 z + 2 \dot{z} \dot{r} r) dR - \frac{32\pi^2}{3V_B^2} \left( \int_0^{R_B} (\dot{z} r^2 + 2 \dot{r} r z) dR \right)^2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Mit Gleichung (4.23) erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \frac{8\pi}{V_B} \left[ \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1+f}} (\dot{r}^2 r' + 2 \dot{r}' \dot{r} r) dR \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi}{3V_B} \left( \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1+f}} (\dot{r}' r^2 + 2 \dot{r} r r') dR \right)^2 \right] \\ &= \frac{8\pi}{V_B} \left[ \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1+f}} (\dot{r}^2 r)' dR - \frac{4\pi}{3V_B} \left( \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1+f}} (\dot{r} r^2)' dR \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Da unser Skalenfaktor  $s_B$  des Oberflächenradius  $r$  eine Friedmann-Gleichung erfüllt, deren Lösungen für gegebene Anfangsfunktionen  $k_R, w_R$  bekannt sind, ist die Metrik bestimmt. Um  $\mathcal{Q}$  zu berechnen, ist daher die folgende Schreibweise von Vorteil:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \frac{8\pi}{V_B} \left[ \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1 - k_R R^2}} (\dot{s}_B^2 s_B R^3)' dR \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi}{3V_B} \left( \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1 - k_R R^2}} (\dot{s}_B s_B^2 R^3)' dR \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Eliminiert man die zeitliche Ableitung von  $s_B$  mit Hilfe der Friedmann-Gleichung (4.44), so gilt für  $\Lambda = 0$ :

$$\mathcal{Q} = \frac{8\pi}{V_B} \left[ \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1 - k_R R^2}} ((w_R/s_B - k_R) s_B R^3)' dR \right. \\ \left. - \frac{4\pi}{3V_B} \left( \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1 - k_R R^2}} (\sqrt{w_R/s_B - k_R} s_B^2 R^3)' dR \right)^2 \right]. \quad (4.61)$$

Damit kann man  $\mathcal{Q}$  für bestimmte Anfangswerte  $k_R, w_R$ , bei denen eine Lösung  $s_B$  existiert, berechnen.

### Spezialfälle

In zwei Fällen kann man sogar ein Verschwinden der Rückwirkung direkt zeigen. Im ersten Fall geht man davon aus, dass die Lösung für  $s(R, t)$  im Ort und in der Zeit separiert. Damit kann man  $r = sR$  schreiben als:

$$r(t, R) = g(t)\psi(R). \quad (4.62)$$

Eingesetzt in Gl. (4.59) erhält man:

$$\mathcal{Q} = \frac{8\pi}{V_B} \left[ \dot{g}^2 g \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1+f}} (\psi^3)' dR \right. \\ \left. - \frac{4\pi}{3V_B} \left( \dot{g} g^2 \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1+f}} (\psi^3)' dR \right)^2 \right]. \quad (4.63)$$

Für das Volumen  $V_B$  ergibt sich in diesem Spezialfall mit Gl. (4.51):

$$V_B = \frac{4\pi}{3} g^3 \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1-f}} (\psi^3)' dR \equiv \frac{4\pi}{3} g^3 \phi, \quad (4.64)$$

wobei wir zur Vereinfachung

$$\phi(R_B) \equiv \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1-f}} (\psi^3)' dR \quad (4.65)$$

gewählt haben. Damit kann man den Rückwirkungsterm im Falle einer in Raum und Zeit separierenden Lösung berechnen:

$$\mathcal{Q} = \frac{8\pi}{V_B} \left[ \dot{g}^2 g \phi - (g^3 \phi)^{-1} (\dot{g} g^2 \phi)^2 \right] = 0. \quad (4.66)$$

Ein Spezialfall davon wiederum ist der homogen-isotrope Kosmos. Dann gilt  $r = aR$ , wobei  $a$  nur von der Zeit abhängt, und damit:

$$\mathcal{Q} = \frac{8\pi}{V_{\mathcal{B}}} \dot{a}^2 a \left[ \int_0^{R_{\mathcal{B}}} \frac{1}{\sqrt{1+f}} (R^3)' dR - \frac{4\pi}{3V_{\mathcal{B}}} a^3 \left( \int_0^{R_{\mathcal{B}}} \frac{1}{\sqrt{1+f}} (R^3)' dR \right)^2 \right] = 0. \quad (4.67)$$

Dieser Fall ist trivial und dient als Konsistenztest. Die Annahme von Homogenität und Isotropie muss natürlich wieder auf die altbekannten Friedmann-Gleichungen führen.

Beim zweiten Fall, für den ein Verschwinden der Rückwirkung in sphärischer Symmetrie gezeigt werden kann, handelt es sich um die Wahl spezieller Anfangsbedingungen so dass

$$\sqrt{1+f} = \text{const.} = C \quad (4.68)$$

gilt. Ein Beispiel dafür ist eine Punktmasse am Ursprung in einem ansonsten leeren Raum. Für den Rückwirkungsterm gilt dann:

$$\mathcal{Q} = \frac{8\pi}{V_{\mathcal{B}}} \frac{1}{C} \left[ \int_0^{R_{\mathcal{B}}} (\dot{r}^2 r)' dR - \frac{1}{R_{\mathcal{B}}^3} \left( \int_0^{R_{\mathcal{B}}} (\dot{r} r^2)' dR \right)^2 \right] = 0 \quad (4.69)$$

Ansonsten konnten keine Spezialfälle gefunden werden, bei denen der Rückwirkungsterm verschwindet.

## 4.2.5 Gemittelte Krümmung

In Abschnitt 3.3 ist uns aufgefallen, dass in der ART der über die raumartige Hyperfläche gemittelte Krümmungsskalar eine entscheidende Rolle bei der effektiven Dynamik der Raumdomänen spielt. Bei sphärischer Symmetrie ist man in der Lage, seine Zeitentwicklung zu berechnen. Nach Gleichung (4.26) gilt:

$$\langle R \rangle_{\mathcal{B}} = \frac{4\pi}{V_{\mathcal{B}}} \int_0^{R_{\mathcal{B}}} -2 \frac{(fr)'}{\sqrt{1+f}} dR. \quad (4.70)$$

Verwendet man, wie schon bei der Rückwirkung und beim Skalenfaktor als Anfangsbedingungen  $k_R, w_R$  und als dynamische Größe den Oberflächenskalenfaktor  $s_{\mathcal{B}}$ , so erhält man:

$$\langle R \rangle_{\mathcal{B}} = \frac{8\pi}{V_{\mathcal{B}}} \int_0^{R_{\mathcal{B}}} \frac{(s_{\mathcal{B}} k_R R^3)'}{\sqrt{1 - k_R R^2}} dR. \quad (4.71)$$

Damit kann man auch  $\langle R \rangle_{\mathcal{B}}$  für bestimmte Anfangswerte  $k_R, w_R$ , bei denen eine Lösung  $s_{\mathcal{B}}$  existiert, berechnen. Interessant ist auch der Zusammenhang mit dem Rückwirkungsterm, der sich aus Gl. (4.61) ergibt:

$$\mathcal{Q} + \langle R \rangle_{\mathcal{B}} = \frac{8\pi}{V_{\mathcal{B}}} \left[ \int_0^{R_{\mathcal{B}}} \frac{(w_R R^3)'}{\sqrt{1 - k_R R^2}} dR - \frac{4\pi}{3V_{\mathcal{B}}} \left( \int_0^{R_{\mathcal{B}}} \frac{(\sqrt{w_R/s_{\mathcal{B}} - k_R s_{\mathcal{B}}^2 R^3})'}{\sqrt{1 - k_R R^2}} dR \right)^2 \right]. \quad (4.72)$$

Dieser Term taucht in der gemittelten Hamilton-Constraint-Gleichung auf.

## 4.2.6 Regionale Parameter

In Abschnitt 3.3.3 haben wir regionale Parameter definiert, wobei wir zwei verschiedene Sätze von möglichen regionalen Parametern gefunden haben, die sich im Krümmungs- und Rückwirkungsparameter unterscheiden. Der zweite Satz von Parametern verwendet zur Definition des Krümmungsparameters den gemittelten Krümmungsskalar. Mit Gl.(4.71) und Gl.(4.56) gilt:

$$\Omega_R^{\mathcal{B}} = -\frac{\langle R \rangle_{\mathcal{B}}}{6H_{\mathcal{B}}^2}. \quad (4.73)$$

Analog kann man in Kenntnis der Rückwirkung bei sphärischer Symmetrie Gl.(4.59) den Rückwirkungsparameter sowie den  $\Lambda$ -Parameter des zweiten Satzes von möglichen regionalen Parametern angeben:

$$\Omega_{\mathcal{Q}_H}^{\mathcal{B}} = -\frac{\mathcal{Q}}{6H_{\mathcal{B}}^2}, \quad \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} = \frac{\Lambda}{3H_{\mathcal{B}}^2}. \quad (4.74)$$

Der regionale Dichteparameter lässt sich dann mit Hilfe der anderen drei regionalen Parameter berechnen:

$$\Omega_m^{\mathcal{B}} = 1 - \Omega_{\mathcal{Q}_H}^{\mathcal{B}} - \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{B}} - \Omega_R^{\mathcal{B}}. \quad (4.75)$$

Der erste Satz von Parametern verwendet zur Definition des Krümmungsparameters die Integrationskonstante  $k_{\mathcal{D}}$ . Man kann sie berechnen, indem man die Integrabilitätsbedingung Gl.(3.61) zum Zeitpunkt  $t_0$  betrachtet:

$$k_{\mathcal{D}} = \frac{1}{6}(\langle R \rangle_{\mathcal{D}}(t_0) + \mathcal{Q}(t_0)). \quad (4.76)$$

Damit und mit dem regionalen Hubble-Parameter  $H_{\mathcal{B}}$  in sphärischer Symmetrie Gl.(4.56), sowie dem regionalen Skalenfaktor  $a_{\mathcal{B}}$  Gl.(4.52) kann man

$$\Omega_k^{\mathcal{B}} = -\frac{k_{\mathcal{D}}}{H_{\mathcal{B}}^2 a_{\mathcal{B}}^2} \quad (4.77)$$

berechnen. Da der regionale Dichteparameter und der regionale  $\Lambda$ -Parameter in beiden Parametersätzen gleich gewählt werden, kann man auch den Rückwirkungsparameter des ersten Satzes einfach aus den übrigen bestimmen:

$$\Omega_{Q_E}^{\mathcal{B}} = 1 - \Omega_k^{\mathcal{B}} - \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{B}} - \Omega_m^{\mathcal{B}}. \quad (4.78)$$

Betrachtet man die von uns definierten zwei regionalen Parametersätze bei sphärischer Symmetrie, so kann man daraus folgende Schlüsse ziehen: Obwohl der erste Parametersatz, der durch Mittelung der Raychaudhuri-Gleichung gewonnen wird formal gleich dem in der NT ist, haben die regionalen Parameter durch die Mittelung über gekrümmte dreidimensionale Räume in der ART im allgemeinen andere Werte. Das kann man aus der Tatsache folgern, dass der Rückwirkungsterm in der ART bei sphärischer Symmetrie gegenüber der NT im allgemeinen nicht verschwindet. Bei beiden Parametersätzen hat sich gezeigt, dass die einzelnen regionalen Parameter über  $s_{\mathcal{B}}$  vom Dichte und Geschwindigkeitsprofil zum Anfangszeitpunkt abhängen und nicht wie in der NT nur von deren Wert auf dem Rand der Kugel.

## 4.3 Sphärische Modelle mit speziellen Anfangsbedingungen

In den letzten Abschnitten ist es uns gelungen, Größen, wie den Skalenfaktor, die Rückwirkung und den gemittelten Krümmungsskalar, sowie regionale kosmologische Parameter, die das Verhalten einer Raumdomäne als ganzes charakterisieren, als Funktion des Oberflächenskalenfaktors  $s_{\mathcal{B}}$  und der Anfangswerte  $k_R, w_R$  zu schreiben. Anders als in der NT ist in der ART bei sphärischer Symmetrie der Volumenskalenfaktor  $a_{\mathcal{B}}$  von der genauen Form der Anfangswerte  $k_R, w_R$ , nicht nur auf dem Rand, sondern auch innerhalb der Domäne abhängig. Wir betrachten deshalb unterschiedliche Anfangsprofile, wobei wir uns auf große Überdichten beschränken.

### 4.3.1 Schalenkreuzen und Kollaps

Mit Sicherheit kann ein Staub-Modell nur so lange Gültigkeit besitzen, so lange die Dichte nicht zu groß wird. Eine divergierende Dichte hätte eine andere Zustandsgleichung und damit einen anderen Energie-Impuls-Tensor zur Folge. Will man also ein realistisches Modell konstruieren, kommt dafür nur eine eingeschränkte Klasse von Anfangsprofilen für  $w_R$  und  $k_R$  in Frage. Diese Einschränkungen werden über die Forderung bestimmter Anschlussbedingungen zum Beispiel bei Hellaby und Lake [40] oder Matravers und Humphreys [53] definiert. Wir betrachten eine physikalisch

motiviert die Ableitung dieser Einschränkungen. Damit sich keine unendlichen Dichten am Ursprung oder auf der Oberfläche bestimmter Schalen bilden muss man fordern, dass sich Trajektorien von  $r = s_R R$  nicht schneiden. Folgende Überlegungen zeigen die Einschränkungen für die Anfangsbedingungen.

Falls sich benachbarte Trajektorien, die zur Zeit  $t = 0$  um  $\delta R$  voneinander entfernt sind, schneiden so gilt:

$$r(R, t) = r(R + \delta R, t). \quad (4.79)$$

Mit  $\delta R$  gegen 0:

$$r'(R, t) = 0. \quad (4.80)$$

Das bedeutet, dass der infinitesimale raumartige Abstand, ebenso wie das infinitesimale Volumen, zwischen zwei Kugelschalen verschwindet, da mit der Metrik (4.24) gilt:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{(r')^2}{1 - k_R R^2} dR^2 = 0, \quad \text{falls } r' = 0. \\ dV &= ds 4\pi r^2 = 0 \quad \text{falls } r' = 0 \quad \text{oder } r = 0. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Beinhaltet also das Volumenelement zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Masse  $dM$  und bleibt diese Masse, wie von uns gefordert erhalten, so gilt für die Dichte in der Kugelschale:

$$\varrho(R, t) = \frac{dM}{dV}(R, t) = \infty \quad \text{falls } r' = 0 \quad \text{oder } r = 0. \quad (4.82)$$

Will man daher verhindern, dass unser Modell seine Gültigkeit verliert, so muss man  $r' \neq 0$  und  $r \neq 0$  für die betrachtete Zeitspanne fordern. Dabei bedeutet  $r' = 0$  bei  $R \neq 0$ , dass sich entfernt vom Zentrum eine Oberflächendichte bildet, während  $r = 0$  Kollaps auf einen Punkt bedeutet.

Die Bedingungen aus (4.82) schränkt die Freiheit bei der Wahl der Funktionen  $w_R, k_R$  ein. Bezogen auf die Lösungen mit  $\Lambda = 0$  gilt:

$r = 0$  kann nur bei  $k_R > 0$  auftreten. Zu jedem Zeitpunkt  $t > t_0$  erhält man in den anderen Fällen  $r = sR > 0$  für  $R \neq 0$ . Bei  $k_R > 0$  erfolgt der Kollaps bei  $x = 2\pi$ . Das bedeutet nach Gleichung (4.46) einen Kollapszeitpunkt  $t_K$  von:

$$t_K = \frac{\pi w_R}{k_R^{3/2}} + t_a. \quad (4.83)$$

Die Zeit  $t_{SK}$  bei der sich die Trajektorien von  $r$  verschiedener Schalen kreuzen, kann nur implizit als Funktion der Anfangsfunktionen  $w_R, k_R$  angegeben werden. Die Bedingung dafür ist ein Vorzeichenwechsel von  $r'$ . Für gegebene  $w_R, k_R$  bedeutet das die Bestimmung der Nullstellen der Ableitung der Lösungen:

- $k_R = 0$ :

$$({}_{\mathcal{B}}R)' = \left( R \left( \frac{9w_R}{4} \right)^{1/3} (t_{SK} - t_a)^{2/3} \right)' = 0. \quad (4.84)$$

- $k_R > 0$ :

$$({}_{\mathcal{B}}R)' = \left( \frac{Rw_R}{2k_R} (1 - \cos x_{SK}) \right)' = 0. \quad (4.85)$$

- $k_R < 0$ :

$$({}_{\mathcal{B}}R)' = \left( \frac{Rw_R}{-2k_R} (\cosh x_{SK} - 1) \right)' = 0. \quad (4.86)$$

Einsetzen von  $x_{SK}$  liefert für die Schale mit dem Anfangswert  $R$  den Zeitpunkt  $t_{SK}$ , bei dem sie mit der Nachbarschale zusammenfällt. Die minimalen Forderungen, die man an die Anfangsbedingungen stellen muss, damit die obigen Bedingungen erfüllt sind, kann man in [40] nachlesen.

### Modellannahmen:

Es gibt eine Reihe von Ansätzen, geeignete Profile für die Anfangsdaten zu wählen (siehe: [47], [48]). Wir sind vor allem daran interessiert, wie das zeitliche Verhalten unserer regionalen Parameter von dem Profil der Anfangswerte abhängt. Um sinnvoll vergleichen zu können, gehen wir deshalb davon aus, dass die Domänen mit unterschiedlichen Anfangsfeldern bei einem bestimmten Radius in ein Einstein-De-Sitter Universum übergehen. Modelle dieser Art wurden in unterschiedlichen Zusammenhängen diskutiert (siehe: [33], [12], [35]). Die Forderungen an  $w_R$  und  $k_R$  kann man in folgenden Punkten zusammenfassen:

1. Damit ein Anschluss an ein Einstein-De-Sitter-Modell bei einem bestimmten Radius  $R_H$  möglich ist, muss die Masse<sup>4</sup> innerhalb von  $R_H$  bei den Vergleichsmodellen übereinstimmen und der Masse einer Kugel mit gleichem Radius im Hintergrund entsprechen.
2. Die Anfangswerte sollen im Betrachtungszeitraum kein Kreuzen oder den Kollaps der Oberflächenradien verschiedener Schalen verursachen.
3. Da eine negative Ruhedichte  $\varrho_0$  unphysikalisch ist, sind nur solche  $w_R$  erlaubt, die dies vermeiden. Mit Gleichung (4.41) bedeutet das:  

$$\varrho_0 8\pi G = 3w_R + R w'_R \geq 0.$$

---

<sup>4</sup>gemeint ist hier die analog zur Masse im Eulerschen, flachen Raum definierten Masse Gl. (4.36).

Nur so lange diese Bedingungen erfüllt sind liefert das Modell physikalisch sinnvolle Ergebnisse. Die Trajektorien des Oberflächenradius sowie die Mittelwerte kann man mit Hilfe der impliziten Lösungen numerisch berechnen.

