

Statistische Untersuchungen zum schwachen kosmologischen Gravitationslinseneffekt

Dissertation der Fakultät für Physik
der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von Guido Kruse
aus Mühlhausen

München, den 27. August 1999

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Zusammenfassung	5
1 Das kosmologische Hintergrundmodell	9
1.1 Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Modelle	9
1.2 Das CDM-Modell	12
1.2.1 Lineare Entwicklung des Dichtekontrasts	14
1.2.2 Das Powerspektrum des linearen Dichtekontrasts	14
2 Die Anzahldichte kollabierter Objekte und deren Massenprofil	19
2.1 Sphärische Kollapstheorie	20
2.2 Press-Schechter-Theorie	22
2.2.1 Gaußscher Dichtekontrast	22
2.2.2 Nicht-Gaußscher Dichtekontrast	23
2.3 Das Navarro-Frenk-White-Massenprofil	26
3 Schwache kosmische Scherung	29
3.1 Der schwache Gravitationslinseneffekt	29
3.2 Lichtausbreitung in einem schwach inhomogenen Universum . . .	33
3.3 Das Powerspektrum des projizierten Dichtekontrasts	36
4 Die Aperturmasse	39
4.1 Definition	39
4.2 Signal-zu-Rausch-Verhältnis	40
4.3 Das NFW-Modell der Aperturmasse	41
4.4 Statistische Eigenschaften der Aperturmasse	43
4.4.1 Die Dispersion der M_{ap} -Statistik	44
4.4.2 Die Schiefeit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Aperturmasse	47
4.4.3 Der nicht-Gaußsche Flügel der Wahrscheinlichkeitsvertei- lung der Aperturmasse	48
4.4.4 Einschränkung kosmologischer Modelle	52
5 Messung der Anzahldichte von Halos mit der Aperturmasse	59
5.1 Gaußscher Dichtekontrast	60
5.1.1 Die Anzahldichte von Halos mit großen Wirkungsquer- schnitten	68
5.2 Nicht-Gaußscher Dichtekontrast	70

6	Numerischer Test der analytischen Näherungen	73
6.1	Numerische Simulationen	73
6.2	Die Wahrscheinlichkeitsverteilung...	75
6.3	Anzahldichte der Halos	76
6.4	Der Flügel der M_{ap} -Statistik	78
7	Ausblick	83
A	Fitformeln	87
	Literaturverzeichnis	89

Einleitung und Zusammenfassung

Der schwache kosmologische Gravitationslinseneffekt, den man auch als kosmische Scherung bezeichnet, wird durch Masseninhomogenitäten verursacht, die sich zwischen dem Beobachter und Hintergrundgalaxien befinden. Seine Wirkung besteht in einer kleinen Verzerrung der Bilder der Hintergrundgalaxien und einer kohärenten tangentialen Ausrichtung der verzerrten Galaxienbilder bzgl. des Massenzentrums der Gravitationslinse. Da die intrinsische Form der Quellen nicht bekannt ist, mißt man die Elliptizität einer großen Anzahl von Hintergrundgalaxien. Nimmt man an, daß die intrinsischen Elliptizitäten der Quellen zufällig orientiert sind, dann manifestiert sich der schwache Gravitationslinseneffekt als Netto-Elliptizität der Bilder einer Population von Hintergrundgalaxien.

Die kosmische Scherung spiegelt die statistischen Eigenschaften des Dichtekontrasts wider (siehe Gunn 1967 und Blandford & Jaroszyński 1981). Quantitativ ist dieser Zusammenhang, der durch die Zweipunktkorrelationsfunktion der Elliptizitäten der Bilder von Hintergrundgalaxien oder die Dispersion der Elliptizität innerhalb einer (kreisförmigen) Apertur gegeben ist, für das lineare und nichtlineare Powerspektrum des Dichtekontrasts von verschiedenen Autoren untersucht worden (siehe den Überblicksartikel Mellier 1998 und dort angegebene Referenzen).

Wir werden in dieser Arbeit die Aperturmasse (M_{ap}) zur Quantifizierung der kosmischen Scherung benutzen (siehe Kaiser et al. 1994, Kaiser 1995, Schneider 1996 und Schneider et al. 1998). Sie ist als räumlich gefilterter projizierter Massendichtekontrast definiert. Die Aperturmasse kann direkt aus den meßbaren tangentialen Elliptizitäten der Bilder von Hintergrundgalaxien bestimmt werden. Aus diesem Grund reflektieren die statistischen Eigenschaften der Aperturmasse die des Dichtekontrasts.

Ein Großteil der vorliegenden Dissertation ist der Untersuchung der Aperturmassenstatistik (kurz M_{ap} -Statistik) und ihrem Zusammenhang mit dem Powerspektrum des Dichtekontrasts und den kosmologischen Parametern gewidmet (siehe Schneider et al. 1998 und Kruse & Schneider 1999b). Dabei konzentrieren wir uns auf die Berechnung der höheren Momente (der Dispersion

und der Schiefeit) der Wahrscheinlichkeitsverteilung von M_{ap} und die Analyse der kumulativen Wahrscheinlichkeitsverteilung großer M_{ap} -Werte.

Die Dispersion der M_{ap} -Statistik ist ein eng lokalisiertes Maß für das Powerspektrum des Dichtekontrasts (siehe auch Bartelmann & Schneider 1999a) und hängt von den kosmologischen Parametern ab. Da die Dispersion eine Meßgröße ist, erhält man eine direkte Abschätzung des Powerspektrums des Dichtekontrasts.

Der anfängliche Dichtekontrast wird durch ein Gaußsches Zufallsfeld beschrieben. Im Laufe der Entwicklung erhält die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Dichtefeldes nicht-Gaußsche Eigenschaften, die durch den Gravitationskollaps überdichteter Regionen verursacht werden (siehe z.B. Padmanabhan 1995). Der Gravitationskollaps führt zur Bildung massereicher, virialisierter Objekte (Halos).

Da die M_{ap} -Statistik durch die Statistik des Dichtekontrasts festgelegt ist, erbt die Aperturmasse die durch den Gravitationskollaps verursachten nicht-Gaußschen Eigenschaften. Ein Merkmal nicht-Gaußscher Verteilungsfunktionen ist die Schiefeit der Verteilung. In Schneider et al. (1998) wird die Schiefeit der M_{ap} -Statistik im Rahmen der quasilinearen Theorie der Strukturentwicklung berechnet (siehe auch Bernardeau et al. 1997). Die Schiefeit ist ein empfindliches Maß für die kosmologischen Parameter.

Wenn man die großen Aperturmassen als massereiche Halos interpretiert, dann spiegelt der ausgedehnte Flügel der Wahrscheinlichkeitsverteilung von M_{ap} die relative Häufigkeit kollabierter Objekte wider. Die zeitliche Entwicklung dieser Objekte und ihre Anzahldichte hängen stark von den kosmologischen Parametern ab. Aus diesem Grund kann die Messung der Wahrscheinlichkeit großer Aperturmassen zur Einschränkung der kosmologischen Parameter benutzt werden.

Wir zeigen, daß die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung von großen M_{ap} -Werten analytisch durch ein Exponentialgesetz beschrieben werden kann. Die Herleitung dieses Gesetzes beruht auf Näherungen zur Beschreibung der Anzahldichte und des Massenprofils der Halos. Wir nehmen an, daß die Anzahldichte der Halos durch die Press-Schechter-Theorie gegeben ist (siehe Press & Schechter 1974). Die Massendichte der Halos beschreiben wir mit dem universellen Massenprofil von Navarro et al. (1996). Wir benutzen eine auf dem Exponentialgesetz für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von M_{ap} beruhende Maximum-Likelihood-Methode, um quantitativ zu zeigen, daß die Messung der relativen Häufigkeit großer M_{ap} -Werte eine signifikante experimentelle Unterscheidung bestimmter kosmologischer Modelle gestattet.

Verschiedene Beobachtungsergebnisse, wie z.B. die Rotationskurven von Sternen in Galaxien und Galaxien in Galaxienhaufen oder der Nachweis stark verzerrter Bilder von Galaxien durch den Gravitationslinseneffekt, deuten darauf hin, daß ein großer Teil der Materie in dunkler Form vorliegt. Es gibt verschiedene Methoden, um die Masse kollabierter, zu einem Großteil aus dunkler Materie bestehender Objekte zu bestimmen. Die auf dem Nachweis von emittierten Licht beruhenden Methoden erfordern Annahmen über den dynamischen Zustand der Materie und deren Masse-zu-Leuchtkraft Verhältnis.

Diese Annahmen führen eine Unsicherheit in die Massenbestimmung der Halos ein, die man durch Verwendung des Gravitationslinseneffektes vermeiden kann, da dieser ausschließlich durch den Massengehalt eines Systems reguliert wird.

In Schneider (1996) und Reblinsky & Bartelmann (1999) wurde mit numerischen Simulationen gezeigt, daß mit der Aperturmasse signifikant Konzentrationen dunkler Materie nachgewiesen werden können. Eine erfolgreiche Anwendung der Aperturmassentechnik auf reale Daten wurde, z.B., von Seitz et al. (1998) und Erben et al. (1999) demonstriert. Dabei haben die letztgenannten Autoren erstmals einen statistisch signifikanten Nachweis einer vollständig dunklen Massenverteilung geführt.

Ausgehend von diesen theoretischen und experimentellen Ergebnissen ist es wahrscheinlich, daß in naher Zukunft Strukturen allein durch die ihnen zugeordnete projizierte Massenverteilung klassifiziert werden können. Kataloge von massereichen Objekten, die mit Techniken des schwachen Linseneffekts erstellt werden, können deshalb eindeutig mit theoretischen Modellen für die kosmische Massenfunktion verglichen werden. Dieser Vergleich ermöglicht eine Einschränkung der kosmologischen Parameter und, kombiniert mit Informationen über die Rotverschiebung der Halos, eine Rekonstruktion der dreidimensionalen Verteilung von Strukturen im Universum.

Wir berechnen in dieser Dissertation die Anzahldichte von Halos, die man aus der Analyse tiefer, großer Beobachtungsfelder mit der Aperturmassentechnik erwarten würde (siehe Kruse & Schneider 1999a). Die grundlegende Annahme dabei ist, Halos mit Werten der Aperturmasse zu identifizieren, die ein hohes Signal-zu-Rausch-Verhältnis haben. Die Berechnung basiert wiederum auf den Modellen von Press & Schechter (1974) und Navarro et al. (1996). Wir zeigen, daß die Anzahldichte der Halos groß genug ist, um mit geplanten Experimenten (siehe z.B. Mellier et al. 1999) nachgewiesen werden zu können. Insbesondere variieren die Anzahldichten der Halos in verschiedenen kosmologischen Modellen so stark, daß eine experimentelle Einschränkung der kosmologischen Parameter möglich erscheint.

Die Rechnungen in dieser Arbeit basieren auf einer Reihe von Näherungen. So wird in Press & Schechter (1974) angenommen, daß der Dichtekontrast durch ein Gaußsches Zufallsfeld beschrieben werden kann und der Gravitationskollaps der sphärischen Kollapstheorie folgt. Navarro et al. (1996) leiten ihr universelles Massenprofil unter der Annahme sphärisch symmetrischer Massenverteilungen her. Weiterhin haben wir in unseren Rechnungen angenommen, daß sich entlang jeder Sichtlinie jeweils nur ein Halo befindet, d.h. wir haben diffuse, nicht kollabierte Massenverteilungen vernachlässigt.

Um den Einfluß dieser Näherungen auf unsere Ergebnisse zu testen, haben wir die Aperturmasse aus numerisch generierten Beobachtungsdaten berechnet, die auf großen N -Körper Simulationen beruhen (siehe Jain et al. 1999 und Reblinsky et al. 1999). Es stellt sich heraus, daß die theoretischen Vorhersagen erstaunlich gut mit den Ergebnissen der numerischen Simulationen übereinstimmen. Diese Koinzidenz spricht für die hohe Qualität der benutzten Modelle und zeichnet die Aperturmasse als wichtiges Hilfsmittel für die Untersuchung kosmologischer Fragestellungen aus.

Diese Dissertation ist folgendermaßen organisiert. Im ersten Kapitel führen wir das kosmologische Hintergrundmodell und das auf kalter dunkler Materie beruhende Modell der linearen Strukturentwicklung ein. Die Anzahldichte kollabierter Objekte und deren Massenprofil berechnen wir im zweiten Kapitel. Das dritte Kapitel dient der Einführung des schwachen kosmologischen Gravitationslinseneffekts und der Beschreibung der Größen, die durch Messung dieses Effekts abgeschätzt werden können. Im vierten Kapitel führen wir die Aperturmasse zur Quantifizierung der kosmischen Scherung ein und untersuchen deren statistische Eigenschaften. Dabei verwenden wir die in den ersten beiden Kapiteln eingeführten Modelle. Wir stellen im fünften Kapitel eine Methode vor, die es erlaubt, die Anzahldichte von Halos abzuschätzen, die man aus Beobachtungen mit der Aperturmasstechnik erwarten würde. Den Vergleich unserer Berechnungen mit den Ergebnissen numerischer Simulationen führen wir im sechsten Kapitel durch. Im siebenten Kapitel fassen wir unsere Ergebnisse zusammen und diskutieren weitere Anwendungsmöglichkeiten der Aperturmasstechnik.

Kapitel 1

Das kosmologische Hintergrundmodell

Das Studium von kosmischen Gravitationslinseneffekten erfordert die Spezifizierung eines kosmologischen Hintergrundmodells, dessen Geometrie die Ausbreitung von Lichtstrahlen festlegt. Wir führen in Abschnitt 1.1 das sogenannte Standardmodell der Kosmologie ein. Die Geometrie dieses Modells ist durch homogene und isotrope Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen festgelegt. Eine detaillierte Beschreibung dieses Modells findet man z.B. in Misner et al. (1973) und Padmanabhan (1995).

Das kosmologische Standardmodell kann aufgrund seiner Homogenität keine Aussage über die Evolution von Strukturen, wie z.B. Galaxien oder Galaxienhaufen, im Universum machen. Aus diesem Grund muß ein realistisches kosmologisches Modell durch eine Theorie der Strukturentstehung ergänzt werden. Wir verwenden in dieser Arbeit ein Strukturentstehungsmodell, das auf kalter dunkler Materie basiert. In Abschnitt 1.2 fassen wir einige, in dieser Arbeit benötigte, Eigenschaften dieses Modells zusammen.

1.1 Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Modelle

Ein homogenes und isotropes Universum kann durch eine Metrik der Form

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) dl^2 \quad (1.1)$$

beschrieben werden. Den zeitabhängigen Faktor $a(t)$ nennt man *Skalenfaktor*, und c ist die Lichtgeschwindigkeit. Das Linienelement dl beschreibt eine homogene, isotrope raumartige Hyperfläche. Die Geometrie der Hyperflächen kann gekrümmt oder flach sein. Allgemein läßt sich das Linienelement dl mit der geforderten Symmetrie durch zwei Winkel θ, ϕ und eine radiale Koordinate w beschreiben,

$$dl^2 = dw^2 + f_K^2(w)(d\phi^2 + \sin^2\theta d\theta^2). \quad (1.2)$$

Der Nullpunkt des Koordinatensystems ist wegen der räumlichen Homogenität des Modells frei wählbar. Die radiale Funktion $f_K(w)$ ist durch die Geometrie der raumartigen Hyperflächen bestimmt. Entsprechend des Vorzeichens der

Krümmung K unterscheiden wir trigonometrische, lineare und hyperbolische radiale Funktionen,

$$f_K(w) = \begin{cases} K^{-1/2} \sin(\sqrt{K}w) & : K > 0 \\ w & : K = 0 \\ (-K)^{-1/2} \sinh(\sqrt{-K}w) & : K < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Ein durch die Metrik (1.1) definierter, expandierender Raum impliziert eine Änderung der Frequenz elektromagnetischer Strahlung, wenn sich diese im Universum ausbreitet. Ein Beobachter nimmt die Spektren entfernter Objekte rotverschoben wahr. Wenn man die beobachtete und emittierte Frequenz mit ω_0 bzw. ω_e bezeichnet, dann ist die *Rotverschiebung* z durch

$$1 + z := \frac{\omega_e}{\omega_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (1.4)$$

definiert. t_e ist der Zeitpunkt der Emission und der Skalenfaktor ist zum heutigen Zeitpunkt t_0 durch $a(t_0) = 1$ gegeben.

Die Dynamik des homogenen, isotropen Universums ist durch $a(t)$ festgelegt. Die funktionale Form des Skalenfaktors ist durch die Einsteinschen Feldgleichungen bestimmt. Der Energie-Impuls-Tensor in Einsteins Gleichungen ist entsprechend (1.1) durch eine homogene, ideale Flüssigkeit, die durch ihre Dichte $\rho(t)$ und ihren Druck $p(t)$ charakterisiert ist, definiert. Setzt man die Metrik (1.1) und den Energie-Impuls-Tensor der idealen Flüssigkeit in Einsteins Gleichungen ein, ergeben sich zwei unabhängige Gleichungen,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.5)$$

und

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.6)$$

wobei G die Gravitationskonstante ist. Die *kosmologische Konstante* Λ wurde ursprünglich von Einstein eingeführt, um statische Lösungen seiner Feldgleichungen zu erhalten. In modernen Theorien wird Λ als Vakuumenergiedichte interpretiert.

Es ist sinnvoll, eine Reihe von Parametern einzuführen, mit deren Hilfe sich viele Beziehungen in einer kompakten Form schreiben lassen. Die relative Expansionsrate $H(t) \equiv \dot{a}a^{-1}$ nennt man *Hubble Parameter*. Die *Hubble Konstante* ist der Hubble Parameter zum heutigen Zeitpunkt, $H_0 \equiv H(t_0)$. Der Wert der Hubble Konstanten ist nicht genau bekannt. Man schreibt $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, wobei $h \in [0.5, 1]$. Wenn nicht anders gesagt, setzen wir in dieser Arbeit $h = 0.5$.

Die *kritische Dichte* des Universums ist definiert als

$$\rho_{\text{cr}} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (1.7)$$

Mit dieser Definition erhalten wir den Dichteparameter Ω_0 als Verhältnis der Dichte des Universums ρ_0 zum Zeitpunkt t_0 zur kritischen Dichte,

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{cr}}}. \quad (1.8)$$

Weiterhin definieren wir einen Dichteparameter für die Vakuumenergiedichte,

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \quad (1.9)$$

Wenn wir die Energiedichte relativistischer Materie (Photonen und Neutrinos) vernachlässigen, dann erhalten wir aus (1.5) mit den oben eingeführten Parametern

$$H^2(t) = H_0^2 \left[a^{-3}(t) \Omega_0 - a^{-2}(t) \frac{Kc^2}{H_0^2} + \Omega_\Lambda \right]. \quad (1.10)$$

Da $H(t_0) = H_0$ erhalten wir aus (1.10)

$$K = \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 (\Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1). \quad (1.11)$$

Die Geometrie der raumartigen Hyperflächen ist somit durch die Dichteparameter Ω_0 und Ω_Λ festgelegt. Mit diesen zwei Parametern werden wir im Folgenden das kosmologische Hintergrundmodell charakterisieren.

Da $dt = da \dot{a}^{-1} = da (aH)^{-1}$, ergibt sich das Alter des Universums mit (1.10) und (1.11) zu

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 da \left[a^{-1} \Omega_0 + (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) + a^2 \Omega_\Lambda \right]^{-1/2}. \quad (1.12)$$

Aus der Zeitabhängigkeit der Hubble Konstanten (1.10) erhält man mit (1.4) die Abhängigkeit der Dichteparameter von der Rotverschiebung. In einem Universum, das von Materie dominiert wird, entwickelt sich die Dichte entsprechend $\varrho = \varrho_0 a^{-3}(t)$. Wir erhalten deswegen mit (1.7)

$$\Omega(z) = \frac{8\pi G}{3H^2(z)} \varrho_0 (1+z)^3 = \frac{(1+z)^3 \Omega_0}{(1+z)^3 \Omega_0 + (1+z)^2 (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) + \Omega_\Lambda} \quad (1.13)$$

und für den Dichteparameter der kosmologischen Konstanten

$$\Omega_\Lambda(z) = \frac{\Lambda}{3H^2(z)} = \frac{\Omega_\Lambda}{(1+z)^3 \Omega_0 + (1+z)^2 (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) + \Omega_\Lambda}. \quad (1.14)$$

Im Gegensatz zum Euklidischen Raum existieren in einem gekrümmten Raum keine eindeutigen Entfernungsmaße. In Analogie zu den im Euklidischen Raum durch Meßverfahren definierten Entfernungsmaßen zwischen zwei Ereignissen mit den Rotverschiebungen z_1 und z_2 , wobei $z_1 < z_2$, betrachten wir die folgenden Größen.

Die *physikalische Entfernung (proper distance)* $D_p(z_1, z_2)$ ist durch die Lichtlaufzeit von einer Quelle mit z_2 zu einem Beobachter mit $z_1 < z_2$ definiert, $dD_p = -c dt = -c da \dot{a}^{-1} = -c da (aH)^{-1}$. Mit (1.10) und (1.11) erhalten wir durch Integration

$$D_p(z_1, z_2) = \frac{c}{H_0} \int_{a(z_2)}^{a(z_1)} da \left[a^{-1} \Omega_0 + (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) + a^2 \Omega_\Lambda \right]^{-1/2}. \quad (1.15)$$

Die *mitbewegte Entfernung* (*comoving distance*) $D_{\text{com}}(z_1, z_2)$ erhält man aus $dD_{\text{p}}(z_1, z_2) = a \, dD_{\text{com}}(z_1, z_2)$,

$$D_{\text{com}}(z_1, z_2) = \frac{c}{H_0} \int_{a(z_2)}^{a(z_1)} da \left[a\Omega_0 + a^2(1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) + a^4\Omega_\Lambda \right]^{-1/2} = w(z_1, z_2). \quad (1.16)$$

Die *Winkelentfernung* (*angular diameter distance*) $D_{\text{ang}}(z_1, z_2)$ ist wie im Euklidischen Raum durch das Verhältnis des physikalischen Querschnitts δA eines Objekts mit z_2 zum Raumwinkel $\delta\omega$, den das Objekt bei einem Beobachter mit z_1 aufspannt, definiert. Aus

$$\frac{\delta A}{4\pi^2 a^2(z_2) f_K^2[w(z_1, z_2)]} = \frac{\delta\omega}{4\pi} \quad (1.17)$$

und $\delta\omega D_{\text{ang}}^2 = \delta A$ folgt

$$D_{\text{ang}}(z_1, z_2) = \left(\frac{\delta A}{\delta\omega} \right)^{1/2} = a(z_2) f_K[D_{\text{com}}(z_1, z_2)]. \quad (1.18)$$

Einen Zusammenhang zwischen dem Differential der Rotverschiebung dz und dD_{p} bzw. dD_{com} erhält man durch Transformation der Integrationsvariablen a in (1.16) auf die Rotverschiebung z ,

$$D_{\text{com}}(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z dz' \left[(1+z')^3\Omega_0 + (1+z')^2(1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) + \Omega_\Lambda \right]^{-1/2}. \quad (1.19)$$

Differenziert man beide Seiten in (1.19) nach z ergibt sich,

$$dD_{\text{p}}(z) = \frac{c}{H_0} \frac{dz}{E(z)(1+z)} \quad \text{bzw.} \quad dD_{\text{com}}(z) = \frac{c}{H_0} \frac{dz}{E(z)}, \quad (1.20)$$

wobei

$$E(z) = \sqrt{(1+z)^3\Omega_0 + (1+z)^2(1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) + \Omega_\Lambda}. \quad (1.21)$$

1.2 Das CDM-Modell

Nimmt man im Hintergrundmodell kleine anfängliche Dichtestörungen δ an, dann bilden diese Störungen im Verlauf ihrer zeitlichen Entwicklung durch Gravitationskollaps Objekte, deren Dichte beträchtlich von der mittleren Dichte des Universums abweichen kann. Im Zusammenhang mit den Dichtestörungen ergeben sich eine Reihe von Fragen: Was ist ihr physikalischer Ursprung? Welcher Statistik gehorchen sie? Wie kann die Dynamik der Störungen beschrieben werden?

Ein populäres Modell, den Ursprung der Dichtefluktuationen zu beschreiben, ist die *Inflationstheorie* (siehe Guth 1981). In dieser Theorie werden die Dichtestörungen durch primordiale Quantenfluktuationen hervorgerufen, deren Entwicklung in einer sehr frühen Phase des Universums durch eine beschleunigte Expansion, $\ddot{a} > 0$, bestimmt wird. Die Theorie der Inflation führt in natürlicher Weise auf adiabatische, skaleninvariante Dichtestörungen, die durch

ein Gaußsches Zufallsfeld beschrieben werden. Somit ist das primordiale Powerspektrum von δ die fundamentale Größe zur Beschreibung des Dichtefeldes. Die Entwicklung des Dichtekontrasts ergibt sich aus der Beschreibung der Materie durch eine ideale Flüssigkeit (siehe Hawking 1966). Abhängig vom Betrag des Dichtekontrasts, $|\delta| \ll 1$, $|\delta| \simeq 1$ oder $|\delta| > 1$, wurden verschiedene Methoden entwickelt, um die zeitliche Entwicklung des Dichtefeldes zu bestimmen (siehe z.B. Padmanabhan 1995). Für $|\delta| \ll 1$ können die Gleichungen, die die ideale Flüssigkeit charakterisieren, linearisiert werden. Die Linearisierung ermöglicht (in Abhängigkeit vom kosmologischen Hintergrundmodell) eine analytische bzw. semi-analytische Beschreibung der Entwicklung von δ (siehe Abschnitte 1.2.1 und 1.2.2). Dichtefelder mit $|\delta| \simeq 1$ können störungstheoretisch oder im Rahmen von Näherungen beschrieben werden. Wir werden auf diesen Fall hier nicht näher eingehen (siehe z.B. Padmanabhan 1995). Die nichtlineare Entwicklung, die durch $|\delta| > 1$ charakterisiert ist, kann durch semi-analytische Modelle (siehe die Abschnitte 2.1 und 2.2) oder mit N -Körper Simulationen (siehe z.B. Jenkins et al. 1998) untersucht werden.

Ein weiteres Problem betrifft die Zusammensetzung der Materie. Verschiedene Tatsachen deuten darauf hin, daß der größte Teil der Materie im Universum in Form *dunkler Materie* vorhanden ist. So können rein baryonische Dichteschwankungen erst dann durch Gravitationskollaps anwachsen, wenn die Baryonen vom Photonenfeld entkoppelt sind. Die beobachteten Anisotropien in der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMBR) sind aber viel zu gering, um die heutigen Strukturen erklären zu können. Nicht-baryonische Materie, z.B. schwach wechselwirkende massereiche Teilchen, entkoppelt früher aus dem thermischen Gleichgewicht des primordialen Plasmas und kann somit größere Dichtestörungen hervorrufen. Ein weiteres Argument für die Existenz nicht-leuchtender Materie ist die Beobachtung dynamischer Effekte, wie der Bewegung von Sternen in Galaxien oder Galaxien in Galaxienhaufen, oder des Gravitationslinseneffektes, der sich z.B. in stark verzerrten Bildern von weit entfernten Hintergrundgalaxien manifestiert. Diese Effekte können nicht allein auf die Masse der leuchtenden Materie zurückgeführt werden. Es wird ein Vielfaches ihrer Masse benötigt, um die beschriebenen Effekte erklären zu können.

Wir betrachten in diesem Kapitel eine postulierte Form von dunkler Materie, die aus nichtrelativistischen Teilchen besteht und mit anderen Materiearten nur rein gravitativ wechselwirkt. Diese *kalte* dunkle Materie (cold dark matter oder kurz CDM) hat zum Zeitpunkt der Entkopplung vom Strahlungsfeld eine kleine Geschwindigkeitsdispersion, weshalb thermische Druckkräfte vernachlässigt werden können.

Im Gegensatz zu *heißer* dunkler Materie (hot dark matter, kurz HDM) dämpfen CDM-Teilchen Dichtefluktuationen auf kleinen Skalen nicht durch ihre thermische Eigenbewegung (free streaming). Als eine wichtige Konsequenz dieser Eigenschaft ergibt sich, daß CDM-Universen Struktur in einem sogenannte ‘bottom up’-Szenario bilden. Hierbei entstehen zunächst kleinere Strukturen, die dann zu größeren Objekten verschmelzen. In Modellen mit relativistischer, heißer dunkler Materie werden die kleinskaligen Fluktuationen dagegen zunächst ausgelöscht, so daß sich Struktur in einem konträren ‘top down’-Szenario bildet; zunächst kollabieren große Strukturen, die eventuell später in

kleinere Objekte fragmentieren.

Das CDM-Modell ist in vielen N -Körper Simulationen getestet worden und scheint am ehesten die heute beobachteten Strukturen erklären zu können, wogegen reine HDM-Modelle durch solche Studien ausgeschlossen werden konnten (siehe z.B. Jenkins et al. 1998). Eine umfassende Darstellung des CDM-Modells findet man in Liddle & Lyth (1993).

1.2.1 Lineare Entwicklung des Dichtekontrasts

Eine Newtonsche druckfreie Flüssigkeit mit Dichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, die mit dem Gravitationspotential $\Phi(\mathbf{r}, t)$ wechselwirkt, wird durch folgende Gleichungen beschrieben,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \Phi, \quad (1.23)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (1.24)$$

Wenn wir mitbewegte Koordinaten $\mathbf{x} = \mathbf{r}/a$, die Geschwindigkeit $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \dot{a}\mathbf{x}$ und die Abweichung der Dichte ρ von der mittleren Dichte des Universums $\bar{\rho}(t)$, kurz *Dichtekontrast*, $\delta(\mathbf{x}, t) \equiv (\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho})/\bar{\rho}$ in den Gleichungen (1.22) - (1.24) einsetzen, erhalten wir nach Eliminierung von \mathbf{u} und Φ und Vernachlässigung aller nichtlinearen Terme folgende Gleichung für die Entwicklung des Dichtekontrasts,

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{2\dot{a}}{a} \frac{d\delta}{dt} - \frac{3H_0^2 \Omega_0}{2a^3} \delta = 0. \quad (1.25)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ergibt sich aus der Superposition zweier, linear unabhängiger Lösungen,

$$\delta(\mathbf{x}, t) = D_+(t) \Delta_+(\mathbf{x}) + D_-(t) \Delta_-(\mathbf{x}). \quad (1.26)$$

Die räumlichen Anteile in (1.26) werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Man kann zeigen, daß die mit der Zeit abnehmende Lösung $D_-(t)$ schnell zerfällt (siehe z.B. Padmanabhan 1995). Somit wird die Entwicklung durch die Funktion $D_+(t)$, die man *linearen Wachstumsfaktor* nennt, beschrieben. Für $\Omega_0 = 1$ und $\Omega_\Lambda = 0$ entwickelt sich der Dichtekontrast entsprechend $\delta \propto D_+(t) \propto t^{2/3} \propto a$. Lösungen von (1.25) für Kosmologien mit $\Omega_0 < 1$ und $\Omega_\Lambda \neq 0$ haben eine kompliziertere Struktur. Sie können in Peebles (1980) nachgelesen werden.

1.2.2 Das Powerspektrum des linearen Dichtekontrasts

Entsprechend Gleichung (1.25) entwickeln sich die einzelnen Fouriermoden des linearen Dichtekontrasts unabhängig voneinander. Somit sind die Fouriermoden statistisch voneinander unabhängig. Nimmt man an, daß die Phasen des anfänglichen Dichtefeldes unabhängig und zufällig verteilt sind, dann folgt aus

dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und den Eigenschaften des kosmologischen Hintergrundmodells, daß der lineare Dichtekontrast durch ein homogenes, isotropes Gaußsches Zufallsfeld beschrieben werden kann. Die statistischen Eigenschaften Gaußscher Zufallsfelder sind vollständig durch den Mittelwert und die Dispersion der Wahrscheinlichkeitsverteilung festgelegt. Der Mittelwert des Dichtekontrasts ist per Definition null. Das *Powerspektrum* $P_\delta(k)$ ist die Fouriertransformierte der Zweipunktkorrelationsfunktion

$$C_{\delta\delta}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \langle \delta(\mathbf{x})\delta^*(\mathbf{y}) \rangle, \quad (1.27)$$

wobei $\langle \cdot \rangle$ eine Mittelung über Realisierungen des Dichtekontrasts bedeutet. Somit ist die Statistik des linearen Dichtekontrasts vollständig durch das Powerspektrum charakterisiert. Setzt man in (1.27) die Fouriertransformierte

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, t) = \int d^3x \delta(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (1.28)$$

des Dichtekontrasts ein, erhält man

$$(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_\delta(k) = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \int d^3x C_{\delta\delta}(|\mathbf{x}|) e^{-i\mathbf{x}\mathbf{k}} = \langle \tilde{\delta}(\mathbf{k})\tilde{\delta}^*(\mathbf{k}') \rangle, \quad (1.29)$$

da δ ein homogenes, isotropes Zufallsfeld ist. Im Folgenden führen wir das Powerspektrum des linearen Dichtekontrasts für eine CDM-Kosmologie ein. Wir schreiben im Rest der Arbeit kurz $P(k)$ für das Powerspektrum.

Der primordiale Dichtekontrast ist im Rahmen der Inflationstheorie durch ein skalenfreies Powerspektrum der Form $P(k) \propto k^n$ gegeben. Wir nehmen im Folgenden $n = 1$ an. Diese Form des Powerspektrums nennt man *Harrison-Zel'dovich Spektrum*. Die Änderung der Form des primordialen Powerspektrums wird durch eine sogenannte Transferfunktion beschrieben,

$$P(k) = T^2(k) k. \quad (1.30)$$

Wir verwenden in dieser Arbeit die von Bardeen et al. (1986) angegebene Fitformel für die Transferfunktion eines CDM-Powerspektrums,

$$P(k) = A \frac{[\ln(1 + 2.34q)]^2}{(2.34q)^2 \sqrt{1 + 3.89q + (16.1q)^2 + (5.46q)^3 + (6.71)^4}} k, \quad (1.31)$$

wobei

$$q := \frac{k}{\Gamma} \text{Mpc } h^{-1}, \quad \Gamma = \Omega_0 h. \quad (1.32)$$

Den Parameter Γ nennt man *Form-Parameter*. Γ legt die typische Skala eines CDM-Spektrums fest.

Die Normierung A des Powerspektrums in Gleichung (1.31) kann nicht im Rahmen theoretischer Modelle berechnet werden. Sie wird durch den Vergleich mit Beobachtungen bestimmt. Es gibt mehrere Methoden, das Powerspektrum zu normieren.

Eine Methode beruht auf der Messung der Dispersion der Fluktuationen der räumlichen Dichte von Galaxien. Diese Dispersion ist ungefähr 1, wenn

man die Fluktuationen in Kugeln mit dem Radius $R = 8 \text{ Mpc } h^{-1}$ betrachtet. Nimmt man an, daß die Galaxien der Verteilung der dunklen Materie folgen, d.h. ihre Anzahldichte ist proportional zur Massendichte, ist die Dispersion des über einen Radius von $R = 8 \text{ Mpc } h^{-1}$ gemittelten Dichtekontrasts ebenfalls ungefähr 1. Diese Annahme kann benutzt werden, um die Normierung A in (1.31) zu bestimmen.

Sei $\delta_0(\mathbf{x}) := \delta(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x}, t_i) D_+(t_0) D_+^{-1}(t_i)$ der lineare Dichtekontrast zum heutigen Zeitpunkt $t_0 > t_i$. Wir mitteln δ_0 mit einem normierten Filter W_R über den Radius R ,

$$\delta_R(\mathbf{x}) = \int d^3y \delta_0(\mathbf{y}) W_R(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad (1.33)$$

wobei $\int d^3x W_R(x) = 1$ gilt. Die Gleichung (1.33) kann mit Hilfe des Faltungssatzes für die Fouriertransformation als $\tilde{\delta}_R(\mathbf{k}) = \tilde{\delta}_0(\mathbf{k}) \tilde{W}_R(\mathbf{k})$ geschrieben werden. Mit dieser Beziehung und Gleichung (1.29) erhält man die Dispersion des linearen Dichtekontrasts δ_R als

$$\sigma^2(R) = \langle \delta_R^2(\mathbf{x}) \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_R(k) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\tilde{W}_R(k)|^2 P_0(k), \quad (1.34)$$

wobei σ^2 von der Größe R der Filterfunktion abhängt. Die Powerspektren P_R und P_0 sind entsprechend Gleichung (1.29) durch die Fouriertransformierten $\tilde{\delta}_R(\mathbf{k})$ und $\tilde{\delta}_0(\mathbf{k})$ definiert. Setzen wir (1.31) in (1.34) ein und benutzen $\sigma_8 := \sigma(R = 8 \text{ Mpc } h^{-1}) \simeq 1$, dann können wir die Normierung A aus (1.34) berechnen.

Wir verwenden im Folgenden einen sogenannten ‘Top-Hat’ Filter, der durch

$$W_R(x) = \begin{cases} 3/(4\pi R^3) & : x \leq R \\ 0 & : x > R \end{cases} \quad (1.35)$$

gegeben ist. Seine Fouriertransformierte ist

$$\tilde{W}_R(k) = 3 \frac{\sin(kR) - kR \cos(kR)}{(kR)^3}. \quad (1.36)$$

Eine andere Methode zur Normierung des Powerspektrums beruht auf dem Nachweis von Anisotropien in der CMBR auf Skalen von ~ 7 Grad durch den COBE Satelliten (siehe Smoot et al. 1992). Korrelationen in den Anisotropien sind proportional zum Powerspektrum des Dichtekontrasts zur Zeit der Rekombination, $z \sim 1100$, und können somit direkt zur Bestimmung von A benutzt werden (siehe Liddle & Lyth 1993).

In Tabelle 1.1 stellen wir die Parameter für die CDM-Kosmologien zusammen, die wir in den späteren Berechnungen benutzen werden. In den EdS(0.6,0.25), OCDM(1,0.25) und Λ CDM(1,0.25) Modellen ist der Formparameter $\Gamma = 0.25$ so gewählt, daß die beobachtete Zweipunktkorrelationsfunktion von Galaxien reproduziert wird (siehe Efstathiou 1996). Im EdS(1,0.25) Modell entspricht σ_8 ungefähr der COBE-Normierung. Der Formparameter im EdS(0.6,0.5) Modell ist entsprechend $\Gamma = \Omega_0 h$ für $h = 0.5$ berechnet.

Tabelle 1.1: Die in dieser Arbeit verwendeten CDM-Hintergrundkosmologien.

Ω_0	Ω_Λ	Γ	σ_8	Modell
1.0	0	0.25	0.6	EdS(0.6,0.25)
1.0	0	0.25	1.0	EdS(1,0.25)
1.0	0	0.5	0.6	EdS(0.6,0.5)
0.3	0	0.25	1.0	OCDM(1,0.25)
0.3	0.7	0.25	1.0	Λ CDM(1,0.25)

Kapitel 2

Die Anzahldichte kollabierter Objekte und deren Massenprofil

Im ersten Kapitel haben wir die Entwicklung des Dichtekontrasts im linearen Bereich beschrieben. Wenn der Dichtekontrast durch den Gravitationskollaps Werte $|\delta| \sim 1$ oder größer angenommen hat, können die Gleichungen (1.22-1.24) nicht mehr linearisiert werden. Die einzelnen Fouriermoden des Dichtekontrasts entwickeln sich in diesem Fall nicht mehr unabhängig voneinander. Somit kann der Dichtekontrast nicht durch ein Gaußsches Zufallsfeld beschrieben werden. Es müssen andere Methoden entwickelt werden, um die nichtlineare Entwicklung des Dichtefeldes zu charakterisieren. Eine Möglichkeit ist, von Gaußschen Anfangsbedingungen ausgehend, die Entwicklung mit N -Körper Simulationen zu studieren (siehe z.B. Jenkins et al. 1998). Hier betrachtet man die gravitative Wechselwirkung von Teilchen, die die dunkle Materie repräsentieren. Im Ergebnis solcher Simulationen erhält man eine Vielfalt gravitativ gebundener Systeme, deren Massenbereich sich von einzelnen Galaxien bis zu großen Galaxienhaufen oder Superhaufen erstreckt. Das nichtlineare Powerspektrum kann für alle Rotverschiebungen durch eine universelle (skalenunabhängige) Funktion aus dem linearen Powerspektrum berechnet werden (siehe Hamilton et al. 1991, Jain et al. 1995 und Peacock & Dodds 1996). Da die Wahrscheinlichkeitsverteilung des nichtlinearen Dichtekontrasts nicht-Gaußsch ist, wird die Statistik des Dichtefeldes nicht vollständig durch das nichtlineare Powerspektrum charakterisiert. Es müssen noch die höheren Momente des Dichtekontrasts betrachtet werden.

In diesem Kapitel skizzieren wir eine auf der Arbeit von Press & Schechter (1974) beruhende Theorie, die die Anzahldichte kollabierter Objekte (Halos) in Abhängigkeit von der Rotverschiebung, vom linearen Powerspektrum und den kosmologischen Parametern vorhersagt. Die Aussagen der Press-Schechter-Theorie (kurz P/S-Theorie) basieren auf der Annahme eines Gaußschen Dichtefeldes und der Gültigkeit der sphärischen Kollapstheorie (siehe Abschnitt 2.1). Die Vorhersagen der P/S-Theorie sind in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen von N -Körper Simulationen (siehe z.B. Lacey & Cole 1994).

Physikalisch ist die Annahme eines Gaußschen Dichtekontrasts durch das Modell der Inflation motiviert, in dem Quantenfluktuationen den Dichtekontrast erzeugen. Es gibt eine Reihe anderer Modelle der Strukturentwicklung, wie z.B. die Theorie topologischer Defekte (siehe z.B. Kibble 1976 und Vilenkin & Shellard 1994) und die modifizierte Form der Inflationstheorie von Peebles (siehe Peebles 1999a und Peebles 1999b), welche nicht-Gaußsche Dichtefelder vorhersagen. Hinweise für die Möglichkeit nicht-Gaußscher anfänglicher Dichtefelder haben sich aus Beobachtungen von Anisotropien in der kosmischen Hintergrundstrahlung (siehe z.B. Ferreira et al. 1998, Ferreira et al. 1999 und Magueijo et al. 1999) ergeben. Allerdings können diese Beobachtungen Gaußsche Dichtefelder nicht signifikant ausschließen (siehe z.B. Bromley & Tegmark 1999).

Im Allgemeinen ist es schwierig, Vorhersagen für nicht-Gaußsche Dichtefelder zu machen, da die höheren Momente in diesem Fall nicht verschwinden. Eine Methode, die Implikationen nicht-Gaußscher Dichtefelder zu studieren, ist die modifizierte P/S-Theorie (siehe z.B. Robinson et al. 1998). In dieser Modifikation der ursprünglichen Arbeit von Press & Schechter (1974) wird anstelle einer Gaußschen Verteilungsfunktion eine nicht-Gaußsche betrachtet. Im Rahmen dieser Theorie kann die von den kosmologischen Parametern abhängende räumliche Dichte nichtlinearer Objekte berechnet werden. Vergleicht man die Beobachtungen massereicher Objekte mit den Ergebnissen der ‘klassischen’ und der modifizierten P/S-Theorie, so kann unter Annahme eines kosmologischen Modells der Unterschied in der Anzahldichte von Halos berechnet werden, der sich aus der Verwendung von Gaußschen oder nicht-Gaußschen Verteilungsfunktionen ergibt (siehe Willick 1999 und dort angegebene Referenzen). Der Arbeit von Willick (1999) folgend, beschreiben wir in Abschnitt 2.2.2 den Aufbau einer modifizierten P/S-Theorie.

2.1 Sphärische Kollapstheorie

Eine umfassende Darstellung der sphärischen Kollapstheorie, in der die Entwicklung einer sphärischen Massenverteilung in einem expandierenden Universum beschrieben wird, findet man z.B. in Padmanabhan (1995).

Wir betrachten eine sphärische Region mit der mittleren Dichte $\bar{\rho}_S$ und dem physikalischen Radius R , die einen homogenen Dichtekontrast $\bar{\delta} = \bar{\rho}_S/\bar{\rho} - 1$ hat. Die sphärische Region enthält die Masse $M = 4\pi\bar{\rho}_S R^3/3$. Wir nehmen an, daß diese Region in ein homogenes Universum mit mittlerer Dichte $\bar{\rho}$ eingebettet ist. Entsprechend dem Birkhoffschen Theorem (siehe z.B. Misner et al. 1973), dessen Aussage ist, daß äußere Massenverteilungen keine Kraft auf die Masse innerhalb einer Sphäre ausüben, können wir die zeitliche Entwicklung der sphärischen Region durch

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2} = -\frac{4\pi G}{3} \bar{\rho} (1 + \bar{\delta}) R \quad (2.1)$$

beschreiben. Die Gleichung (2.1) gilt für ein Universum mit verschwindender Vakuumenergiedichte. Vergleichen wir die Gleichungen (2.1) und (1.5) dann stellen wir fest, daß die Sphäre der gleichen zeitlichen Entwicklung folgt, wie

das gesamte Universum mit veränderter Massendichte.

Multiplizieren wir (2.1) mit dR/dt erhalten wir ein erstes Integral,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{R} = E, \quad (2.2)$$

wobei die Integrationskonstante E die Energie pro Massenschale der Sphäre ist. Für $E < 0$ erhält man die parametrisierte Lösung

$$\frac{R}{R_{\max}} = \frac{1}{2}(1 - \cos \eta), \quad \frac{t}{t_{\max}} = \frac{1}{\pi}(\eta - \sin \eta) \quad (2.3)$$

der Gleichung (2.2), wobei R_{\max} der maximale Radius der Sphäre ist, der zum Zeitpunkt t_{\max} erreicht wird.

Für kleine η kann man in (2.3) Reihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen einsetzen,

$$\frac{R}{R_{\max}} = \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^4}{48} + \dots, \quad \frac{t}{t_{\max}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\eta^3}{6} - \frac{\eta^5}{120} + \dots \right). \quad (2.4)$$

Aus (2.4) erhält man

$$\eta^2 = \left(\frac{6\pi t}{t_{\max}} \right)^{2/3} \left(1 + \frac{1}{30} \left(\frac{6\pi t}{t_{\max}} \right)^{2/3} - \dots \right) \quad (2.5)$$

und

$$\frac{R}{R_{\max}} = \frac{1}{4} \left(\frac{6\pi t}{t_{\max}} \right)^{2/3} \left(1 - \frac{1}{20} \left(\frac{6\pi t}{t_{\max}} \right)^{2/3} + \dots \right). \quad (2.6)$$

Somit ergibt sich $\bar{\delta}$ bzgl. eines EdS-Universums, das das gleiche Alter wie die Sphäre hat, als

$$\bar{\delta} = \frac{3}{20} \left(\frac{6\pi t}{t_{\max}} \right)^{2/3} \propto a_{\text{EdS}}, \quad (2.7)$$

(siehe z.B. Padmanabhan 1995). Der Kollaps der Sphäre zu $R = 0$ tritt zum Zeitpunkt $t = 2t_{\max}$ ein. Zu diesem Zeitpunkt erhalten wir für den extrapolierten linearen mittleren Dichtekontrast δ_{crit}^0 folgenden Ausdruck,

$$\delta_{\text{crit}}^0 = \bar{\delta}(2t_{\max}) = \frac{3}{20} (12\pi)^{2/3} = 1.686. \quad (2.8)$$

Für offene Universen oder kosmologische Modelle mit Vakuumenergiedichte ergeben sich andere Gleichungen zur Bestimmung von δ_{crit}^0 (siehe Fitformeln für δ_{crit}^0 in Anhang B).

Der zum Zeitpunkt $t = 2t_{\max}$ aus den Bewegungsgleichungen folgende Kollaps zu $R = 0$ wird in Wirklichkeit nicht eintreten, da die Massenverteilungen nicht sphärisch symmetrisch sind. Dadurch treten nicht-radiale Gravitationskräfte auf, die die Bahnen der einzelnen Teilchen beeinflussen, während die Sphäre kollabiert. Die Teilchen werden aus den radialen Orbits gestreut und erhalten zufällige Geschwindigkeitskomponenten. Der Kollaps der Sphäre endet, wenn das System virialisiert ist, d.h wenn die doppelte kinetische Energie der Teilchen ihrer potentiellen Energie entspricht. Die zuletzt genannte Bedingung kombiniert mit der Energieerhaltung ergibt für den Virialradius, $R_{\text{vir}} = R_{\max}/2$.

2.2 Press-Schechter-Theorie

Darstellungen der P/S-Theorie findet man z.B. in White (1996) und Padmanabhan (1995). In den folgenden zwei Abschnitten stellen wir kurz den ‘klassischen’, auf der Annahme eines Gaußschen Dichtekontrasts beruhenden, und einen modifizierten P/S-Formalismus vor.

2.2.1 Gaußscher Dichtekontrast

Wir gehen vom gemittelten linearen Dichtekontrast (siehe Gleichung (1.33)) $\delta_R(\mathbf{r}, t_i)$ zu einem frühen Zeitpunkt t_i aus. Wählen wir den sphärisch symmetrischen Filter (1.35), dann ist δ_R die mittlere Dichte innerhalb einer Sphäre mit Radius R oder Masse $M(R) = 4\pi\bar{\rho}R^3/3$.

Press & Schechter (1974) nehmen an, daß gravitativ gebundene Systeme zum Zeitpunkt t aus Regionen entstehen, deren gemittelter Dichtekontrast $\delta_R(\mathbf{r}, t_i)$ zum Zeitpunkt t_i , $t_i < t$, einen kritischen Schwellenwert δ_{crit} überschreitet. δ_{crit} berechnen wir aus der sphärischen Kollapstheorie (siehe Abschnitt 2.1).

Da δ_R aus δ durch eine lineare Operation gewonnen wird, kann δ_R auch durch ein Gaußsches Zufallsfeld beschrieben werden,

$$P(\delta_R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(R)} \exp\left[-\frac{\delta_R^2}{2\sigma^2(R)}\right], \quad (2.9)$$

wobei $\sigma^2(R)$ durch (1.34) definiert ist. Wir berechnen $\sigma(R)$ mit der Fitformel (A.7).

Mit (2.9) erhalten wir den Teil der Punkte, die von Kugeln mit einem Radius R umgeben sind, in denen die mittlere Dichte eine Schwelle δ_{crit} überschreitet,

$$F(M, z) = \int_{\delta_{\text{crit}}(z)}^{\infty} d\delta_R P(\delta_R), \quad (2.10)$$

wobei die Rotverschiebung z dem Zeitpunkt t entspricht. Der kritische Dichtekontrast $\delta_{\text{crit}}(z)$ bei der Rotverschiebung z ist durch den von den kosmologischen Parametern abhängenden linearen Wachstumsfaktor $D_+(z, \Omega_0, \Omega_\Lambda)$ (siehe Abschnitt 1.2.1 und Fitformeln (A.1)) und den extrapolierten linearen Dichtekontrast $\delta_{\text{crit}}^0 = \delta_{\text{crit}}(0)$ (siehe Gleichung (2.8) und Fitformeln (A.6)) bestimmt,

$$\delta_{\text{crit}}(z) = \frac{\delta_{\text{crit}}^0}{D_+(z, \Omega_0, \Omega_\Lambda)}. \quad (2.11)$$

Press & Schechter (1974) haben vorgeschlagen, $F(M, z)$ mit den Teilchen zu identifizieren, die zu nichtlinearen Objekten gehören, deren Masse größer als $M = 4\pi\bar{\rho}R^3/3$ ist.

Differenziert man (2.10) nach der Masse M und multipliziert diesen Ausdruck mit $2\bar{\rho}/M$, dann erhält man die Anzahl der nichtlinearen Objekte im mitbewegten Volumen dV_c mit Massen im Intervall dM ,

$$N_{\text{halo}}(M, z) dM dV_c = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}}{M} \frac{\delta_{\text{crit}}(z)}{\sigma^2(M)} \left| \frac{d\sigma(M)}{dM} \right| \exp\left(-\frac{\delta_{\text{crit}}^2(z)}{2\sigma^2(M)}\right) dM dV_c. \quad (2.12)$$

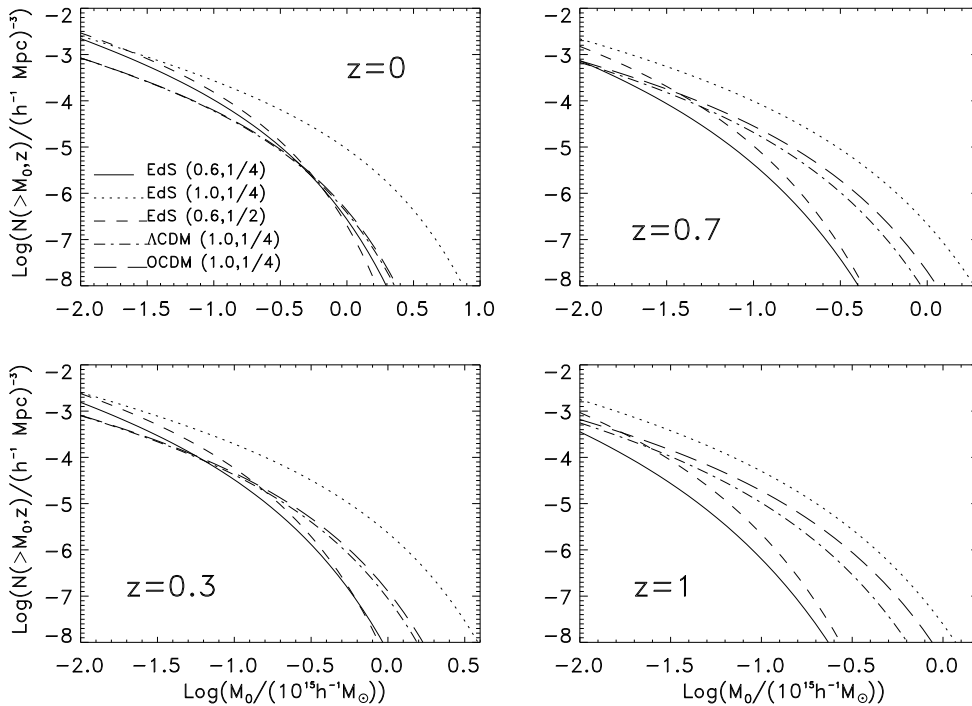
Man nennt (2.12) auch *kosmische Massenfunktion*.

Dividieren wir (2.12) durch dV_C und integrieren von einer unteren Schwelle M_0 über die Masse,

$$N(> M_0, z) = \int_{M_0}^{\infty} dM N_{\text{halo}}(M, z), \quad (2.13)$$

so erhalten wir die Anzahl der Halos pro mitbewegtem Volumen bei der Rotverschiebung z mit Massen größer als M_0 . Die Funktion $N(> M_0, z)$ hängt vom kosmologischen Modell und den Eigenschaften des Powerspektrums ab.

In Figur 2.1 zeigen wir $N(> M_0, z)$ als Funktion der Masse M_0 für die Rotverschiebungen $z = 0, 0.3, 0.7$ und 1 für fünf Kosmologien. Die Figur verdeutlicht, daß die nichtlineare Entwicklung stark vom kosmologischen Modell abhängt.



Figur 2.1: Die Anzahl der Halos pro mitbewegtem Volumen mit einer Masse $> M_0$ (definiert in Gleichung (2.13)) als Funktion von M_0 für die Rotverschiebungen $z = 0, 0.3, 0.7$ und 1 für jeweils fünf Kosmologien, die durch die Linienarten gekennzeichnet sind.

2.2.2 Nicht-Gaußscher Dichtekontrast

Willick (1999) hat eine auf der Poissonverteilung basierende, von einem Parameter λ abhängende, nicht-Gaußsche Wahrscheinlichkeitsverteilung konstruiert. Der Parameter λ reguliert die Abweichung von einer Gaußverteilung. Verwendet man diese Wahrscheinlichkeitsverteilung im P/S-Formalismus, so kann der

Einfluß einer nicht-Gaußschen Verteilungsfunktion auf die räumliche Dichte der Halos studiert werden.

Betrachten wir eine Poissonverteilung mit Erwartungswert λ und diskreter Zufallsvariable n ,

$$P(n = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad (2.14)$$

die die Wahrscheinlichkeit angibt, einen Wert $n = m$ zu finden. Die Dispersion der Verteilung (2.14) ist $\sqrt{\lambda}$. Wir interpretieren n als reelle Zahl und führen eine neue Zufallsvariable $x = (n - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ ein. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von x , die wir mit $\Psi_\lambda(x)$ bezeichnen, ist eine modifizierte Form der Verteilung (2.14), die so verschoben und skaliert ist, daß ihr Mittelwert verschwindet und die Dispersion gleich eins ist. Die explizite Form für $\Psi_\lambda(x)$ ergibt sich, wenn wir in (2.14) $m = \sqrt{\lambda}x + \lambda$ setzen und die so erhaltene Gleichung durch Multiplikation mit $\sqrt{\lambda}$ neu normieren. Die Fakultät im Nenner von (2.14) wird für reelle Zufallsvariable durch die Gammafunktion $\Gamma(\cdot)$ ersetzt. Man erhält auf diese Weise

$$\Psi_\lambda(x) = \frac{\lambda^{\sqrt{\lambda}x + \lambda + 0.5} e^{-\lambda}}{\Gamma(\sqrt{\lambda}x + \lambda + 1)}. \quad (2.15)$$

Die Funktion (2.15) ist für $x > -(\sqrt{\lambda} + 1/\sqrt{\lambda})$ definiert. Die Verteilung (2.15) weicht für kleine λ beträchtlich von einer Gaußverteilung ab, und nähert sich dieser für wachsende λ (siehe Figur 2.2). Die nicht-Gaußsche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat im Vergleich zu einer Gaußverteilung einen zu positiven Werten hin ausgedehnten Flügel. Deshalb treten die seltenen Ereignisse (die wir mit massereichen Objekten identifizieren) mit höherer Wahrscheinlichkeit als in einer Gaußverteilung auf. Wir erwarten somit eine größere Anzahl von Halos für einen nicht-Gaußschen Dichtekontrast.