### Bemerkungen zur numerischen Berechnung:

Unser Hauptinteresse gilt der Berechnung von Volumenintegralen (4.52), (4.61), (4.71). Diese haben die allgemeine Struktur:

$$I \equiv \int_0^{R_B} \frac{1}{\sqrt{1 - k_R R^2}} f(s_B, R, w_R, k_R)' dR. \quad (4.87)$$

Wir sind am Wert des Integrals zur Zeit  $t$  interessiert. Im Integranden taucht als einzige dynamische Funktion  $s_B$  auf. Da die Zeitabhängigkeit aber nur in Parameterform gegeben ist, müssen wir zu einem bestimmten  $R_i$  zuerst den Parameterwert  $x_i$  zur Zeit  $t$  finden, um mit dem Wert  $s_B(R_i, t)$  die Summe zu bilden, die zum Integral führt. Man muss also  $t(x, R)$  invertieren. Das verlangt mit den Gleichungen (4.46), (4.47) die Bestimmung der Nullstellen von<sup>5</sup>:

$$\frac{w_R}{2k_R^{3/2}}(x - \sin x) + t_a - t = 0 \quad (4.88)$$

zu gegebenem  $t$  und  $R$ . Im Programm zur numerischen Berechnung der Mittelwerte benutzen wir dazu die Newton-Raphson-Methode (siehe: [60]). Der Wert der Integrale (4.52), (4.61), (4.71) wird dann mit der Trapezmethode ermittelt. Damit wird auch die Erzeugende der Rotationsfläche (4.92), die zur Veranschaulichung der Geometrie der Hyperfläche zum Zeitpunkt  $t_0$  dient, berechnet.

### Einbettung

Man kann bei sphärischer Symmetrie leicht eine Vorstellung vom Aussehen der gekrümmten Raumdomänen erhalten, wenn man einen Schnitt der raumartigen Hyperfläche bei konstantem Winkel betrachtet. Setzt man  $\theta = \pi/2$ , so gilt für das Linienelement dieser zweidimensionalen Fläche mit Gleichung (4.42):

$$ds^2 = \frac{(s_B R)^{2'}}{1 - k_R R^2} dR^2 + (s_B R)^2 d\phi^2. \quad (4.89)$$

Wir wählen Koordinaten  $R, \phi, w$  für den flachen dreidimensionalen Raum so, dass das Linienelement einer Niveaufläche  $w = 1$  mit obigem Linienelement übereinstimmt.

---

<sup>5</sup>hier nur für  $k > 0$  exemplarisch aufgeschrieben, für  $k < 0$  ist die Verfahrensweise analog



Berechnet man mit dem Ansatz

$$x = s_B R \cos \phi, \quad y = s_B R \sin \phi, \quad z = g(R, t)w \quad (4.90)$$

das Linienelement des flachen Raumes  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  und setzt  $w = \text{const.} = 1$ , so stimmt das so erhaltene Linienelement mit (4.89) überein, wenn man

$$g(R) = \pm \int_0^R (s_B \tilde{R})' \sqrt{\frac{k_R \tilde{R}^2}{1 - k_R \tilde{R}^2}} d\tilde{R} + c \quad (4.91)$$

fordert. Die Geometrie der Domäne kann so durch die Niveaufläche  $w = 1$  veranschaulicht werden. In Parameterform ist die Fläche gegeben durch:

$$x = s_B R \cos \phi, \quad y = s_B R \sin \phi, \quad z = \pm \int_0^R (s_B \tilde{R})' \sqrt{\frac{k_R \tilde{R}^2}{1 - k_R \tilde{R}^2}} d\tilde{R} + c. \quad (4.92)$$

Dabei ist  $c$  eine Integrationskonstante. Die Fläche ist durch ihre innere Geometrie, die in der Metrik zum Ausdruck kommt, nicht eindeutig festgelegt. Wir wählen  $c = 0$  und  $z > 0$ . Die so festgelegte Rotationsfläche veranschaulicht die innere Krümmung der dreidimensionalen Hyperflächen.

### 4.3.2 Das Gaußsche Modell

Eines der einfachsten Modelle ist das eines Gaußschen Profils für  $w_R$ :

$$w_R = \exp(-R^2/2R_c^2) \frac{1}{t_c^2}. \quad (4.93)$$

Wobei wir  $R_c$  als konstante Standardlänge und  $t_c$  als konstante Standardzeit definiert haben. Für die Anfangsdichte  $\varrho_0$  gilt dann mit Gl.(4.41):

$$\varrho_0 = \frac{3}{8\pi G} \left(1 - \frac{R^2}{3R_c^2}\right) \exp(-R^2/2R_c^2) \frac{1}{t_c^2}. \quad (4.94)$$

Ab einem bestimmten Radius  $R_1 = R_c \sqrt{3}$  wird die physikalische Dichte negativ und die Modellannahme 3 ist nicht mehr erfüllt. Ab diesem Radius bis zum Radius  $R_H$ , ab dem wir ein Einstein-De-Sitter-Modell festlegen, setzen wir  $\varrho_0(R) = 0$ . Nimmt man ausserdem die Geschwindigkeit des Oberflächenradius zum Anfangszeitpunkt  $\dot{s}(t_0) \equiv \dot{s}_0$  über den gesamten Radius als konstant an, so kommt man über unsere Modellannahmen zu folgenden möglichen Anfangswerten.

Wir unterscheiden dabei drei Regionen:

**1. Region**  $0 \leq R < R_1$  :

$$\begin{aligned} w_R &= \exp(-R^2/2R_c^2) \frac{1}{t_c^2}, & \varrho_0 &= \frac{3}{8\pi G} \left(1 - \frac{R^2}{3R_c^2}\right) \exp(-R^2/2R_c^2) \frac{1}{t_c^2}, \\ \dot{s}_0^2 &= \exp(-R_1^2/2R_c^2) \left(\frac{R_1}{R_H}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, & k_R &= w_R - \dot{s}_0^2. \end{aligned}$$

**2. Region**  $R_1 \leq R < R_H$  :

$$\begin{aligned} w_R &= \exp(-R_1^2/2R_c^2) \left(\frac{R_1}{R}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, & \varrho_0 &= 0, \\ \dot{s}_0^2 &= \exp(-R_1^2/2R_c^2) \left(\frac{R_1}{R_H}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, & k_R &= w_R - \dot{s}_0^2. \end{aligned}$$

**3. Region**  $R_H \leq R < \infty$  :

$$\begin{aligned} w_R &= \exp(-R_1^2/2R_c^2) \left(\frac{R_1}{R_H}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, & \varrho_0 &= \frac{3}{8\pi G} \exp(-R_1^2/2R_c^2) \left(\frac{R_1}{R_H}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, \\ \dot{s}_0^2 &= \exp(-R_1^2/2R_c^2) \left(\frac{R_1}{R_H}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, & k_R &= w_R - \dot{s}_0^2 = 0. \end{aligned}$$

In diesem und in den folgende Modellen wollen wir davon ausgehen, dass die Dichte an der Grenze  $R_H$  zum Einstein-De-Sitter Kosmos  $1/7$  ihres Wertes bei  $R = 0$  beträgt. Da  $R_1$  bereits durch die Tatsache festgelegt wird, dass die Dichte bei  $R_1 = R_c\sqrt{3}$  auf Null gefallen ist kann man  $R_H$  berechnen:

$$1/7 = \exp(-3/2) \left(\frac{R_c\sqrt{3}}{R_H}\right)^3 \implies R_H = (7 \exp(-3/2))^{1/3} \sqrt{3} R_c \approx 2R_c. \quad (4.95)$$

Da wir an den relativen Abweichungen unserer regionalen Parameter interessiert sind, wählen wir praktische Einheiten. In den Abbildungen ist die Einheit der Zeit  $[t] = t_c$ , des Radius  $[R] = R_c$ , der Dichte  $[\varrho] = \frac{3}{8\pi G} \frac{1}{t_c^2}$ , von  $[w_R] = \frac{1}{t_c^2}$ , und von  $[k] = \frac{1}{c^2 t_c^2}$  (wir haben  $c = 1$  gesetzt). So hat man die Möglichkeit, durch die Festlegung von  $t_c$  und  $R_c$  das Modell der jeweiligen physikalischen Situation anzupassen. Man kann die absoluten Größen festlegen, die relativen Größen, wie der Dichtekontrast, sind für das Modell charakteristisch.

In der Abbildung (4.1) kann man die Dynamik des Modells verfolgen. In der Bildmitte ist die Geometrie von Raumschnitten zu zwei verschiedenen Zeiten gezeigt. Man erkennt am Rand der Domäne den Übergang in einen flachen Einstein-De-Sitter-Raum, sowie die Expansion. Während sich in einem homogen-isotropen Kosmos diese Expansion allein in einer Skalierung der gesamten Domäne äußert, erkennt man hier eine deutliche Formänderung. Diese ist dafür verantwortlich, dass sich die regionalen Parameter in der ART von den Newtonschen unterscheiden. Die Trajektorien im unteren Bild sind Zykloiden. Mit fortschreitender Zeit kommt es zu einer Dichtekonzentration nahe dem Zentrum. Die innerste Schale kollabiert zuerst, später folgen weiter vom Zentrum entfernte Schalen. Ab dem Anfangsradius  $R \approx 2R_c$  folgen die Schalen dem Einstein-de-Sitter-Hintergrund.

### 4.3.3 Das Top-Hat-Modell

Zum Vergleich betrachten wir ein zweites Anfangsprofil für die Anfangswerte. Dieses Modell hat im Zentrum eine konstante Dichte, die bei einem bestimmten Radius  $R_1$  abrupt auf Null abfällt und weiter außen ab dem Radius  $R_H$  wieder einen konstanten Wert annimmt. Ein Modell dieser Art ist unter dem Namen *Top-Hat-Modell* bekannt (siehe: [38]). Will man wiederum unsere Modellannahmen erfüllen, so gibt es folgende Möglichkeit die Anfangsfelder festzulegen:

**1. Region**  $0 \leq R < R_1$  :

$$w_R = \frac{1}{t_c^2}, \quad \varrho_0 = \frac{3}{8\pi G} \frac{1}{t_c^2}, \quad \dot{s}_0^2 = \left(\frac{R_1}{R_H}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, \quad k_R = w_R - \dot{s}_0^2.$$

**2. Region**  $R_1 \leq R < R_H$  :

$$w_R = \left(\frac{R_1}{R}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, \quad \varrho_0 = 0, \quad \dot{s}_0^2 = \left(\frac{R_1}{R_H}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, \quad k_R = w_R - \dot{s}_0^2.$$

**3. Region**  $R_H \leq R < \infty$  :

$$w_R = \left(\frac{R_1}{R_H}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, \quad \varrho_0 = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{R_1}{R_H}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, \quad \dot{s}_0^2 = \left(\frac{R_1}{R_H}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, \quad k_R = w_R - \dot{s}_0^2 = 0.$$

Um sinnvoll vergleichen zu können, werden wir diese Domäne in einen Einstein-de-Sitter-Hintergrund mit der gleichen Dichte wie im ersten Modell einbetten. Auch die maximale Dichte im Zentrum und der Radius  $R_H$ , bei dem der Übergang zum

homogen-isotropen Hintergrund stattfindet, werden gleich gewählt. Das bedeutet, dass die Dichte bei  $R_H = 2R_c$   $1/7$  des Wertes der Dichte bei  $R = 0$  betragen soll. Damit gilt:

$$R_1 = (1/7)^{1/3} 2R_c. \quad (4.96)$$

In der Abbildung (4.3) kann die Dynamik dieses Modells verfolgt werden. Bezüglich der Einheiten gelten dieselben Anmerkungen wie beim Gaußschen Modell. Die Verformung des Raumschnittes ist in diesem Falle viel ausgeprägter als beim Gaußschen Modell und der Kollaps erfolgt bei den innersten Schalen gleichzeitig (wie bei einem Friedmann-Modell positiver Krümmung).

#### 4.3.4 Das Doppel-Top-Hat-Modell

Dieses Modell ist eine Erweiterung des Top-Hat-Modells. Dabei kommt eine Schale mit radial homogener Dichte dazu. Es hat im Zentrum eine konstante Dichte, die bei einem bestimmten Radius  $R_1$  abrupt auf Null abfällt. Beim Radius  $R_2$  nimmt sie wieder einen konstanten Wert an, um bei  $R_3$  erneut auf Null abzufallen. Erst bei  $R_H$  ist die Grenze zum Einstein-De-Sitter-Hintergrund erreicht. Will man wiederum unsere Modellannahmen erfüllen, so kann man dieses Modell folgendermaßen realisieren: Für alle Regionen gilt:  $\dot{s}_0^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \left(\frac{R_3}{R_H}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}$ .  $w_R$ ,  $\varrho_0$ ,  $k_R$  sind abschnittsweise definiert:

**1. Region**  $0 \leq R < R_1$  :

$$w_R = \frac{1}{t_c^2}, \quad \varrho_0 = \frac{3}{8\pi G} \frac{1}{t_c^2}, \quad k_R = w_R - \dot{s}_0^2.$$

**2. Region**  $R_1 \leq R < R_2$  :

$$w_R = \left(\frac{R_1}{R}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, \quad \varrho_0 = 0, \quad k_R = w_R - \dot{s}_0^2.$$

**3. Region**  $R_2 \leq R < R_3$  :

$$w_R = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, \quad \varrho_0 = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, \quad k_R = w_R - \dot{s}_0^2.$$

**4. Region  $R_3 \leq R < R_H$  :**

$$w_R = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \left(\frac{R_3}{R}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, \quad \varrho_0 = 0, \quad k_R = w_R - \dot{s}_0^2.$$

**5. Region  $R_3 \leq R < R_H$  :**

$$w_R = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \left(\frac{R_3}{R_H}\right)^3 \frac{1}{t_c^2}, \quad \varrho_0 = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \left(\frac{R_3}{R_H}\right)^3 \frac{1}{t_c^2 t_c^2}, \quad k_R = w_R - \dot{s}_0^2 = 0.$$

Auch hier wollen wir, wie bei den beiden vorangegangenen Modellen fordern, dass der Radius beim Übergang zum Einstein-De-Sitter-Hintergrund  $R_H = 2R_c$  beträgt. Die Dichte soll dann 1/7 ihres Wertes bei  $R = 0$  betragen. Damit ist das Modell allerdings noch nicht vollständig festgelegt. Eine konsistente Wahl von  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  ist:

$$R_1 = 1/2R_c, \quad R_2 = 2^{1/3}/2R_c, \quad R_3 = (16/7)^{1/3}R_c, \quad R_H = 2. \quad (4.97)$$

In der Abbildung (4.5) ist das Modell graphisch dargestellt. Bezüglich der verwendeten Einheiten gelten dieselben Bemerkungen wie beim Gauß-Modell. Der Raumschnitt weist gegenüber den anderen beiden Modellen ein zusätzliche Ausbuchtung im Bereich der Schale mit homogener Dichte auf. Bei den Trajektorien des Oberflächenradius deutet sich eine Dichtekonzentration auf einer Schale bei  $R = R_c$  an.

### 4.3.5 Vergleich regionaler Parameter

Nachdem wir in den letzten drei Abschnitten verschiedene mögliche Modelle vorgestellt haben, wollen wir in diesem Abschnitt die Dynamik der regionalen Größen vergleichen. Dazu wählen wir zwei verschiedene Domänen:

- Für die erste Domäne wählen wir einen Anfangsdsdus von  $1.3R_c$ . Die äußersten Schalen dieser Domäne koppeln am Ende des Beobachtungszeitraumes bei unseren Modellen gerade von der Hintergrundexpansion ab.
- Für die zweite Domäne wählen wir einen Anfangsdsdus von  $2R_c$ . Das ist genau die Grenze zum Einstein-De-Sitter-Hintergrund.

Wir verfolgen die Entwicklung des Skalenfaktors  $a_{\mathcal{D}}$  und der mittleren Krümmung  $\langle R \rangle_{\mathcal{B}}$  für diese beiden Domänen bis kurz vor den Kollaps-Zeitpunkt der innersten Schale. Dabei vergleichen wir die wirklichen regionalen Größen mit den Werten, die

sie annehmen, wenn die Masse innerhalb der Domäne homogen verteilt ist. Wir vergleichen also  $a_{\mathcal{D}}$  mit dem Oberflächenskalenfaktor  $s_{\mathcal{B}}$  und die gemittelte Krümmung  $\langle R \rangle_{\mathcal{B}}$  mit  $6k_{R_{\mathcal{B}}}/s_{\mathcal{B}}^2$ . Genau diese Vergleichsgrößen entsprechen deren wirklichen Werten, wenn man die NT zugrunde legt. Im Vergleich der Skalenfaktoren  $a_{\mathcal{D}}$  und  $s_{\mathcal{B}}$  sieht man daher den Unterschied bei der Betrachtung der regionalen Größen in der ART und der NT. Zusätzlich betrachten wir den Unterschied zwischen den beiden von uns definierten Krümmungsparametern. Dabei ist  $\langle R \rangle_{\mathcal{B}}$  der (mit  $-1/6H_{\mathcal{D}}^2$  multiplizierte) Krümmungsparameter aus der gemittelten Hamilton-Constraint-Gleichung und  $6k_{R_{\mathcal{B}}}/s_{\mathcal{B}}^2$  der (ebenfalls mit  $-1/6H_{\mathcal{D}}^2$  multiplizierte) Krümmungsparameter aus der gemittelten Raichaudhury-Gleichung.

## Skalenfaktor

In der Abbildung (4.2 oben) kann man die Zeitentwicklung des regionalen Skalenfaktors  $a_{\mathcal{D}}$  gegenüber dem Oberflächenskalenfaktor  $s_{\mathcal{B}}$  für das Gauß-Modell betrachten. Für die große Domäne (oben rechts) ist dabei kaum eine Abweichung festzustellen, während man bei der kleineren Domäne (oben links) zum Zeitpunkt des Kollaps der innersten Schale schon eine deutliche Abweichung sieht. Wesentlich größer fallen die Abweichungen beim Top-Hat-Modell aus. Bei der kleineren Domäne in Abbildung 4.4 oben links kann man erkennen, dass sich zum Zeitpunkt der Abkopplung der Domäne von der Hintergrundexpansion die größten Abweichungen ergeben. Auch bei der Domäne, deren Außenschale bereits dem Einstein-De-Sitter-Modell folgt, sieht man eine starke Abweichung (Abb. 4.4 oben rechts). Dagegen sind die Abweichungen beim Top-Top-Hat Modell gering (Abb. 4.6 oben). Bei der kleineren Domäne (Abb. 4.6 oben links) ist keine Abweichung festzustellen. Das liegt daran, dass der Radius der kleinen Domäne hier in den Bereich mit konstanter mittlerer Dichte fällt. Bei allen Modellen liegt der regionale Skalenfaktor bei der kleinen Domäne unter seinem Vergleichswert, bei der großen Domäne darüber.

## Krümmung

Falls die Masse innerhalb der Domäne homogen verteilt ist gilt  $\langle R \rangle_{\mathcal{B}} = 6k_{R_{\mathcal{B}}}/s_{\mathcal{B}}^2$ . Das ist unser Vergleichswert. Sobald die äußerste Schale anfängt zu kollabieren steigt dieser Wert, während er in einem Einstein-De-Sitter-Kosmos kontinuierlich fällt. Der wirkliche, gemittelte Krümmungsskalar zeigt ein anderes Verhalten. Sehr gut kann man das beim Top-Hat-Modell sehen (Abb. 4.4 mitte). Während der Vergleichswert hier noch fällt, wirkt sich beim gemittelte Krümmungsskalar der Kollaps der inneren Schalen aus und er beginnt wieder zu wachsen. Bei der kleinen Domäne liegt der Wert von  $\langle R \rangle_{\mathcal{B}}$  am Ende der Entwicklung sogar über dem Vergleichswert (Abb. 4.4 mitte

links). Beim Top-Hat-Modell und beim Doppel-Top-Hat-Modell stellt der Radius der großen Domäne die Grenze zum Einstein-De-Sitter-Modell dar. Daher verschwindet der Vergleichswert  $6k_{R_B}/s_B^2$  (Abb. 4.4 mitte rechts, 4.6 mitte rechts).