Wenn wir die Statistik des Dichtekontrasts durch (2.15) festlegen,

$$P(\delta_R) = \sigma^{-1}(R) \Psi_\lambda\left(\frac{\delta_R}{\sigma(R)}\right), \quad (2.16)$$

dann führen uns die gleichen Argumente wie im Abschnitt 2.2.1 auf die folgende, modifizierte Form der kosmischen Massenfunktion,

$$N_{\text{halo}}^\lambda(M, z) dM dV_c = \frac{2\bar{\rho}f_\Psi}{M} \frac{\delta_{\text{crit}}(z)}{\sigma^2(M)} \left| \frac{d\sigma(M)}{dM} \right| \Psi_\lambda\left(\frac{\delta_{\text{crit}}(z)}{\sigma(M)}\right) dM dV_c, \quad (2.17)$$

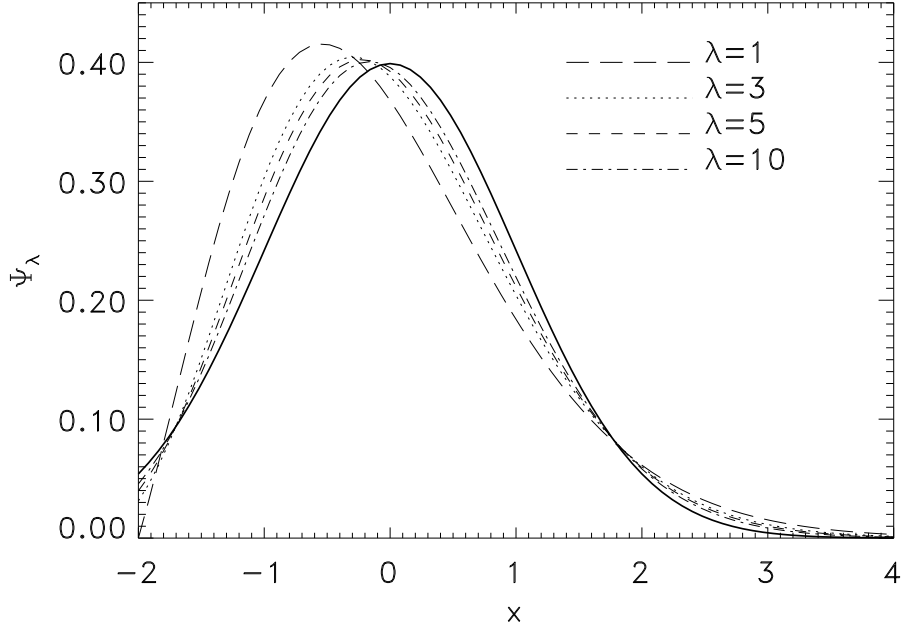
wobei der Faktor f_Ψ durch

$$f_\Psi = \left[2 \int_0^\infty dx \Psi_\lambda(x) \right]^{-1} \quad (2.18)$$

gegeben ist.

Die Berechnung der Massenfunktion (2.17) erfordert die Spezifizierung der von Ω_0 abhängenden Normierung σ_8 des Powerspektrums für nicht-Gaußsche Dichtefelder.

Borgani et al. (1999) haben die Anzahldichte massereicher Galaxienhaufen mit Rotverschiebung $z \lesssim 0.1$ aus Beobachtung der Röntgenstrahlung von Galaxienhaufen bestimmt (siehe Rosati et al. 1995 und Rosati et al. 1998). Fordert



Figur 2.2: Die normierte Wahrscheinlichkeitsdichte (2.15) für $\lambda = 1, 3, 5$ und 10 im Vergleich mit einer Gaußschen Verteilungsfunktion, die durch die durchgezogene Linie gekennzeichnet ist. Mit abnehmendem λ , d.h. mit zunehmender Abweichung von einer Gaußverteilung, verstärkt sich die Ausprägung des asymmetrischen Flügels zu großen positiven Werten hin.

man, daß die P/S Theorie die beobachtete Anzahlldichte von Galaxienhaufen für verschiedene Ω_0 reproduzieren soll, ergibt sich folgende Fitformel für die $\sigma_8 - \Omega_0$ Relation,

$$\sigma_8 = (0.58 \pm 0.06)\Omega_0^{(-0.47+0.16\Omega_0)}, \quad (2.19)$$

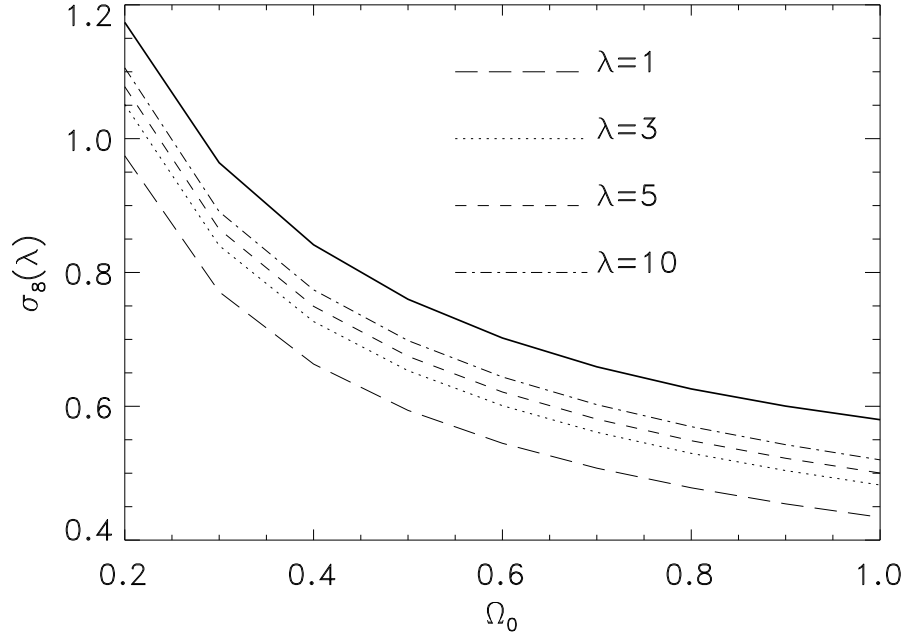
(siehe Figur 2.3, durchgezogene Linie).

Die Herleitung der Relation (2.19) beruht auf einem Gaußschen Dichtekontrast. Für nicht-Gaußsche Dichtefelder erwartet man einen anderen Zusammenhang zwischen σ_8 und Ω_0 .

Diese Funktion kann man berechnen, indem man fordert, daß sich die bekannte Häufigkeit von Galaxienhaufen mit der Masse $M \sim 6 \times 10^{14} h^{-1} M_\odot$ bei der Rotverschiebung $z = 0$ für endliche λ auch aus der modifizierten Massenfunktion (2.17) ergeben muß (siehe Willick 1999).

In Figur 2.3 zeigen wir für die Parameter $\lambda = 1, 3, 5$ und 10 die auf diese Weise berechnete, modifizierte $\sigma_8 - \Omega_0$ Relation. Verglichen mit der Relation (2.19) sinkt die Normierung im Falle nicht Gaußscher Dichtefelder für ein gegebenes Ω_0 für kleiner werdende λ .

In Figur 2.4 vergleichen wir die Anzahl der Halos pro mitbewegtem Volumen bei der Rotverschiebung z in zwei räumlich flachen Modellen, die man aus der

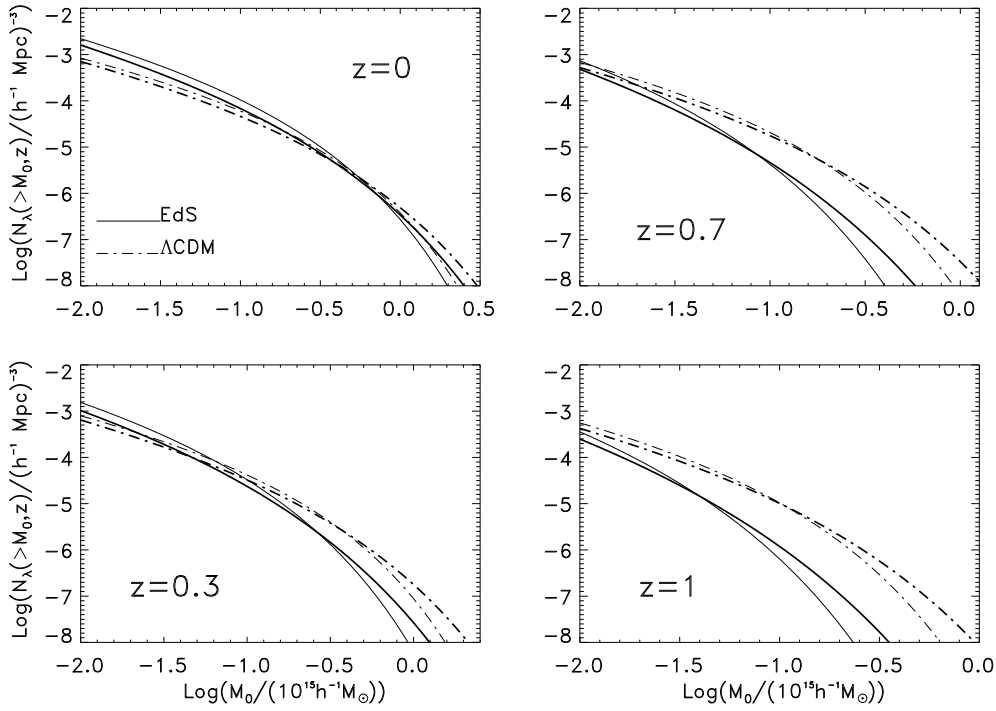


Figur 2.3: Die $\sigma_8 - \Omega_0$ Beziehung für die Verteilungsfunktion (2.15) für $\lambda = 1, 3, 5$ und 10 berechnet entsprechend des im Text beschriebenen Verfahrens. Die durchgezogene Linie ist mit der auf einer Gaußverteilung beruhenden Gleichung (2.19) berechnet worden. Das kosmologische Modell ist durch $\Gamma = 0.25$ und $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$ spezifiziert.

P/S-Theorie (siehe (2.13)) und ihrer Modifikation erhält. Die (2.13) entsprechende Funktion im modifizierten P/S-Formalismus, $N_\lambda(> M_0, z)$, erhält man, indem man die Massenfunktion (2.12) in Gleichung (2.13) durch die modifizierte Massenfunktion (2.17) ersetzt. Wie man von Figur 2.2 erwartet, erhalten wir für den nicht-Gaußschen Dichtekontrast mehr massereiche Halos für alle Rotverschiebungen.

2.3 Das Navarro-Frenk-White-Massenprofil

Navarro et al. (1996) (NFW) (siehe auch Navarro et al. 1997) haben Halos in N -Körper Simulationen bei der Rotverschiebung $z = 0$ identifiziert und deren gesamte Entwicklung erneut mit erhöhter Massenauflösung verfolgt. Die Messung der numerisch erzeugten, sphärisch gemittelten Massendichte hat ergeben, daß das Massenprofil von Halos mit Massen im Intervall $3 \times 10^{11} M_\odot \leq M \leq 10^{15} M_\odot$ durch eine einfache, universelle Fitformel beschrieben werden kann, deren Form unabhängig vom Powerspektrum des Dichtefeldes und den kosmologischen Parametern ist. Die von *einem* Fitparameter, der charakteristischen Dichte δ_c ,



Figur 2.4: Wir vergleichen die Anzahl der Halos pro mitbewegtem Volumen mit einer Masse $> M_0$ als Funktion von M_0 für einen Gaußschen Dichtekontrast (dünne Linien) mit einem nicht-Gaußschen (dicke Linien) für die Rotverschiebungen $z = 0, 0.3, 0.7$ und 1 für jeweils zwei Kosmologien, die durch die Linienarten gekennzeichnet sind. Das EdS-Modell ist durch $\Omega_0 = 1, \Omega_\Lambda = 0$ und $\Gamma = 0.25$ spezifiziert und das Λ CDM-Modell ist durch die Parameter $\Omega_0 = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$ und $\Gamma = 0.25$ festgelegt. Die Normierung im Falle des Gaußschen Dichtekontrasts wird mit (2.19) berechnet. Für nicht-Gaußsche Dichtefelder bestimmen wir die Normierung mit der in Figur 2.3 gezeigten Funktion $\sigma_8(\lambda)$. Die nicht-Gaußsche Verteilungsfunktion ist durch $\lambda = 1$ festgelegt.

abhängende Fitformel ist durch

$$\varrho(r) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} (1+z)^3 \frac{\Omega_0}{\Omega(z)} \frac{\delta_c}{r/r_s(1+r/r_s)^2} \quad (2.20)$$

gegeben. Die von der Rotverschiebung abhängende Dichte $\Omega(z)$ ist durch Gleichung (1.13) bestimmt. Die Masse M_{200} (im Rest der Arbeit kurz M) eines Halos wird üblicherweise durch den Virialradius r_{200} einer Sphäre definiert, die eine Überdichte von $200 \times \varrho_{\text{crit}}$ enthält. Der Faktor 200 ergibt sich aus der sphärischen Kollapstheorie. In dieser Theorie wird gezeigt, daß ein virialisierendes Objekt eine Dichte hat, deren Betrag 200 mal der Dichte des Universums zur Kollapszeit t_{coll} ist (siehe z.B. Padmanabhan 1995). Die Konzentration c eines Halos ist als Verhältnis des Virialradius r_{200} zum Skalenradius r_s definiert. Somit ist der Skalenradius durch $r_s = r_{200}/c$ gegeben. c ist eine Funktion der charakteristischen Dichte.

δ_c nimmt in allen von NFW betrachteten Kosmologien mit wachsender Halomasse ab. Diese Tatsache ist eine natürliche Folge der hierarchischen Strukturentwicklung - weniger massereiche Objekte kollabieren früher und haben deshalb eine höhere Dichte. Ausgehend von diesem Modell der Strukturentwicklung kann man ein Modell entwickeln, das die Massenabhängigkeit von δ_c erklärt. In dem Modell wird jedem Halo, der bei der Rotverschiebung z identifiziert wurde, eine Kollapsrotverschiebung z_{coll} zugeordnet. z_{coll} wird als der Zeitpunkt definiert, wenn die Hälfte der Halomasse in Materieklumpen enthalten ist, die massereicher sind als ein Teil f der Halomasse zum Zeitpunkt z . Diese Definition von z_{coll} führt im Rahmen des von Lacey & Cole (1993) erweiterten P/S-Modells, in dem die zeitliche Entwicklung eines Halos analytisch beschrieben wird, auf die folgende Gleichung für die Kollapsrotverschiebung,

$$\text{erfc} \left[\frac{\delta_{\text{crit}}(z_{\text{coll}}) - \delta_{\text{crit}}(z)}{\sqrt{2(\sigma^2(fM) - \sigma^2(M))}} \right] = \frac{1}{2}, \quad (2.21)$$

wobei $\text{erfc}[\cdot]$ die komplementäre Fehlerfunktion ist. Die lineare mittlere quadratische Dichtefluktuation $\sigma(M)$ berechnen wir mit der Formel (A.7) und der kritische Dichtekontrast $\delta_{\text{crit}}(z)$ wurde in Gleichung (2.11) definiert.

Um die charakteristische Dichte eines Halos der Masse M und der Rotverschiebung z zu berechnen, nehmen NFW an, daß $\delta_c(M, z)$ proportional zur Dichte des Universums bei der Rotverschiebung z_{coll} ist,

$$\delta_c(M, z) = C(f) \Omega(z) \left[\frac{1 + z_{\text{coll}}(M, f)}{1 + z} \right]^3. \quad (2.22)$$

z_{coll} hängt entsprechend (2.21) von der Masse des Halos und der Konstanten f ab. Die Proportionalitätskonstante $C(f)$ wird von NFW so bestimmt, daß die in den Simulationen gemessene Massendichte durch (2.20) approximiert werden kann.

Die Rotverschiebung z_{coll} kann iterativ aus (2.21) bestimmt werden. Da $\text{erfc}[0.477]=0.5$ gilt, erhalten wir folgende Gleichung,

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{\text{crit}}(z_{\text{coll}})}{\delta_{\text{crit}}(z)} &= \frac{\delta_{\text{crit}}^0(\Omega(z_{\text{coll}}), \Omega_\Lambda) D_+(z, \Omega_0, \Omega_\Lambda)}{\delta_{\text{crit}}^0(\Omega(z), \Omega_\Lambda) D_+(z_{\text{coll}}, \Omega_0, \Omega_\Lambda)} \\ &= 1 + \frac{0.477}{\delta_{\text{crit}}(z)} \sqrt{2[\sigma^2(fM) - \sigma^2(M)]}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Setzen wir die aus (2.23) bestimmte Kollapsrotverschiebung in (2.22) ein, so können wir die Massendichte (2.20) für einen Halo der Masse M , der bei der Rotverschiebung z identifiziert wurde, berechnen. Zur Berechnung der Massendichte verwenden wir die von NFW empfohlenen Werte $C = 3410$ und $f = 0.01$, da diese am besten die numerischen Ergebnisse reproduzieren.

Die Berechnung der charakteristischen Dichte eines Halos hängt von den kosmologischen Parametern und den Eigenschaften des Powerspektrums ab.

Kapitel 3

Schwache kosmische Scherung

Die kosmische Scherung beschreibt den integrierten Gravitationslinseneffekt von Masseninhomogenitäten entlang einer Sichtlinie auf eine Population von Hintergrundgalaxien. In der vorliegenden Arbeit werden nur schwache Gravitationsfelder betrachtet, die keine starken Linseneffekte, wie stark verzerrte Bilder von Hintergrundgalaxien oder Mehrfachbilder von Quellen erzeugen können. Der Einfluß schwacher Gravitationsfelder zeigt sich in einer kleinen Änderung der Form einer Hintergrundgalaxie. Da die Verzerrungen der Galaxienbilder sehr klein sind und die intrinsische Form einer Quelle nicht bekannt ist, muß man eine große Anzahl von Hintergrundgalaxien mit einer intrinsischen Elliptizitätsverteilung betrachten. Der schwache Gravitationslinseneffekt manifestiert sich dann als Netto-Elliptizität in der als zufällig angenommenen Quellenelliptizitätsverteilung.

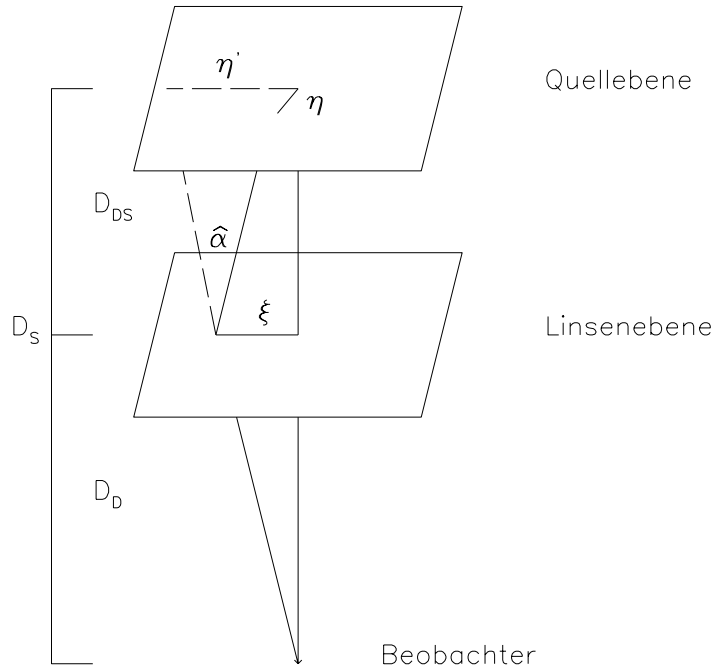
Wir werden in diesem Kapitel kurz den schwachen Linseneffekt, den *eine* Gravitationslinse verursacht, beschreiben und dann zeigen, wie man die erhaltenen Relationen auf eine kosmologische Materieverteilung verallgemeinern kann. Eine umfassende und strenge Darstellung der Gravitationslinsentheorie findet man in Schneider et al. (1992), Narayan & Bartelmann (1997) und Bartelmann & Schneider (1999b).

3.1 Der schwache Gravitationslinseneffekt

Eine einzelne Gravitationslinse (z.B. ein Galaxienhaufen) wird durch ihre in eine Ebene projizierte Massenverteilung beschrieben. Diese Näherung der Linse durch eine Linsenebene ist gerechtfertigt durch die im Vergleich zur Entfernung der Linse vom Beobachter kleine Ausdehnung der Linse. Die durch Projektion der dreidimensionalen Massenverteilung erhaltene Oberflächenmassendichte $\Sigma(\vartheta)$, wobei ϑ die Winkelcoordinate in der Linsenebene ist, wird üblicherweise durch Skalierung mit der kritischen Oberflächenmassendichte Σ_{crit} in einer dimensionslosen Form angegeben,

$$\kappa(\vartheta) = \frac{\Sigma(\vartheta)}{\Sigma_{\text{crit}}}, \quad \Sigma_{\text{crit}} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{\text{ds}}}. \quad (3.1)$$

Man nennt die dimensionslose Oberflächenmassendichte κ auch *Konvergenz*. In (3.1) bezeichnen D_s, D_d und D_{ds} die in Kapitel 1 eingeführten Winkelentfer-



Figur 3.1: Ein aus Beobachter, Linsen- und Quellenebene bestehendes Gravitationslinsensystem. Lichtstrahlen, die von einer Quelle mit der Position η ausgesendet werden, erfahren durch die Massenverteilung in der Linsenebene eine Ablenkung um den Winkel $\hat{\alpha}$. Ein Beobachter nimmt die Quelle an der scheinbaren Position ξ am Himmel wahr (die Figur ist aus Erben 1997).

nungen zur Quelle (source), zur Linse (deflector) und von der Linse zur Quelle. Entsprechend der Definition der Winkelentfernungen hängt die Konvergenz von den Rotverschiebungen der Linse und der Quelle, sowie von den kosmologischen Parametern ab.

Die *Linsengleichung* beschreibt den Zusammenhang zwischen der Position η einer Quelle in der Quellenebene und der scheinbaren, durch den Linseneffekt erzeugten Position ξ in der Linsenebene. Die Linsengleichung erhält man aus der geometrischen Anordnung eines aus Beobachter, Linsen- und Quellenebene bestehenden Gravitationslinsensystems (siehe Figur 3.1). Aus dem Strahlensatz ergibt sich die Linsengleichung,

$$\eta = \frac{D_s}{D_d} \xi - D_{ds} \hat{\alpha}(\xi), \quad (3.2)$$

die eine Abbildung von der Linsen- in die Quellenebene darstellt. Wenn man die skalierten Größen $\beta = \eta/D_s$, $\vartheta = \xi/D_d$ und $\alpha(\vartheta) = D_{ds}\hat{\alpha}(\xi(\vartheta))/D_s$ einführt,

kann die Linsengleichung in dimensionslosen Winkelkoordinaten geschrieben werden,

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\vartheta}). \quad (3.3)$$

Der skalierte Ablenkswinkel $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\vartheta})$ ist durch die Konvergenz bestimmt,

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}^2} d^2\vartheta' \kappa(\boldsymbol{\vartheta}') \frac{\boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\vartheta}'}{|\boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\vartheta}'|^2}. \quad (3.4)$$

Lokale Eigenschaften einer Gravitationslinse können durch ein Skalarpotential

$$\psi(\boldsymbol{\vartheta}) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}^2} d^2\vartheta' \kappa(\boldsymbol{\vartheta}') \ln|\boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\vartheta}'| \quad (3.5)$$

beschrieben werden, das dem Gravitationspotential der Oberflächenmassendichte entspricht. Der Ablenkswinkel folgt aus (3.5) durch Gradientenbildung, $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\vartheta}) = \nabla\psi(\boldsymbol{\vartheta})$. Aus dem Skalarpotential (3.5) kann man durch Differentiation die beiden grundlegenden Größen der Linsentheorie, die Konvergenz und die komplexe *Scherung* γ , herleiten,

$$\kappa(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{1}{2}(\psi_{,11} + \psi_{,22}) \quad (3.6)$$

und

$$\gamma_1(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{1}{2}(\psi_{,11} - \psi_{,22}), \quad \gamma_2(\boldsymbol{\vartheta}) = \psi_{,12} = \psi_{,21}, \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2. \quad (3.7)$$

$\psi_{,ij}$, $i, j = 1, 2$, bezeichnet die zweiten Ableitungen des Skalarpotentials nach der Winkelkoordinate $\boldsymbol{\vartheta}$.

Lokale Eigenschaften der Linsengleichung sind durch die Jacobimatrix

$$A(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial\boldsymbol{\vartheta}} \quad (3.8)$$

der Abbildung (3.3) gegeben. Die Jacobimatrix (3.8) kann mit den Gleichungen (3.4) - (3.7) durch die Konvergenz und die Scherung ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\vartheta}) &= \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \\ &= (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - |\gamma| \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei wir die Darstellung $\gamma = |\gamma|e^{i2\phi}$ verwendet haben. Die Schreibweise (3.9) der Jacobimatrix macht die Bedeutung der Wortwahl für κ (Konvergenz) und γ (Scherung) klar. Wenn man eine kreisförmige Quelle betrachtet, dann fokussiert die Konvergenz Lichtstrahlen isotrop, was zu einer Vergrößerung des Kreisradius führt. Die Scherung, die eine Anisotropie in die lokale Linsenabbildung einführt, deformiert den Kreis proportional zum Betrag $|\gamma|$ in der Richtung ϕ in eine Ellipse.

Wenn die Scherung und die Konvergenz sehr klein sind, $\kappa \ll 1$, $|\gamma| \ll 1$, sprechen wir vom *schwachen Gravitationslinseneffekt*. Wie schon erwähnt, besteht die Wirkung des schwachen Linseneffektes in einer kleinen Verzerrung des

Bildes einer Hintergrundgalaxie. Um diese Verzerrung messen zu können, muß man die geometrische Gestalt des Bildes quantifizieren. Wir benutzen hier die durch die zweiten Momente des Oberflächenhelligkeitstensors definierte komplexe Elliptizität, um die Form der Bilder der Galaxien zu beschreiben (siehe z.B. Tyson et al. 1990 und Kaiser & Squires 1993).

Sei $I(\vartheta)$ die Oberflächenhelligkeit eines Galaxienbildes an der Stelle ϑ . Wir nehmen an, daß die Galaxienbilder isoliert sind, so daß wir $I(\vartheta)$ in großen Abständen vom Zentrum des Bildes

$$\bar{\vartheta} := \frac{\int d^2\vartheta q_I[I(\vartheta)] \vartheta}{\int d^2\vartheta q_I[I(\vartheta)]} \quad (3.10)$$

messen können. $q_I[I(\vartheta)]$ ist eine frei wählbare Filterfunktion. Definieren wir z.B. $q_I[I(\vartheta)] = H(I - I_{\text{th}})$, wobei H die Heavisidsche Treppenfunktion ist, dann ist $\bar{\vartheta}$ das Zentrum des Gebietes, das durch die begrenzende Isophote $I = I_{\text{th}}$ umschlossen wird. Wenn die Filterfunktion fixiert ist, kann man den Oberflächenhelligkeitstensor

$$Q_{ij} = \frac{\int d^2\vartheta q_I[I(\vartheta)](\vartheta_i - \bar{\vartheta}_i)(\vartheta_j - \bar{\vartheta}_j)}{\int d^2\vartheta q_I[I(\vartheta)]}, \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad (3.11)$$

definieren. Die Größe eines Bildes kann mittels der zwei Invarianten des symmetrischen Tensors (3.11) beschrieben werden. Definieren wir die Größe durch

$$\omega = (Q_{11} Q_{22} - Q_{12}^2)^{1/2}, \quad (3.12)$$

dann ist die Fläche des Bildes proportional zum Raumwinkel, der von der begrenzenden Isophoten umschlossen wird, wenn $q_I[I(\vartheta)]$ eine Treppenfunktion ist. Die Form eines Bildes quantifizieren wir durch den komplexen Elliptizitätsparameter

$$\epsilon = \frac{Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12}}{Q_{11} + Q_{22} + 2(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2)^{1/2}} \quad (3.13)$$

von Schneider (1995) und Seitz & Schneider (1997), der für Quellen mit elliptischen Isophoten mit Achsenverhältnis $r \leq 1$ so definiert ist, daß der Betrag der komplexen Quellenelliptizitäten ϵ durch $|\epsilon| = (1 - r)/(1 + r)$ und der Phasenwinkel durch den doppelten Ortswinkel der Hauptachse gegeben ist. Für nicht kritische Linsen ist die komplexe Bildelliptizität ϵ durch die intrinsischen Quellenelliptizitäten $\epsilon^{(s)}$ und die *reduzierte Scherung* $g = \gamma/(1 - \kappa)$ bestimmt (siehe Seitz & Schneider 1997),

$$\epsilon = \frac{\epsilon^{(s)} + g}{1 + g^* \epsilon^{(s)}}. \quad (3.14)$$

Wir nehmen im Folgenden an, daß der Betrag der intrinsischen Elliptizitäten aus der Verteilung

$$p_s(|\epsilon^{(s)}|) = \frac{1}{\pi\sigma_\epsilon^2 [1 - \exp(-\sigma_\epsilon^{-2})]} \exp\left(-\frac{|\epsilon^{(s)}|^2}{\sigma_\epsilon^2}\right) \quad (3.15)$$

bestimmt werden kann, wobei σ_ϵ die Dispersion der intrinsischen Elliptizitätsverteilung ist. Der Phasenwinkel der Elliptizität wird zufällig gewählt. Da die

Verteilung (3.15) $\langle \epsilon^{(s)} \rangle = 0$ impliziert, ergibt sich für schwache Linseneffekte, d.h. $g \approx \gamma$, folgende Gleichung für die mit der Elliptizitätsverteilung der Quellen gemittelte komplexe Elliptizität (siehe Schramm & Kayser 1995 und Seitz & Schneider 1997),

$$\langle \epsilon \rangle \approx \gamma. \quad (3.16)$$

Entsprechend Gleichung (3.16) ist $\langle \epsilon \rangle$ die Netto-Elliptizität der Bilder einer Population von Hintergrundgalaxien mit verschwindender mittlerer intrinsischer Elliptizität, die durch den schwachen Gravitationslinseneffekt erzeugt wurde.