Der Vergleich der beiden (mit  $-1/6H_D^2$  multiplizierte) Krümmungsparameter stellt zugleich ein Maß für die Rückwirkung dar, da mit Gl. (3.61) gilt:

$$\frac{6k_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}^2} - \langle R \rangle_{\mathcal{B}} = \frac{4}{a_{\mathcal{D}}^2} \int_{t_0}^t d\tilde{t} \mathcal{Q} a_{\mathcal{D}} \dot{a}_{\mathcal{D}} + \mathcal{Q}. \quad (4.98)$$

Auch hier stellt man beim Top-Hat-Modell (Abb: 4.4 unten) die größten Unterschiede zwischen diesen beiden Parametern fest. Erstaunlich ist, dass der relative Unterschied bei der großen Domäne im Gauss-Modell (Abb: 4.2 unten rechts) und im Doppel-Top-Hat-Modell (Abb: 4.6 unten rechts) größer ist als bei der kleinen Domäne (Abb. 4.2 unten links, 4.6 unten links). Bei allen Modellen wächst der Unterschied der beiden verschieden definierten Krümmungsparameter an, so dass man davon ausgehen kann, dass damit auch die Rückwirkung zunimmt.

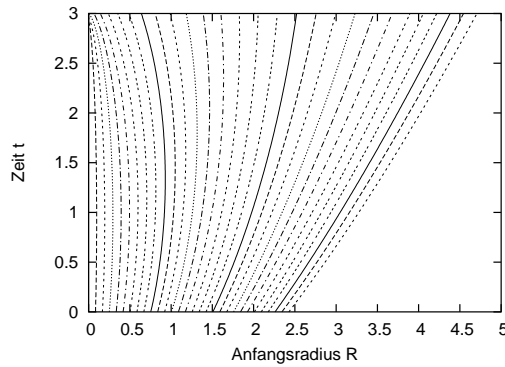
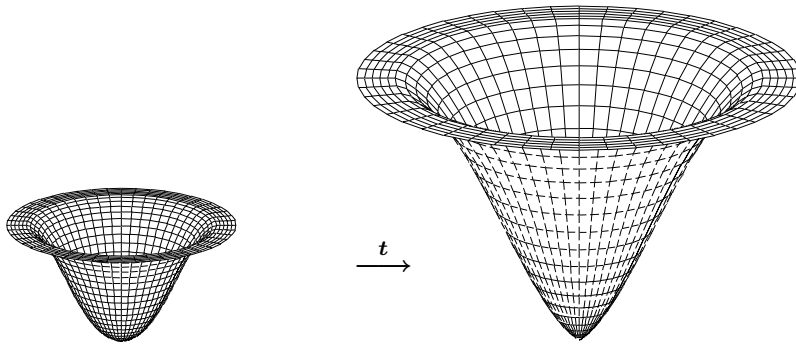
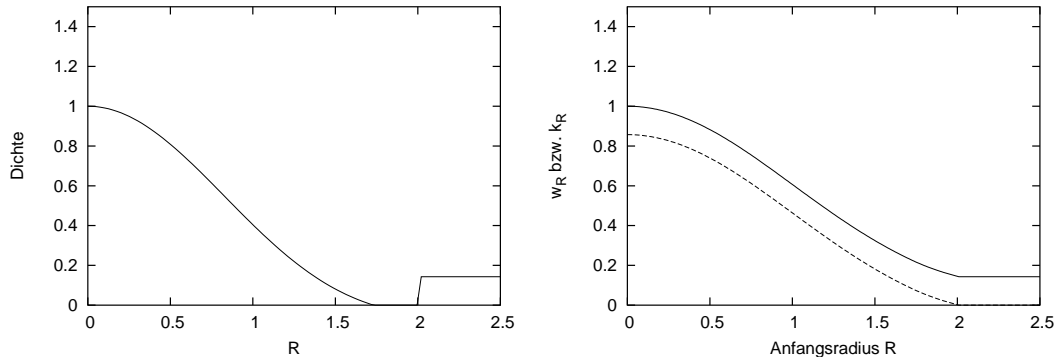


Abbildung 4.1: Oben ist das gewählte Anfangsdichteprofil dargestellt sowie die daraus resultierenden Anfangsfunktionen  $w_R, k_R$ . In der Mitte wird die damit verbundene Geometrie eines Raumschnittes bei konstantem Winkel zum Anfangszeitpunkt und zum Zeitpunkt des Kollapses der innersten Schale gezeigt. In der unteren Abbildung sind einige mit diesen Anfangswerten berechnete Trajektorien des Oberflächenradius zu sehen. Die Einheit der Zeit ist  $[t] = t_c$ , des Radius  $[R] = R_c$ , der Dichte  $[\rho] = \frac{3}{8\pi G} \frac{1}{t_c^2}$ , von  $[w_R] = \frac{1}{t_c^2}$ , und von  $[k] = \frac{1}{c^2 t_c^2}$ .



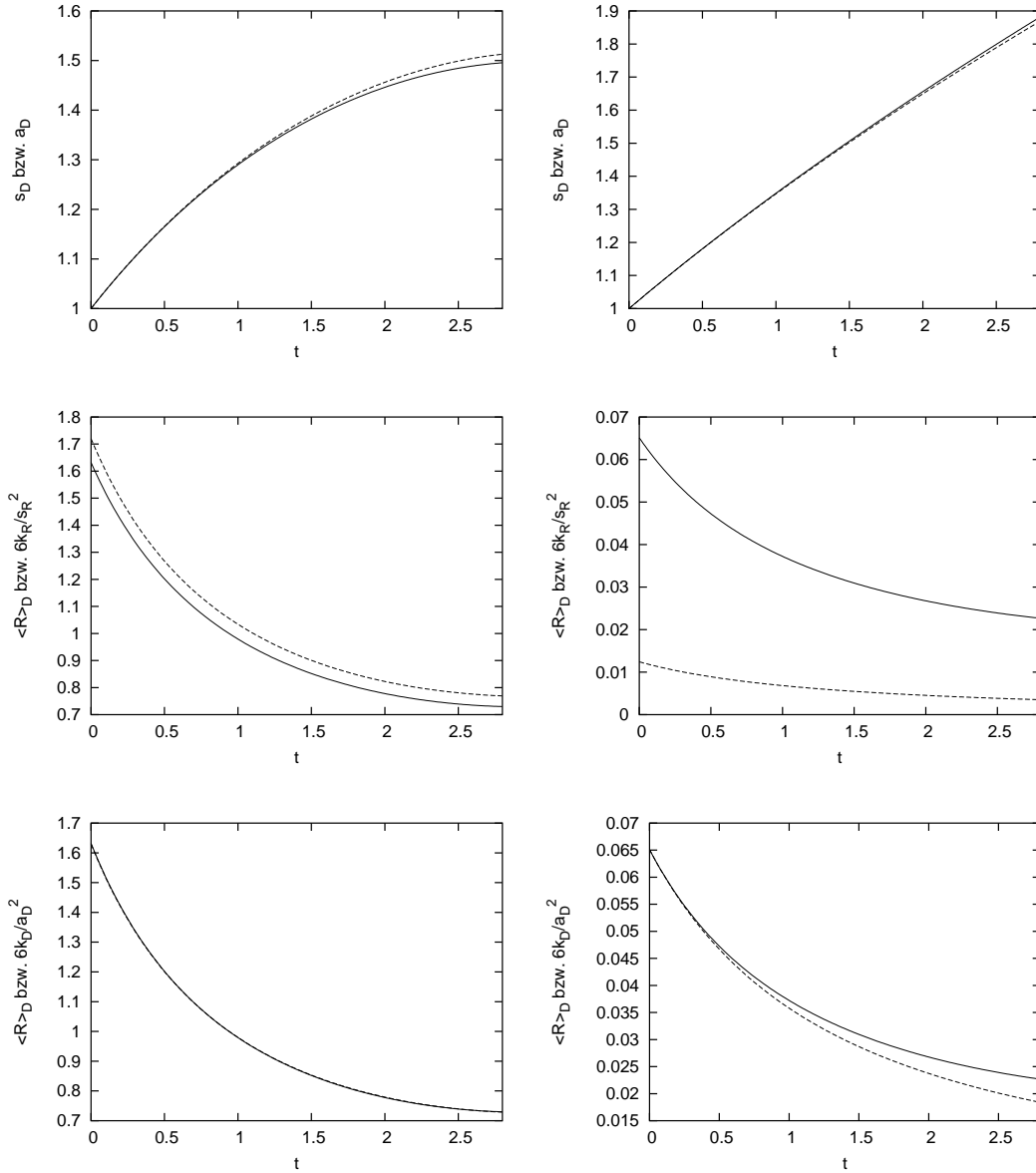


Abbildung 4.2: Das Bild oben zeigt die Dynamik des Oberflächenskalfaktors  $s_B$  (gestrichelt) und des Volumenskalfaktors  $a_B$  (durchgezogen). In der Mitte ist das zeitliche Verhalten von  $\langle R \rangle_B$  (durchgezogen) gegen  $6k_R/s_B^2$  (gestrichelt) dargestellt. Unten kann man die Zeitentwicklung von  $\langle R \rangle_B$  (durchgezogen) gegenüber  $6k_D/a_B^2$  (gestrichelt) verfolgen. Die Abbildungen auf der linken Seite gelten für eine Sphäre im Gauß-Modell mit dem Radius  $1.3R_c$ , die auf der rechten Seite für eine Sphäre im Gauß-Modell mit dem Radius  $2R_c$ . Die Einheit der Zeit ist  $[t] = t_c$ , von  $[\langle R \rangle_B] = 1/(t_c^2 c^2)$  und von  $k_D$  sowie  $[k_R] = 1/(t_c^2 c^2)$ .

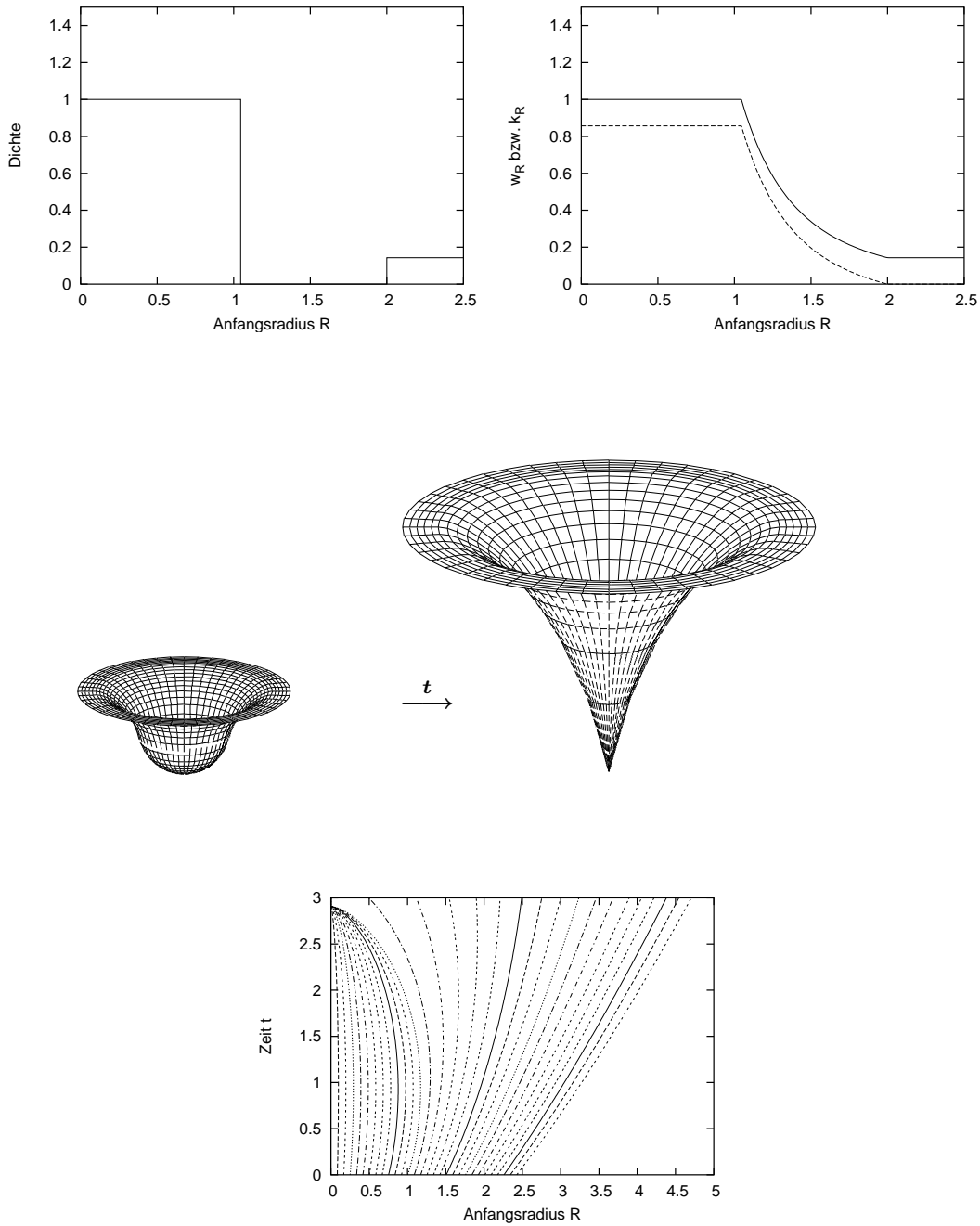


Abbildung 4.3: Oben ist das gewählte Anfangsdichteprofil dargestellt sowie die daraus resultierenden Anfangsfunktionen  $w_R, k_R$ . In der Mitte wird die damit verbundene Geometrie eines Raumschnittes bei konstantem Winkel zum Anfangszeitpunkt und zum Zeitpunkt des Kollapses der innersten Schale gezeigt. In der unteren Abbildung sind einige mit diesen Anfangswerten berechnete Trajektorien des Oberflächenradius zu sehen. Die Einheiten sind die gleichen wie in Abbildung (4.1).

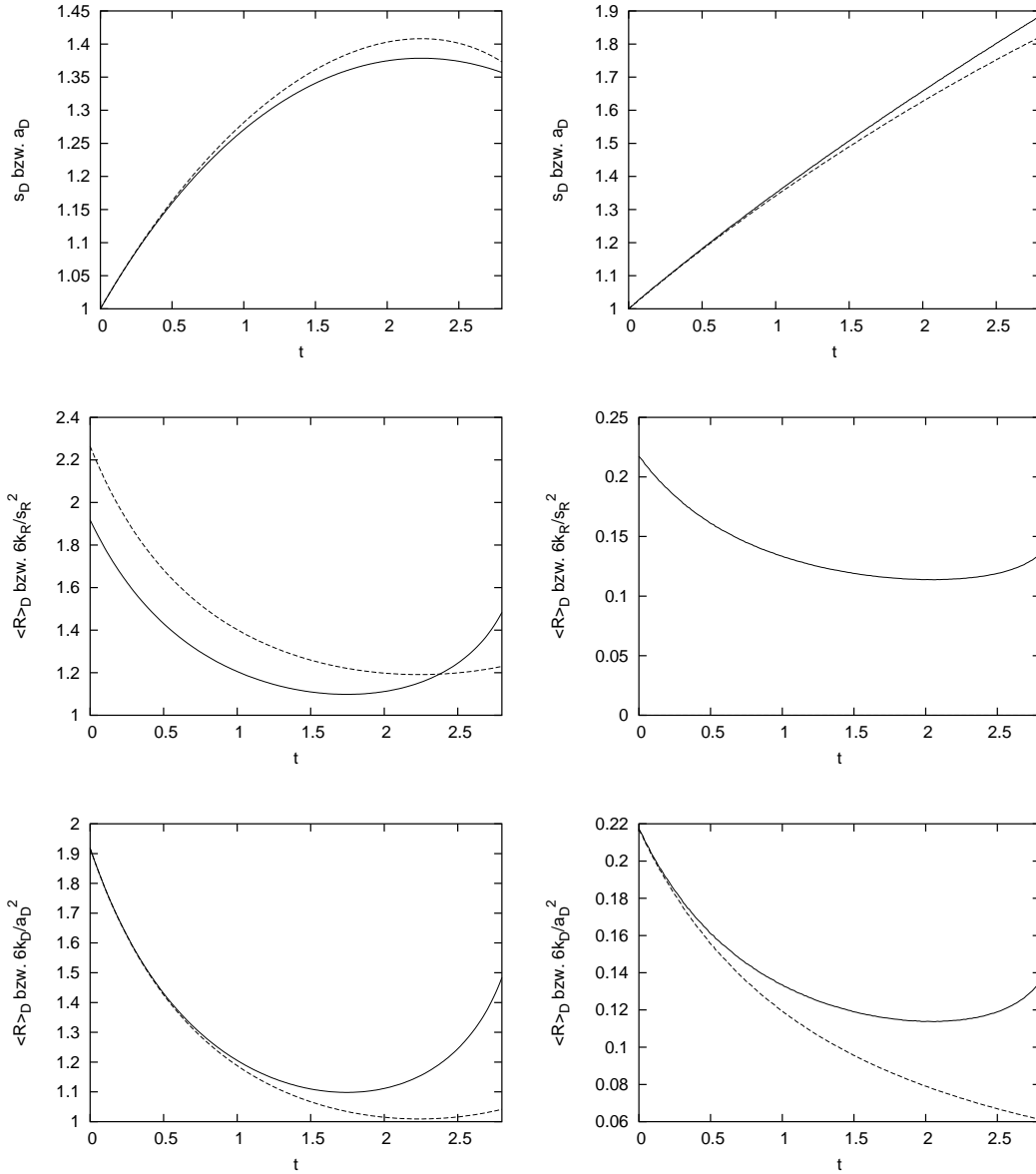


Abbildung 4.4: Das Bild oben zeigt die Dynamik des Oberflächenskalfaktors  $s_B$  (gestrichelt) und des Volumenskalfaktors  $a_B$  (durchgezogen). In der Mitte ist das zeitliche Verhalten von  $\langle R \rangle_B$  (durchgezogen) gegen  $6k_R/s_B^2$  (gestrichelt) dargestellt. Unten kann man die Zeitentwicklung von  $\langle R \rangle_B$  (durchgezogen) gegenüber  $6k_D/a_B^2$  (gestrichelt) verfolgen. Die Abbildungen auf der linken Seite gelten für eine Sphäre im Top-Hat-Modell mit dem Radius  $1.3R_c$ , die auf der rechten Seite für eine Sphäre im Top-Hat-Modell mit dem Radius  $2R_c$ . Die Einheiten sind die gleichen wie in Abbildung (4.2).