3.2 Lichtausbreitung in einem schwach inhomogenen Universum

Die Lichtausbreitung in schwach inhomogenen Universen ist von vielen Autoren untersucht worden (siehe z.B. Blandford et al. 1991 und Seitz et al. 1994). Wir werden hier der Notation von Bartelmann & Schneider (1999b) folgen.

Wir betrachten ein Bündel von Lichtstrahlen, dessen geometrischer Querschnitt auf dem Weg von der Quelle zum Beobachter von kleinen Materieinhomogenitäten durch den schwachen Linseneffekt verzerrt wird. Wählen wir innerhalb des Bündels einen Referenzstrahl, dann kann der Ort der sich beim Beobachter schneidenden Lichtstrahlen durch ihren Winkel ϑ zum Referenzstrahl beschrieben werden. Wenn $\mathbf{x}(\vartheta, w)$ die transversale mitbewegte Entfernung eines Strahls vom Referenzstrahl in der radialen mitbewegten Entfernung w vom Beobachter ist, dann wird die lokale Änderung der Form des Bündels durch eine Bewegungsgleichung für $\mathbf{x}(\vartheta, w)$ beschrieben. Physikalisch ist die Ausbreitung des Bündels durch die homogene, isotrope Hintergrundgeometrie und die Stärke der Materieinhomogenitäten, die durch ihr Gravitationspotential $\Phi(\mathbf{x}(\vartheta, w), w)$ gegeben ist, determiniert.

Um eine Bewegungsgleichung für $\mathbf{x}(\vartheta, w)$ zu erhalten, betrachtet man die Ausbreitung von Lichtstrahlen in einem homogenen und schwach inhomogenen Universum getrennt. Die Kombination der beiden so erhaltenen Bewegungsgleichungen berücksichtigt sowohl den Einfluß der Krümmung des Hintergrundmodells als auch Störungen durch kleine Masseneinhomogenitäten.

In einer allgemeinen Raum-Zeit wird die Ausbreitung von Lichtstrahlen durch die Geodätengleichung bestimmt. Aus dieser folgt die Bewegungsgleichung für die transversale physikalische Entfernung $\boldsymbol{\xi}$ zweier Lichtstrahlen in einem dünnen Bündel,

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\xi}}{d\lambda^2} = \mathbf{T} \boldsymbol{\xi}, \quad (3.17)$$

wobei λ der affine Parameter und \mathbf{T} die optische Gezeitenmatrix ist. Die Matrix \mathbf{T} ist durch den Ricci-Tensor und den Krümmungstensor von Weyl bestimmt (siehe Seitz et al. 1994). Sie beschreibt die lokale Änderung der Form des Querschnitts eines Strahlenbündels. Ähnlich wie die Jacobimatrix der Linsenabbildung kann \mathbf{T} in zwei Anteile zerlegt werden, die isotrope und anisotrope Änderungen des Querschnitts verursachen (siehe Seitz et al. 1994). Spezialisieren wir (3.17) auf das in Kapitel 1 eingeführte Hintergrundmodell, d.h. berechnen wir

die Matrix \mathbf{T} mit der in Abschnitt 1.1 festgelegten Metrik, und transformieren den affinen Parameter auf die mitbewegte Entfernung w , erhalten wir aus (3.17) folgende durch die räumliche Krümmung K festgelegte Bewegungsgleichung für $\mathbf{x}(\vartheta, w) = a^{-1} \boldsymbol{\xi}(\vartheta, w)$,

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dw^2} + K \mathbf{x} = 0. \quad (3.18)$$

Die Lösung von (3.18) ist durch die mitbewegte Winkelentfernung $f_K(w)$ (siehe Kapitel 1) gegeben, $\mathbf{x}(\vartheta, w) = f_K(w) \boldsymbol{\vartheta}$.

Um das inhomogene Universum zu beschreiben, betrachten wir kleine Inhomogenitäten, $|\Phi| \ll 1$, die sich mit Geschwindigkeiten $|\mathbf{v}| \ll c$ bewegen und deren Gravitationspotential sich auf Skalen ändert, die klein sind im Vergleich zur Krümmungsskala des Hintergrundmodells. Lokal ist unter diesen Annahmen die erste Ordnung der post-Newtonschen Näherung der Minkowski-Metrik gültig (siehe z.B. Misner et al. 1973),

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dl^2, \quad (3.19)$$

wobei dl eine euklidische räumliche Metrik beschreibt. Die gesuchte Bewegungsgleichung für $\mathbf{x}(\vartheta, w)$ ergibt sich nun aus der Gültigkeit des Prinzips von Fermat, welches das Verschwinden der Variation des optischen Lichtweges $\int dl n$ fordert, wobei $n = 1 - 2\Phi/c^2$ der einer Inhomogenität zugeordnete, lokale Brechungsindex ist, der aus (3.19) folgt. Wir erhalten

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dw^2} = -\frac{2}{c^2} \nabla_{\perp} \Phi, \quad (3.20)$$

wobei ∇_{\perp} Differentiation bzgl. der Komponenten von \mathbf{x} bedeutet.

Die lokale Ablenkung eines Lichtstrahls in einem schwach inhomogenen Universum ergibt sich aus der Kombination der Differentialgleichungen (3.18) und (3.20),

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dw^2} + K \mathbf{x} = -\frac{2}{c^2} \nabla_{\perp} \Phi, \quad (3.21)$$

wobei wir annehmen, daß $w(\lambda)$ in einem inhomogenen Universum die gleiche Form wie in einem homogenen, isotropen Modell hat.

Eine formale Lösung von (3.21) ist durch

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\vartheta, w) &= f_K(w) \boldsymbol{\vartheta} \\ &- \frac{2}{c^2} \int_0^w dw' f_K(w-w') (\nabla_{\perp} \Phi[\mathbf{x}(\boldsymbol{\vartheta}, w'), w'] - \nabla_{\perp} \Phi[\mathbf{x}(\mathbf{0}, w'), w']) \end{aligned} \quad (3.22)$$

gegeben (siehe z.B. Bartelmann & Schneider 1999b).

Eine Quelle mit dem radialen Abstand w vom Beobachter und der mitbewegten Entfernung \mathbf{x} vom Referenzstrahl hat ohne Lichtablenkung die Winkelposition $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{x}/f_K(w)$. Ähnlich zu dem Vorgehen in Abschnitt (3.1) können wir den *schwachen kosmologischen Linseneffekt* durch die Jacobimatrix

$$\mathbf{A}(\vartheta, w) = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} = \frac{1}{f_K(w)} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \quad (3.23)$$

der Abbildung (3.22) beschreiben. Deren Elemente sind durch Differentiation von (3.22) gegeben,

$$A_{ij}(\boldsymbol{\vartheta}, w) = \delta_{ij} - \frac{2}{c^2} \int_0^w dw' \frac{f_K(w-w')f_K(w')}{f_K(w)} \Phi_{,ik}[\mathbf{x}(\boldsymbol{\vartheta}, w'), w'] A_{kj}(\boldsymbol{\vartheta}, w'). \quad (3.24)$$

Die Gleichungen (3.24) und (3.23) sind nicht explizit lösbar, da die rechte Seite von (3.24) von der Lösung abhängt.

Da wir nur schwache Gravitationsfelder betrachten, können wir die Lösung nach Φ entwickeln, $\mathbf{x}(\boldsymbol{\vartheta}, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{x}^{(n)}(\boldsymbol{\vartheta}, w)$, wobei $\mathbf{x}^{(n)}$ durch die n -te Potenz von Φ bestimmt ist. Entwickeln wir \mathbf{A} in ähnlicher Weise und berücksichtigen nur Terme die linear in Φ sind, so erhalten wir

$$A_{ij}(\boldsymbol{\vartheta}, w) = \delta_{ij} - \frac{2}{c^2} \int_0^w dw' \frac{f_K(w-w')f_K(w')}{f_K(w)} \Phi_{,ij}[f_K(w')\boldsymbol{\vartheta}, w']. \quad (3.25)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\boldsymbol{\vartheta}, w) &= f_K(w) \boldsymbol{\vartheta} \\ &- \frac{2}{c^2} \int_0^w dw' f_K(w-w') (\nabla_{\perp} \Phi[f_K(w')\boldsymbol{\vartheta}, w'] - \nabla_{\perp} \Phi[\mathbf{x}(\mathbf{0}, w'), w']). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Diese Näherung entspricht der Integration der zweiten Ableitungen des Potentials entlang des ungestörten Lichtstrahls.

Da die A_{ij} symmetrisch sind, können wir ein Skalarpotential

$$\Psi(\boldsymbol{\vartheta}, w) = \frac{2}{c^2} \int_0^w dw' \frac{f_K(w-w')f_K(w')}{f_K(w)} \Phi[f_K(w')\boldsymbol{\vartheta}, w'] \quad (3.27)$$

definieren, $A_{ij} = \delta_{ij} - \Psi_{,ij}$, mit dem man wie im Abschnitt 3.1 die Konvergenz und Scherung durch die zweiten Ableitungen von (3.27) definieren kann. Wir nennen die auf diese Weise berechnete Konvergenz *effektive Konvergenz*, κ_{eff} , da sie durch Projektion einer kontinuierlichen Massenverteilung zwischen dem Beobachter und der Quelle bestimmt ist. κ_{eff} ist die Größe, die durch die Messung der kosmischen Scherung bestimmt werden kann. Mit der dreidimensionalen Poisson Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = \frac{3H_0^2 \Omega_0}{2a} \delta, \quad (3.28)$$

die das Fluktuationpotential Φ und den in Kapitel 1 definierten Dichtekontrast δ verbindet, kann man die effektive Konvergenz in der Form

$$\kappa_{\text{eff}}(\boldsymbol{\vartheta}, w) = \frac{3H_0^2 \Omega_0}{2c^2} \int_0^w dw' \frac{f_K(w-w')f_K(w')}{f_K(w)} \frac{\delta[f_K(w')\boldsymbol{\vartheta}, w']}{a(w')} \quad (3.29)$$

schreiben, denn in der oben eingeführten Näherung verschwindet das w -Integral über $\Phi_{,33}$. Entsprechend (3.29) ist κ_{eff} der mit einer Kombination von Winkelentfernungen entlang des Referenzstrahls gewichtete Dichtekontrast. w bezeichnet in (3.29) die mitbewegte Entfernung zu den Quellen. Die Quellen können

unterschiedliche, durch eine Verteilungsfunktion $G(w)$ bestimmte, Entfernungen zum Beobachter haben. Für diesen Fall führen wir eine über $G(w)$ gemittelte effektive Konvergenz ein,

$$\bar{\kappa}_{\text{eff}}(\boldsymbol{\vartheta}) = \int_0^{w_{\text{H}}} dw G(w) \kappa_{\text{eff}}(\boldsymbol{\vartheta}, w). \quad (3.30)$$

w_{H} ist die mitbewegte Entfernung zum Horizont, der durch $z_2 = \infty$ in Gleichung (1.16) definiert ist. Setzen wir (3.29) in (3.30) ein und vertauschen die Integrationsgrenzen, so erhalten wir

$$\bar{\kappa}_{\text{eff}}(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{3H_0^2\Omega_0}{2c^2} \int_0^{w_{\text{H}}} dw \bar{W}(w) f_K(w) \frac{\delta[f_K(w)\boldsymbol{\vartheta}, w]}{a(w)}, \quad (3.31)$$

wobei das Fenster $\bar{W}(w)$ durch

$$\bar{W}(w) \equiv \int_w^{w_{\text{H}}} dw' G(w') \frac{f_K(w' - w)}{f_K(w')} \quad (3.32)$$

gegeben ist.

Im Rahmen dieser Arbeit verwenden wir die von Brainerd et al. (1996) eingeführte normierte Verteilungsfunktion

$$p_z(z) = \frac{\beta}{z_0^3 \Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right)} z^2 \exp\left[-\frac{z}{z_0}\right]^\beta \quad (3.33)$$

für die Rotverschiebungen der Quellen, wobei $G(w) dw = p_z(z) dz$ gilt. Die mittlere Rotverschiebung von (3.33) ist proportional zu z_0 und hängt von dem Parameter β ab, der angibt, wie schnell die Verteilung zu höheren Rotverschiebungen hin abfällt. Wir verwenden in dieser Arbeit die Werte $\beta = 1.5$ und $z_0 = 1$. Für diese Parameterwerte ist die mittlere Rotverschiebung durch $\langle z \rangle = 1.505z_0$ gegeben.

3.3 Das Powerspektrum des projizierten Dichtekontrasts

Um die Notation nicht zu überladen, schreiben wir im Folgenden einfach $\kappa(\boldsymbol{\vartheta})$ bzw. $\tilde{\kappa}(\mathbf{s})$ für den gemittelten, effektiven projizierten Dichtekontrast im Orts- bzw. Fourierraum.

Der Dichtekontrast δ ist ein homogenes, isotropes Zufallsfeld mit Powerspektrum $P_\delta(k)$ (siehe Abschnitt 1.2.2). Entsprechend (3.31) ist κ eine lineare Funktion von δ , d.h. der projizierte Dichtekontrast wird auch durch ein homogenes, isotropes Zufallsfeld beschrieben. Wir können somit das Powerspektrum der effektiven Konvergenz als

$$\langle \tilde{\kappa}(\mathbf{s}) \tilde{\kappa}^*(\mathbf{s}') \rangle = (2\pi)^2 \delta_{\text{D}}(\mathbf{s} - \mathbf{s}') P_\kappa(s) \quad (3.34)$$

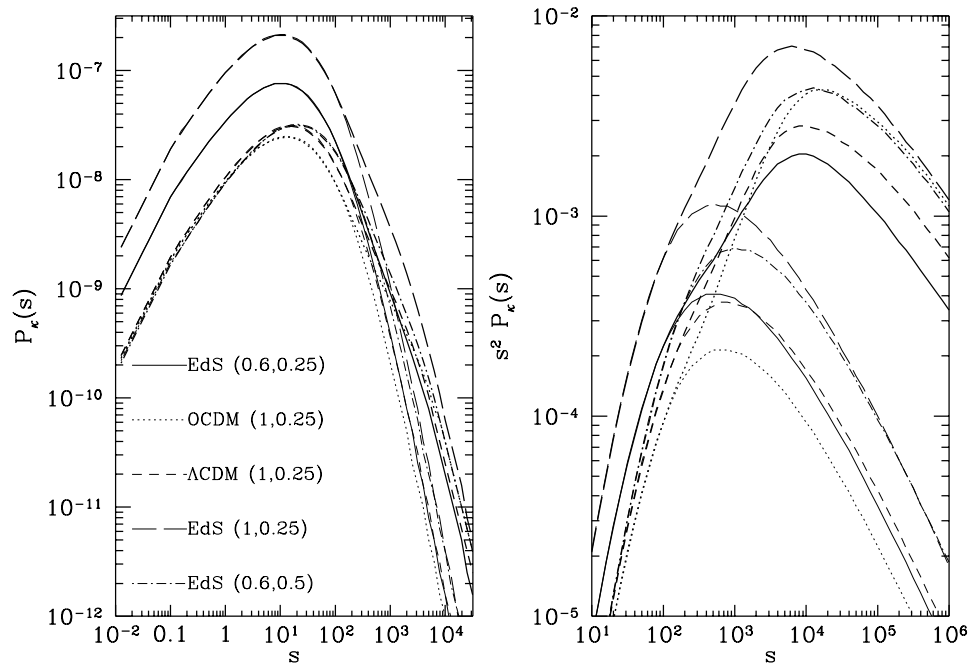
definieren.

In Limber (1953) ist eine Gleichung hergeleitet worden, die die Zweipunkt-korrelationsfunktion eines dreidimensionalen Feldes mit der des projizierten, zweidimensionalen Feldes verknüpft. Kaiser (1992) (siehe auch Kaiser 1998) hat die Gleichung von Limber (1953) im Fourierraum formuliert und auf den Dichtekontrast und seine Projektion angewendet. Das Ergebnis der Berechnungen von Kaiser (1992) ist eine Beziehung zwischen dem Powerspektrum P_δ des Dichtekontrasts und dem Powerspektrum P_κ der effektiven Konvergenz (3.31),

$$P_\kappa(s) = \frac{9}{4} \left(\frac{H_0}{c} \right)^4 \Omega_0^2 \int_0^{w_H} dw \frac{\bar{W}^2(w)}{a^2(w)} P_\delta \left(\frac{s}{f_K(w)}; w \right), \quad (3.35)$$

wobei $\bar{W}(w)$ durch (3.32) gegeben ist. Die Gleichung (3.35) wird unter der Voraussetzung hergeleitet, daß sich das Powerspektrum P_δ nur wenig auf Zeitskalen ändert, die der Lichtlaufzeit über die größten signifikanten Massenfluktuationen entsprechen. Weiterhin wird angenommen, daß die typische Entfernung zu den Quellen viel größer ist als die Skala der größten Massenfluktuationen.

In Figur 3.2 zeigen wir das projizierte Powerspektrum (3.35) für fünf kosmologische Modelle. Das Powerspektrum des Dichtekontrasts haben wir für die lineare und die nichtlineare Evolution des Dichtefeldes berechnet. Dabei haben wir das von Hamilton et al. (1991) eingeführte nichtlineare Powerspektrum in der von Peacock & Dodds (1996) angegebenen Form verwendet. Auf kleinen Winkelskalen, d.h. für große s Werte, erhöht die nichtlineare Evolution die Werte des Powerspektrums.



Figur 3.2: Das in Gleichung (3.35) definierte Powerspektrum des projizierten Dichtekontrasts als Funktion der Wellenzahl für fünf kosmologische Modelle. Die dünnen Kurven wurden mit dem linearen Powerspektrum berechnet. Für die Berechnung der dicken Kurven haben wir das von Peacock & Dodds (1996) angegebene nichtlineare Powerspektrum benutzt.

Kapitel 4

Die Aperturmasse

Die Aperturmasse ist ein statistisches Maß für den schwachen kosmologischen Gravitationslinseneffekt. Sie wurde von Kaiser et al. (1994) und Schneider (1996) als Verallgemeinerung der ζ -Statistik von Kaiser (1995) eingeführt. Die Aperturmasse ist als räumlich gefilterter projizierter Dichtekontrast definiert und kann direkt durch die tangentielle Verzerrung der Bilder von Hintergrundgalaxien gemessen werden. Die Statistik der Aperturmasse enthält Informationen über das Powerspektrum des projizierten Dichtekontrasts und die kosmologischen Parameter. Eine umfassende Darstellung der Eigenschaften der Aperturmasse findet man in Bartelmann & Schneider (1999b).

4.1 Definition

Die Aperturmasse ist als räumlich gefilterter projizierter Dichtekontrast definiert. Wir betrachten eine Apertur mit Radius θ um den Punkt ζ . Führen wir die Filterfunktion U ein, dann ist die Aperturmasse durch

$$M_{\text{ap}}(\zeta) := \int d^2\vartheta \kappa(\vartheta) U(|\vartheta - \zeta|) \quad (4.1)$$

definiert. Der Filter $U(\vartheta)$ ist eine Funktion des radialen Abstands vom Aperturzentrum ζ und verschwindet für $\vartheta > \theta$. Wählen wir eine kompensierte Filterfunktion,

$$\int_0^\theta d\vartheta \vartheta U(\vartheta) = 0, \quad (4.2)$$

dann kann (4.1) durch die tangentielle Scherung $\gamma_t(\xi; \zeta)$ am Ort $\xi + \zeta$ relativ zum Punkt ζ ausgedrückt werden,

$$M_{\text{ap}}(\zeta) = \int d^2\xi \gamma_t(\xi; \zeta) Q(|\xi|), \quad (4.3)$$

wobei

$$\gamma_t(\xi; \zeta) = -\text{Re}(\gamma(\xi + \zeta)e^{-2i\phi}) \quad (4.4)$$

die tangentielle Komponente der Scherung am relativen Ort $\xi = (\xi \cos \phi, \xi \sin \phi)$ ist. Der Zusammenhang zwischen den Filterfunktionen U und Q aus (4.1) und

(4.3) ist durch die Gleichung

$$Q(\vartheta) = \frac{2}{\vartheta^2} \int_0^{\vartheta} d\vartheta' \vartheta' U(\vartheta') - U(\vartheta) \quad (4.5)$$

gegeben, wobei $Q = 0$ für $\vartheta > \theta$ gilt.

In Schneider (1996) wurde ein kompensierter Filter entwickelt, der für den Nachweis von dunklen Massenkonzentrationen optimiert wurde, deren Massenprofil durch eine singuläre isotherme Sphäre beschrieben wird. In dieser Arbeit verwenden wir die einparametrische Familie von Filterfunktionen aus Schneider et al. (1998). Diese ist durch $U(\vartheta) = u(\vartheta/\theta)/\theta^2$ und $Q(\vartheta) = q(\vartheta/\theta)/\theta^2$ gegeben, wobei

$$u(x) = \frac{(l+2)^2}{\pi} (1-x^2)^l \left(\frac{1}{l+2} - x^2 \right) \quad (4.6)$$

und

$$q(x) = \frac{(1+l)(2+l)}{\pi} x^2 (1-x^2)^l, \quad (4.7)$$

$u(x) = 0$ und $q(x) = 0$ für $x > 1$. Die so definierten Filter erfüllen (4.2) und (4.5). Im Rest der Arbeit setzen wir $l = 1$.

4.2 Signal-zu-Rausch-Verhältnis

Die Aperturmasse kann aus Beobachtungsdaten mit den gemessenen tangentialen Elliptizitäten von Hintergrundgalaxien abgeschätzt werden. Einen Schätzer für M_{ap} erhält man aus der diskreten Darstellung der Aperturmasse (4.3). Um den Schätzer zu definieren, betrachten wir N Hintergrundgalaxien. Sei $\boldsymbol{\vartheta}_i + \boldsymbol{\zeta}$, $i \in [1, N]$, die Koordinate der i -ten Hintergrundgalaxie relativ zum Punkt $\boldsymbol{\zeta}$ und ϵ_i ihre Elliptizität. Analog zu (4.4) definieren wir die tangentielle Elliptizität $\epsilon_{ti}(\boldsymbol{\vartheta}_i; \boldsymbol{\zeta})$ der i -ten Galaxie,

$$\epsilon_{ti}(\boldsymbol{\vartheta}_i; \boldsymbol{\zeta}) = -\text{Re} \left(\epsilon_i(\boldsymbol{\vartheta}_i + \boldsymbol{\zeta}) e^{-2i\phi_i} \right), \quad (4.8)$$

wobei ϕ_i der Polarwinkel von $\boldsymbol{\vartheta}_i$ ist.

Das Integral (4.3) kann nun als diskrete Summe über die Galaxien geschrieben werden,

$$M_{\text{ap}}(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{1}{n} \sum_i \epsilon_{ti}(\boldsymbol{\vartheta}_i; \boldsymbol{\zeta}) Q(|\boldsymbol{\vartheta}_i|), \quad (4.9)$$

wobei n die Anzahldichte der Hintergrundgalaxien ist. Der mit der Verteilung (3.15) berechnete Erwartungswert von (4.9) verschwindet ohne Linseneffekt, $\langle M_{\text{ap}} \rangle = 0$. Die diskrete Dispersion σ_{d} von $M_{\text{ap}}(\boldsymbol{\zeta})$ erhalten wir durch quadrieren von (4.9) und anschließender Mittelung mit (3.15). Man erhält

$$\sigma_{\text{d}}^2 = \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{2n^2} \sum_i Q^2(|\boldsymbol{\vartheta}_i|), \quad (4.10)$$

wobei wir benutzt haben, daß die Korrelation der tangentialen Elliptizitäten verschiedener Galaxienbilder verschwindet, $\langle \epsilon_{ti} \epsilon_{tj} \rangle = 0$ für $i \neq j$, da angenommen wird, daß die Orientierungen der Galaxienbilder statistisch unabhängig

sind. σ_ϵ ist die Dispersion der intrinsischen Elliptizitätsverteilung (3.15). Wir setzen $\langle |\epsilon|^2 \rangle = \langle |\epsilon^s|^2 \rangle = \sigma_\epsilon^2$. Der Faktor $1/2$ ergibt sich aus der Tatsache, daß die Dispersion einer Komponente der Elliptizität $1/\sqrt{2}$ mal der Dispersion der komplexen Elliptizität ist, $\langle \epsilon_{ti} \epsilon_{ti} \rangle = \sigma_\epsilon/2$.

Das diskrete Signal-zu-Rausch-Verhältnis (kurz S/R-Verhältnis) am Ort ζ ist durch das Verhältnis von (4.9) zu (4.10) gegeben,

$$S_d(\zeta) \equiv \frac{M_{\text{ap}}(\zeta)}{\sigma_d} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_\epsilon} \frac{\sum_i \epsilon_{ti}(\vartheta_i; \zeta) Q(|\vartheta_i|)}{[\sum_i Q^2(|\vartheta_i|)]^{1/2}}. \quad (4.11)$$

Wenn man (4.10) mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der räumlichen Position der Galaxien mittelt, erhält man die kontinuierliche Dispersion

$$\sigma_c^2(\theta) = \frac{\pi \sigma_\epsilon^2}{n} \int_0^\theta d\vartheta \vartheta Q^2(\vartheta) \quad (4.12)$$

(siehe Schneider 1996). Das Integral (4.12) kann für die durch (4.7) gegebene Filterfunktion Q analytisch berechnet werden. Man erhält, in praktischen Einheiten geschrieben,

$$\sigma_c(\theta) = 0.016 \left(\frac{n}{30 \text{ arcmin}^{-2}} \right)^{-1/2} \left(\frac{\sigma_\epsilon}{0.2} \right) \left(\frac{\theta}{1 \text{ arcmin}} \right)^{-1}. \quad (4.13)$$

Wir benutzen im Rest der Arbeit die Werte $\sigma_\epsilon = 0.2$ und $n = 30$ Galaxien pro Quadratbogenminute. Diese Werte sind aus Beobachtungen gewonnen worden (siehe Brainerd et al. 1996).

Um ein kontinuierliches S/R-Verhältnis zu erhalten, bilden wir den Mittelwert von (4.9) mit der Verteilungsfunktion (3.15). Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir $\zeta = 0$. Man erhält für die Näherung des schwachen Linseneffekts

$$\langle M_{\text{ap}} \rangle_d = \frac{1}{n} \sum_i \gamma_{ti}(\vartheta_i) Q(|\vartheta_i|). \quad (4.14)$$

Mitteln wir $\langle M_{\text{ap}} \rangle_d$ über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der räumlichen Position der Galaxien, erhalten wir

$$\langle M_{\text{ap}} \rangle_c(\theta) = 2\pi \int_0^\theta d\vartheta \vartheta \langle \gamma_t \rangle(\vartheta) Q(\vartheta), \quad (4.15)$$

wobei $\langle \gamma_t \rangle(\vartheta)$ die über den Polarwinkel gemittelte Scherung ist (siehe Schneider 1996). Mit (4.12) und (4.15) definieren wir das kontinuierliche S/R-Verhältnis,

$$S_c(\theta) \equiv \frac{\langle M_{\text{ap}} \rangle_c(\theta)}{\sigma_c(\theta)}. \quad (4.16)$$

4.3 Das NFW-Modell der Aperturmasse

Wir berechnen in diesem Abschnitt die Aperturmasse für ein Halo, dessen Massendichte durch das universelle NFW-Profil (siehe Abschnitt 2.3) beschrieben

wird. Da die Aperturmasse durch die projizierte Massendichte definiert ist, integrieren wir das NFW-Profil (2.20) entlang der Sichtlinie, wobei wir annehmen, daß sich entlang jeder Sichtlinie jeweils nur ein Halo befindet. Wir erhalten so die zweidimensionale, radial symmetrische Oberflächenmassendichte eines Halos (siehe Bartelmann 1996),

$$\Sigma(\vartheta) = \frac{6H_0^2}{8\pi G} (1+z)^3 \frac{\Omega_d}{\Omega(z_d)} r_s \delta_c f\left(\frac{\vartheta}{\theta_s}\right), \quad (4.17)$$

mit

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \begin{cases} 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & : x < 1 \\ 1 - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \operatorname{arctan} \sqrt{\frac{x-1}{1+x}} & : x > 1 \end{cases}. \quad (4.18)$$

$\theta_s = r_s/D_d$ ist der Skalenradius in Winkelkoordinaten. Die Konvergenz, also das Verhältnis von (4.17) zur kritischen Oberflächenmassendichte Σ_{crit} , ergibt sich als

$$\kappa(\vartheta, z_d, z_s) = \frac{\Sigma(\vartheta)}{\Sigma_{\text{cr}}} = \kappa_0 f\left(\frac{\vartheta}{\theta_s}\right), \quad (4.19)$$

wobei

$$\kappa_0 = 3 (1+z)^3 \frac{\Omega_d}{\Omega(z_d)} r_s \frac{H_0^2}{c^2} \delta_c \frac{D_d D_{\text{ds}}}{D_s}. \quad (4.20)$$

Die Konvergenz in der Form (4.19) hängt von den Rotverschiebungen der Quellen (z_s) und der Halos (z_d) ab. Analog zum Vorgehen im Abschnitt 3.2 (siehe Gleichung (3.30)) mitteln wir die Konvergenz (4.19) mit der Verteilung (3.33),

$$\kappa(\vartheta, z_d) = \int dz_s p_z(z_s) \kappa(\vartheta, z_d, z_s) = \bar{\kappa}_0 f\left(\frac{\vartheta}{\theta_s}\right), \quad (4.21)$$

wobei $\bar{\kappa}_0 = \int dz_s p_z(z_s) \kappa_0$.

Wir können nun die Aperturmasse (4.1) durch Einsetzen von (4.21) berechnen. Da die Konvergenz (4.21) und die Filterfunktion U radial symmetrische Funktionen sind ist es günstig, in (4.1) Polarkoordinaten einzuführen. Um die so erhaltene Gleichung zu vereinfachen setzen wir $\zeta = (\zeta, 0)$ für die radiale Entfernung vom Halozentrum. Wir erhalten für $\zeta < \theta$,

$$M_{\text{ap}}(\zeta) = 2 \left[\int_0^{\theta-\zeta} d\vartheta \vartheta \kappa(\vartheta) \int_0^\pi d\phi U(x) + \int_{\theta-\zeta}^{\theta+\zeta} d\vartheta \vartheta \kappa(\vartheta) \int_0^{\Phi_{\text{max}}} d\phi U(x) \right] \quad (4.22)$$

und für $\zeta \geq \theta$,

$$M_{\text{ap}}(\zeta) = 2 \int_{\zeta-\theta}^{\zeta+\theta} d\vartheta \vartheta \kappa(\vartheta) \int_0^{\Phi_{\text{max}}} d\phi U(x), \quad (4.23)$$

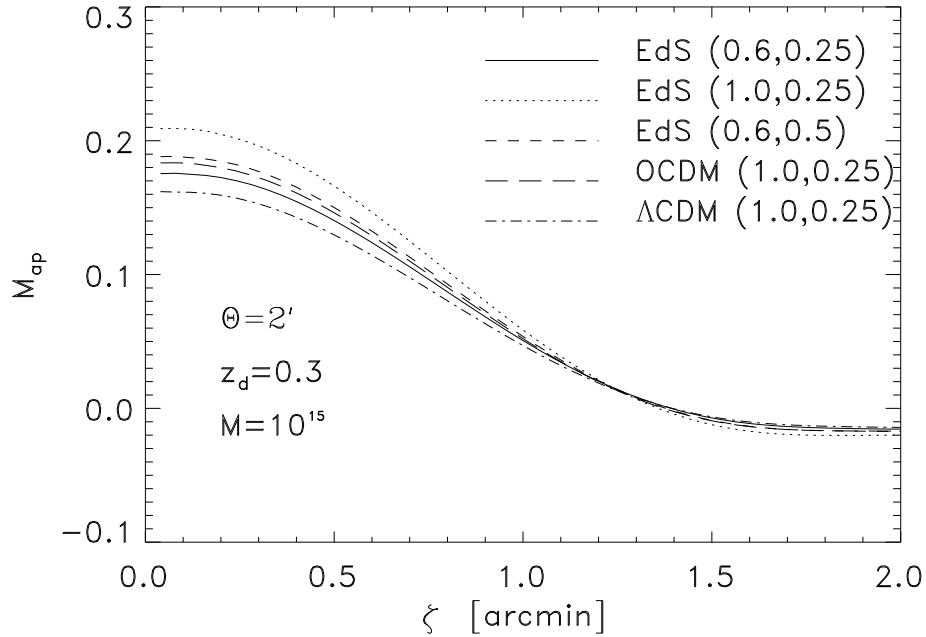
wobei

$$x = \sqrt{\vartheta^2 + \zeta^2 - 2\vartheta\zeta \cos(\phi)}, \quad \Phi_{\text{max}} = \arccos\left(\frac{\vartheta^2 + \zeta^2 - \theta^2}{2\vartheta\zeta}\right). \quad (4.24)$$

Die ϕ -Integration in (4.22) und (4.23) kann analytisch berechnet werden, während die verbleibende ϑ -Integration numerisch bestimmt wird.

In Figur 4.1 zeigen wir die Aperturmasse (4.22) für fünf Kosmologien als Funktion des Abstandes vom Halozentrum für ein Halo der Masse $M = 10^{15} M_{\odot}/h$, der bei der Rotverschiebung $z_d = 0.3$ identifiziert wurde. Die Filtergröße ist 2 Bogenminuten.

Die Aperturmasse $M_{\text{ap}}(\zeta)$ hängt von der Halomasse M , seiner Rotverschiebung z_d und dem Filterradius θ ab. Weiterhin muß man zur Berechnung von $M_{\text{ap}}(\zeta)$ ein kosmologisches Modell und das Powerspektrum festlegen.



Figur 4.1: Die Aperturmasse (definiert in Gleichung (4.22)) als Funktion des radialen Abstands ζ vom Halozentrum für fünf kosmologische Modelle. Die Halomasse ist $10^{15} M_{\odot} h^{-1}$ und die Rotverschiebung $z_d = 0.3$. Der Filter hat einen Radius von $\theta = 2$ Bogenminuten.

4.4 Statistische Eigenschaften der Aperturmasse

Die in diesem Abschnitt zusammengefassten Eigenschaften der M_{ap} -Statistik wurden in Schneider et al. (1998) und Kruse & Schneider (1999b) untersucht. Die Statistik der Aperturmasse ist durch die des Dichtekontrasts definiert. Die höheren Momente der M_{ap} -Statistik, wie z.B. ihre Dispersion und ihre Schiefeit, hängen vom Powerspektrum des projizierten Dichtekontrasts und vom kosmologischen Modell ab.

4.4.1 Die Dispersion der M_{ap} -Statistik

Um die Notation zu vereinfachen, plazieren wir die Aperturmasse in das Zentrum der Massenverteilung des Halos,

$$M_{\text{ap}}(\theta) = \int d^2\vartheta \kappa(\vartheta) U(|\vartheta|). \quad (4.25)$$

Die Dispersion der Aperturmasse ist durch $\sigma_{M_{\text{ap}}}^2(\theta) = \langle M_{\text{ap}}^2(\theta) \rangle - \langle M_{\text{ap}}(\theta) \rangle^2$ gegeben, wobei wir über Realisierungen des Dichtefeldes mitteln. Der Mittelwert der Aperturmasse verschwindet, da M_{ap} als gefilterter projizierter Dichtekontrast definiert ist. Somit erhalten wir für die Dispersion von M_{ap} ,

$$\begin{aligned} \langle M_{\text{ap}}^2(\theta) \rangle &= \int d^2\vartheta U(\vartheta) \int d^2\vartheta' U(\vartheta') \langle \kappa(\vartheta)\kappa(\vartheta') \rangle \\ &= \int d^2\vartheta U(\vartheta) \int d^2\vartheta' U(\vartheta') \int \frac{d^2s}{(2\pi)^2} \exp[i\mathbf{s}(\vartheta - \vartheta')] P_\kappa(s) \\ &= 2\pi \int_0^\infty ds s P_\kappa(s) \left(\int_0^\theta d\vartheta \vartheta U(\vartheta) J_0(s\vartheta) \right)^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Im ersten Schritt haben wir benutzt, daß das Powerspektrum die Fouriertransformierte der Zweipunktkorrelationsfunktion ist. Die Besselfunktion J_0 erhält man durch die Winkelintegrationen in ϑ und ϑ' .

Wenn man in (4.26) die Filterfunktion (4.6) für $l = 1$ einsetzt, kann man die ϑ -Integration ausführen und erhält

$$\langle M_{\text{ap}}^2(\theta) \rangle = 2\pi \int_0^\infty ds s P_\kappa(s) [I(s\theta)]^2, \quad (4.27)$$

wobei

$$I(\eta) = \frac{12}{\pi} \eta^{-2} J_4(\eta). \quad (4.28)$$

Um die Vorteile der Aperturmasse als eng lokalisiertem Maß für das Powerspektrum P_κ zu verdeutlichen, betrachten wir als Vergleich die von Blandford et al. (1991) eingeführte mittlere Scherung, in der die Scherung über eine Kreisfläche mit Radius θ mit einem ‘Top-Hat’ Filter gewichtet wird,

$$\bar{\gamma}(\theta) := \frac{1}{\pi\theta^2} \int d^2\vartheta \gamma(\vartheta). \quad (4.29)$$

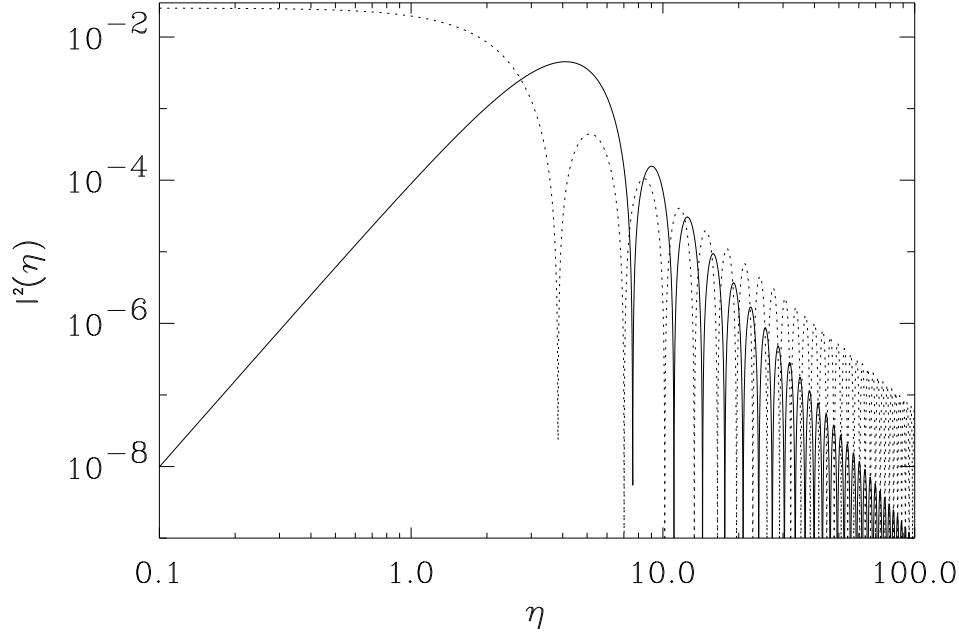
Die Dispersion dieser Statistik ist durch

$$\langle |\bar{\gamma}|^2(\theta) \rangle = 2\pi \int_0^\infty ds s P_\kappa(s) [I_{\text{TH}}(s\theta)]^2 \quad (4.30)$$

gegeben. Die Filterfunktion in (4.30) ist

$$I_{\text{TH}}(\eta) = \frac{J_1(\eta)}{\pi\eta}. \quad (4.31)$$

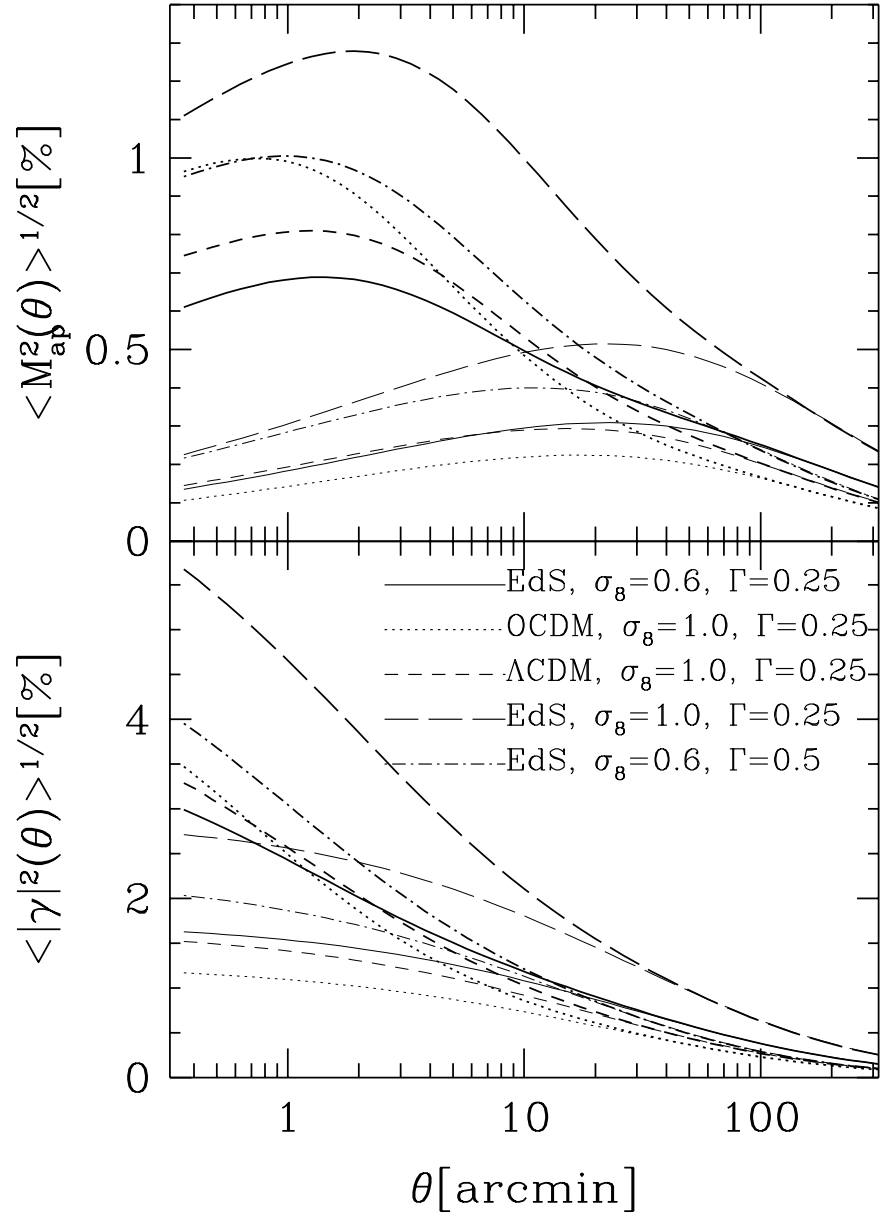
In Figur 4.2 vergleichen wir die Filter (4.28) und (4.31). Der Filter (4.28) hat ein lokales Maximum an der Stelle $\eta \sim 4$ und erlaubt somit eine genaue Messung



Figur 4.2: Wir vergleichen die Filterfunktionen (4.28) (durchgezogene Linie) und (4.31) (gepunktete Linie). Die starke Oszillation der Filterfunktionen für große η ist auf die Besselfunktionen zurückzuführen.

des Powerspektrums durch (4.27) für die Wellenzahl $s \sim 4/\theta$. Bartelmann & Schneider (1999a) haben gezeigt, daß der Filter (4.28) in guter Näherung durch eine Deltafunktion dargestellt werden kann. Somit wird die Aperturmasse zu einem direkten Maß für das Powerspektrum des projizierten Dichtekontrasts. Der Top-Hat Filter ist im Fourierraum weit weniger lokalisiert. Deshalb ergibt die Messung von (4.30) ein über einen größeren Bereich von Wellenzahlen gemittelttes Powerspektrum.

In Figur 4.3 zeigen wir die Standardabweichung der Aperturmasse und der mittleren Scherung als Funktion des Filterradius für fünf Kosmologien. $P_\kappa(s)$ wurde mit dem linearen und dem nichtlinearen Powerspektrum (siehe Hamilton et al. 1991, Jain et al. 1995 und Peacock & Dodds 1996) des Dichtekontrasts berechnet. Die Standardabweichung der Aperturmasse spiegelt den Verlauf des projizierten Powerspektrums (siehe Figur 3.2) wider. Die Ursache dafür ist das lokale Maximum des Filters (4.28). Die Verwendung des nichtlinearen Powerspektrums verschiebt das Maximum von $\sqrt{\langle M_{\text{ap}}^2(\theta) \rangle}$ zu kleineren Skalen und erhöht die Werte im Vergleich zu denen, die mit dem linearen Powerspektrum berechnet wurden. $\sqrt{\langle |\bar{\gamma}|^2(\theta) \rangle}$ ist eine monoton fallende Funktion des Filterradius. Wegen der Breite des Filters ist diese Statistik weniger durch das nichtlineare Powerspektrum beeinflusst, da größere Skalen, die der linearen Evolution folgen, in der Berechnung der Standardabweichung berücksichtigt werden. Auf kleinen Skalen ist die Standardabweichung der mittleren Scherung beträchtlich



Figur 4.3: Die Standardabweichungen der Aperturmasse (oberes Fenster) und der mittleren Scherung (unteres Fenster) für fünf kosmologische Modelle als Funktion des Filtrerradius⁷. Die dünnen Kurven entsprechen der linearen Evolution des Powerspektrums, und die dicken Kurven wurden mit dem nichtlinearen Powerspektrum berechnet.

größer als die der Aperturmasse. Dieser Unterschied ist auf die Eigenschaften der Filter (4.28) und (4.31) zurückzuführen (siehe Figur 4.2). Während (4.28) für einen gegebenen Aperturradius lokal kleinere Skalen verstärkt, ist der Filter (4.31) empfindlich für einen weiten Bereich größerer Skalen.

4.4.2 Die Schiefeit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Aperturmasse

Wir hatten angenommen, daß der anfängliche Dichtekontrast δ durch ein Gaußsches Zufallfeld beschrieben werden kann (siehe Abschnitt 1.2.2). Während der zeitlichen Entwicklung von δ erhält die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Dichtefeldes durch den Gravitationskollaps nicht-Gaußsche Eigenschaften. Diese zeigen sich in einer unteren Schranke von $\delta = -1$ und einem zu positiven Werten von δ hin ausgedehnten Flügel der Verteilungsfunktion. Man bezeichnet den asymmetrischen Flügel auch als Schiefeit der Verteilung. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der effektiven Konvergenz (3.29) hat die gleichen nicht-Gaußschen Eigenschaften wie die des Dichtefeldes, da κ_{eff} eine lineare Funktion von δ ist (siehe z.B. Bernardeau et al. 1997, Jain & Seljak 1997 und Schneider et al. 1998).

Die Schiefeit der Verteilungsfunktion von M_{ap} ist proportional zur Dreipunktkorrelationsfunktion der Aperturmasse und wird durch

$$S(\theta) := \frac{\langle M_{\text{ap}}^3(\theta) \rangle}{\langle M_{\text{ap}}^2(\theta) \rangle^2} \quad (4.32)$$

definiert (siehe Schneider et al. 1998), wobei $\langle M_{\text{ap}}^2(\theta) \rangle$ durch (4.26) gegeben ist.

$\langle M_{\text{ap}}^3(\theta) \rangle$ erfordert die Berechnung der Dreipunktkorrelation der Konvergenz (vergleiche mit (4.26)). Mit Gleichung (3.31) können Korrelationsfunktionen der Konvergenz auf die des Dichtekontrasts zurückgeführt werden. Diese können im Rahmen der quasilinearen Theorie der Strukturentwicklung berechnet werden (siehe Bernardeau et al. 1997 und Schneider et al. 1998). Die Berechnung von (4.32) ist sehr umfangreich und wird für den weiteren Verlauf der Arbeit nicht benötigt. Aus diesem Grund skizzieren wir hier nur die Idee zur Berechnung der Schiefeit und verweisen auf Schneider et al. (1998), wo die Rechnung detailliert dargestellt ist.

Im Folgenden werden wir die Dreipunktkorrelationsfunktion des Dichtefeldes im Rahmen der Störungstheorie für δ berechnen. Dazu entwickeln wir den als klein angenommenen Dichtekontrast, $\delta = \delta^{(1)} + \delta^{(2)} + \dots$, mit $\tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}, w) = D_+(w)\tilde{\delta}_0^{(1)}(\mathbf{k})$, wobei $\tilde{\delta}_0^{(1)}(\mathbf{k})$ die linear extrapolierte Dichtestörung und $D_+(w)$ der lineare Wachstumsfaktor ist (siehe Abschnitt 1.2.1).

Setzt man diese Entwicklung in die Kontinuitätsgleichung und die Eulergleichung (siehe 1.2.1) ein, so kann man eine Lösung für jede Entwicklungsordnung angeben, die durch die niedrigeren Ordnungen ausgedrückt wird. So erhält man für die zweite Ordnung,

$$\tilde{\delta}_0^{(2)}(\mathbf{k}, w) = D_+^2(w) \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tilde{\delta}_0^{(1)}(\mathbf{k}') \tilde{\delta}_0^{(1)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') F(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.33)$$

wobei

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\frac{5}{7} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{1}{|\mathbf{y}|^2} \right) \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \frac{2}{7} \frac{[\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}]^2}{|\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2} \right], \quad (4.34)$$

(siehe z.B. Fry 1984).

Wir berechnen die Dreipunktkorrelationsfunktion des Dichtekontrasts im Fourierraum durch Einsetzen der Entwicklung für δ und berücksichtigen nur die niedrigste Ordnung. Benutzt man die Darstellung (4.33) und beachtet, daß $\tilde{\delta}_0^{(1)}(\mathbf{k})$ durch ein Gaußsches Zufallsfeld beschrieben wird, so erhält man (siehe Schneider et al. 1998),

$$\begin{aligned} \langle M_{\text{ap}}^3(\theta) \rangle &= \frac{81 H_0^6 \Omega_0^3}{8 \pi c^6} \int_0^{w_H} dw \frac{\bar{W}^3(w) D_+^4(w)}{a^3(w) f_K(w)} \\ &\times \int d^2 s_1 P\left(\frac{s_1}{f_K(w)}\right) I(s_1 \theta) \int d^2 s_2 P\left(\frac{s_2}{f_K(w)}\right) I(s_2 \theta) \\ &\times I(|\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2| \theta) F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2). \end{aligned} \quad (4.35)$$

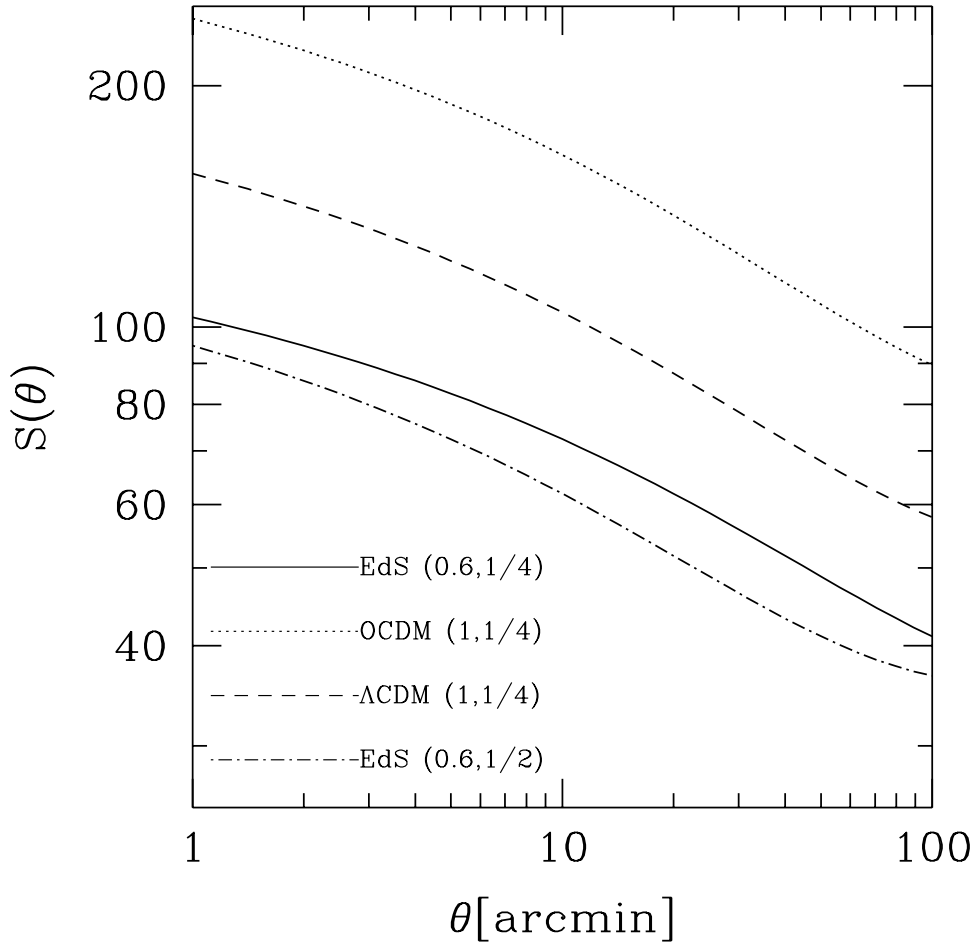
Die Wichtungsfunktion $\bar{W}(w)$ ist in Gleichung (3.32) definiert. Der Filter $I(x)$ ist durch (4.28) gegeben und $P(s)$ ist das in Abschnitt 1.2.2 definierte lineare Powerspektrum des Dichtefeldes. Die Funktion $F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ ist durch (4.34) gegeben.

In Figur 4.4 zeigen wir $S(\theta)$ in Abhängigkeit vom Aperturradius θ für vier Kosmologien. Entsprechend Gleichung (4.26) ist $\langle M_{\text{ap}}^2(\theta) \rangle$ proportional zur Normierung des Powerspektrums. Da $\langle M_{\text{ap}}^3(\theta) \rangle$ nach Gleichung (4.35) proportional zum Quadrat der Normierung von $P(s)$ ist, hängt die Schiefeit $S(\theta)$ nicht von der Amplitude des Powerspektrums ab. Aus diesem Grund sind die Freiheitsgrade der Schiefeit im Wesentlichen durch die kosmologischen Parameter bestimmt. Da das projizierte Powerspektrum (3.35) von Ω_0^2 abhängt ergibt sich mit (4.26), daß $S(\theta)$ näherungsweise proportional zu Ω_0^{-1} ist. Deshalb ist die Schiefeit in kosmologischen Modellen mit niedrigem Ω_0 größer als für die EdS-Modelle. Für festes Ω_0 und wachsendes Ω_Λ fallen die Werte der Schiefeit.

Die positiven Werte der Schiefeit für einen großen Bereich von Filterradien sind ein Indikator für einen ausgedehnten Flügel der Wahrscheinlichkeitsverteilung von M_{ap} . Wir werden im nächsten Abschnitt einen analytischen Ausdruck angeben, der diesen Flügel beschreibt.

4.4.3 Der nicht-Gaußsche Flügel der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Aperturmasse

Wir berechnen in diesem Abschnitt die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung (KVV) $P(> M_{\text{ap}}, \theta)$ der Aperturmasse. $P(> M_{\text{ap}}, \theta)$ ist die Wahrscheinlichkeit, einen Wert größer als M_{ap} zu finden, wenn der Filter den Radius θ hat. Dabei beschränken wir uns auf Werte von M_{ap} , die viel größer als $\sigma_{M_{\text{ap}}}$ sind. Wir nehmen an, daß die großen Werte der Aperturmasse von kollabierten Objekten verursacht werden. Da die Anzahldichte massereicher Halos stark vom kosmologischen Modell abhängt, erwarten wir, daß die relative Häufigkeit der seltenen Ereignisse in der Verteilung von M_{ap} zur Einschränkung der kosmologischen Parameter benutzt werden kann.



Figur 4.4: Die Schiefeit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Aperturmasse (definiert in Gleichung (4.32)) als Funktion des Aperturradius für vier kosmologische Modelle. $S(\theta)$ ist unabhängig von der Normierung des Powerspektrums. Somit ergeben die beiden EdS-Modelle mit demselben Form-Parameter Γ die gleichen Kurven.

Die hier vorgestellte Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(> M_{\text{ap}}, \theta)$ beruht auf der Annahme, daß die Anzahldichte kollabierter Objekte durch die P/S-Theorie (siehe Abschnitt 2.2) und deren Massendichte durch das NFW-Profil (siehe Abschnitt 2.3) beschrieben werden kann (siehe Kruse & Schneider 1999b).

Wenn wir einen Halo der Masse M und der Rotverschiebung z_d betrachten, sowie den Filterradius θ fixieren, dann kann einem Schwellenwert M_{ap} eindeutig ein Abstand $\zeta = \zeta(M_{\text{ap}}, \theta, M, z_d)$ zugeordnet werden, wenn wir die Aperturmasse bis zu ihrer ersten Nullstelle betrachten, denn M_{ap} ist in diesem Bereich eine monoton fallende Funktion des Abstandes vom Halozentrum (siehe Figur 4.1). Kleineren Abständen als ζ entsprechen Werte der Aperturmasse, welche den Schwellenwert M_{ap} überschreiten. Das bedeutet, daß der Abstand ζ den Radius

eines Wirkungsquerschnitts

$$\sigma(M_{\text{ap}}, \theta, M, z_d) := \pi \zeta^2(M_{\text{ap}}, \theta, M, z_d) \quad (4.36)$$

definiert, der die effektive Fläche für Linseneffekte beschreibt, die in einer Aperturmasse $> M_{\text{ap}}$ resultieren. Der Wirkungsquerschnitt (4.36) ist ungleich null, wenn die Aperturmasse, die im Halozentrum gemessen wird, größer als der gegebene Schwellenwert M_{ap} ist.