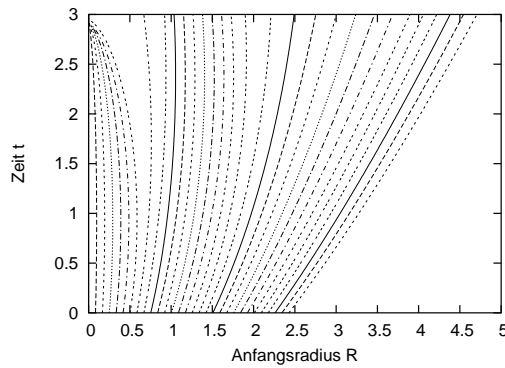
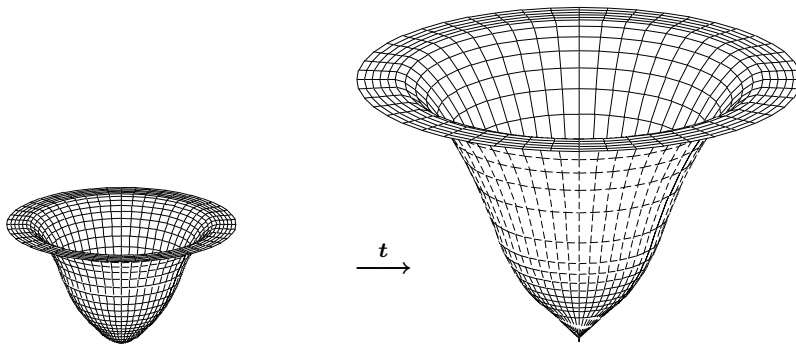
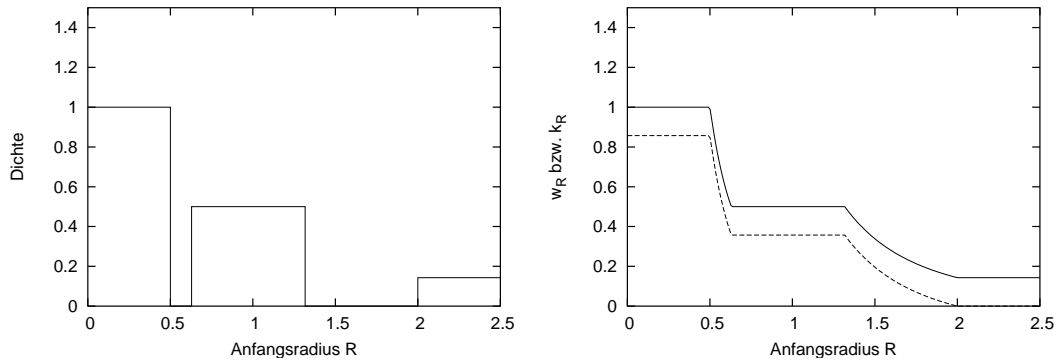


Abbildung 4.5: Oben ist das gewählte Anfangsdichteprofil dargestellt sowie die daraus resultierenden Anfangsfunktionen  $w_R$ ,  $k_R$ . In der Mitte wird die damit verbundene Geometrie eines Raumschnittes bei konstantem Winkel zum Anfangszeitpunkt und zum Zeitpunkt des Kollapses der innersten Schale gezeigt. In der unteren Abbildung sind einige mit diesen Anfangswerten berechnete Trajektorien des Oberflächenradius zu sehen. Die Einheiten sind die gleichen wie in Abbildung (4.1).

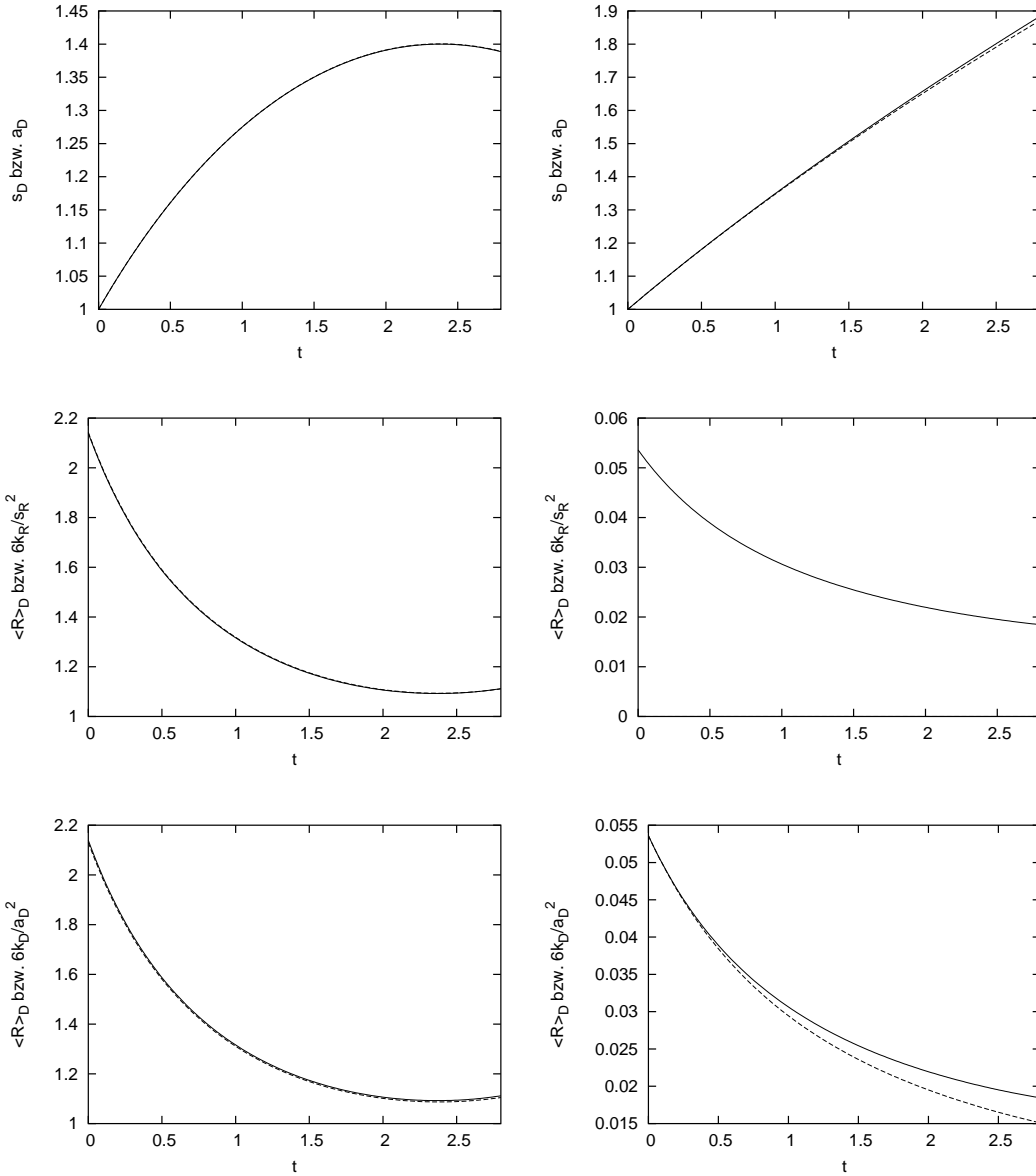


Abbildung 4.6: Das Bild oben zeigt die Dynamik des Oberflächenskalfaktors  $s_B$  (gestrichelt) und des Volumenskalfaktors  $a_B$  (durchgezogen). In der Mitte ist das zeitliche Verhalten von  $\langle R \rangle_B$  (durchgezogen) gegen  $6k_R/s_B^2$  (gestrichelt) dargestellt. Unten kann man die Zeitentwicklung von  $\langle R \rangle_B$  (durchgezogen) gegenüber  $6k_D/a_B^2$  (gestrichelt) verfolgen. Die Abbildungen auf der linken Seite gelten für eine Sphäre im Doppel-Top-Hat-Modell mit dem Radius  $1.3R_c$ , die auf der rechten Seite für eine Sphäre im Doppel-Top-Hat-Modell mit dem Radius  $2R_c$ . Die Einheiten sind die gleichen wie in Abbildung (4.2).



# Kapitel 5

## Quantitativer Vergleich mit dem Friedmann-Modell

Die Berechnung der Rückwirkung in der Zel'dovich-Näherung in der NT und die relativistische Zel'dovich-Näherung haben gezeigt, dass es wachsende Moden gibt, die, speziell wenn man die Zel'dovich Näherung als Extrapolation ins nichtlineare Regime auffasst, einen Quellterm für die Entwicklung der Domäne als ganzes darstellen. Geht man davon aus, dass diese Näherung die Rückwirkung quantitativ unterschätzt, so wird die Lösung der inhomogenen Friedmann-Gleichung einen domänenabhängigen Skalenfaktor liefern, der eine Mindestabweichung vom Skalenfaktor des homogen-isotropen Modells darstellt. Damit erhält man eine Antwort auf die Frage, bei welcher Größenordnung der betrachteten Domäne die Annahme von lokaler Homogenität und Isotropie bereits sinnvoll ist. Teile dieses Abschnittes sind in [18] veröffentlicht.

Eine Abschätzung im Abschnitt (5.1.1) wird zeigen, dass sich unter den von uns gewählten Bedingungen die Newtonschen Mittelwerte quantitativ nur minimal von den Mittelwerten über, durch Dichteinhomogenitäten gekrümmte, raumartige Hyperflächen unterscheiden. Daher werden wir zum Großteil im Newtonschen Begriffsbild arbeiten in dem Wissen, dass die Ergebnisse in sehr guter Näherung auch im Rahmen der ART gültig sind.

### 5.1 Modellannahmen

Wir wollen die bisher entwickelten Methoden dazu benutzen, Größenvergleiche zwischen den Standardparametern einer sich gemäß dem Friedmann-Modell entwickeln-

den Raumdomäne und einem Raumbereich mit inhomogenen sowie anisotropen Dichte- und Geschwindigkeitsfeldern zu ziehen. Dabei wollen wir uns im Rahmen des in der Einleitung erwähnten Standardmodelles bewegen. Durch die Beschränkung auf staubförmige Materie muss der Anfangszeitpunkt, ab dem wir die Entwicklung der Domäne verfolgen, in der materiedominierten Ära liegen. Die Anfangsbedingungen zu diesem Zeitpunkt sind im Rahmen der klassischen Kosmologie durch ein Powerspektrum gegeben, das über eine Transferfunktion aus dem Harrison-Zel'dovich-Spektrum gewonnen wird. Mit dieser gegebenen statistische Beschreibung behandeln wir unsere Anfangsfelder als Zufallsgrößen und betrachten ein- $\sigma$ , zwei- $\sigma$ , und drei- $\sigma$  Abweichungen von ihren Mittelwerten. Die Anfangsfluktuationen der Dichte sowie des Geschwindigkeitsfeldes sind zu einem frühen Zeitpunkt im Rahmen des Standardmodelles klein.

Als Hintergrundmodell wählen wir ein  $\Lambda$ CDM-Modell. Dabei fällt die Hintergrundkrümmung sowie der Lambda-Term weg und es gilt:

$$\frac{8\pi G \varrho_H}{3H^2} = 1. \quad (5.1)$$

Dabei bezeichnet  $\varrho_H$  die Hintergrunddichte und  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  die Hubble-Funktion. Die Anfangsbedingungen sind damit:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \quad \text{mit} \quad t_0 = \frac{2}{3H_h(1+z_0)^{3/2}}. \quad (5.2)$$

$H_h$  ist der heutige Wert des Hubbleparameters des Hintergrundmodelles,  $z_0$  bezeichnet die Rotverschiebung, bei der unsere Rechnung startet. Mit  $H_h = 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  und  $z_0 = 200$  bestimmt man den Anfangszeitpunkt unserer Berechnung zu:  $t_0 = 4.6 \times 10^{-3} \text{ Gy}$ . Der Skalenfaktor der Domäne wird so gewählt, dass er mit dem Skalenfaktor des Hintergrunds zum Zeitpunkt  $t_0$  übereinstimmt:

$$a_{\mathcal{D}}(t_0) = a(t_0) = 1. \quad (5.3)$$

Wir betrachten die Entwicklung des Skalenfaktors der Domäne bis zum heutigen Zeitpunkt  $z_h = 0$  und  $t_h = 13 \text{ Gy}$ , mit  $a(t_h) = 201$ . Ausgehend von Gleichung (2.83) erhält man für  $\dot{a}_{\mathcal{D}}$  zum Anfangszeitpunkt:

$$\dot{a}_{\mathcal{D}}(t_0) = \dot{a}(t_0) \left(1 + \frac{1}{3} \langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{D}_0}\right) = \frac{2}{3t_0} \left(1 + \frac{1}{3} \langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{D}_0}\right). \quad (5.4)$$

Oft wird als Anfangsbedingung auch  $\dot{a}_{\mathcal{D}}(t_0) = \dot{a}(t_0)$  benutzt um den Kollapszeitpunkt von Domänen zu bestimmen. Numerische Tests zeigen aber, dass durch die Benutzung dieser inkonsistenten Anfangsbedingungen der Kollapszeitpunkt verzögert wird [7].



### 5.1.1 Relativistische Effekte

Welche relativistischen Effekte sind mit diesen Modellannahmen zu erwarten? In der Literatur wird angemerkt, dass bei Entfernungen die kleiner als der Hubble-Radius sind die NT eine gute Näherung darstellt. Gilt das auch bei der Betrachtung der effektiven Entwicklung von Raumdomänen? Aufgrund der Analogie zwischen den Triaden  $\eta^i_a$  und dem Gradienten der Lagrangekoordinaten  $f^i|_j$  haben diese Größen die gleiche Dynamik. Trotzdem kann die Metrik in der ART von der flachen Metrik abweichen, da  $g_{ij} = \eta^a_i \eta^b_j G_{ab}$  gilt. Licht bewegt sich in der ART entlang Geodäten, während in der NT die raumartige Hyperfläche direkt beobachtbar ist. Neben diesen Unterschieden gibt es Unterschiede bei den physikalischen Größen, die sowohl von den Triaden als auch von der Anfangsmetrik abhängen. Dazu zählen die räumlichen Mittelwerte. Mit Gleichung (3.30) und (3.51) gilt:

$$\langle \psi \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \psi(\mathbf{X}, t) \sqrt{g} d^3 X = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \psi(\mathbf{X}, t) \mathcal{J} \sqrt{G} d^3 X. \quad (5.5)$$

Sie beinhalten sowohl die Triadendeterminante  $\mathcal{J}$  als auch die Determinante  $G$  der Anfangsmetrik. Wie in Abschnitt (3.1.5) müsste man im allgemeinen ein Gleichungssystem nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen lösen, um  $G$  aus der Anfangsdichte und  $\dot{\eta}^i_a$  zu ermitteln.

Wir wollen einen anderen Weg einschlagen um die Größenordnung abzuschätzen, in der sich  $G$  bei unseren Modellannahmen bewegt. Wir gehen dabei von einer inhomogenen, aber sphärisch-symmetrischen Dichteverteilung aus. Die dreidimensionale Metrik Gl. (4.42) ist in diesem Fall:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{(s_{\mathcal{B}}R)^2}{1-k_R R^2} & 0 & 0 \\ 0 & (s_{\mathcal{B}}R)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (s_{\mathcal{B}}R)^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Fordert man  $g_{ik}(t_0) = G_{ik}$  so kann man mit  $s_{\mathcal{B}}(t_0) = 1$  die Anfangsmetrik  $G_{ab}$  und Triaden  $\eta^a_i$  in diesen speziellen Koordinaten direkt ablesen:

$$G_{ab} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-k_R R^2} & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

$$\eta^a_i = \begin{pmatrix} (s_{\mathcal{B}}R)' & 0 & 0 \\ 0 & s_{\mathcal{B}} & 0 \\ 0 & 0 & s_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Damit kann man die Wurzel der Determinante von  $G_{ab}$  angeben:

$$G = \frac{R^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - k_R R^2}}. \quad (5.9)$$

Dabei hängt  $R^2 \sin \theta$  mit der Wahl von Kugelkoordinaten zusammen und taucht in der NT ebenso auf. Den Unterschied, der allein auf die Raumkrümmung in der ART zurückzuführen ist macht also der Faktor  $\sqrt{1 - k_R R^2}$  aus. Mit Gl. (4.41) gilt für  $k_R$ :

$$k_R R^2 = \frac{8\pi G}{R} \int_0^R \varrho_0 \tilde{R}^2 d\tilde{R} - R^2 \dot{s}_B^2(t_0). \quad (5.10)$$

Mit einem Einstein-De-Sitter-Hintergrund (5.1) sowie der Definition des Dichtekontrastes  $\delta = \varrho/\varrho_H - 1$  erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{R} \int_0^R \varrho_0 \tilde{R}^2 d\tilde{R} &= \frac{3H_0^2}{R} \int_0^R (1 + \delta_0) \tilde{R}^2 d\tilde{R} \\ &= H_0^2 R^2 \left( 1 + \frac{3}{R^3} \int_0^R \delta_0 \tilde{R}^2 d\tilde{R} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Als Mittel über den Eulerschen, flachen Raum aufgefasst, kann man den letzten Term auch schreiben als:

$$\frac{3}{R^3} \int_0^R \delta_0 \tilde{R}^2 d\tilde{R} = \langle \delta_0 \rangle_B. \quad (5.12)$$

Die Zeitableitung des anfänglichen Oberflächenskalenfaktors  $\dot{s}_B^2(t_0)$  kann man im Prinzip unabhängig von der Dichte wählen, bewegt man sich dagegen im Rahmen realistischer Anfangsbedingungen bezüglich des Standardmodells, so ist ein Zusammenhang mit dem Dichtekontrast gemäß Gl. (5.4) anzunehmen:

$$R^2 \dot{s}_B^2(t_0) = H_0^2 R^2 \left( 1 - \frac{1}{3} \langle \mathbf{I} \rangle_B \right)^2 \quad (5.13)$$

Die Zeld'ovich-Näherung impliziert  $\mathbf{I} = -\delta_0$ . Damit kann man den Faktor  $k_R R^2$  als Funktion des gemittelten Dichtekontrastes  $\langle \delta_0 \rangle_B$  und der Hubble-Funktion des Hintergrundes zur Zeit  $t_0$  schreiben:

$$k_R R^2 = H_0^2 R_0^2 \left( \frac{1}{3} \langle \delta_0 \rangle_B + \frac{1}{9} \langle \delta_0 \rangle_B^2 \right). \quad (5.14)$$

Bei einem Einstein-De-Sitter-Modell gilt  $H_0^2 = H_h^2 (1 + z_0)^3$ . Dabei bezeichnet  $H_h$  den Wert der Hubble-Funktion zum heutigen Zeitpunkt,  $z_0$  ist die Rotverschiebung. Wir haben  $c = 1$  gesetzt. Da  $k_R R^2$  dimensionslos sein muss, gilt in Einheiten mit  $c \neq 1$ :

$$k_R R^2 = \frac{H_h^2 R_0^2 (1 + z_0)^3}{c^2} \left( \frac{1}{3} \langle \delta_0 \rangle_B + \frac{1}{9} \langle \delta_0 \rangle_B^2 \right). \quad (5.15)$$

Gemäß den Modellannahmen gilt  $H_h = 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  und  $z_0 = 200$ . Den Wert des gemittelten Dichtekontrastes werden wir im nächsten Abschnitt berechnen. Maximal werden wir dann eine  $3\text{-}\sigma$  Abweichung von dem als statistische Zufallsgröße aufgefassten Raummittel der Dichtefluktuation betrachten. Für  $1\text{-}\sigma$  und  $2\text{-}\sigma$  Abweichungen sind geringere relativistische Effekte zu erwarten.