Die Fläche (4.36) beschreibt den Linseneffekt *eines* Halos. Wir nehmen nun an, daß die Anzahl der Halos pro mitbewegtem Volumen und Massenintervall durch die Press-Schechter-Massenfunktion $N_{\text{halo}}(M, z) dM dV_c$ gegeben ist (siehe Gleichung (2.12)). Multiplizieren wir $N_{\text{halo}}(M, z) dM dV_c$ mit (4.36), so erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, im Volumen dV_c und im Massenintervall dM eine Aperturmasse $> M_{\text{ap}}$ zu finden,

$$dP(> M_{\text{ap}}, \theta) = N_{\text{halo}}(M, z) \sigma(M_{\text{ap}}, \theta, M, z_d) dM dV_c. \quad (4.37)$$

Man erhält die KWV der Aperturmasse, wenn man die Wirkungsquerschnitte einer Halopopulation in einem gegebenen Raumwinkel aufsummiert, d.h. die Funktion (4.37) über das Volumen und die Masse integriert. Wir führen sphärische Polarkoordinaten für das physikalische Volumen $dV_p = dV_c (1+z)^{-3}$ (siehe Abschnitt 1.1) ein,

$$dV_p = D_d^2(z_d) dD_p(z_d), \quad dD_p(z_d) = \frac{c}{H_0} \frac{dz_d}{E(z_d)(1+z_d)}, \quad (4.38)$$

wobei die Funktion $E(z_d)$ durch Gleichung (1.21) gegeben ist, und erhalten für die KWV,

$$\begin{aligned} P(> M_{\text{ap}}, \theta) &= \frac{c}{H_0} \int dz_d \frac{(1+z_d)^2}{E(z_d)} D_d^2(z_d) \\ &\times \int dM N_{\text{halo}}(M, z_d) \sigma(M_{\text{ap}}, \theta, M, z_d). \end{aligned} \quad (4.39)$$

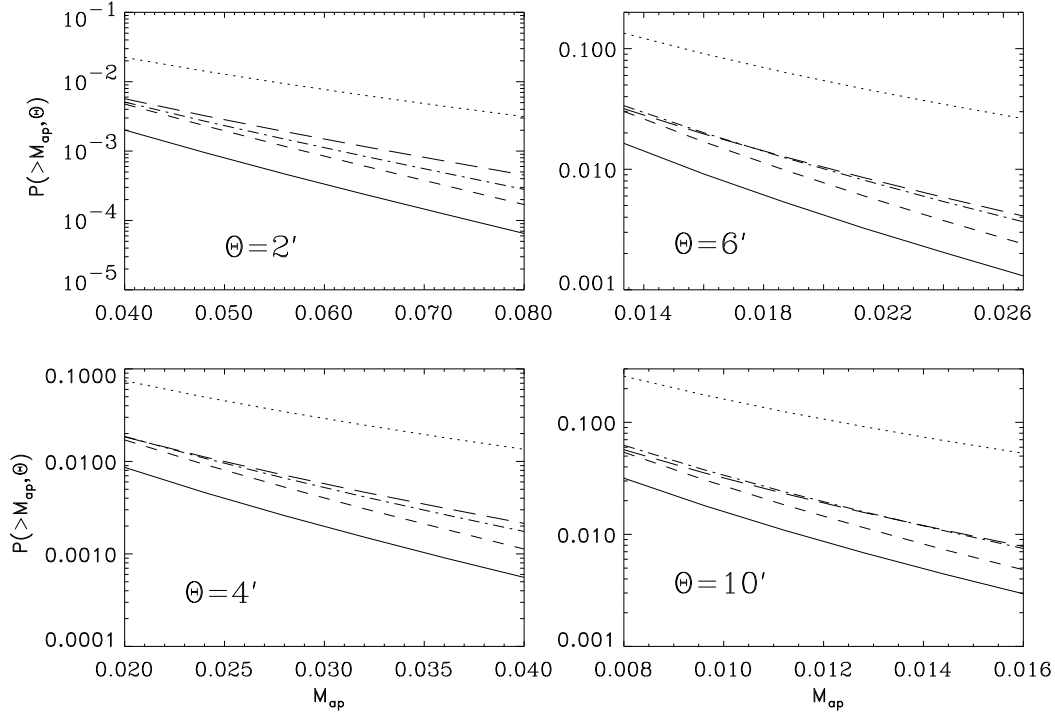
Die Massenintegration in (4.39) wird von einer unteren Grenze M_t über den gesamten Massenbereich ausgeführt. Für Massen $M < M_t$ verschwindet der Wirkungsquerschnitt (4.36).

In Figur 4.5 zeigen wir die Wahrscheinlichkeit $P(> M_{\text{ap}}, \theta)$ für die Filterradien $\theta = 2, 4, 6$ und 10 Bogenminuten als Funktion der Aperturmasse für fünf verschiedene Kosmologien. Den Aperturmassenbereich $[M_0, 2M_0]$ haben wir so gewählt, daß der Anfangswert einem S/R-Verhältnis von fünf entspricht, $M_0 = 5\sigma_c(\theta)$.

Entsprechend der Figur folgt der Logarithmus von $P(> M_{\text{ap}}, \theta)$ näherungsweise einer linearen Funktion in M_{ap} . Somit kann die KWV durch ein Exponentialgesetz approximiert werden, das wir in der Form

$$P(> M_{\text{ap}}, \theta) = p_0 \exp \left[-\frac{(M_{\text{ap}} - M_0)}{c} \right] \quad (4.40)$$

schreiben. p_0 and c sind Fitparameter, wobei p_0 die Wahrscheinlichkeit ist, eine Aperturmasse größer als M_0 zu finden. Wir bestimmen die Fitparameter, indem



Figur 4.5: Die Wahrscheinlichkeit $P(> M_{\text{ap}}, \theta)$ (definiert in Gleichung (4.39)) als Funktion der Aperturmasse für die Filterradien $\theta = 2, 4, 6$ und 10 Bogenminuten für fünf kosmologische Modelle, die wie in Figur 4.1 bezeichnet sind. Der Aperturmassenbereich entspricht einem S/R-Verhältnis-Intervall $S_c \in [5, 10]$.

wir annehmen, daß der Logarithmus von $P(> M_{\text{ap}}, \theta)$ im Intervall $[M_0, 2M_0]$ durch eine Gerade beschrieben werden kann. Berechnet man die Wahrscheinlichkeit $P(> M_{\text{ap}}, \theta)$ mit der Fitformel (4.40), so ergibt sich eine Abweichung von den mit (4.39) berechneten Kurven in Figur 4.5 die ≤ 3 Prozent ist.

Aus dem analytischen Ausdruck (4.40) für die KWV der Aperturmasse kann durch Differentiation nach M_{ap} und Division durch p_0 die normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung für Aperturmassen $> M_{\text{ap}}$ bestimmt werden,

$$\begin{aligned} \hat{p}(M_{\text{ap}}) &= \frac{1}{p_0} \left| \frac{d}{dM_{\text{ap}}} P(> M_{\text{ap}}, \theta) \right| \\ &= \frac{1}{c} \exp \left[-\frac{(M_{\text{ap}} - M_0)}{c} \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

$\hat{p}(M_{\text{ap}})$ beschreibt den nicht-Gaußschen Flügel der Wahrscheinlichkeitsverteilung von M_{ap} und enthält somit Informationen über die von den kosmologischen Parametern abhängende nichtlineare Evolution des Dichtekontrasts. Da die Fitformeln (4.40) und (4.41) durch die Parameter p_0 and c festgelegt sind, enthalten diese alle Informationen über das Powerspektrum und die Kosmologie. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie man diese Information quantifizieren kann.

4.4.4 Einschränkung kosmologischer Modelle

Wenn wir auf einem Beobachtungsfeld die tangentialen Elliptizitäten von Hintergrundgalaxien messen und mit diesen eine zweidimensionale M_{ap} -Karte berechnen, können wir die Wahrscheinlichkeit $P(> M_{\text{ap}}, \theta)$ bestimmen. Wir wollen in diesem Abschnitt der Frage nachgehen, ob es möglich ist, durch Messung von $P(> M_{\text{ap}}, \theta)$ die kosmologischen Parameter einzuschränken. Zur Beantwortung dieser Frage leiten wir eine Likelihood-Funktion her, mit der wir mittels einer Maximum-Likelihood-Methode Konfidenzbereiche im Parameterraum $\{p_0, c\}$ berechnen. Die Konfidenzbereiche geben an, wie verlässlich die kosmologischen Modelle mit der Wahrscheinlichkeit $P(> M_{\text{ap}}, \theta)$ eingeschränkt werden können (siehe Kruse & Schneider 1999b).

Um eine Likelihood-Funktion zu erhalten, müssen wir eine Verteilungsfunktion definieren, die die Wahrscheinlichkeit angibt, ein Ensemble N_f statistisch unabhängiger Aperturmassenwerte $\{M_{\text{ap}}^i\}$, $i \in [1, N_f]$, zu finden. Wir nehmen im Folgenden an, daß ein Beobachtungsfeld der Kantenlänge L gegeben ist. Schneider et al. (1998) haben gezeigt, daß auf ein solches Feld $N_f = (L/(2\theta))^2$ statistisch unabhängige Aperturen plaziert werden können. Somit nehmen wir an, daß zwei Aperturen statistisch unabhängig sind, wenn ihr Winkelabstand zwei Aperturradien beträgt. In diesem Fall ist der Korrelationskoeffizient der beiden Aperturen kleiner als 1 Prozent. Wir nehmen an, daß die Menge $\{M_{\text{ap}}^i\}$ $N_>$ Werte von M_{ap} enthält, die einen Schwellenwert M_0 überschreiten. Diese Teilmenge besteht aus Werten $M_{\text{ap}}^j > M_0$, $j \in [1, N_>]$. Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit $N_> \in [1, N_f]$ Werte zu finden, die einen Schwellenwert M_0 überschreiten, wenn wir N_f Aperturen haben. Wir nehmen an, daß für jede der N_f Aperturen das Ereignis $M_{\text{ap}} > M_0$ mit der Wahrscheinlichkeit p_0 auftritt. Dieser Zufallsprozess wird offensichtlich durch eine Binomialverteilung beschrieben,

$$P(N_> | N_f, p_0) = \binom{N_f}{N_>} p_0^{N_>} (1 - p_0)^{N_f - N_>}. \quad (4.42)$$

Um die Parameter p_0 und c abschätzen zu können, benötigt man Beobachtungen, die eine große Anzahl von Aperturen mit $M_{\text{ap}} > M_0$ ergeben, d.h. es muß $N_> \gg 1$ gelten. Insbesondere ist der Fitparameter c vollständig unbestimmt, wenn $N_> = 0$ gilt. Die Verteilung (4.42) ist so normiert, daß die Summation über $N_> \in [0, \infty]$ eins ergibt. Da wir nur Realisierungen von (4.42) für $N_> \geq 1$ betrachten wollen, muß $P(N_> | N_f, p_0)$ neu normiert werden,

$$f \sum_{N_>=1}^{N_f} P(N_> | N_f, p_0) = 1, \quad (4.43)$$

wobei

$$f = \frac{1}{1 - (1 - p_0)^{N_f}}. \quad (4.44)$$

Die Wahrscheinlichkeit, $N_>$ Aperturen mit $M_{\text{ap}} > M_0$ zu finden, die durch die Verteilung (4.41) beschrieben werden, ist durch die Likelihood-Funktion

$$L(M_{\text{ap}}^1, \dots, M_{\text{ap}}^{N_>} | p_0, c) = P(N_> | N_f, p_0) \prod_{j=1}^{N_>} \hat{p}(M_{\text{ap}}^j) \quad (4.45)$$

gegeben. Aus (4.45) können Maximum-Likelihood-Schätzungen für beide Fitparameter bestimmt werden. Wenn wir diese Schätzungen mit (\hat{c}, \hat{p}_0) bezeichnen, dann ergibt sich durch Differentiation von (4.45) bezüglich c, p_0 und anschließender Maximumbestimmung

$$\hat{c} = \frac{1}{N_{>}} \sum_{j=1}^{N_{>}} M_{\text{ap}}^j - M_0 \quad (4.46)$$

und

$$\hat{p}_0 = \frac{N_{>}}{N_f}. \quad (4.47)$$

Beide Schätzungen haben eine anschauliche Bedeutung: \hat{c} ist die Abweichung des Mittelwertes der $N_{>}$ Aperturen vom Schwellenwert M_0 und \hat{p}_0 ist, wie erwartet, die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Apertur mit $M_{\text{ap}} > M_0$ zu finden. Es muß gezeigt werden, daß die Schätzungen (4.46) und (4.47) erwartungstreu sind, d.h., daß ihr Mittelwert bezüglich der Likelihood-Funktion (4.45) den wahren Fitparametern entspricht. Wir führen den Operator

$$P(X) = f \sum_{N_{>=1}^{N_f} \binom{N_f}{N_{>}} p_0^{N_{>}} (1-p_0)^{N_f-N_{>}} \prod_{j=1}^{N_{>}} \int_{M_0}^{\infty} dM_{\text{ap}}^j \hat{p}(M_{\text{ap}}^j) (X) \quad (4.48)$$

ein, dessen Anwendung auf eine Zufallsgröße X den Ensemble-Mittelwert ergibt. Wenden wir (4.48) auf (4.46) und (4.47) an, ergibt sich

$$\langle \hat{c} \rangle = P(\hat{c}) = c \quad \text{und} \quad \langle \hat{p}_0 \rangle = P(\hat{p}_0) = p_0 f. \quad (4.49)$$

Entsprechend der zweiten Gleichung ist \hat{p}_0 ein erwartungstreuer Schätzwert, wenn $f \approx 1$ gilt. Wir betrachten im Folgenden nur Werte von p_0 und N_f , die $f \approx 1$ gewährleisten, da sonst die Anzahl N_f der Aperturen nicht groß genug ist, um die Parameter genau bestimmen zu können. Wenn diese Bedingung verletzt ist, können die Fitparameter mit der hier vorgestellten Methode nicht verlässlich berechnet werden.

Wir müssen weiterhin untersuchen, ob die Schätzungen (4.46) und (4.47) miteinander korreliert sind, d.h. wir müssen den Mittelwert des Produktes von \hat{c} und \hat{p}_0 bestimmen,

$$\langle \hat{c} \hat{p}_0 \rangle = P(\hat{c} \hat{p}_0) = c p_0 f. \quad (4.50)$$

Da wir $f \approx 1$ vorausgesetzt haben, sind die Parameterschätzungen nicht korreliert. In den weiteren Rechnungen setzen wir $f = 1$.

Da (4.46) und (4.47) nicht korreliert sind, werden die Fehler der Schätzungen durch die Dispersionen

$$\sigma_{\hat{p}_0} = \sqrt{\langle \hat{p}_0^2 \rangle - \langle \hat{p}_0 \rangle^2} \quad (4.51)$$

und

$$\sigma_{\hat{c}} = \sqrt{\langle \hat{c}^2 \rangle - \langle \hat{c} \rangle^2} \quad (4.52)$$

beschrieben. Die Berechnung der Dispersionen erfordert die Anwendung des Operators (4.48) auf die quadrierten Schätzungen (4.46) und (4.47). Dies ergibt

$$\langle \hat{c}^2 \rangle = c^2 \left(1 + \sum_{N_{>=1}^{N_f} P(N_f, p_0) N_{>}^{-1} \right) \quad (4.53)$$

und

$$\langle \hat{p}_0^2 \rangle = \frac{p_0}{N_f}(1 - p_0) + p_0^2. \quad (4.54)$$

Verwenden wir (4.49), erhalten wir für die Dispersionen

$$\sigma_c = c \sqrt{\sum_{N_>=1}^{N_f} P(N_>|N_f, p_0) N_>^{-1}} \quad (4.55)$$

und

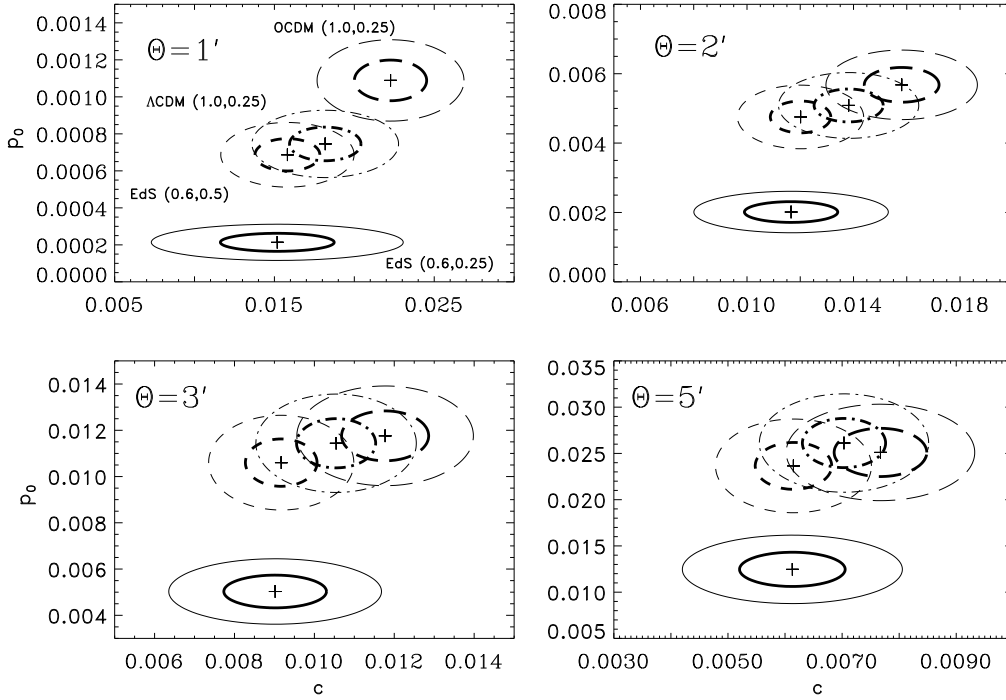
$$\sigma_{\hat{p}_0} = \sqrt{\frac{p_0}{N_f}(1 - p_0)}. \quad (4.56)$$

Die Dispersionen (4.55) und (4.56) verringern sich, wenn die Feldgröße L anwächst, da auf größeren Feldern mehr Aperturen plazierte werden können. Wir sehen dieses Verhalten für (4.56) unmittelbar, da $\sigma_{\hat{p}_0} \propto (\sqrt{N_f})^{-1}$. Um das Fallen von σ_c mit wachsendem N_f zu sehen, benutzen wir eine Rekursionsformel, um die Binomialverteilung für ein gegebenes $N_>$ zu berechnen. Deren Anfangswert $C(1) = N_f p_0 (1 - p_0)^{N_f - 1}$ fällt schnell für wachsende N_f und deshalb auch die Summe in (4.55).

Die Dispersionen (4.55) und (4.56) sind durch die von der Kosmologie abhängenden Mittelwerte c und p_0 und die Anzahl der Aperturen N_f bestimmt. N_f ist durch die Feldgröße und den Filterradius definiert. Durch Variation von L und θ können die Dispersionen minimiert werden, um einen signifikanten Unterschied zwischen den kosmologischen Modellen zu erreichen. Die Mittelwerte c und p_0 enthalten Informationen über die Rotverschiebungen der Linsen und der Quellen. Somit kann auch diese Information genutzt werden, um die kosmologischen Parameter einzuschränken.

In Figur 4.6 zeigen wir die durch Kreuze bezeichneten Mittelwerte c und p_0 und ihre Dispersionen für vier kosmologische Modelle. Die Mittelwerte jedes kosmologischen Modells mit ihren Dispersionen werden für die Filterradien $\theta = 1, 2, 3$ und 5 Bogenminuten jeweils für die Feldgrößen $L = 5$ und $L = 10$ Grad gezeigt. Der Schwellenwert M_0 ist durch ein S/R-Verhältnis von 5 und den Filterradius festgelegt. Wenn wir die Feldgröße L verdoppeln, verringern sich die Dispersionen beider Fitparameter, wie erwartet, um die Hälfte. Das COBE normierte EdS-Modell (siehe Figur 4.5) haben wir in Figur 4.6 nicht gezeigt, da die Wahrscheinlichkeit p_0 in diesem Modell um einen Faktor 5 größer als die der anderen Modelle ist. Wie schon von Figur 4.5 zu erwarten war, ist das EdS(1,0.25) Modell eindeutig von den anderen Kosmologien unterscheidbar. Die Differenzen zwischen den einzelnen Modellen hängen stark vom Filterradius ab. Für $\theta = 1$ Bogenminute sind das EdS(0.6,0.25) und das Λ CDM Modell signifikant von den anderen Modellen unterscheidbar, wenn man das größere Feld verwendet. Mit wachsendem Filterradius werden die Unterschiede zwischen den EdS(0.6,0.5), Λ CDM und O Λ CDM Modellen geringer. Das EdS(0.6,0.25) Modell hingegen bleibt weiterhin unterscheidbar.

In Figur 4.7 zeigen wir den Einfluss der Linsen- und Quellenrotverschiebung auf die Dispersionen der Fitparameter. Als Referenz benutzen wir das obere linke Fenster aus Figur 4.6 für $L = 10$ Grad.

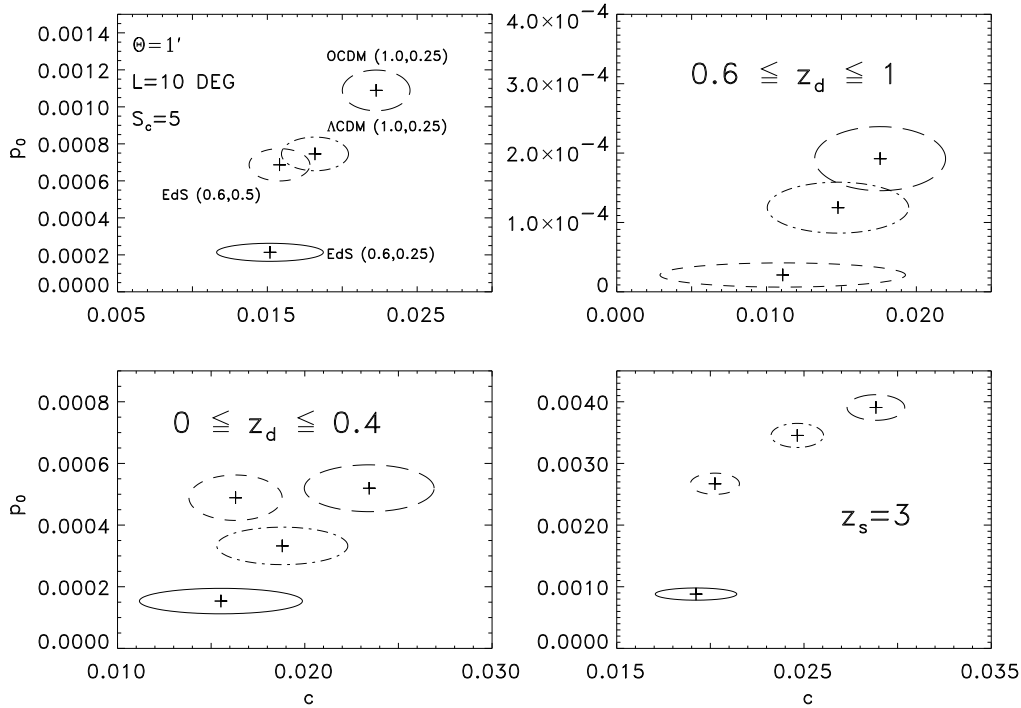


Figur 4.6: Die Fitparameter des Exponentialgesetzes (4.40) (mit Kreuzen bezeichnet) und ihre $1\text{-}\sigma$ Fehlerellipsen, die durch die Gleichungen (4.55) und (4.56) definiert sind, für die Filterradien $\theta = 1, 2, 3$ und 5 Bogenminuten für vier kosmologische Modelle. Der S/R-Verhältnis Schwellenwert ist für alle Fenster $S_c = 5$. Die Halorotverschiebungen sind aus dem Intervall $z_d \in [0, 1]$. Den dünnen bzw. dicken Kurven entspricht eine Feldgröße von $L = 5$ Grad bzw. $L = 10$ Grad. Wir haben die Verteilungsfunktion (3.33) für die Parameterwerte $z_0 = 1$ und $\beta = 1.5$ benutzt, um die Rotverschiebungen der Quellen zu bestimmen.

Wenn wir nur Halos mit Rotverschiebungen aus dem Intervall $z_d \in [0.6, 1]$ betrachten, erhalten wir das obere rechte Fenster in Figur 4.7. Im Vergleich zum Referenzfenster ist das EdS(0.6,0.5) Modell nun von den Kosmologien mit niedrigem Dichteparameter unterscheidbar. Der Grund dafür ist die stärkere Evolution der Massenfunktion bei hohen Rotverschiebungen in diesen Modellen. Das EdS(0.6,0.25) Modell wird nicht gezeigt, weil die Wahrscheinlichkeit p_0 in diesem Modell so klein ist, daß der Wert von f (siehe Gleichung (4.44)) von eins abweicht. Wir erhalten in diesem Fall $f \sim 2$. Somit sind die Dispersionen der Fitparameter nicht mehr durch (4.55) und (4.56) gegeben, da deren Ausdruck unter der Annahme $f = 1$ hergeleitet wurde.

Im unteren linken Fenster werden nur Halos mit niedrigen Rotverschiebungen betrachtet, $z_d \in [0, 0.4]$. Alle betrachteten Kosmologien sind unterscheidbar. Der Unterschied zwischen dem OCDM- und Λ CDM-Modell ist auf die mit abnehmender Rotverschiebung zunehmende Differenz zwischen den Massenfunktionen der Modelle zurückzuführen.

Im verbleibenden Fenster haben alle Quellen die gleiche Rotverschiebung



Figur 4.7: Das obere linke Fenster ist dasselbe wie in Figur 4.6 für $L = 10$ Grad. Die restlichen Fenster ergeben sich durch Änderung der Rotverschiebungen der Halos und der Quellen. Die verbleibenden Parameter, θ, L und S_c , sind die gleichen wie im oberen linken Fenster. Im oberen rechten bzw. unteren linken Fenster werden nur Halos mit Rotverschiebungen $z_d \in [0.6, 1]$ bzw. $z_d \in [0, 0.4]$ betrachtet. Im unteren rechten Fenster haben alle Quellen die Rotverschiebung $z_s = 3$. Im oberen rechten Fenster ist der Wert für p_0 im EdS(0.6,0.25) Modell so klein, daß die Normierungskonstante f von eins abweicht. Aus diesem Grund haben wir dieses Modell nicht gezeigt.

$z_s = 3$. Das ist ungefähr das Doppelte der mittleren Rotverschiebung der Verteilung (3.33), die in den anderen Fenstern benutzt wurde. Die höhere Quellenrotverschiebung erzeugt eine größere Effizienz des Linsensignals. Das führt dazu, daß die Wahrscheinlichkeit p_0 um einen Faktor vier im Vergleich zu den anderen Fenstern gestiegen ist. Alle Kosmologien sind signifikant unterscheidbar, wenn man Quellen mit hoher Rotverschiebung betrachtet.

Wir haben in diesem Abschnitt eine Maximum-Likelihood-Methode entwickelt, die auf der in 4.4.3 abgeleiteten Fitformel (4.41) für den Flügel der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Aperturmasse basiert. Die Methode erlaubt eine Einschränkung der kosmologischen Parameter.

Aus den Figuren 4.6 und 4.7 ist ersichtlich, daß man große, tiefe Beobachtungsfelder benötigt, um mit der hier vorgeschlagenen Statistik Kosmologien signifikant unterscheiden zu können.

Es wird erwartet, daß verbesserte Methoden zur photometrischen Rotverschiebungsbestimmung in naher Zukunft zur Verfügung stehen. Man könnte so

die Rotverschiebung der Quellen und, falls die dunklen Halos Galaxien enthalten, die der Linsen bestimmen. Diese Information würde eine genauere Messung der Scherung erlauben, da die Konvergenz von den Winkelentfernungen abhängt. Weiterhin wäre es möglich, die Anzahl der Halos pro Quadratgrad in Abhängigkeit von der Aperturmasse und der Rotverschiebung zu beschreiben. Dieser funktionale Zusammenhang würde einen besseren Vergleich mit der theoretischen Massenfunktion (2.12) ermöglichen, und somit die hier gemachten statistischen Aussagen verbessern.

Die Abhängigkeit unserer Ergebnisse von den kosmologischen Parametern ist hauptsächlich durch die kosmologische Massenfunktion (2.12) gegeben, die von der Masse und der Rotverschiebung der Halos abhängt. Aus diesem Grund ist die hier vorgestellte Statistik ein direktes Maß für die räumliche Dichte der Halos.

Die Berechnungen in diesem und dem vorherigen Abschnitt basieren auf dem Press-Schechter-Modell für die Anzahldichte der Halos und dem NFW-Massenprofil. Beide Modelle basieren auf Näherungen, die die hier gemachten Vorhersagen beeinflussen können. So nimmt man in der Press-Schechter-Theorie an, daß der Dichtekontrast durch ein Gaußsches Zufallfeld beschrieben werden kann und der Gravitationskollaps dem Modell der sphärischen Kollapstheorie folgt. NFW betrachten sphärisch-symmetrische Massenkonzentrationen.

Wir werden in Kapitel 6 die hier erhaltenen Ergebnisse mit Resultaten numerischer Simulationen vergleichen und somit die Qualität der eingeführten Näherungen überprüfen.

Kapitel 5

Messung der Anzahldichte von Halos mit der Aperturmasse

In Schneider (1996) wird gezeigt, daß der schwache Linseneffekt, gemessen mit der in Kapitel 4 eingeführten Aperturmasse, zum Nachweis von Konzentrationen dunkler Materie (Halos) benutzt werden kann. Aus numerischen Simulationen von Beobachtungsdaten ergibt sich, daß Halos mit einer charakteristischen Geschwindigkeitsdispersion $\geq 600 \text{ km s}^{-1}$ signifikant mit der Aperturmasse detektiert werden können, wenn man tiefe Beobachtungsfelder hoher Qualität zur Verfügung hat.