Für die kleinste von uns gewählte Raumdomäne mit einem anfänglichen Radius von 0.025Mpc beträgt die 3- $\sigma$  Abweichung des über diesen Raumbereich gemittelten Dichtekontrastes  $39 \times 10^{-3}$ . Damit kann man einen Wert für  $k_R R^2$  angeben:

$$k_R R^2 = 1.859 \times 10^{-6}. \quad (5.16)$$

Für die größte von uns gewählte Domäne mit einem anfänglichen Radius von 5Mpc beträgt die 3- $\sigma$  Abweichung des über die Domäne gemittelten Dichtekontrastes  $0.01 \times 10^{-3}$ . In diesem Fall erhält man die Größenordnung:

$$k_R R^2 = 5.647 \times 10^{-5}. \quad (5.17)$$

Damit kann man abschätzen, um wieviel sich Mittelwerte in der ART und in der NT im Rahmen unserer Modellannahmen unterscheiden. Mit der Tolman-Bondi Metrik gilt:

$$\begin{aligned} \langle \psi \rangle_{\mathcal{B}_K} &= \frac{4\pi}{V_{\mathcal{B}_K}} \int_0^R \frac{\psi}{\sqrt{1 - k_R \tilde{R}^2}} \tilde{R}^2 d\tilde{R} \\ &\approx \frac{4\pi}{V_{\mathcal{B}_K}} \int_0^R \psi \tilde{R}^2 d\tilde{R} + \frac{4\pi}{2V_{\mathcal{B}_K}} \int_0^R (k_R \tilde{R}^2) \psi \tilde{R}^2 d\tilde{R}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

falls  $k_R R^2 \ll 1$  gilt. Dann kann man den Faktor  $\frac{1}{V_{\mathcal{B}_K}}$  nähern mit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_{\mathcal{B}_K}} &\approx \left( 4\pi \int_0^R \tilde{R}^2 d\tilde{R} + \frac{4\pi}{2} \int_0^R (k_R \tilde{R}^2) \tilde{R}^2 d\tilde{R} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{V_{\mathcal{B}_E}} \left( 1 + \frac{3}{2R^3} \int_0^R (k_R \tilde{R}^2) \tilde{R}^2 d\tilde{R} \right)^{-1} \\ &\approx \frac{1}{V_{\mathcal{B}_E}} \left( 1 - \frac{3}{2R^3} \int_0^R (k_R \tilde{R}^2) \tilde{R}^2 d\tilde{R} \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Gl.(5.19) in Gl.(5.18) ergibt:

$$\begin{aligned} \langle \psi \rangle_{\mathcal{B}_K} &\approx \langle \psi \rangle_{\mathcal{B}_E} + \frac{4\pi}{2V_{\mathcal{B}_E}} \int_0^R (k_R \tilde{R}^2) \psi \tilde{R}^2 d\tilde{R} \\ &\quad - \frac{3\langle \psi \rangle_{\mathcal{B}_E}}{2R^3} \int_0^R (k_R \tilde{R}^2) \tilde{R}^2 d\tilde{R}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Falls  $(k_R R^2) > 0$  und  $\psi > 0$  so gilt mit  $(k_R R^2)_{min}$ : Minimum der Funktion  $(k_R R^2)$  im Intervall  $[0, R]$ ,  $(k_R R^2)_{max}$ : Maximum der Funktion  $(k_R R^2)$  im Intervall  $[0, R]$ , die Ungleichung:

$$\begin{aligned} &\frac{4\pi}{2V_{\mathcal{B}_E}} \int_0^R (k_R \tilde{R}^2) \psi \tilde{R}^2 d\tilde{R} - \frac{3\langle \psi \rangle_{\mathcal{B}_E}}{2R^3} \int_0^R (k_R \tilde{R}^2) \tilde{R}^2 d\tilde{R} \\ &\leq \frac{\langle \psi \rangle_{\mathcal{B}_E}}{2} ((k_R R^2)_{max} - (k_R R^2)_{min}) \leq \frac{\langle \psi \rangle_{\mathcal{B}_E}}{2} (k_R R^2)_{max}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Damit erhält man eine Abschätzung von der Größenordnung der Abweichung des Mittelwertes über eine gekrümmte Domäne vom Mittelwert über einen flachen Raumbereich:

$$\langle \psi \rangle_{\mathcal{B}_K} \approx \langle \psi \rangle_{\mathcal{B}_E} + \frac{(k_R R^2)_{max}}{2} \langle \psi \rangle_{\mathcal{B}_E}. \quad (5.22)$$

Die Berechnung von  $(k_R R^2)$  legt nahe, dass  $(k_R R^2)$  eine wachsende Funktion von  $R$  ist. Damit sind die Unterschiede in den Mittelwerten um so größer, je größer die Domäne gewählt wird. Im nächsten Abschnitt benutzen wir als größten Anfangsradius 5Mpc. Für eine solche Domäne gilt mit Gl.(5.17):

$$\langle \psi \rangle_{\mathcal{B}_K} \approx \langle \psi \rangle_{\mathcal{B}_E} + 2.8 \times 10^{-5} \langle \psi \rangle_{\mathcal{B}_E}. \quad (5.23)$$

Bei kleineren Raumbereichen werden die Unterschiede noch geringer ausfallen. Daher kann man bei der Bildung großräumiger Strukturen als gute Näherung die Mittelung über eine Eulersche Raumdomäne verwenden. Der folgende Abschnitt benutzt diese Vereinfachung.

## 5.2 Verhalten des Skalenfaktors inhomogener Domänen

Leitet man die Anfangswerte für die Triaden in gleicher Weise aus den Dichtefluktuationen ab wie in der NT, was unsere Analogiebetrachtung nahelegt, so besteht der einzige Unterschied bei den Mittelwerten in der ART und in der NT in der Anfangsmetrik, die in der ART einen gekrümmten, in der NT einen flachen dreidimensionalen Raum beschreibt. Wie die Abschätzung im letzten Abschnitt zeigt, sind die quantitativen Unterschiede bei den Mittelwerten in den hier betrachteten Fällen jedoch so gering, dass wir in guter Näherung mit dem Newtonschen Begriffsbild arbeiten können.

Als Berechnungsgrundlage dient uns die verallgemeinerte Friedmann-Gleichung (2.58), wobei der Rückwirkungsterm in genäherter Form gemäß Gleichung (3.81) eingesetzt wird. Diese Differentialgleichung wird numerisch gelöst, wobei die Anfangsbedingungen in Appendix A.1 festgelegt werden. Als Hintergrund wählen wir ein Einstein-De-Sitter-Modell.

Subtrahiert man die Friedmann-Gleichung für ein Einstein-De-Sitter-Modell  $3\frac{\ddot{a}}{a} + 4\pi G \varrho_H = 0$  von Gleichung (3.81) und benutzt  $\varrho_H = \frac{3H^2}{8\pi G}$ , so erhält man die folgende Differentialgleichung für  $a_{\mathcal{D}}(t)$ :

$$3 \left( \frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} - \frac{\ddot{a}}{a} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \langle \delta \rangle_{\mathcal{D}} = Q_{\mathcal{D}} \quad , \quad (5.24)$$

mit  $\langle \delta \rangle_{\mathcal{D}} = (\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \varrho_H) / \varrho_H$  als über die Domäne gemittelter Dichtekontrast. Setzt man  $Q_{\mathcal{D}} = 0$  und  $\langle \delta \rangle_{\mathcal{D}} = 0$  so zeigt die Gleichung lediglich, dass der Skalenfaktor der Domäne für alle Zeiten dem Skalenfaktor des Hintergrundmodells entspricht,  $a_{\mathcal{D}} = a$ . Verschwindet der Rückwirkungsterm  $Q_{\mathcal{D}} = 0$  wie bei sphärischer Symmetrie in der NT (Abschnitt 4.1.1), so entspricht obige Gleichung einer Friedmann-Gleichung, deren Dichteterm jedoch von dem des Hintergrundmodelles abweicht und so der Überdichte oder Underdichte auf der Domäne Rechnung trägt. Dieses Modell ist auch unter dem Namen Top-Hat-Modell bekannt [59]. Unser Modell kann damit auch als Erweiterung dieses Modells verstanden werden, bei dem nicht nur die Gesamtmasse der Domäne zu deren dynamischem Verhalten beiträgt, sondern auch Einflüsse von lokaler Scherung und Expansion Berücksichtigung finden. Ähnliche Erweiterungen des Top-Hat-Modells findet man bei Engineer et. al. [36]. Ihr Hauptinteresse richtet sich jedoch auf eine verbesserte Beschreibung des Virialisierungsprozesses und anderer Clusterbildungsszenarien.

Um obige Differentialgleichung zu lösen, legen wir die Anfangsbedingungen in Bezug auf das Hintergrundmodell gemäß Abschnitt (5.1) fest. Zur numerischen Integration von Gleichung (5.24) benutzen wir ein Runge-Kutta-Verfahren aus Press et al. [60]. Identische Resultate werden mit dem NDSOLVE Programm von MATHEMATICA erreicht.

## 5.2.1 Anfangsbedingungen

In Abschnitt 2.4.2 ist es uns gelungen, den Rückwirkungsterm als Funktion der Anfangswerte  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}$ ,  $\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}$ ,  $\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}$  und der Zeitfunktionen  $a(t)$ ,  $\xi(t)$  zu schreiben. Im Appendix A wird der Zusammenhang zwischen diesen Größen und dem anfänglichen Powerspektrum im Detail behandelt. Wir bestimmen die gemittelten Invarianten bei einer Rotverschiebung von  $z = 200$ . Ein zu früher Startzeitpunkt für unsere Berechnungen wäre ungünstig, da die Annahmen des Staubmodelles dann noch nicht zutreffen und das Powerspektrum seine Form aufgrund nichtgravitativer Einflüsse signifikant ändert [10]. Im Einstein-De-Sitter-Hintergrund mitschwimmende Domänen haben zu diesem Zeitpunkt erst den 200sten Teil ihres heutigen Volumens erreicht. Über Galaxienkataloge versucht man zum heutigen Zeitpunkt, mit Hilfe statistischer Methoden, die Skala zu ermitteln, bei der ein Übergang zu Homogenität und Isotropie in der Materieverteilung beobachtbar ist. Unser Interesse gilt speziell Domänen, deren Größe heute als groß genug betrachtet werden, um das Friedmann-Modell anzuwenden, bei denen man also glaubt, bereits den Übergang zur homogenen Materieverteilung zu beobachten. Wir wählen als Anfangsdomäne eine Kugel  $\mathcal{B}_R$  mit dem Radius  $R$  und nehmen ein Gaußsches Anfangsdichtefeld mit einem Kalte-Dunkle-Materie (CDM) Powerspektrum an. Aus ihm lassen sich dann die Erwartungswerte (Ensemble-Mittel) der im Rückwirkungsterm (mit Zel'dovich genähert) auftretenden

Tabelle 5.1: Dargestellt sind die gemittelten Massenfluktuationsterme  $\sigma_{\mathbf{I}_0}(R), \sigma_{\mathbf{II}_0}(R)$ , und  $\sigma_{\mathbf{III}_0}(R)$  für eine Anfangsdomäne mit dem Radius  $R$ , berechnet mit einem CDM-Powerspektrum. In der ersten Zeile sind mit  $aR$  die Radien angegeben, die unsere Anfangsdomänen zum heutigen Zeitpunkt im Einstein-De-Sitter-Modell hätten.

$aR$ [Mpc]	5	16	50	100	251	503	1005
$R$ [Mpc]	0.025	0.08	0.25	0.5	1.25	2.5	5
$\sigma_{\mathbf{I}_0} \times 10^3$	13	5.0	1.4	0.51	0.13	0.03	0.01
$\sigma_{\mathbf{II}_0} \times 10^6$	90	20	2	0.4	0.07	0.02	0.004
$\sigma_{\mathbf{III}_0} \times 10^{12}$	81000	4600	100	5	0.08	0.001	0.00004

Anfangsgrößen ausrechnen. Für ein Gaußsches Dichtefeld erhält man:

$$\mathbb{E}[\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}}] = \mathbb{E}[\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}}] = \mathbb{E}[\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}}] = 0. \quad (5.25)$$

Für eine einzelne Domäne, z.B. unsere lokale Umgebung, können die Invarianten sehr wohl positive und negative Werte annehmen, die um ihren Erwartungswert fluktuieren. Wir werden  $1\text{-}\sigma$   $2\text{-}\sigma$  und  $3\text{-}\sigma$ -Abweichungen vom Erwartungswert, berechnet über die Varianz  $\sigma_{\mathbf{I}}^2(R) = \mathbb{E}[\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}}^2]$ , bei der Berechnung der Zeitentwicklung des Skalenfaktors in Betracht ziehen. Die so gewonnenen Anfangswerte hängen damit vom Powerspektrum und von der Form, sowie der Größe der Domäne ab. Tabelle 5.1 zeigt einige Werte für sphärische Anfangsdomänen verschiedener Radien, wie sie in Appendix A.1 mit dem Standard-CDM-Modell berechnet werden. Wir können außerdem zeigen, dass die gemittelten Invarianten, mit der Annahme eines Gaußschen Anfangsdichtefeldes, statistisch unabhängige Größen darstellen und damit unabhängig voneinander festgelegt werden können.

## 5.2.2 Ebener und Sphärischer Kollaps

Für den sphärischen Fall wurde bereits in Abschnitt 4.1.1 gezeigt, dass der Rückwirkungsterm in der NT verschwindet. In ebener Symmetrie ist die Zel'dovich-Näherung exakt (Abschnitt 2.4.3). Damit hat man bereits zwei Referenzfälle, bei denen die Gleichung (5.24), mit  $Q_{\mathcal{D}}$  in der Zel'dovich-Näherung, keine genäherten Terme enthält, was bedeutet, dass eine Lösung dieser Gleichung eine exakte Lösung darstellt. Die beiden Fälle werden wir jetzt vergleichen, indem wir Gleichung (5.24) numerisch für einen Einstein-De-Sitter-Hintergrund ( $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$ ,  $\xi(t) = a(t) - 1$ ) integrieren. Ebener Kollaps bedeutet:  $\langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{D}_0} = 0$  und  $\langle \mathbf{III} \rangle_{\mathcal{D}_0} = 0$ . Für  $\langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{D}_0}$  wird der Wert der mittleren Abweichung vom Erwartungswert eingesetzt, berechnet für sphärische Anfangsdomänen mit den Radien  $R \in \{0.025, 0.08, 0.25, 0.5\}$ Mpc. // (Im

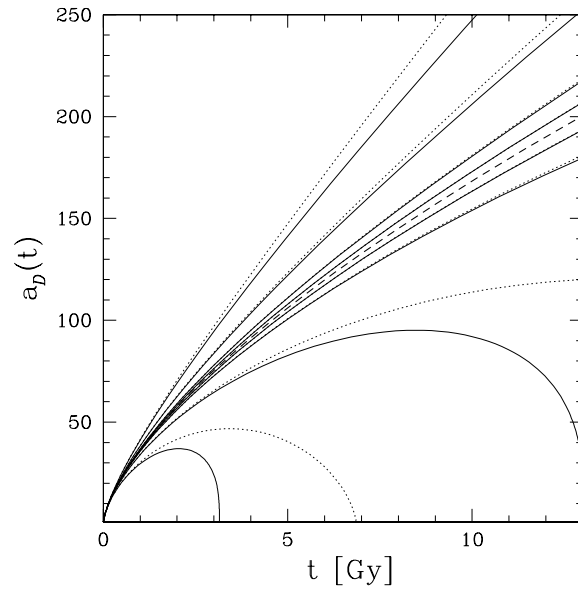


Abbildung 5.1: Die Kurven zeigen den Skalenfaktor  $a_{\mathcal{D}}$  als Funktion der Zeit beim sphärischen Kollaps (gepunktet) und beim ebenen Kollaps (durchgezogen) mit  $\langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{D}_0} \in \{-13, -5.0, -1.4, -0.51, 0.51, 1.4, 5.0, 13\} \times 10^{-3}$  von unten nach oben. Diese Werte sind für sphärische Domänen bei einer Abweichung von  $1-\sigma$  vom Ensemble-Mittel berechnet, deren heutiger Radius im Einstein-De-Sitter-Modell  $a(t_0)R \in \{5, 16, 50, 100\}$ Mpc betragen würde. (siehe Tabelle 5.1). Die gestrichelte Linie zeigt die Entwicklung des Skalenfaktors im Hintergrundmodell.

Einstein-De-Sitter-Standardmodell hätten solche Sphären heute die Radien:  $a(t_h)R \in \{5, 16, 50, 100\}\text{Mpc}$  (siehe Tab. 5.1).

Sphärischer Kollaps bedeutet:  $Q_{\mathcal{D}} = 0$  und  $\langle\delta\rangle_{\mathcal{D}} \neq 0$ , was exakt dem altbekannten Top-Hat-Modell entspricht [59]. Die Größe der Anfangsdomänen wird wie beim ebenen Kollaps festgelegt.

In Abbildung 5.1 erkennt man, dass die Entwicklung des Skalenfaktors  $a_{\mathcal{D}}$  für Domänen mit dem Anfangsradius  $R = 0.25\text{Mpc}$  stark von der Hintergrundexpansion abweicht. Wählt man kleinere Anfangsdomänen, so wird die Abweichung sogar noch größer ausfallen. Dabei zeigt sich, dass im zweidimensionalen Fall die Domäne schneller kollabiert als im sphärisch symmetrischen Fall. Dies ist in Analogie zum ‘‘Pancake-Kollaps’’ zu sehen. Für Raumbereiche die heute im Bereich von 50 oder mehr Megaparsec liegen, ist dieser Effekt weniger dramatisch, obwohl die Abweichungen vom Hintergrund bereits signifikant sichtbar werden. Dieses Verhalten ist sowohl bei überdichten, als auch bei unterdichten Regionen zu beobachten. Die Resultate sind in Übereinstimmung mit früheren Ergebnissen aus der Lagrangeschen Störungstheorie [3, 56, 7, 22, 44].

### 5.2.3 Unsymmetrische Anfangsbedingungen

Das Verhalten des Skalenfaktors  $a_{\mathcal{D}}$  wird interessanter, wenn man über die exakte Lösung hinausgeht und der zweiten und dritten Invarianten einen von Null verschiedenen Wert zuweist. Wie oben so wird auch hier von einer Sphäre als Anfangsdomäne ausgegangen. Dichteinhomogenitäten in der Sphäre unterliegen jedoch keinen Einschränkungen durch Symmetrieanahmen. Um die Unterschiede deutlicher zu machen, setzen wir jetzt  $\langle I \rangle_{\mathcal{D}_0} = 0$ . Damit betrachten wir eine Domäne mit einer mittleren Dichte, die der Hintergrunddichte zum Anfangszeitpunkt entspricht. Der Effekt einer nichtverschwindenden zweiten Invarianten wird in Abbildung 5.2 dargestellt. Schon bei Raumbereichen mit einem anfänglichen Radius von nur  $R = 0.25\text{Mpc}$  (dieser Raumbereich wäre im Einstein-De-Sitter-Modell auf 50Mpc bis heute expandiert), sind deutliche Abweichungen vom Hintergrundmodell zu erkennen. Obwohl wir Domänen ohne anfängliche Überdichte betrachten, die aufgrund der konservativ gewählten  $1\text{-}\sigma$  Abweichung vom Ensemble-Mittel häufig im Kosmos vorkommen sollten, kollabieren in unserem Modell bereits solche Domänen, die im Einstein-De-Sitter-Modell bis zum heutigen Zeitpunkt auf  $\approx 16\text{Mpc}$  Radius angewachsen wären.