Reblinsky & Bartelmann (1999) haben erstmals mit der Aperturmasstechnik Halos in großen N -Körper Simulationen nachgewiesen. Die Autoren haben gezeigt, daß die Aperturmasstechnik in Bezug auf einen signifikanten Nachweis von Halos weniger empfindlich gegen Projektionseffekte ist als Methoden, die auf dem Nachweis von Licht beruhen.

Seitz et al. (1998) und Erben et al. (1999) haben die Aperturmasstechnik zur Analyse des schwachen Linseneffekts realer Daten eingesetzt. In Seitz et al. (1998) wird mit nur 33 Hintergrundgalaxien der als schwache Gravitationslinse wirkende Galaxienhaufen MS1512+36 mit hoher Signifikanz nachgewiesen. Erben et al. (1999) haben sieben Bogenminuten südlich des Galaxienhaufens Abell 1942 einen statistisch hoch signifikanten Nachweis für die Existenz einer dunklen Massenkonzentration geführt. Dieses Ergebnis zeigt, daß dunkle Halos, die mit anderen, auf der Lichtemission beruhenden Verfahren, nicht nachweisbar sind mit der Aperturmasstechnik gefunden werden können.

Beide Beobachtungsergebnisse bestätigen die von Schneider (1996) gemachten theoretischen Vorhersagen. Es ist deshalb möglich, Halos nur aufgrund ihrer Masseneigenschaften nachzuweisen. Der Vorteil der Aperturmasstechnik ist, daß keine Annahmen über das Masse-zu-Leuchtkraft Verhältnis gemacht werden müssen, die bei anderen Verfahren, bei denen emittiertes Licht in verschiedenen Wellenlängen gemessen wird, notwendig sind. Halo-Kataloge, die durch die Analyse von Beobachtungsdaten mit der Aperturmasstechnik erstellt werden, können direkt mit theoretischen Ergebnissen, z.B. aus N -Körper Simulationen, verglichen werden. Die zeitliche Entwicklung der Halos mit der Rotverschiebung hängt stark von den kosmologischen Parametern ab (siehe z.B. White

et al. 1993, Eke et al. 1996, Bartelmann et al. 1998 und Borgani et al. 1999). Aus diesem Grund ist eine Population von Halos, die nur aufgrund ihrer Masse nachgewiesen wurden, ein wichtiger Indikator für das kosmologische Modell.

Wir untersuchen in diesem Kapitel die Frage, ob die Statistik von M_{ap} -Werten mit hohem S/R-Verhältnis, die wir mit Halos identifizieren, benutzt werden kann, um die kosmologischen Parameter einzuschränken (siehe Kruse & Schneider 1999a). Weiterhin vergleichen wir die Vorhersagen, die auf Gaußschen und nicht-Gaußschen Dichtefeldern beruhen (siehe Abschnitt 2.2).

5.1 Gaußscher Dichtekontrast

Wir betrachten die Aperturmasse (4.1) für $\zeta = 0$, d.h. wir plazieren die Apertur mit Radius θ in das Zentrum eines Halos der Rotverschiebung z_d , dessen Masse M ist. Wir verwenden M_{ap} in der durch das NFW-Profil definierten Form (siehe Gleichung (4.22)).

In Figur 5.1 zeigen wir die Aperturmasse als Funktion der Halomasse für fünf Kosmologien. Die Rotverschiebung des Halos ist $z_d = 0.3$ und der Filterradius $\theta = 2$ Bogenminuten. Die Aperturmasse ist eine monoton wachsende Funktion der Halomasse. Deshalb kann man durch Invertierung eindeutig einem gegebenen Schwellwert M_{ap}^0 eine Masse $M_t = M_t(M_{\text{ap}}^0, z_d, \theta)$ zuordnen, wenn man z_d und θ konstant hält.

Da wir die Anzahldichte der mit der Aperturmasstechnik nachweisbaren Halos berechnen wollen, benötigen wir eine Theorie, die die räumliche Dichte von Halos in einem gegebenen Massenbereich beschreibt. Wir nehmen an, daß die Anzahl der Halos mit Massen im Intervall dM , die sich im mitbewegten Volumen dV_c befinden, durch die aus der Press-Schechter-Theorie hergeleitete Funktion $N_{\text{halo}}(M, z) dM dV_c$ gegeben ist (siehe Abschnitt 2.2.1). Die Anzahl der Halos mit Massen $> M_t$, und somit mit Aperturmassen $> M_{\text{ap}}^0$, ist dann durch

$$N(> M_{\text{ap}}^0, \theta) = \int dV_p (1 + z_d)^3 G(z_d, M_{\text{ap}}^0, \theta) \quad (5.1)$$

gegeben, wobei

$$G(z_d, M_{\text{ap}}^0, \theta) = \int dM N_{\text{halo}}(M, z_d) H(M_{\text{ap}}(M, z_d, \theta) - M_{\text{ap}}^0). \quad (5.2)$$

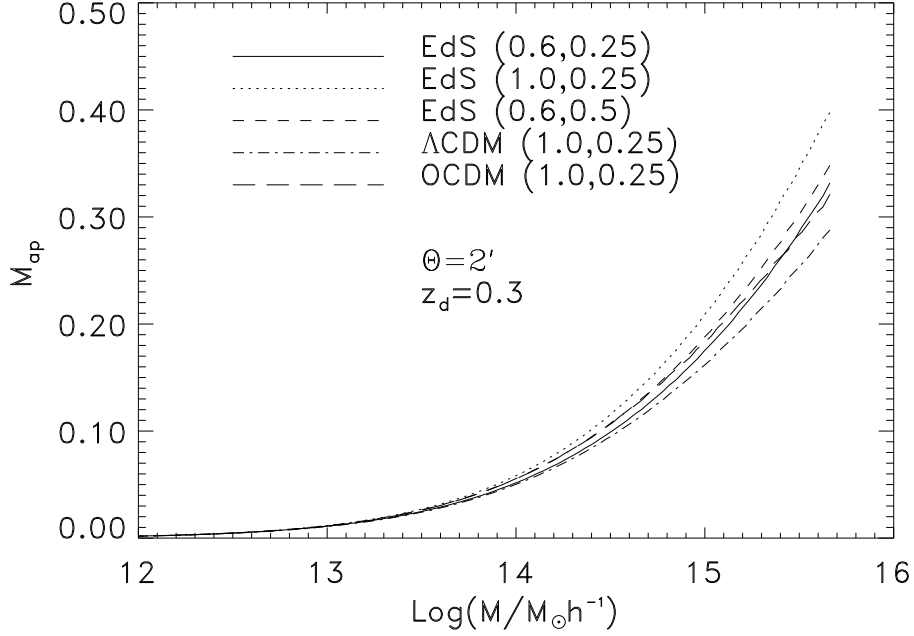
$H(x - y)$ ist die Heaviside Funktion. Das Integral (5.2) ist wegen des Monotonieverhaltens der $M_{\text{ap}} - M$ Beziehung ungleich null nur für $M > M_t$. Führen wir wie im Abschnitt 4.4.3 Kugelkoordinaten ein, so ergibt sich

$$N(> M_{\text{ap}}^0, \theta) = \frac{c}{H_0} \int dz_d \frac{(1 + z_d)^2}{E(z_d)} D_d^2(z_d) \tilde{G}(z_d, M_{\text{ap}}^0, \theta) \quad (5.3)$$

mit

$$\tilde{G}(z_d, M_{\text{ap}}^0, \theta) = \int_{M_t(M_{\text{ap}}^0, z_d, \theta)}^{\infty} dM N_{\text{halo}}(M, z_d). \quad (5.4)$$

$N(> M_{\text{ap}}^0, \theta)$ ist die Anzahl der Halos pro Quadratgrad, denen eine Aperturmasse $> M_{\text{ap}}^0$ zugeordnet werden kann. Da die Aperturmasse durch die beobachtbare tangentielle Scherung bestimmt wird, ist die Anzahl der Halos $N(> M_{\text{ap}}^0, \theta)$ eine Observable.

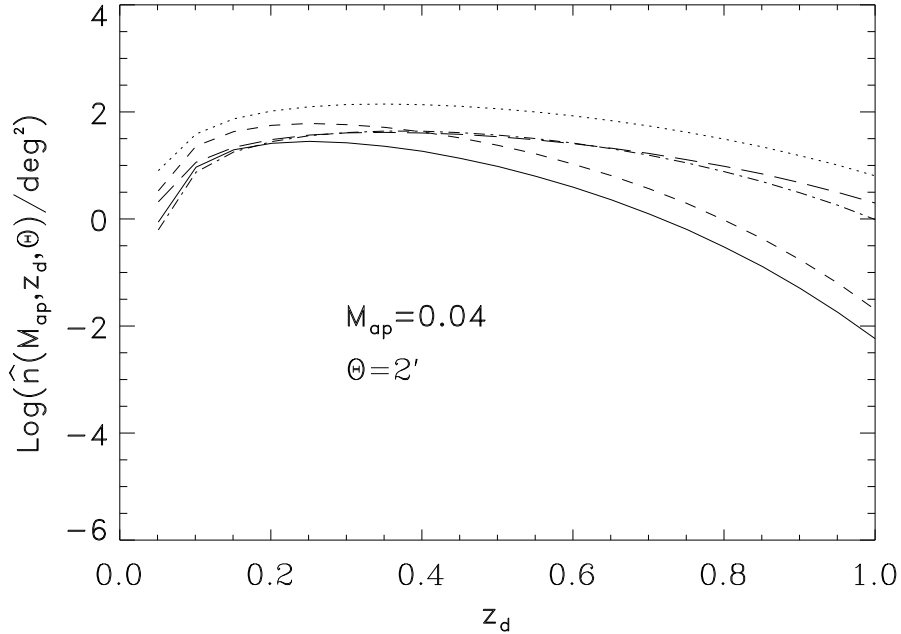


Figur 5.1: Die Aperturmasse M_{ap} , definiert in (4.22), für $\zeta = 0$ als Funktion der Halomasse M , berechnet für die mit den Linientypen bezeichneten Kosmologien. Der Filterradius ist $\theta = 2$ Bogenminuten und die Rotverschiebung des Halos $z_d = 0.3$.

In den Figuren 5.2 und 5.3 zeigen wir den Integranden

$$\hat{n}(M_{\text{ap}}, z_d, \theta) = \frac{c}{H_0} \frac{(1 + z_d)^2}{E(z_d)} D_d^2(z_d) \tilde{G}(z_d, M_{\text{ap}}, \theta) \quad (5.5)$$

aus Gleichung (5.3) als Funktion der Halorotverschiebung für fünf kosmologische Modelle. $\hat{n}(M_{\text{ap}}, z_d, \theta)$ ist die Anzahl der Halos pro Quadratgrad und Rotverschiebungsintervall mit Massen $M > M_t(M_{\text{ap}}, z_d, \theta)$. Der Filterradius ist $\theta = 2$ Bogenminuten. Wir wählen $M_{\text{ap}} = 0.04$ und $M_{\text{ap}} = 0.08$ als Schwellenwerte für die Aperturmasse. Wie man von der Entwicklung der Massenfunktion, der Volumenelemente und der Aperturmasse mit der Rotverschiebung erwartet, erhält man eine unterschiedliche Anzahl von Halos in den verschiedenen Kosmologien. Da die Rotverschiebungsabhängigkeit der Funktion (5.5) im Wesentlichen von der Press-Schechter-Massenfunktion bestimmt wird, ist die Entwicklung in kosmologischen Modellen mit kritischem Dichteparameter stärker als in den Universen mit geringerer Dichte. Weiterhin fällt die Anzahl der Halos für Rotverschiebungen > 0.3 in den Modellen mit $\Omega_0 = 1$ schneller als in den anderen Modellen ab (siehe Figur 2.1). Die Abhängigkeit der Aperturmasse und der Volumenelemente von den Winkelentfernungen erhöht die Unterschiede zwischen den Kosmologien für hohe Rotverschiebungen und führt zu einer verschwindenden Anzahldichte von Halos bei kleinen Rotverschiebungen. Da der Unterschied in der Anzahl massereicher Objekte bei hohen Rotverschiebungen in den ver-

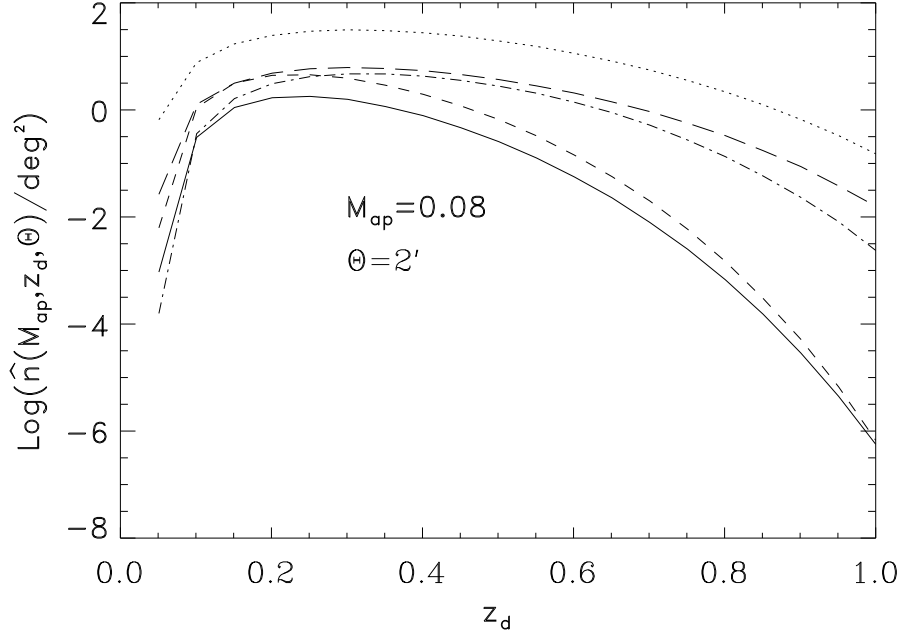


Figur 5.2: Die Anzahl der Halos pro Quadratgrad und pro Rotverschiebungsintervall, definiert in (5.5), mit Aperturmasse $M_{\text{ap}} > 0.04$ als Funktion der Halorotverschiebung. Die kosmologischen Modelle sind wie in der Figur 5.1 bezeichnet. Der Filterradius ist $\theta = 2$ Bogenminuten.

schiedenen Kosmologien größer ist als für weniger massereiche Halos, erhalten wir eine stärkere Entwicklung von (5.5) für $M_{\text{ap}} = 0.08$ (vergleiche die Figuren 5.2 und 5.3).

Wenn wir (5.5) über die Rotverschiebung der Halos integrieren, erhalten wir die Observable $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$. In Figur 5.4 zeigen wir $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ als Funktion der Aperturmasse für einen Filterradius $\theta = 2$ Bogenminuten. Die Abhängigkeit der Funktion $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ von M_{ap} und dem Filterradius θ kann folgendermaßen verstanden werden. Da die Aperturmasse eine monoton wachsende Funktion der Halomasse ist (siehe Figur 5.1), fällt die Anzahl der Halos $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ mit zunehmender Aperturmasse. Wenn wir den Filterradius vergrößern, wird die Aperturmasse kleiner. Somit wächst die Halomasse M_t für eine gegebene Schwelle M_{ap} . Aus diesem Grund verringert sich $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ für wachsende Filterradien. Aufgrund dieses Verhaltens von $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ kann man einen Filterradius θ und einen Wert M_{ap} so bestimmen, daß man eine hinreichend große Anzahl von Halos findet, um einen Unterschied zwischen den einzelnen Kosmologien feststellen zu können.

Wenn man Beobachtungen durchführt, muß man einen Schwellenwert für das S/R-Verhältnis festlegen, der die Signifikanz von Signalen kennzeichnet. Wir betrachten Werte von M_{ap} , deren S/R-Verhältnis $S_c \geq 5$ ist, als signifikante Signale. Reblinsky & Bartelmann (1999) haben durch numerische Simulationen gefunden, daß für $S_c \geq 5$ die mit der Aperturmasstechnik gefundenen Halos

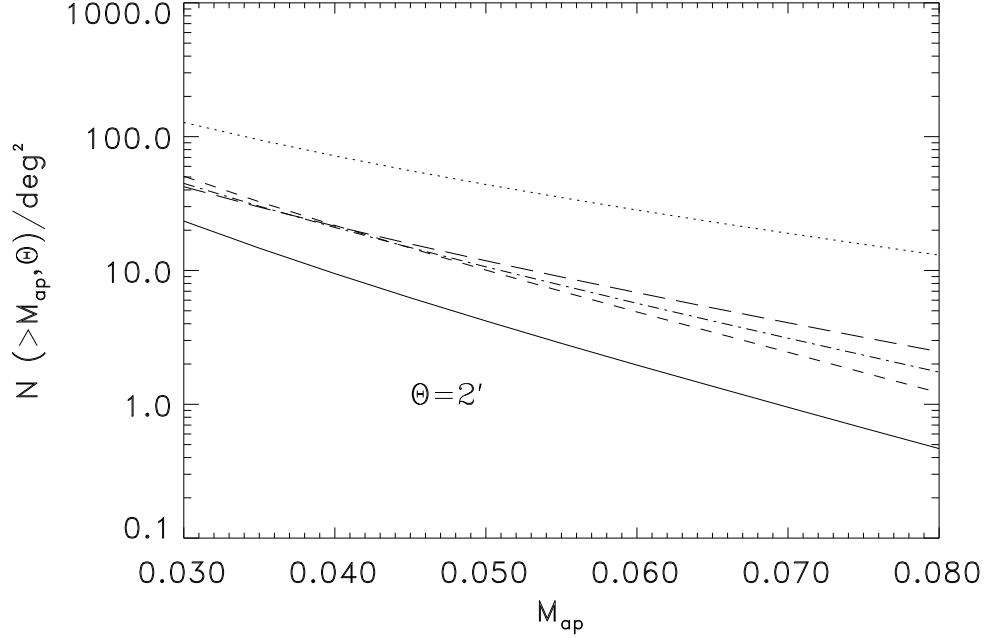


Figur 5.3: Die Figur entspricht Figur 5.2 für $M_{\text{ap}} > 0.08$. Die Aperturmasse ist eine monoton wachsende Funktion der Halomasse (siehe Figur 5.1). Weiterhin ist die zeitliche Entwicklung massereicher Objekte stärker, als für Halos mit niedrigerer Masse. Wir erhalten deshalb, verglichen mit Figur 5.2, eine geringere Anzahl von Halos und eine stärkere Entwicklung in den einzelnen Kosmologien.

in guter Übereinstimmung mit der dreidimensionalen Haloverteilung sind.

In Figur 5.5 zeigen wir die Anzahl der Halos pro Quadratgrad, deren Aperturmassen einem S/R-Verhältnis ≥ 5 entsprechen, als Funktion des Filterradius' θ . Entsprechend dieser Figur erhält man für $\theta = 2$ Bogenminuten die maximale Anzahl von Halos in allen Kosmologien. In den folgenden Rechnungen werden wir diesen 'optimalen' Filterradius benutzen. Einem Radius $\theta = 2$ Bogenminuten entspricht für $S_c = 5$ eine Aperturmasse von $M_{\text{ap}} = 0.04$.

Wenn man Experimente durchführt, muß der Einfluß verschiedener Fehlerquellen auf die Messung von M_{ap} berücksichtigt werden. Da die Aperturmasse durch die tangentielle Elliptizität der Bilder von Hintergrundgalaxien bestimmt wird, verursacht deren intrinsische Elliptizität einen Fehler in der Messung von M_{ap} . Dieser Fehler wird durch die Dispersion σ_ϵ der intrinsischen Elliptizitätsverteilung quantifiziert. Die Anzahl der Quellen wird wenigstens mit einem Poissonfehler behaftet sein. Weiterhin werden diffuse Massenkomponenten entlang der Sichtlinie das Aperturmassensignal eines Halos verfälschen. In Schneider et al. (1998) wurde gezeigt, daß σ_ϵ der größere der ersten beiden Fehler ist. Der letztgenannte Fehler kann analytisch nicht abgeschätzt werden. Sein Einfluß muß durch numerische Simulationen bestimmt werden (siehe Abschnitt 6). Wir beschreiben die durch σ_ϵ verursachte Abweichung $\Delta M_{\text{ap}} = \hat{M}_{\text{ap}} - M_{\text{ap}}$ des



Figur 5.4: Die Anzahl der Halos pro Quadratgrad mit Aperturmasse größer als M_{ap} , definiert in (5.3), als Funktion von M_{ap} . Die kosmologischen Modelle sind wie in der Figur 5.1 bezeichnet. Der Filterradius ist $\theta = 2$ Bogenminuten.

wahren Wertes M_{ap} vom gemessenen \hat{M}_{ap} durch eine Gaußverteilung,

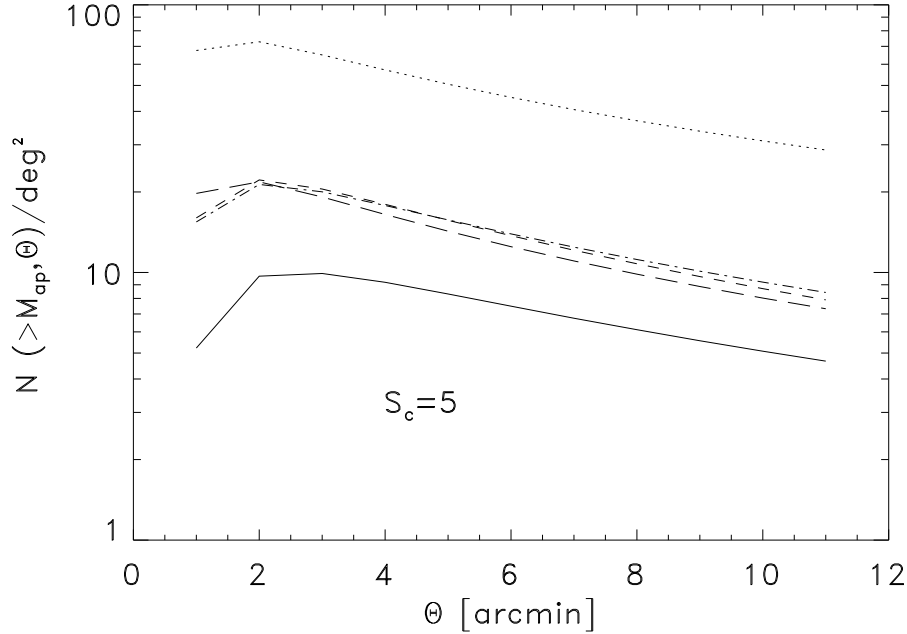
$$p(\Delta M_{\text{ap}}, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_c(\theta)} \exp\left(-\frac{\Delta M_{\text{ap}}^2}{2 \sigma_c^2(\theta)}\right), \quad (5.6)$$

wobei $\sigma_c(\theta)$ durch (4.12) definiert ist. Die Experimenten zugängliche Anzahl der Halos pro Quadratgrad $\hat{N}(> \hat{M}_{\text{ap}}, \theta)$ ist dann durch die Faltung des theoretischen Wertes $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ mit der Verteilung (5.6) gegeben,

$$\hat{N}(> \hat{M}_{\text{ap}}, \theta) = \int dM_{\text{ap}} N(> M_{\text{ap}}, \theta) p(\hat{M}_{\text{ap}} - M_{\text{ap}}, \theta). \quad (5.7)$$

In Figur 5.6 zeigen wir die Observable $\hat{N}(> \hat{M}_{\text{ap}}, \theta)$ für $\theta = 2$ Bogenminuten. Im Vergleich mit $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ (siehe Figur 5.4) sind die Werte von $\hat{N}(> \hat{M}_{\text{ap}}, \theta)$ für die uns interessierenden Werte von M_{ap} (z.B., $M_{\text{ap}} = 0.04, 0.08$) geringfügig höher. Im Folgenden werden wir die Unterschiede in den Verteilungen von M_{ap} und \hat{M}_{ap} vernachlässigen. Wenn man Vorhersagen für reale Beobachtungen machen möchte, muß man die Faltung (5.7) mit der experimentell bestimmten intrinsischen Elliptizitätsverteilung benutzen.

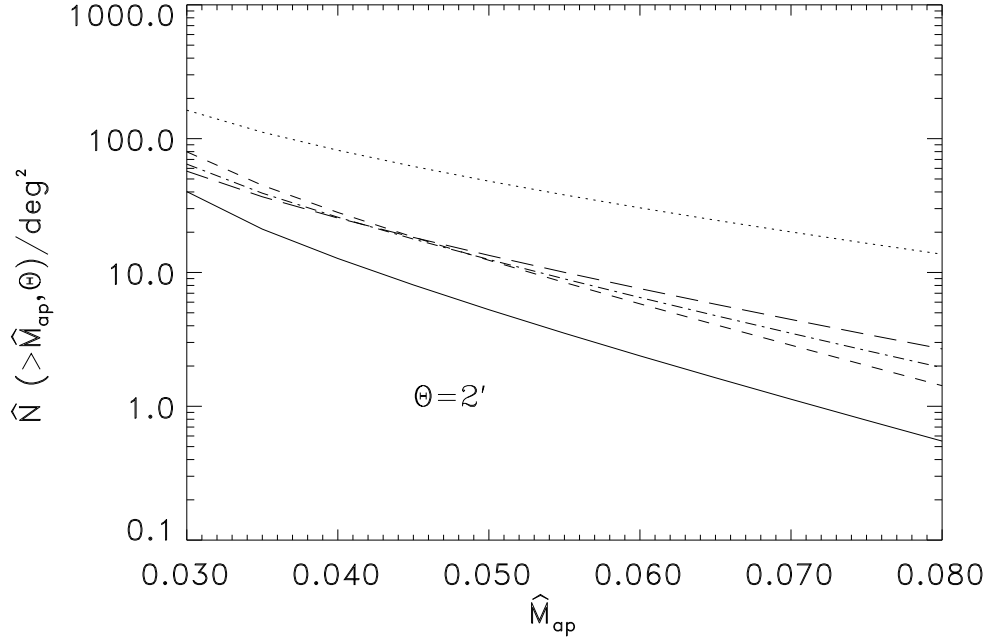
Wir wenden uns nun der Frage zu, ob es möglich ist, durch Messung der Observablen $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ die von uns betrachteten Kosmologien zu unterscheiden. Entsprechend den Figuren 5.4 und 5.6 ist die Anzahldichte der Halos in



Figur 5.5: Die Anzahl der Halos pro Quadratgrad mit Aperturmasse größer als $M_{\text{ap}}(\theta) = 5\sigma_c(\theta)$ als Funktion des Filterradius. Die kosmologischen Modelle sind wie in der Figur 5.1 bezeichnet. Für $\theta = 2$ Bogenminuten erhält man die maximale Anzahl von Halos in allen Kosmologien, wenn man das S/R-Verhältnis $S_c = 5$ wählt.

den EdS(0.6,0.25) und EdS(1,0.25) Modellen beträchtlich kleiner bzw. größer als in den anderen drei Kosmologien. Betrachtet man die Werte in Tabelle 5.1 für $M_{\text{ap}} = 0.04$ sieht man, daß diese beiden Kosmologien signifikant (ohne überlappende Poissonfehler) schon für ein Feld mit einer Fläche von einem Quadratgrad von den anderen kosmologischen Modellen unterschieden werden können. Um die Differenzen zwischen den anderen drei Kosmologien messen zu können, benötigt man größere Felder. Ein 25 Quadratgrad großes Feld, wie es vom MEGACAM-Projekt (siehe Mellier et al. 1999) erwartet wird, ist ausreichend, um die verbleibenden drei Kosmologien signifikant unterscheiden zu können, wenn man $M_{\text{ap}} = 0.08$ wählt (siehe Tabelle 5.1).

Eine genauere Einschränkung der kosmologischen Modelle kann man durch die Verwendung von Informationen über die Rotverschiebungen der Halos erhalten. Wenn man annimmt, daß die Halos nicht vollständig aus dunkler Materie bestehen, sondern mit Galaxienhaufen identifiziert werden können, kann man mit photometrischen oder spektroskopischen Methoden die Rotverschiebungen der Halos bestimmen. Wie wir in den Figuren 5.2 und 5.3 gesehen haben, ist die Entwicklung der durch die Aperturmasse bestimmten Anzahl der Halos pro Quadratgrad und Rotverschiebungsintervall stark vom kosmologischen Modell abhängig. Diese Abhängigkeit kann man ausnutzen, indem man Halos in bestimmten Rotverschiebungsintervallen betrachtet.



Figur 5.6: Die beobachtbare Anzahl der Halos pro Quadratgrad mit Aperturmassen $> \hat{M}_{\text{ap}}$, definiert in Gleichung (5.7), unter Berücksichtigung von Rauschen, das durch die Dispersion der intrinsischen Elliptizitätsverteilung der Quellen gegeben ist. Die kosmologischen Modelle sind wie in Figur 5.1 bezeichnet. Der Filterradius ist $\theta = 2$ Bogenminuten. Im Vergleich zu Figur 5.4 ist die Anzahl der Halos leicht gestiegen.

In Tabelle 5.1 haben wir die Anzahl der Halos mit Aperturmassen größer als $M_{\text{ap}} = 0.04, 0.08$ in den Rotverschiebungsintervallen $z_{\text{d}} \in [0.15, 0.4]$ und $z_{\text{d}} \in [0.4, 1]$ berechnet. Wie man den Figuren 5.2 und 5.3 entnehmen kann, ist die Differenz in der Anzahldichte der Halos in den verschiedenen kosmologischen Modellen für $M_{\text{ap}} = 0.08$ am größten. Die EdS(0.6,0.25) und EdS(1,0.25) Modelle sind wiederum klar von den anderen Kosmologien unterscheidbar. Das EdS(0.6,0.5) Modell kann unter Verwendung von Rotverschiebungsinformation besser von den Universen mit geringer Dichte getrennt werden. Ein Feld von drei Quadratgrad würde ausreichen, um diesen Unterschied feststellen zu können.