Verglichen mit der ersten und zweiten Invarianten ist der Effekt der dritten Invarianten klein (in der betrachteten Zeitspanne). Um das zu zeigen, wählen wir Raumbereiche aus, bei denen  $\langle \mathbf{I} \rangle_{\mathcal{D}_0} = \langle \mathbf{II} \rangle_{\mathcal{D}_0} = 0$  gilt. Die Werte von  $\langle \mathbf{III} \rangle_{\mathcal{D}_0}$  werden, bei einer  $1\text{-}\sigma$ -Abweichung vom Ensemble-Mittel für sphärische Anfangsdomänen berechnet. Bei



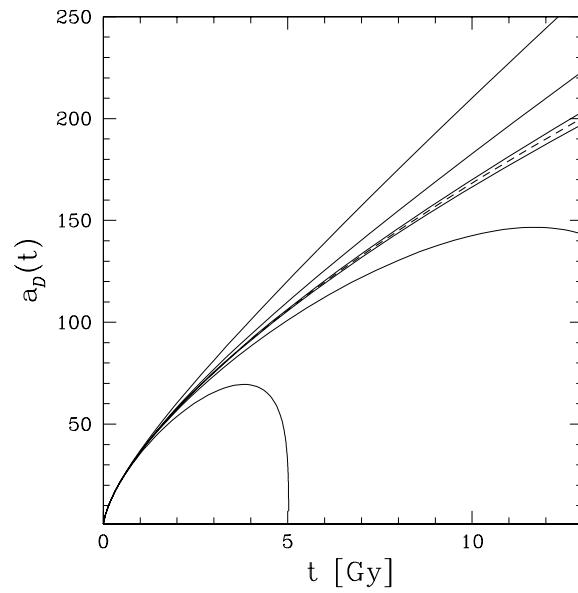


Abbildung 5.2: Die Kurven zeigen die Entwicklung des Skalenfaktors  $a_{\mathcal{D}}(t)$  für die Anfangsbedingungen  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}} = \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}} = 0$  und  $\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}} \in \{-90, -20, -2, 2, 20, 90\} \times 10^{-6}$  als durchgezogene Linien von unten nach oben. Diese Werte sind, bei einer  $1\text{-}\sigma$ -Abweichung vom Ensemblemittel, für sphärische Anfangsdomänen berechnet, deren Radien sich im Einstein-De-Sitter-Modell bis heute auf  $\{5, 16, 50\}$  Mpc ausgedehnt hätten (see Table 5.1). Die gestrichelte Linie zeigt die Entwicklung des Skalenfaktors im Hintergrundmodell.

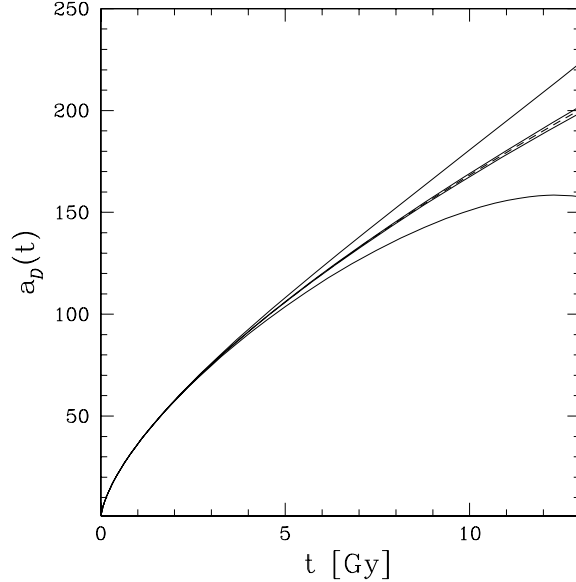


Abbildung 5.3: Die Kurven zeigen die Entwicklung des Skalenfaktors  $a_{\mathcal{D}}(t)$  für die Anfangsbedingungen  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}} = \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}} = 0$  und  $\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}} \in \{-81, -4.6, 4.6, 81\} \times 10^{-15}$  als durchgezogene Linien von unten nach oben. Diese Werte sind, bei einer  $1\text{-}\sigma$ -Abweichung vom Ensemblemittel, für sphärische Anfangsdomänen berechnet, deren Radien sich im Einstein-De-Sitter-Modell bis heute auf  $\{5, 16\}$ Mpc ausgedehnt hätten (see Table 5.1). Die gestrichelte Linie zeigt die Entwicklung des Skalenfaktors im Hintergrundmodell.

einem Anfangsradius von 0.25Mpc (dieser Raumbereich wäre im Einstein-De-Sitter-Modell auf 5Mpc bis heute expandiert), wird eine Abweichung vom Hintergrundmodell sichtbar (Abbildung 5.3). Für Raumbereiche der Anfangsradien 0.08Mpc ist der Effekt bereits klein und kann auf größeren Skalen ganz vernachlässigt werden. Bis jetzt haben wir nur solche Raumbereiche betrachtet, die entsprechend einer  $1\text{-}\sigma$ -Abweichung häufig im Kosmos auftreten sollten. Inhomogenes Verhalten des Raumbereichs wird aber sowohl durch verkleinern der Anfangsdomäne, als auch durch verstärkte Abweichung vom Ensemble-Mittel erreicht. Um diesen Effekt näher zu untersuchen, nehmen wir jetzt  $2\text{-}\sigma$  und  $3\text{-}\sigma$ -Abweichungen vom Ensemble-Mittel an. Wie in Abbildung 5.4 zu erkennen ist, können in diesem Fall sogar Raumbereiche bereits kollabiert sein, deren Radien sich im Einstein-De-Sitter-Modell bis heute auf 50Mpc ausgedehnt hätten. Mit unserem Ansatz nimmt man bereits an, dass der Rückwirkungsterm auf großen Skalen einen zu vernachlässigenden Beitrag liefert. Daher stimmt die Entwicklung des Skalenfaktors beim Übergang zu größeren Skalen immer mehr mit der Entwicklung im Friedmann-Modell überein (siehe Abbildung 5.5). Trotzdem kann man für Raumbereiche, deren Radien sich im Einstein-De-Sitter-Modell bis heute auf 100Mpc gedehnt hätten, eine bis zu 15%ige Ab-

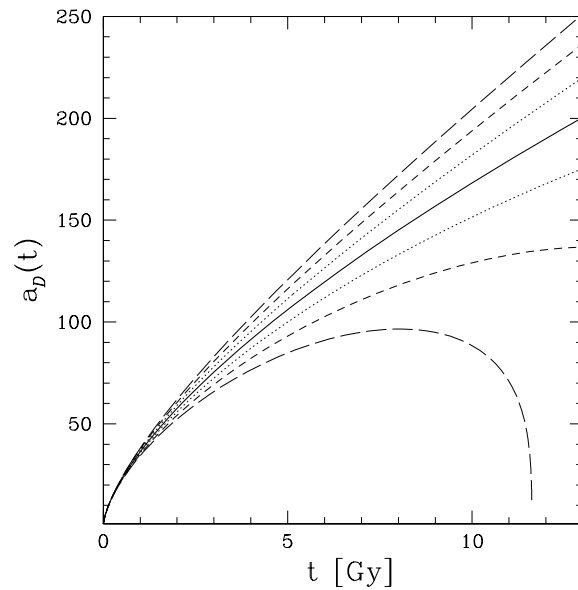


Abbildung 5.4: Die Kurven zeigen die Entwicklung des Skalenfaktors  $a_{\mathcal{D}}(t)$  für sphärische Domänen, deren Radien sich im Einstein-De-Sitter-Modell bis heute auf 50Mpc ausgedehnt hätten (see Table 5.1). Wir nehmen 1- $\sigma$  (gepunktete), 2- $\sigma$  (kurzgestrichelt) und 3- $\sigma$  (langgestrichelt) Abweichungen der gemittelten Invarianten  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}}$ ,  $\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}}$  und  $\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}}$  an (siehe Tabelle 5.1). Die gezeigten Entwicklungen sind mit  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}} < 0$ ,  $\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}} < 0$ ,  $\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}} < 0$  (überdicht) und  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}} > 0$ ,  $\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}} > 0$ ,  $\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}} > 0$  (unterdicht) gewonnen. Die gestrichelte Linie zeigt die Entwicklung des Skalenfaktors im Hintergrundmodell.

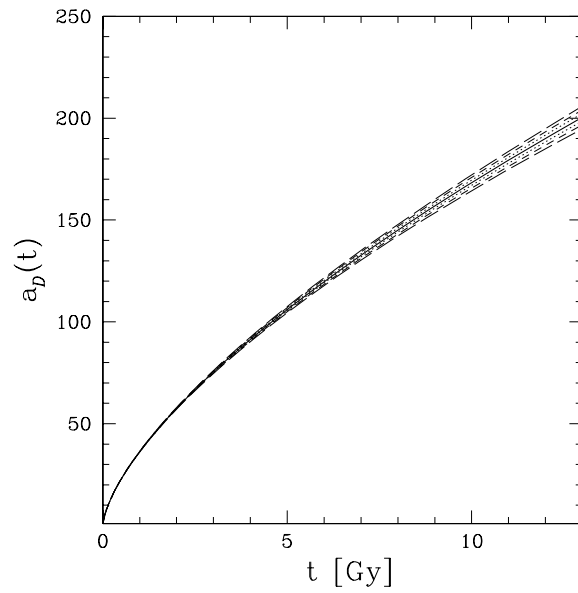
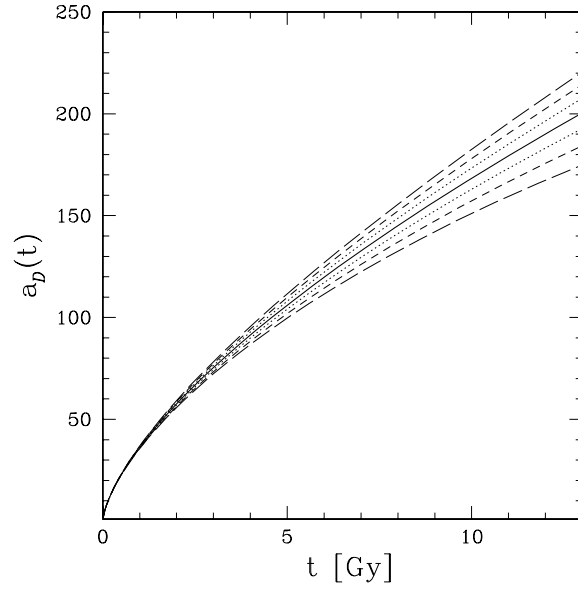


Abbildung 5.5: Die Kurven zeigen die Entwicklung des Skalenfaktors  $a_{\mathcal{D}}(t)$  für Domänen, deren Radien sich im Einstein-De-Sitter-Modell bis heute auf 100Mpc (obere Abbildung) und 250Mpc (untere Abbildung) ausgedehnt hätten (siehe Tabelle 5.1). Ansonsten wurden die Konventionen aus Abbildung 5.4 benutzt.

weichung vom Friedmann-Modell beobachten, wenn man eine  $3\text{-}\sigma$ -Abweichung vom Ensemble-Mittelwert der Invarianten annimmt. Das Volumen eines solchen Raumbereichs entspräche einer Box mit  $\approx 160\text{Mpc}$  Seitenlänge. Das entspricht einer Größe, die häufig in  $N$ -Körper Rechnungen benutzt wird. Bei Raumbereichen, deren Radien sich im Einstein-De-Sitter-Modell bis heute auf  $250\text{Mpc}$  gedehnt hätten, stellt man immer noch eine  $3\%$ ige Abweichung vom Friedmann-Modell fest, wenn man eine  $3\text{-}\sigma$ -Abweichung vom Ensemble-Mittelwert der Invarianten annimmt. In den nächsten Abschnitten werden wir feststellen, dass der Einfluss auf den Bremsparameter und den Hubbleparameter deutlicher ausfällt, da diese Parameter die Zeitableitungen von  $a_{\mathcal{D}}$  enthalten.

### 5.2.4 Vergleich mit der linearen Eulerschen Näherung

Wir berechnen die Zeitentwicklung von  $a_{\mathcal{D}}$ , indem wir den Rückwirkungsterm in der linearen Näherung (Gleichung 2.75) in die Entwicklungsgleichung für den Skalenfaktor (Gleichung 5.24) einsetzen und numerisch lösen. In Abbildung 5.6 vergleichen wir die Entwicklung des Skalenfaktors in der Zel'dovich-Näherung mit der Entwicklung in Eulerscher linearer Näherung. Obwohl wir  $3\text{-}\sigma$ -Abweichungen in den Anfangsbedingungen annehmen, wird die Entwicklung unterdichteter Raumbereiche, deren heutige Radien im Einstein-De-Sitter-Modell mehr als  $50\text{Mpc}$  betragen würden, schon sehr gut durch die Eulersche lineare Näherung beschrieben. Bei überdichten Domänen ist die Übereinstimmung schlechter. Bei kollabierenden Domänen stellt man bei überdichten Raumbereichen, deren heutige Radien im Einstein-De-Sitter-Modell weniger als  $100\text{Mpc}$  betragen würden, große Unterschiede fest. Hier scheint die Eulersche lineare Theorie fehlzuschlagen. Zu bemerken ist, dass dieses Verhalten mit der Mitteilung zusammenhängt. Lineare Theorie macht keine korrekten Aussagen darüber, wohin sich die Massenelemente bewegen. Dies hat ein Vergleichstest mit Lagrange-scher Störungsrechnung und  $N$ -Körper Rechnungen gezeigt [54].

## 5.3 Kosmologische Parameter im Vergleich

Nicht nur die Entwicklung des Skalenfaktors sondern auch die abgeleiteten Größen wie der Hubble-Parameter  $H_{\mathcal{D}} = \dot{a}_{\mathcal{D}}/a_{\mathcal{D}}$  und der Bremsparameter  $q_{\mathcal{D}} = -(\ddot{a}_{\mathcal{D}}/a_{\mathcal{D}})/H_{\mathcal{D}}^2$  sind von speziellem Interesse. Zusätzlich wurden in den Abschnitten (2.3.4, 3.3.3) kosmologische Parameter definiert, die im Grenzfall einer homogen-isotropen Materieverteilung die bei Friedmann-Modellen üblichen Parameter ergeben. Weichen diese regional definierten Parameter stark von denen des Hintergrundmodells ab, so ist es nicht möglich, durch Mittelung die Parameter des Hintergrundes zu ermitteln.

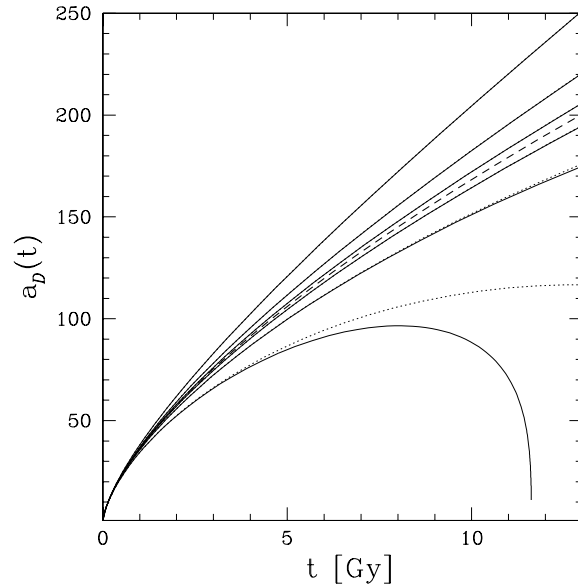


Abbildung 5.6: Entwicklung des Skalenfaktors  $a_{\mathcal{D}}$  für  $3\text{-}\sigma$ -Abweichungen vom Ensemble-Mittel wie auch bei Abbildung 5.5. Die Kurven zeigen die Entwicklung überdichter Domänen, deren heutige Radien im Einstein-De-Sitter-Modell  $a(t_0)R \in \{50, 100, 250\}$ Mpc betragen würden, sowie unterdichter Domänen, deren heutige Radien im Einstein-De-Sitter-Modell  $a(t_0)R \in \{250, 100, 50\}$ Mpc betragen würden, in der angeführten Reihenfolge von unten nach oben. Die Entwicklung von  $a_{\mathcal{D}}^Z$  wird durch die durchgezogene Linie dargestellt, die Entwicklung von  $a_{\mathcal{D}}^{\text{lin}}$  durch die gepunktete Linie. Die gestrichelte Linie zeigt die Entwicklung des Skalenfaktors im Hintergrundmodell.

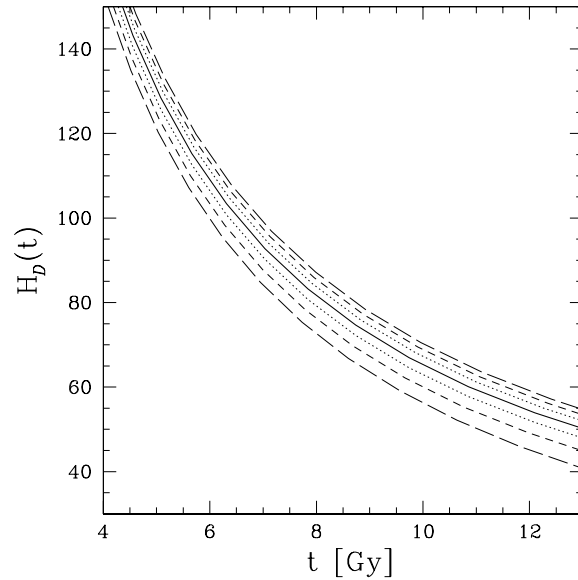


Abbildung 5.7: Entwicklung des Hubble-Parameters  $H_{\mathcal{D}}$  für eine sphärische Anfangsdomäne, deren heutiger Radius im Einstein-De-Sitter-Modell 100Mpc betragen würde. Überdichtete Domänen zeigen ein kleineres  $H_{\mathcal{D}}$  als im Einstein-De-Sitter-Universum (durchgezogene Linie), unterdichtete ein größeres  $H_{\mathcal{D}}$ . Im übrigen gelten die Angaben von Abbildung 5.4.

### 5.3.1 Entwicklung des Hubble- und Bremsparameters

In Abbildung 5.7 erkennt man, dass eine Abweichung von 20% im Hubble-Parameter  $H_{\mathcal{D}}$  in einer Domäne, deren heutiger Radius im Einstein-De-Sitter-Modell 100Mpc betragen würde (bei  $3\text{-}\sigma$  Abweichung) zum heutigen Zeitpunkt im Bereich des Möglichen liegt. Bei einer Domäne, deren heutiger Radius im Einstein-De-Sitter-Modell 250Mpc betragen würde, ist eine Abweichung von 3% wahrscheinlich. Das stimmt mit den Resultaten von Wu et al. [70] für ein regional unterdichtetes Universum überein. (siehe auch [57], [67]). Beim Bremsparameter fällt die Abweichung deutlich stärker aus (Abbildung 5.8). In einer 3-sigma Domäne, deren heutiger Radius im Einstein-De-Sitter-Modell 100Mpc betragen würde, stellt man im Bremsparameter Abweichungen von über 200% vom Einstein-De-Sitter-Universum fest. Bei einer Domäne, deren heutiger Radius im Einstein-De-Sitter-Modell 250Mpc betragen würde, ist eine Abweichung von 15% möglich. Man stelle sich vor, dass unser lokales Universum einen unterdichten Teil des Kosmos darstellt (wie er aus einer Anfangsdomäne mit  $0.5\text{-}\sigma$ -Abweichungen der Anfangswerte von ihren Ensemble-Mitteln hervorgeht). In diesem Teil des Kosmos können, durch Dichteinhomogenitäten mit kleiner Amplitude zusätzlich lokale Scherungen auftreten, die der durch die Unterdichte bedingten Ex-

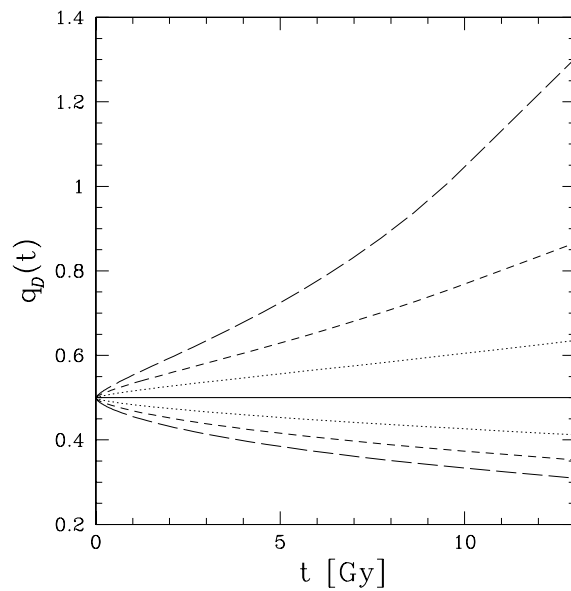


Abbildung 5.8: Zeitentwicklung des Bremsparameters  $q_{\mathcal{D}}(t)$  für eine sphärische Anfangsdomäne, deren heutiger Radius im Einstein-De-Sitter-Modell 100Mpc betragen würde. Überdichtete Domänen zeigen ein größeres  $q_{\mathcal{D}}(t)$  als im Einstein-De-Sitter-Universum (durchgezogene Linie), unterdichtete ein geringeres  $q_{\mathcal{D}}(t)$ . Im übrigen gelten die Angaben von Abbildung 5.4.



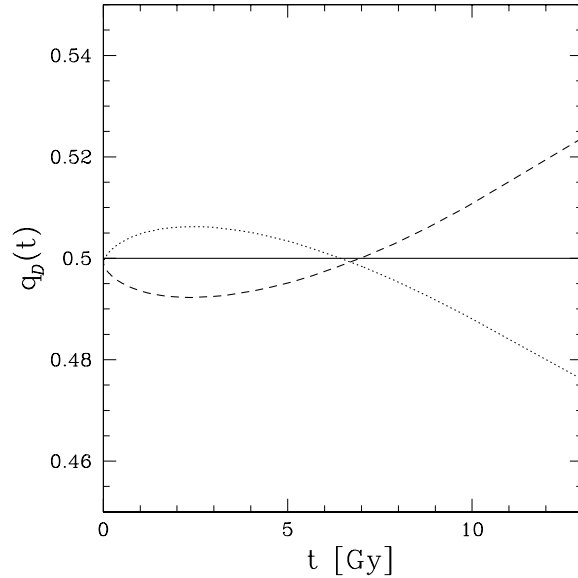


Abbildung 5.9: Zeitentwicklung des regionalen Bremsparameters  $q_{\mathcal{D}}(t)$  für eine sphärische Anfangsdomäne, deren heutiger Radius im Einstein-De-Sitter Modell 100Mpc betragen würde. Als Anfangsbedingungen wird für  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}}$  eine  $0.5\text{-}\sigma$ , für  $\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}}$  und  $\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}}$  eine  $3\text{-}\sigma$  Abweichung vom jeweiligen Ensemblemittelwert gewählt,  $\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}}$  und  $\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}}$  haben das entgegengesetzte Vorzeichen wie  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}}$ . Die anfänglich beschleunigt expandierende, unterdichte Region ( $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}} > 0$  bremst letztlich ab (gepunktet), während die anfänglich überdichte Region (gestrichelt) eine beschleunigte Expansion zu einem späten Zeitpunkt zeigt.

pansion entgegenwirken (wir nehmen weiter an, dass die lokale Scherung in unserem Raumbereich in einer Abweichung von  $\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}}$  um  $3\text{-}\sigma$  von ihrem Erwartungswert zum Ausdruck kommt). Eine solche Domäne, in der die Unterdichte “gegen” kleinskaligere Dichtefluktuationen arbeitet, zeigt verschiedene Entwicklungsstadien (Abbildung 5.9). Eine anfänglich unterdichte Region kann so in einem späteren Entwicklungsstadium eine verlangsamte Expansion zeigen.

### 5.3.2 Zeitentwicklung der Kosmologischen Parameter

Ein Großteil der in der Kosmologie tätigen Forscher ist heute damit beschäftigt, die Kosmologischen Parameter des Friedmann-Modells zu bestimmen. Daher ist es interessant, sich die Zeitentwicklung von analog definierten Parametern in unserem inhomogenen Modell anzuschauen (siehe Abschnitt 2.3.4). Natürlich muss man einen zusätzlichen Parameter, den sogenannten Rückwirkungsparameter  $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$  in unserem

Modell einführen. Kennt man die Zeitentwicklung von  $a_{\mathcal{D}}$  für gegebene Anfangsbedingungen, so kann man die Zeitentwicklung von  $\Omega_m^{\mathcal{D}}$ ,  $\Omega_k^{\mathcal{D}}$  und  $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$  bestimmen. Wir fordern als Randbedingung, dass die globale Entwicklung einem Einstein-De-Sitter-Modell folgt mit  $\Omega_\Lambda = 0 = \Omega_\Lambda^{\mathcal{D}}$  und auf der größten Skala  $\Omega_k = 0$ . Wie im Folgenden gezeigt wird, kann die Zeitentwicklung der lokalen kosmologischen Parameter stark von ihren Hintergrundwerten abweichen, auch wenn der Rückwirkungsterm selbst klein ist. Für den Dichte- und Krümmungsparameter gilt:

$$\begin{aligned}\Omega_m^{\mathcal{D}}(t) &= \frac{H^2(t_0) - (1 - \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0})}{\dot{a}_{\mathcal{D}}(t)^2 a_{\mathcal{D}}(t)}, \\ \Omega_k^{\mathcal{D}}(t) &= -\frac{k_{\mathcal{D}}}{\dot{a}_{\mathcal{D}}(t)^2},\end{aligned}\tag{5.26}$$

mit  $k_{\mathcal{D}} = (\Omega_m^{\mathcal{D}}(t_0) - 1)\dot{a}_{\mathcal{D}}(t_0)^2$ . Die Zeitentwicklung von  $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$  ist durch Gleichung (3.64) gegeben.

Für eine homogen-isotrope Materieverteilung kann man  $\Omega_k^{\mathcal{D}}$  im Newtonschen Sinne mit der Gesamtenergie innerhalb der Domäne in Verbindung bringen. Dies ist in unserem allgemeineren Falle nicht möglich. Hier ist  $k_{\mathcal{D}}$  lediglich eine Integrationskonstante, die durch die Anfangsbedingungen gegeben ist.

Bemerkenswert ist, dass obwohl  $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$  für eine unterdichte Domäne vernachlässigbar sein mag (Abbildung 5.10), große Abweichungen in den anderen Parametern von denen des Friedmann-Modells auftreten. Für eine kollabierende Domäne, deren heutiger Radius im Einstein-De-Sitter-Modell 100Mpc betragen würde, kann der lokale Massendichteparameter sogar um mehr als 100% vom Massendichteparameter des Hintergrundmodells abweichen (Abbildung 5.11).

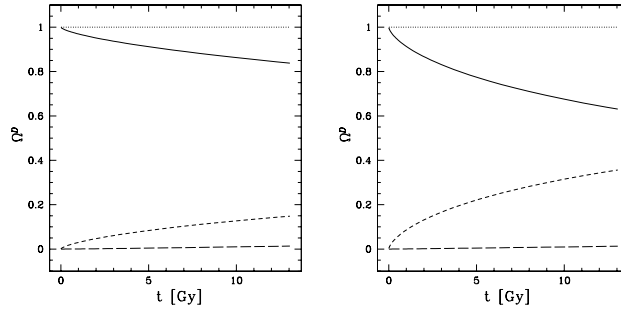


Abbildung 5.10: Entwicklung der kosmologischen Parameter  $\Omega_m^D$  (durchgezogen),  $\Omega_k^D$  (kurzgestrichelt) und  $\Omega_Q^D$  (langgestrichelt) in einer expandierenden (unterdichten) Domäne mit einem anfänglichen Radius von 0.5Mpc (heutiger Radius im Einstein-De-Sitter-Modell: 100Mpc). Die gepunktete Linie bezeichnet  $\Omega_m^D + \Omega_k^D + \Omega_Q^D$ . Bei der linken Abbildung werden 1- $\sigma$  Abweichungen, bei der rechten 3- $\sigma$  Abweichungen in den Anfangsbedingungen benutzt. Die Entwicklung des Skalenfaktors unter diesen Bedingungen zeigt Abbildung 5.5.

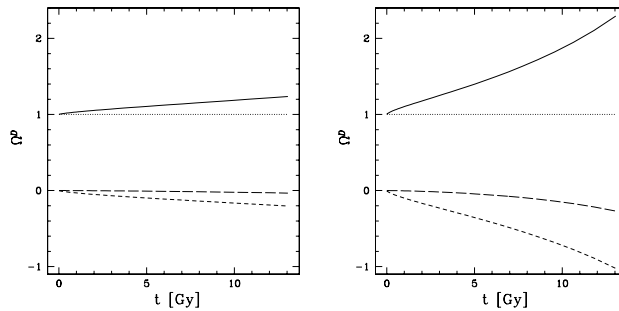


Abbildung 5.11: Die Entwicklung der Größen aus Abbildung 5.10, jetzt für kollabierende Domänen.



# Anhang A

## Anfangsbedingungen

### A.1 Beziehung des Dichtekontrastes zum Skalarfeld $\psi$

In Abschnitt 2.4.2 ist es uns gelungen, den Rückwirkungsterm als Funktion der Anfangswerte  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}$ ,  $\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}$ ,  $\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}$  und der Zeitfunktionen  $a(t)$ ,  $\xi(t)$  zu schreiben. Es sind die Invarianten des Tensors  $\psi_{ij}$ , wobei  $\nabla_0 \psi$  im Zel'dovich-Ansatz auftaucht. Um von einem, im Frühstadium der Strukturbildung gegebenen, Powerspektrum für Dichtefluktuationen ausgehen zu können, benötigen wir eine Relation zwischen  $\psi$  und dem anfänglichen Dichtekontrast  $\delta_0(\mathbf{X}) = (\varrho(\mathbf{X}, t_0) - \varrho_H(t_0))/\varrho_H(t_0)$ . Dieser Zusammenhang ergibt sich über die Pekuliargeschwindigkeit zum Anfangszeitpunkt. mit Gleichung (2.51) gilt:

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}, t_0) = -\dot{a}(t_0) \delta(\mathbf{X}, t_0) \quad . \quad (\text{A.1})$$

Nimmt man ein nichtrotierendes Anfangspekuliargeschwindigkeitsfeld an, so kann man dieses allein aus seinen Quellen bestimmen.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t_0) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \tilde{\theta}_{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t_0) \frac{\mathbf{k}}{ik^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}} \\ &= -\dot{a}(t_0) \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \tilde{\delta}_{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t_0) \frac{\mathbf{k}}{ik^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

mit  $k = |\mathbf{k}|$  und der Fouriertransformierten  $\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$  eines Feldes  $\mathcal{A}(\mathbf{q})$ :

$$\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \mathcal{A}(\mathbf{X}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}}. \quad (\text{A.3})$$

Der Zusammenhang mit dem skalaren Feld  $\psi$  ergibt sich für einen Einstein-de-Sitter-Hintergrund zu  $\psi_{|ij} = \dot{a}(t_0)\mathbf{u}_{ij}(X, t_0)$ . Mit Gleichung (A.2) kann man die Invarianten von  $\psi_{|ij}$  als Funktion des Dichtekontrastes berechnen.

## A.2 Die gemittelten Invarianten

Um die Rechnung zu vereinfachen, benutzen wir sphärische Anfangsdomänen  $\mathcal{B}_R$  mit dem Radius  $R$ . Die Annahme der stochastischen Unabhängigkeit des Anfangsdichtefeldes an verschiedenen Punkten im Raum ermöglicht es uns, den Ursprung unseres Koordinatensystems als Mittelpunkt der betrachteten Anfangssphäre zu wählen. Die Fensterfunktion sei definiert als:

$$W_R(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1/|\mathcal{B}_R| & \text{falls } \mathbf{X} \in \mathcal{B}_R, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

wobei  $|\mathcal{B}_R| = 4\pi/3 R^3$  das Volumen der Sphäre ist. Die Fouriertransformierte  $W_R$ ,

$$\widetilde{W}_R(k) = \frac{2}{|\mathcal{B}_R| (2\pi)^2 k^3} (\sin(kR) - kR \cos(kR)), \quad (\text{A.5})$$

hängt nur von  $k = |\mathbf{k}|$  ab. Das räumliche Mittel  $\langle \mathcal{A}(\mathbf{X}) \rangle_{\mathcal{B}}$  des Feldes  $\mathcal{A}$  kann, mit Hilfe des Faltungstheorems für Fourier-transformierte Funktionen, geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A} \rangle_{\mathcal{B}} &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3X \mathcal{A}(\mathbf{X}) W_R(\mathbf{X}) \\ &= (2\pi)^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \widetilde{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) \widetilde{W}_R(k). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Mit Hilfe der Gleichungen (A.2) und (2.60), (2.61), (2.62) können wir die gemittelten Invarianten mit Hilfe des anfänglichen Dichtekontrastes  $\delta(\mathbf{k}, t_0) \equiv \delta_0(\mathbf{k})$  ausdrücken:

$$\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R} = - (2\pi)^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \widetilde{\delta}_0(\mathbf{k}) \widetilde{W}_R(k), \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R} &= \frac{(2\pi)^3}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_2 \widetilde{\delta}_0(\mathbf{k}_1) \widetilde{\delta}_0(\mathbf{k}_2) \\ &\quad \times \widetilde{W}_R(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|) \left( 1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R} &= - (2\pi)^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_3 \widetilde{\delta}_0(\mathbf{k}_1) \widetilde{\delta}_0(\mathbf{k}_2) \widetilde{\delta}_0(\mathbf{k}_3) \\ &\quad \times \widetilde{W}_R(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3|) F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

mit

$$F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{1}{3} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)}{k_1^2 k_2^2 k_3^2}. \quad (\text{A.10})$$

Vergleichbare Ausdrücke ohne räumliche Mittelung findet man mit systematischer Herleitung in [37, 51] (siehe auch [43]).

Um die Entwicklung des Skalenfaktors mit Gleichung (5.24) zu berechnen, ist zusätzlich die Kenntnis der normierten Überdichte  $\langle \delta \rangle_{\mathcal{D}} = (\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \varrho_H) / \varrho_H$  notwendig. Diese kann man auf die erste Invariante zurückführen:

$$\langle \delta \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{a^3}{a_{\mathcal{D}}^3} (1 + \langle \delta(t_0) \rangle_{\mathcal{D}_0}) - 1 = \frac{a^3}{a_{\mathcal{D}}^3} (1 - \langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{D}_0}) - 1. \quad (\text{A.11})$$

### A.3 Verteilung der volumengemittelten Invarianten

Im letzten Abschnitt haben wir die Invarianten als Volumenmittel des anfänglichen Dichtekontrastes geschrieben. Um eine konkrete Vorstellung von der Wahrscheinlichkeitsverteilung der gemittelten Invarianten zu bekommen, berechnen wir ihr Ensemble-Mittel und ihre Varianz unter der Annahme, dass es sich bei  $\delta_0$  um ein Gaußsches Zufallsfeld handelt. Ein Gaußsches Zufallsfeld ist durch sein Powerspektrum  $P_0(k)$  bereits bestimmt, wobei  $k = |\mathbf{k}|$  gilt [63]:

$$\mathbb{E}[\tilde{\delta}_0(\mathbf{k})\tilde{\delta}_0(\mathbf{k}')] = \delta^D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_0(k). \quad (\text{A.12})$$

$\delta^D(\cdot)$  ist die Diracsche Delta-Distribution. Im Gegensatz zum räumlichen Mittel  $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{B}_R}$  über eine Raumdomäne bezeichnet  $\mathbb{E}[\cdot]$  das Ensemble-Mittel. Da ein Gaußsches Zufallsfeld ergodisch ist [1], ergeben Ensemble-Mittel und räumliches Mittel über den ganzen Raum den gleichen Wert. Wir betrachten jedoch nur sphärische Raumausschnitte.

Per Definition verschwinden alle geraden Momente eines Gaußschen Zufallsfeldes. Deshalb gilt:  $\mathbb{E}[\delta_0(\mathbf{X})^n] = 0$  für gerade  $n$  und mit den Gleichungen (A.7), (A.9) folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}] &= 0 = \mathbb{E}[\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R} \langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}], \\ \mathbb{E}[\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}] &= 0 = \mathbb{E}[\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R} \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}]. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Das zeigt schon, dass es sich bei  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}$  und  $\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}$ , ebenso bei  $\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}$  und  $\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}$  um unabhängige Zufallsvariablen handelt, die damit auch unabhängig voneinander festgelegt werden können. Die Erwartungswerte der zweiten Invarianten und der Produkte der Invarianten erfordern einige Berechnungen. Mit den Gleichungen (A.7),

(A.12) und (A.13) erhält man:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{I}}^2(R) &= \mathbb{E} \left[ (\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R} - \mathbb{E}[\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}])^2 \right] = \mathbb{E}[\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}^2] \\ &= (2\pi)^6 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k P_0(k) \widetilde{W}_R(k)^2.\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Die Varianz  $\sigma_{\mathbf{I}}^2(R)$  ist gleich der bekannten mittleren quadratischen Fluktuation des anfänglichen Dichtekontrastes geglättet mit einer Top-Hat-Fensterfunktion mit dem Radius  $R$ .

Für die zweite Invariante erhält man:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}] &= 2(2\pi)^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_1 P_0(k) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_2 \delta^D(\mathbf{k}_2) \left( 1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - k_1^2)^2}{k_1^2(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)^2} \right) \widetilde{W}_R(k_2).\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

Mit der Transformation auf Polarkoordinaten und der anschließenden Limesbildung  $k_2 \rightarrow 0$  bekommt man:

$$\mathbb{E}[\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}] = 0. \quad (\text{A.16})$$

Für ein Gaußsches Dichtefeld kann man die Vier-Punkt Korrelationsfunktion in Zwei-Punkt Korrelationsfunktionen zerlegen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\widetilde{\delta}_0(\mathbf{k}_1)\widetilde{\delta}_0(\mathbf{k}_2)\widetilde{\delta}_0(\mathbf{k}_3)\widetilde{\delta}_0(\mathbf{k}_4)] &= P_0(k_1)P_0(k_3)\delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\delta^D(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \\ &\quad + P_0(k_1)P_0(k_2)\delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3)\delta^D(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4) \\ &\quad + P_0(k_1)P_0(k_2)\delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4)\delta^D(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3).\end{aligned}$$

Damit kann die Varianz der zweiten Invarianten mit Gleichung (A.8) berechnet werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{II}}^2(R) &= \mathbb{E}[\langle \mathbf{II}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}^2] = \frac{(2\pi)^6}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_2 P_0(k_1)P_0(k_2) \\ &\quad \times \widetilde{W}_R(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|)^2 \left( 1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right)^2.\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

Eine analoge Rechnung ergibt:

$$\mathbb{E}[\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R} \langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}] = 0, \quad (\text{A.18})$$

was zeigt, dass auch  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}$  und  $\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}$  unabhängig sind und damit eigenständig festgelegt werden können.

Ähnlich wie die Vier-Punkt-Korrelationsfunktion kann man auch die Sechs-Punkt Korrelationsfunktion in Zwei-Punkt Korrelationsfunktionen zerlegen. Das ermöglicht



es uns  $\mathbb{E}[\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}^2]$  mit Hilfe des Powerspektrums zu schreiben. Nach einiger Rechnung erhält man:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{III}}^2(R) &= \mathbb{E}[\langle \mathbf{III}_0 \rangle_{\mathcal{B}_R}^2] = (2\pi)^6 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_3 \\ &\times P_0(k_1)P_0(k_2)P_0(k_3) \left[ \widetilde{W}_R(k_1)^2 G_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \right. \\ &\quad \left. + \widetilde{W}_R(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3|)^2 G_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

mit

$$G_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = -2 \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3)^2}{k_1^4 k_2^2 k_3^2} + \frac{13}{4} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{5}{4}, \quad (\text{A.20})$$

und

$$\begin{aligned} G_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \frac{2}{3} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3)^2 (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)^2}{k_1^4 k_2^4 k_3^4} \\ &\quad - 2 \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^3 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3) (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)}{k_1^4 k_2^4 k_3^2} \\ &\quad + \frac{2}{3} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3) (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)}{k_1^2 k_2^2 k_3^2} \\ &\quad + \frac{2}{3} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^4}{k_1^4 k_2^4} - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} + \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

## A.4 Zahlenwerte

Um die Fluktuationen  $\sigma_{\mathbf{I}}(R)$  usw. zu berechnen, müssen wir das anfängliche Powerspektrum  $P_0(k)$  kennen. Modelle, die die lineare Entwicklung des Powerspektrums berücksichtigen, gehen üblicherweise von folgender Gleichung aus:

$$P(k, t_h) = A k^n T(k, t_h)^2, \quad (\text{A.22})$$

mit der Amplitude  $A$ , dem anfänglichen Spektralindex  $n$  und der Transferfunktion  $T(k, t_h)$ .  $t_h$  bezeichnet den heutigen Zeitpunkt. Wir benutzen  $n = 1$  und die Transferfunktion für Kalte–Dunkle–Materie (CDM) nach Bardeen et al. [5]. Dabei werden für  $\Omega_m = 1$  ein geringer Anteil an Baryonen sowie drei verschiedene Neutrino Flavors berücksichtigt:

$$T(k, t_0) = \frac{\ln(1 + rk)}{rk} \times (1 + sk + (tk)^2 + (uk)^3 + (vk)^4)^{-\frac{1}{4}}, \quad (\text{A.23})$$

mit  $r = 9.36\text{Mpc}$ ,  $s = 15.56\text{Mpc}$ ,  $t = 64.4\text{Mpc}$ ,  $u = 21.84\text{Mpc}$ , und  $v = 26.84\text{Mpc}$ . In Übereinstimmung mit Abschnitt 5.2.1 wird ein Einstein-De-Sitter-Hintergrund

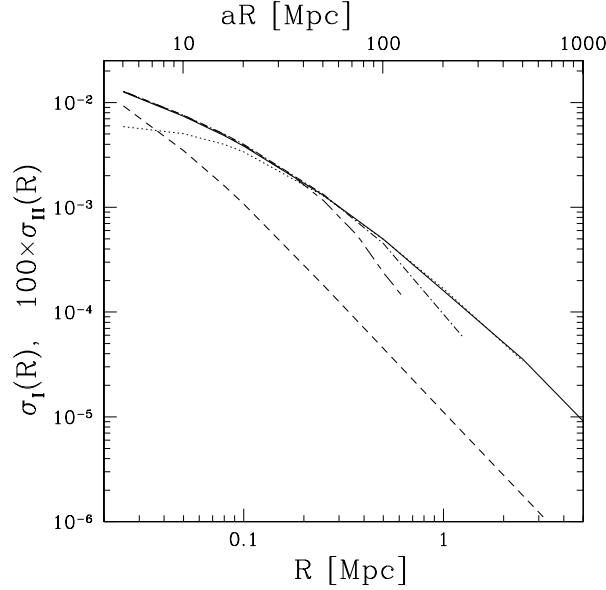


Abbildung A.1: Dargestellt sind die Werte von  $\sigma_{\mathbf{I}}(R)$  und  $\sigma_{\mathbf{II}}(R)$  für sphärische Anfangsdomänen in Abhängigkeit vom Domänenradius  $R$ . Oben ist der Radius der Domäne angegeben, die diese heute in einem Einstein–De–Sitter Kosmos hätte. Die gepunktete Linie ist das Ergebnis für  $\sigma_{\mathbf{I}}(R)$  mit dem geglätteten Spektrum aus Gleichung (A.25). Die kurzgestrichelte, langgestrichelte und gestrichelt–gepunktete Linie sind mit einer kleinen Abschneidewellenlänge  $k$ , die  $L = 200\text{Mpc}$  und  $L = 400\text{Mpc}$  entspricht, berechnet.

mit  $H_0 = 50\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$  angenommen.  $k$  wird in Einheiten von  $\text{Mpc}^{-1}$  angegeben. Wir wählen als Normierung  $A = 2.19 \cdot 10^4 \text{Mpc}^4$  die aus  $\sigma(8/0.5 \text{ Mpc}) = 1$  gefolgert wird (siehe Gleichung (A.14) and Tabelle 5.1). Diese Normierung ist kleiner als die Cobe–Normierung [27], aber größer als die Cluster–Normierung [68] für dieses CDM–Modell.

Wir wählen unsere Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt  $z_0 = 200$ , da sich zu einem späteren Zeitpunkt seine Form nicht wesentlich ändert [10]. Das lineare Powerspektrum zum Anfangszeitpunkt  $t_0$ , mit  $a(t_0) = 1$ , steht in direkter Beziehung zum linearen Powerspektrum aus Gleichung (A.22) zur heutigen Zeit  $t_h$ :

$$P_0(k) = \frac{P(k, t_0)}{a(t_0)^2}. \quad (\text{A.24})$$

Mit Verwendung dieses CDM–Modells berechnen wir  $\sigma_{\mathbf{I}}(R)$  und  $\sigma_{\mathbf{II}}(R)$  für Anfangsdomänen mit dem Radius  $R$  (siehe Abbildung A.1). Hier noch einige Anmerkungen zur numerischen Vorgehensweise: die Berechnung von  $\sigma_{\mathbf{I}}(R)$  aus Gleichung (A.14) macht numerisch keine Schwierigkeiten. Wir benutzen ein einfaches Monte–Carlo–

Verfahren. Das Dreifachintegral in Gleichung (A.17) zur Berechnung von  $\sigma_{\mathbf{II}}(R)$  erfordert “Stratified–Sampling”. In beiden Fällen sind unsere Resultate bis auf eine Stelle genau. Die Berechnung von  $\sigma_{\mathbf{III}}(R)$  aus Gleichung (A.19) erfordert einen großen Rechenaufwand, um die acht Integrale numerisch zu lösen. Der Effekt von  $\sigma_{\mathbf{III}}(R)$  auf die Entwicklung der von uns betrachteten Domänen ist jedoch so gering, dass hier eine Abschätzung der Größenordnung genügt. Wir verwenden dabei die Beziehung:  $\sigma_{\mathbf{III}}(R) \approx 1/27 \sigma_{\mathbf{I}}(R)^3$ , die in sphärischer Symmetrie exakt Gültigkeit hat. Die Werte für  $\sigma_{\mathbf{I}}(R)$ ,  $\sigma_{\mathbf{II}}(R)$  und  $\sigma_{\mathbf{III}}(R)$ , die in unserer Rechnung benutzt werden, sind in Tabelle 5.1 angegeben.

Es wurde gezeigt, dass die Genauigkeit der Zel’dovich Approximation dadurch gesteigert werden kann, dass man ein geglättetes Anfangsdichtefeld benutzt, was einem bei einer bestimmten Wellenlänge abgeschnittenem Powerspektrum  $P_s$  entspricht [32, 55, 24, 54, 44]. Die optimale Glättungsskala für CDM Anfangsbedingungen ist in unserem Falle  $k_s = 1.687 \text{Mpc}^{-1}$  [69]. Das Powerspektrum hat dann die Gestalt:

$$P_s(k) = e^{-k^2/k_s^2} P_0(k). \quad (\text{A.25})$$

In Abbildung A.1 ist  $\sigma_{\mathbf{I}}(R)$  dargestellt, berechnet mit  $P_s(k)$  anstatt mit  $P_0(k)$ . Schon für Domänen, deren Radius im Einstein-De-Sitter-Modell heute 20Mpc betragen würde, ist der Unterschied verschwindend.

In einer periodischen Box mit der Seitenlänge  $L$  wird das Powerspektrum bei kleinen  $k$ -Werten abgeschnitten. Die Unterdrückung von Fluktuationen in den Anfangsbedingungen kann durch das Abschneiden eines Wellenlängenbereichs abgeschätzt werden:  $P(k) = 0$  für  $k < 2\pi/L$ . In Abbildung A.1 ist der Effekt dieses Abschneidens angewandt auf  $\sigma_{\mathbf{I}}(R)$  gezeigt.



# Literaturverzeichnis

- [1] Adler, R. J., *The geometry of random fields* (John Wiley & Sons, Chichester, 1981).
- [2] Adler, S., Buchert, T., *Astron. Astrophys.* **343**, 317 (1999).
- [3] Alimi, J. M. *et al.*, *Ap. J.* **354**, 3 (1990).
- [4] Arnowitt, R., Deser, S., Misner, C. W., *Gravitation: An Introduction to Current Research* (L. Witten(ed.), New York: Wiley 1962).
- [5] Bardeen, J. M., Bond, J. R., Kaiser, N., Szalay, A. S., *Ap. J.* **304**, 15 (1986).
- [6] Barnes, A., Whitrow, J., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **148**, 193-195 (1970)
- [7] Bartelmann, M., Ehlers, J., Schneider, P., *Astron. Astrophys.* **280**, 351 (1993).
- [8] Bertschinger, E., Hamilton, A. J. S., *Astrophys. J.* **435**, 1 (1994)
- [9] Binney, J., Tremaine, S., *Galactic Dynamics* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994).
- [10] Bond, J. R., Szalay, A. S., *Ap. J.* **274**, 443 (1983).
- [11] Bondi, H., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **107**, 410 (1947)
- [12] Bonnor, W. B., *Z. Astroph.* **39**, 143 (1956); reprinted in: *Gen. Rel. Grav.* **30**, 1113 (1998).
- [13] Börner, G., *The Early Universe Facts and Fiction* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1988, 1992, 1993, 2003)
- [14] Buchert, T., Lante, S., Ostermann, M., Schmalzing, J., in Vorbereitung (2003).
- [15] Buchert, T., Carfora, M., *Phys. Rev. Lett.* **90**, 031101 (2003).
- [16] Buchert, T., Carfora, M., *Class. Quant. Grav.* **19**, 6109 (2002).

- [17] Buchert, T., Gen. Rel. Grav. **33**, 1381 (2001).
- [18] Buchert, T., Kerscher, M., Sicka, C., Phys. Rev. D **62**, 043525 (2000).
- [19] Buchert, T., Gen. Rel. Grav. **33**, 1381-1405 (2001).
- [20] Buchert, T., Gen. Rel. Grav. **32**, 105 (2000).
- [21] Buchert, T., Ehlers, J., Astron. Astrophys. **320**, 1 (1997).
- [22] Buchert, T., Karakatsanis, G., Klaffl, R., Schiller, P., Astron. Astrophys. **318**, 1 (1997).
- [23] Buchert, T., in *Proceedings of the international school of physics Enrico Fermi. Course CXXXII: Dark matter in the Universe*, edited by S. Bonometto, J. Primack, and A. Provenzale (Società Italiana di Fisica, Varenna sul Lago di Como, 1996).
- [24] Buchert, T., Melott, A. L., Weiß, A. G. Astron. Astrophys. **288**, 349 (1994).
- [25] Buchert, T., Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **254**, 729 (1992).
- [26] Buchert, T., Astron. Astrophys. **223**, 9 (1989).
- [27] Bunn, E. F., White, M., Ap. J. **480**, 6 (1997).
- [28] Chandrasekhar, S., *An Introduction to the theory of the Kerr metric and its perturbations* (General Relativity, An Einstein Centenary Survey, edited by S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge Univ. Press 1979), p. 370.
- [29] Carfora, M., Piotrkowska, K., Phys. Rev. D **52**, 4393 (1995).
- [30] Carfora, M., Isenberg, J., Jackson, M., J. Diff. Geom. **31**, 249 (1990).
- [31] Carfora, M., Marzuoli, A., Class. Quant. Grav **5**, 659 (1988).
- [32] Coles, P., Melott, A. L., Shandarin, S. F., Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **260**, 765 (1993).
- [33] Einstein, A., Straus, E. G., Rev. Mod. Phys. **18**, 148 (1945).
- [34] Ehlers, J., Buchert, T., Gen. Rel. Grav. **29**, 733 (1997).
- [35] Ellis, G. F. R., Jaklitsch, M. J., Astrophys. J. **346**, 601-606 (1989).
- [36] Engineer, S., Kanekar, N., Padmanabhan, T., astro-ph/9812452 (unpublished).
- [37] Goroff, M., Grinstein, B., Rey, S. J., Wise, M., Ap. J. **311**, 6 (1986).
- [38] Gunn, J. E., Gott, J. R., Astrophys. J. **176**, 1-19 (1972).

- [39] Hamilton, R. S., in *Surveys in Differential Geometry Vol 2*, International Press, pp.7-136 (1995).
- [40] Hellaby, C., Lake, K., *Astrophys. J.* **290**, 381 (1985) [+erratum: *Astrophys. J.* **300**, 461 (1985)]
- [41] Hikage, C. *et al.* [SDSS Collaboration] eingereicht: *Publ. Astron. Soc. Jap. astro-ph*: 0304455 (2003).
- [42] Hosoya, A., Buchert, T., Morita, M., PRL, eingereicht (2003).
- [43] Jain, B., Bertschinger, E., *Ap. J.* **431**, 495 (1994).
- [44] Karakatsanis, G., Buchert, T., Melott, A. L., *Astron. Astrophys.* **326**, 873 (1997).
- [45] Kasai, M., *Phys. Rev. D.* **52**, 5605-5611 (1995).
- [46] Kerscher, M., Sicka C., Buchert, T., *6th SFB-375 Ringberg Workshop: Astroteilchenphysik, Ringberg Castle, Tegernsee, Germany, 11-15 Oct 1999*
- [47] Krasinski, A., Hellaby, C., eingereicht: *Phys. Rev. D*, gr-qc:0303016. (2003).
- [48] Krasinski A., Hellaby, C., *Phys. Rev. D* **65**, 023501 (2002)
- [49] Kerscher, M., Buchert, T., Futamase, T., *Astrophys. J.* **558**, L79-L82 (2001).
- [50] Landau, L. D., Lifschitz, E. M., *Lehrbuch der Theoretischen Physik Band II: Klassische Feldtheorie* (Akademie Verlag GmbH, Berlin 1992).
- [51] Makino, N., Sasaki, M., Suto, Y., *Phys. Rev. D* **46**, 585 (1992).
- [52] Matarrese, S., Terranova, D., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **183**, 400-418 (1996)
- [53] Matravers D. R., Humphreys, N. P., *Gen. Rel. Grav.* **33**, 531 (2001)
- [54] Melott, A. L., Buchert, T., Weiß, A. G., *Astron. Astrophys.* **294**, 345 (1995).
- [55] Melott, A. L., Pellman, T., Shandarin, S. F., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **269**, 626 (1994).
- [56] Moutarde, F. *et al.*, *Astron. Astrophys.* **382**, 377 (1991).
- [57] Nakamura, T. T., Suto, Y., *Ap. J.* **447**, L65 (1995).
- [58] Padmanabhan, T., *Theoretical Astrophysics Volume III: Galaxies and Cosmology* (Cambridge University Press 2002).
- [59] Peebles, P. J. E., *The Large Scale Structure of the Universe* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1980).

- [60] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. *Numerical recipes in C* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [61] Russ, H., Soffel, M. H., Kasai, M., Börner, G., Phys. Rev. D **56**, 2044 (1997).
- [62] Russ, H., Morita, M., Kasai, M., Börner, G., Phys. Rev. D **53**, 6881 (1996).
- [63] Sahni, V., Coles, P., Physics Rep. **262**, 1 (1995).
- [64] Sicka, C., Buchert, T., Kerscher, M., *Proceedings of the Fifth SFB-375 Ringberg Workshop* Edited by Daniel Thomas, Ringberg Castle, Tegernsee, Germany (1999).
- [65] Spergel, A. N. *et al.* eingereicht: ApJ astro-ph: 0302209 (2003).
- [66] Stoeger, W. R., Helmi, A., Torres, D. F., Preprint gr-qc:9904020 (1999).
- [67] Turner, E. L., Cen, R., Ostriker, J. P., A. J. **103**, 1427 (1992).
- [68] Viana, P., Liddle, A., Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **281**, 323 (1996).
- [69] Weiß, A. G., Gottlöber, S., Buchert, T., Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **278**, 953 (1996).
- [70] Wu, X. P. *et al.*, Ap. J. **448**, L65 (1995).
- [71] Zel'dovich, Ya. B., Astrophysics **6**, 164 (1970).
- [72] Zentsova, A. S., Chernin, A. D., Astrophysics **16**, 108 (1980).







# Danksagung

Zunächst möchte ich meinem Betreuer Priv. Doz. Dr. Thomas Buchert danken. Er war immer zu Diskussionen bereit und hat mit Anregungen und Hilfestellungen meine Arbeit gefördert.

Herzlich danken möchte ich Dr. Martin Kerscher. In Zusammenarbeit mit ihm ist ein wichtiger Teil dieser Arbeit entstanden.

Dr. Claus Beisbart und Dr. Jens Schmalzing sind auf meine Fragen immer bereitwillig eingegangen. Der Lehrstuhl von Prof. Dr. Mukhanov bot ein ideales Arbeitsumfeld. Dafür möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Mukhanov sowie bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls bedanken. Danken möchte ich gleichfalls meinen Eltern und Freunden, die mich unterstützt haben.

Diese Arbeit wurde von der DFG gefördert. Für die Finanzierung, während eines Zeitraums von drei Jahren, bin ich zu großem Dank verpflichtet.

# Lebenslauf

## Christian Sicka

26.12.1969	Geboren in München
1976	Grundschule in Zorneding
1980	Gymnasium Vaterstetten
1989	Schulabschluss: Allgemeine Hochschulreife
1989/90	Grundwehrdienst
WS 1990/91	Studium der Physik an der LMU-München
WS/SS 94/95	Studienaufenthalt in Frankreich
WS 98/99	Studienabschluss: Physik-Diplom
seit 1999	Doktorand am Lehrstuhl von Prof. Dr. Mukhanov an der LMU-München