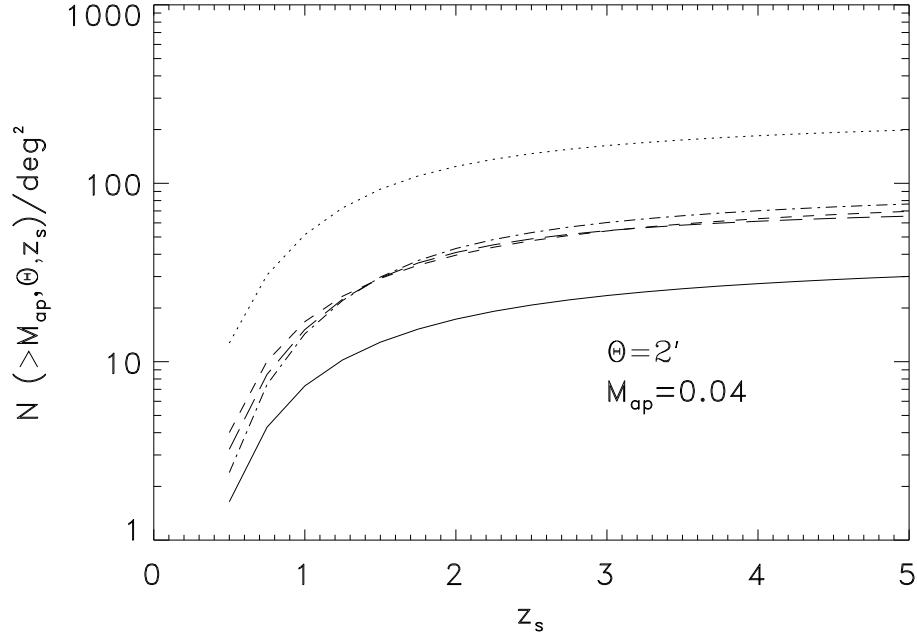
Die Messung der Rotverschiebung von Hintergrundgalaxien würde eine weitere Quelle von Informationen darstellen, die man zur Unterscheidung kosmologischer Modelle benutzen kann. In Figur 5.7 zeigen wir die Anzahl der Halos für $M_{\text{ap}} > 0.04$ und $\theta = 2$ Bogenminuten als Funktion der Rotverschiebung der Quellen. Alle Quellen haben die gleiche Rotverschiebung z_{s} . Die Anzahl der Halos hängt stark von der Rotverschiebung der Quellen ab. Abgesehen von kleinen Rotverschiebungen, $z_{\text{s}} \sim 0.6$, ist diese Abhängigkeit in allen Kosmologien ähnlich. Da die Anzahl der Halos für $z_{\text{s}} \sim 0.6$ klein ist, erwarten wir keine Einschränkungen der kosmologischen Parameter durch Messung der Rotverschiebungen der Quellen in dem hier betrachteten Modell.

Tabelle 5.1: Die Anzahl der Halos pro Quadratgrad mit Aperturmassen $M_{\text{ap}} > 0.04$ und $M_{\text{ap}} > 0.08$ für einen Filterradius $\theta = 2$ Bogenminuten. Das Rotverschiebungsintervall in den eckigen Klammern entspricht dem Integrationsbereich in Gleichung (5.3). Die Zahlen in Klammern unter den kosmologischen Modellen entsprechen (σ_8, Γ) .

	EdS (0.6,0.25)	EdS (1,0.25)	EdS (0.6,0.5)	OCDM (1,0.25)	Λ CDM (1,0.25)
$N(> 0.04, 2')$ $z_d \in [0, 1]$	9.42	71.66	21.66	21.44	20.92
$N(> 0.08, 2')$ $z_d \in [0, 1]$	0.47	13.00	1.23	2.46	1.74
$N(> 0.04, 2')$ $z_d \in [0.15, 0.4]$	6.18	30.66	13.54	9.07	9.02
$N(> 0.04, 2')$ $z_d \in [0.4, 1]$	2.34	37.09	5.89	11.23	11.14
$N(> 0.08, 2')$ $z_d \in [0.15, 0.4]$	0.36	6.94	0.93	1.37	0.99
$N(> 0.08, 2')$ $z_d \in [0.4, 1]$	0.06	5.29	0.17	0.97	0.71

Wir haben gezeigt, daß die Statistik von M_{ap} -Werten mit hohem S/R-Verhältnis experimentell realisierbare Einschränkungen kosmologischer Modelle liefern kann, wenn große und tiefe Beobachtungsfelder hoher Qualität zur Verfügung stehen. Die hier gemachten Vorhersagen werden hilfreich sein für die Interpretation von Daten, die das MEGACAM Projekt liefern wird, da wir unsere Berechnungen den technischen Parametern dieses Projektes angepasst haben.

Unsere Berechnungen beruhen auf einigen vereinfachenden Annahmen. Das von uns betrachtete S/R-Verhältnis berücksichtigt nur Rauschen von der intrinsischen Elliptizitätsverteilung der Quellen. Eine schwer abschätzbare Fehlerquelle ist durch die Beobachtungstechnik gegeben. Dazu zählt z.B. der Einfluß der Erdatmosphäre auf die Form der Hintergrundgalaxien. Dieser wird durch eine, möglicherweise anisotrope, Funktion berücksichtigt, die über die Gestalt einer Punktquelle, z.B. eines Sterns, kalibriert wird. Die Analyse der beobachtungstechnisch bedingten Fehler ist ein eigenständiges Forschungsgebiet (siehe z.B. Bonnet & Mellier 1995, Kaiser et al. 1995, Luppino & Kaiser 1997, van Waerbeke et al. 1997, Hoekstra et al. 1998) und soll im Rahmen dieser Arbeit



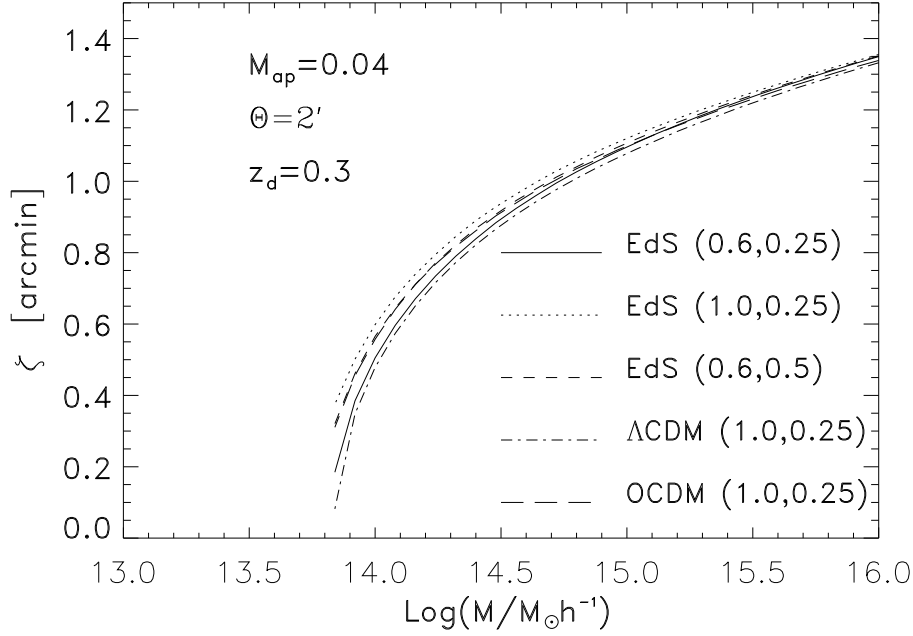
Figur 5.7: Die Anzahl von Halos pro Quadratgrad mit Aperturmasse größer als $M_{\text{ap}} = 0.04$ als Funktion der Quellenrotverschiebung. Wir nehmen an, daß alle Quellen die gleiche Rotverschiebung z_s haben. Die kosmologischen Modelle sind wie in der Figur 5.1 bezeichnet. Der Filterradius ist $\theta = 2$ Bogenminuten.

nicht betrachtet werden.

Wir haben in diesem Abschnitt die gleichen theoretischen Modelle benutzt, die der Berechnung des Flügels der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Aperturmasse (siehe Abschnitt 4.4.3) zugrunde lagen. In welchem Maße diese Annahmen unser Ergebnis beeinflussen, wird in Kapitel 6 mit numerischen Simulationen untersucht.

5.1.1 Die Anzahldichte von Halos mit großen Wirkungsquerschnitten

Wir haben im letzten Abschnitt für einen gegebenen Filterradius θ die Anzahl der Halos pro Quadratgrad mit einer Aperturmasse $> M_{\text{ap}}$ berechnet. Wenn man die Aperturmasse auf einem Beobachtungsfeld berechnet, erhält man eine zweidimensionale M_{ap} -Karte. Fixiert man den Filterradius θ , dann entspricht $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ der Anzahldichte von Werten der Aperturmasse mit Amplituden $> M_{\text{ap}}$. Diese Werte können durch Rauschen, das im Wesentlichen von den intrinsischen Elliptizitäten der Quellen verursacht wird, generiert werden. Man erwartet intuitiv, daß große Werte der Aperturmasse, die massereichen Objekten mit großen Wirkungsquerschnitten entsprechen, weniger von Rauschen beeinflusst werden als kleine Aperturmassen. Aus diesem Grund wollen wir in



Figur 5.8: Der Radius des Wirkungsquerschnitts, den man aus Gleichung (4.22) erhält, als Funktion der Halomasse für fünf kosmologische Modelle. Wie setzen $M_{\text{ap}} = 0.04$, $\theta = 2$ Bogenminuten und $z_d = 0.3$. Der Wirkungsquerschnitt der Halos, die durch diese Parameter charakterisiert sind, verschwindet für Halomassen kleiner als $\sim 10^{13.8} M_{\odot} h^{-1}$.

diesem Abschnitt die Statistik der Halos untersuchen, die einen Wert $> M_{\text{ap}}$ und eine Wirkungsquerschnittsfläche $> \sigma = \pi \zeta_t^2$ haben.

Wir betrachten die Aperturmasse in der Form (4.22), also in Abhängigkeit von ζ . Im Abschnitt 4.4.3 haben wir aus (4.22) einen Wirkungsquerschnitt für Halos hergeleitet, der die Fläche beschreibt, in der ein Schwellenwert M_{ap} überschritten wird. Wenn wir in Gleichung (4.22) θ , M_{ap} und z_d fixieren, dann erhalten wir implizit einen funktionalen Zusammenhang zwischen ζ und der Halomasse M . Wir zeigen diese Funktion für die Werte $\theta = 2$ Bogenminuten, $M_{\text{ap}} = 0.04$ und $z_d = 0.3$ in Figur 5.8 für fünf Kosmologien. ζ ist eine monoton wachsende Funktion der Halomasse und kann deswegen für einen Schwellenwert ζ_t invertiert werden, wenn man M_{ap} , z_d und θ fixiert. Man erhält so eine Masse $M_t = M_t(\zeta_t, z_d, M_{\text{ap}}, \theta)$. Benutzt man diese Masse als untere Integrationsgrenze in Gleichung (5.3), erhält man analog zum Vorgehen im letzten Abschnitt die Gleichung

$$N(> M_{\text{ap}}, > \zeta_t, \theta) = \frac{c}{H_0} \int dz_d \frac{(1+z_d)^2}{E(z_d)} D_d^2(z_d) \times \int dM N_{\text{halo}}(M, z_d) H[\zeta(M_{\text{ap}}, \theta, M, z_d) - \zeta_t]. \quad (5.8)$$

$N(> M_{\text{ap}}, > \zeta_t, \theta)$ ist die Anzahl der Halos mit einer Aperturmasse $> M_{\text{ap}}$ und

Tabelle 5.2: Die Anzahl der Halos pro Quadratgrad mit Aperturmasse größer als $M_{\text{ap}} = 0.04$ und einem Radius des Wirkungsquerschnitts größer als $\zeta_t = 0.8$ Bogenminuten (definiert in Gleichung (5.8)) für fünf kosmologische Modelle. Der Filterradius ist $\theta = 2$ Bogenminuten.

Ω_0	Ω_Λ	Γ	σ_8	$N(> 0.04, > 0.8', 2')$
1.0	0	0.25	0.6	0.47
1.0	0	0.25	1.0	11.9
1.0	0	0.5	0.6	1.16
0.3	0	0.25	1.0	2.22
0.3	0.7	0.25	1.0	1.67

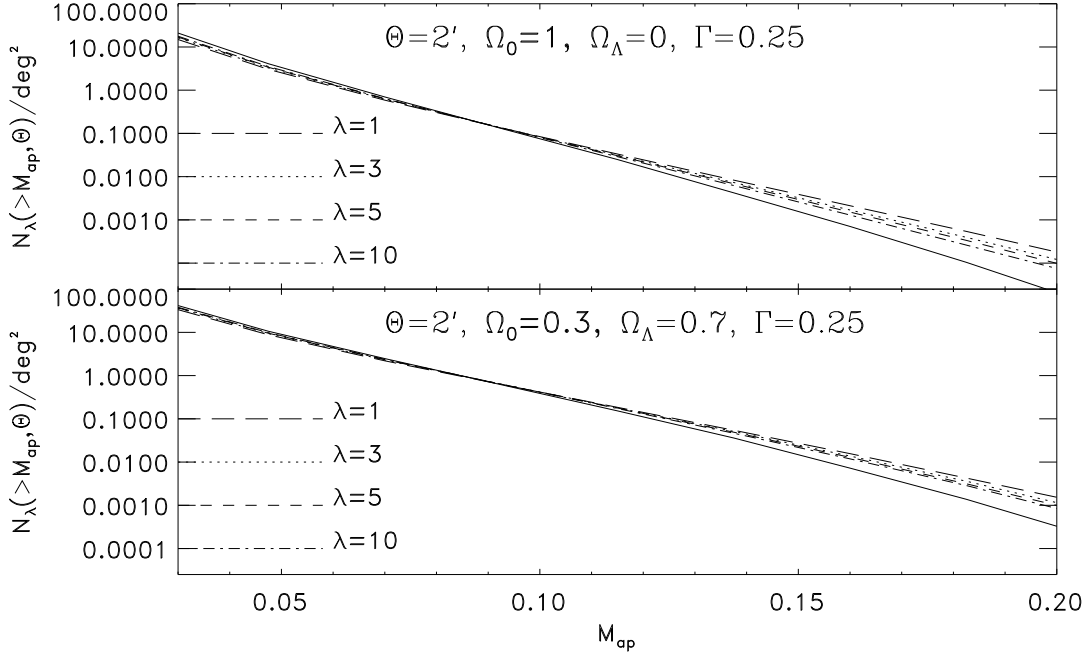
einem Wirkungsquerschnitt mit Radius $> \zeta_t$, wobei der Integrand wiederum ungleich Null nur für $M > M_t$ ist. Für $\zeta_t = 0$ gilt: $N(> M_{\text{ap}}, \theta) = N(> M_{\text{ap}}, > \zeta_t, \theta)$.

In Tabelle 5.2 zeigen wir die Anzahl der Halos pro Quadratgrad mit einer Aperturmasse größer als $M_{\text{ap}} = 0.04$ und einem Wirkungsquerschnittsradius, der den Schwellenwert $\zeta_t = 0.8$ Bogenminuten überschreitet. Der Filterradius ist $\theta = 2$ Bogenminuten. Da die Anzahl massereicher Halos am deutlichsten die Unterschiede in der nichtlinearen Entwicklung verschiedener Kosmologien zeigt, ist die Observable (5.8) für gegebene Werte von M_{ap} und θ besser als $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ geeignet, kosmologische Modelle zu unterscheiden. Ein Nachteil bei der Verwendung von (5.8) ist die größere Feldgröße, die benötigt wird, um eine signifikante Anzahl von Halos nachzuweisen. Entsprechend Tabelle 5.2 können für ein 25 Quadratgrad großes Beobachtungsfeld alle hier betrachteten Kosmologien signifikant unterschieden werden. Halos mit einem Radius größer als 0.8 Bogenminuten haben für $z_d = 0.3$ und $\theta = 2$ Bogenminuten eine Masse $\sim 10^{14} M_\odot/h$ (siehe Figur 5.8). Auf einem Beobachtungsfeld, das eine Größe von 25 Quadratgrad hat, erwartet man ~ 12 (EdS(0.6,0.25) Modell) bis ~ 300 (EdS(1,0.25) Modell) massereiche Halos.

5.2 Nicht-Gaußscher Dichtekontrast

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die Anzahldichte der Halos, die man mit der Aperturmasstechnik erhalten würde, wenn der Dichtekontrast durch ein nicht-Gaußsches Zufallsfeld beschrieben wird (siehe Abschnitt 2.2.2).

Die Anzahl der Halos pro Quadratgrad mit Aperturmasse $> M_{\text{ap}}$, die sich ergibt, wenn wir die Massenfunktion für einen nicht-Gaußschen Dichtekontrast (siehe Gleichung (2.17)) berechnen, ist entsprechend der Argumentation in Ab-



Figur 5.9: Die Anzahl der Halos pro Quadratgrad als Funktion der Aperturmasse für einen Filterradius von $\theta = 2$ Bogenminuten für zwei Kosmologien. Die durchgezogene Linie entspricht $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ aus Abschnitt 5.1, wobei die Normierung σ_8 aus Gleichung (2.19) bestimmt wurde. Die anderen Linientypen kennzeichnen die Anzahl der Halos pro Quadratgrad, die man für einen nicht-Gaußschen Dichtekontrast, parametrisiert durch λ (siehe (5.9)), erhält. Hier wurde die Normierung nach dem in Abschnitt 2.2.2 geschilderten Verfahren bestimmt.

schnitt 5.1 durch

$$N_{\lambda}(> M_{\text{ap}}, \theta) = \frac{c}{H_0} \int dz_d \frac{(1+z_d)^2}{E(z_d)} D_d^2(z_d) \int_{M_t(M_{\text{ap}}, z_d, \theta)}^{\infty} dM N_{\text{halo}}^{\lambda}(M, z_d) \quad (5.9)$$

gegeben.

In Figur 5.9 vergleichen wir die Größen $N_{\lambda}(> M_{\text{ap}}, \theta)$ und $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ (siehe auch Figur 2.4) als Funktion von M_{ap} für einen Filterradius von $\theta = 2$ Bogenminuten. Dabei beschränken wir uns auf zwei kosmologische Modelle mit verschwindender Krümmung: ein EdS-Modell mit $\Gamma = 0.25$ und ein Modell mit kosmologischer Konstante $\Omega_{\Lambda} = 0.7$ und $\Gamma = 0.25$. Die Normierung des Powerspektrums σ_8 berechnen wir für die Massenfunktion $N_{\text{halo}}^{\lambda}(M, z_d)$ entsprechend dem in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Verfahren, dessen Ergebnis in Figur 2.3 dargestellt ist. Für das Powerspektrum, das die Massenfunktion $N_{\text{halo}}(M, z_d)$ bestimmt, berechnen wir σ_8 mit der Formel (2.19). $N_{\lambda}(> M_{\text{ap}}, \theta)$ wird für $\lambda = 1, 3, 5$ und 10 berechnet. Die maximale Aperturmasse $M_{\text{ap}} = 0.2$ entspricht einem S/R-Verhältnis von $S_c = 25$ für den Filterradius $\theta = 2$ Bogenminu-

ten. Diesem S/R-Verhältnis entspricht ein Halo mit Masse $M \sim 10^{15} M_{\odot} h^{-1}$, wenn die Halorotverschiebung $z_d = 0.3$ ist (siehe Figur 5.1). Das Minimum von $N_{\lambda}(> M_{\text{ap}}, \theta)$ ist so gewählt, daß wir *ein* Halo erhalten, wenn wir die gesamte Fläche des Himmels zur Verfügung haben.

Wie erwartet, vergrößert sich der Unterschied zwischen den Anzahldichten $N_{\lambda}(> M_{\text{ap}}, \theta)$ und $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ in beiden Kosmologien für wachsende Aperturmassen. Die Ursache für diese zunehmende Differenz ist der ausgedehnte Flügel der nicht-Gaußschen Verteilungsfunktion (2.15), der die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten massereicher Objekte im Vergleich zu einer Gaußschen Verteilung erhöht. Weiterhin erhöht sich die Anzahldichte $N_{\lambda}(> M_{\text{ap}}, \theta)$ für abnehmende λ , da sich die nicht-Gaußschen Eigenschaften der Verteilung (2.15) in diesem Fall verstärken (siehe Figur 2.2).

Ein signifikanter Unterschied zwischen den Anzahldichten $N_{\lambda}(> M_{\text{ap}}, \theta)$ und $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ ergibt sich für beide kosmologische Modelle nur für große Werte von M_{ap} . Der experimentelle Nachweis dieses Unterschieds ist allerdings schwierig, da die räumliche Dichte massereicher Halos sehr gering ist. Man würde z.B. im Falle des EdS-Modells ein Beobachtungsfeld mit einer Größe von ~ 10000 Quadratgrad benötigen, um einen Unterschied von ungefähr einer Größenordnung zwischen den Anzahldichten $N_{\lambda}(> M_{\text{ap}}, \theta)$ und $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ messen zu können.

Aus diesem Grund erwarten wir nicht, daß in naher Zukunft mit der Aperturmassentechnik die Anzahldichten massereicher Halos, die sich aus Gaußschen und nicht-Gaußschen Dichtefeldern ergeben, unterschieden werden können.

Kapitel 6

Numerischer Test der analytischen Näherungen

Die Berechnungen in den letzten beiden Kapiteln basierten auf den in Kapitel 2 eingeführten Modellen für die Massendichte und die räumliche Verteilung der Halos. Wir hatten weiterhin angenommen, daß sich entlang jeder Sichtlinie jeweils nur ein Halo befindet, d.h. wir haben diffuse, nicht kollabierte Massenkomponten vernachlässigt. In diesem Kapitel vergleichen wir die theoretischen Vorhersagen von Kruse & Schneider (1999a) und Kruse & Schneider (1999b) mit den Ergebnissen numerischer Simulationen (siehe Reblinsky et al. 1999).

6.1 Numerische Simulationen

Jain et al. (1999) (JSW) (siehe auch Jain et al. 1998) haben die Ausbreitung von Lichtstrahlen in numerisch erzeugten Modelluniversen untersucht. Die Simulationsdaten für die vier in Tabelle 6.1 gezeigten Kosmologien wurden vom *Virgo Supercomputing Consortium* zur Verfügung gestellt (siehe Jenkins et al. 1998). N_{par} ist die Anzahl der Teilchen, deren gravitative Wechselwirkung in Abhängigkeit von der Zeit simuliert wird. m_p ist die Masse eines dieser

Tabelle 6.1: Parameter der N -Körper Simulationen

Simulation	SCDM	τ CDM	Λ CDM	OCDM
N_{par}	256^3	256^3	256^3	256^3
$l_{\text{soft}}[h^{-1} \text{ kpc}]$	36	36	30	30
Γ	0.5	0.21	0.21	0.21
$L_{\text{box}}[h^{-1} \text{ Mpc}]$	85	85	141	141
Ω_0	1.0	1.0	0.3	0.3
Λ_0	0.0	0.0	0.7	0.0
H_0 [km/s/Mpc]	50	50	70	70
σ_8	0.6	0.6	0.9	0.85
$m_p[10^{10}h^{-1}M_{\odot}]$	1.0	1.0	1.4	1.4
Feldgröße [Grad]	2.7	2.7	3.4	3.9

Teilchen. Die Masse wird in Einheiten von $[10^{10} h^{-1} M_{\odot}]$ angegeben. Die Größe der Simulationsbox in Einheiten von $[h^{-1} \text{ Mpc}]$ ist L_{box} . Das Newtonsche Gravitationsgesetz divergiert für kleiner werdende Abstände. Aus diesem Grund führt man eine Skala l_{soft} ein und modifiziert das Newtonsche Gravitationsgesetz für Distanzen $l < l_{\text{soft}}$, um das unendliche Anwachsen der Kraft zu verhindern.

JSW haben die kosmische Scherung und die effektive Konvergenz (siehe Abschnitt 3.2) durch Anwendung der Mehrfach-Linsenebenen-Theorie (MLT) (siehe Schneider et al. 1992) aus der simulierten Massenverteilung berechnet. In der MLT berechnet man die beobachtete Position einer Quelle, indem man die Massenverteilung entlang einer Sichtlinie auf mehrere Linsenebenen projiziert und dann für jede Ebene den Ablenkwinkel des von der Quelle ausgesendeten Lichtstrahls berechnet. Die Summe über die mit den Winkelentfernungen zu den Linsenebenen und zu den Quellen gewichteten Ablenkwinkel ergibt die beobachtete Position der Quelle. Um die MLT anwenden zu können, muß man die Rotverschiebungen der Linsen und die der Quellen kennen. JSW haben alle Quellen bei der Rotverschiebung $z_s = 1$ betrachtet. In diesem Fall ist die Verteilung (3.33) durch eine Deltafunktion gegeben.

Die Scherung und die Konvergenz ist von JSW auf einem zweidimensionalen Gitter mit 2048×2048 Punkten berechnet worden. Wenn wir die in Abschnitt 4.2 eingeführte diskrete Version der Aperturmasse

$$M_{\text{ap}}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_i \epsilon_{ti}(\boldsymbol{\vartheta}_i) Q(|\boldsymbol{\vartheta}_i|), \quad \epsilon_{ti}(\boldsymbol{\vartheta}_i) = -\text{Re} \left(\epsilon_i(\boldsymbol{\vartheta}_i) e^{-2i\phi_i} \right) \quad (6.1)$$

zusammen mit der Transformationsgleichung für die Elliptizitäten

$$\epsilon = \frac{\epsilon^{(s)} + g}{1 + g^* \epsilon^{(s)}}, \quad g(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{\gamma(\boldsymbol{\vartheta})}{1 - \kappa(\boldsymbol{\vartheta})} \quad (6.2)$$

(siehe Abschnitt 3.1) verwenden, können wir aus der numerisch bestimmten Konvergenz κ und Scherung γ die Aperturmasse auf dem Gitter berechnen, indem wir die Gitterpunkte als Zentren von Aperturen mit Radius θ betrachten und über die tangentialen Elliptizitäten innerhalb der Aperturen summieren. Die Berechnung der Aperturmasse (6.1) kann mit und ohne Hintergrundgalaxien durchgeführt werden.

Im ersten Fall verteilen wir Hintergrundgalaxien, die wir mit dem Index i bezeichnen, zufällig mit einer Anzahlichte von 30 Galaxien pro Quadratbogenminute auf dem Feld und bestimmen den Betrag der komplexen intrinsischen Elliptizität $\epsilon_i^{(s)} = |\epsilon_i^{(s)}| \exp(2i\phi_i)$ aus der Verteilung

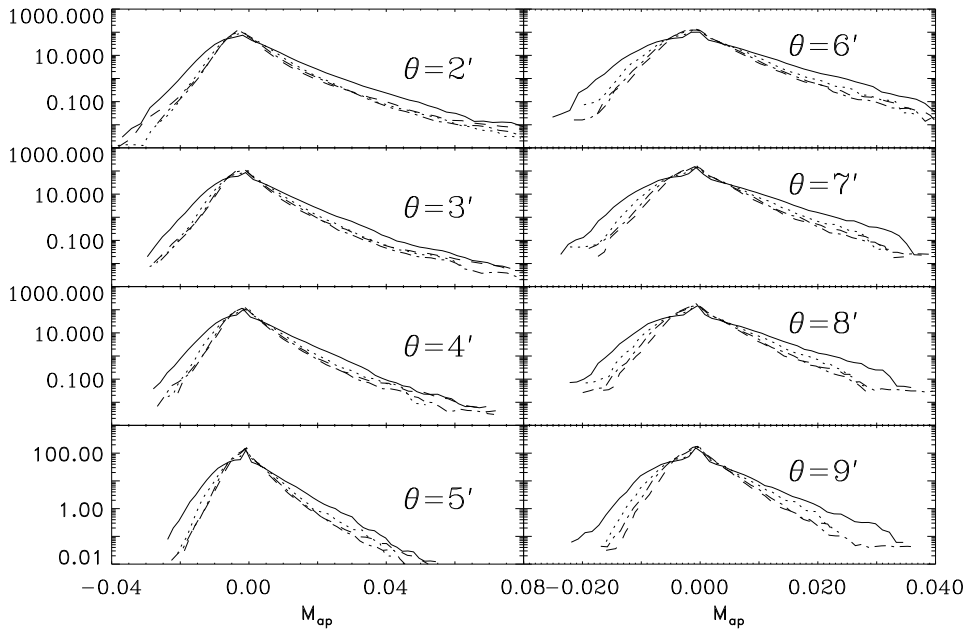
$$p_s(|\epsilon^{(s)}|) = \frac{1}{\pi \sigma_{\epsilon}^2 \left[1 - \exp(-\sigma_{\epsilon}^{-2}) \right]} \exp \left(-\frac{|\epsilon^{(s)}|^2}{\sigma_{\epsilon}^2} \right), \quad (6.3)$$

wobei wir $\sigma_{\epsilon} = 0.2$ wählen (siehe Abschnitt 4.2). Der Polarwinkel ϕ_i der intrinsischen Elliptizität wird zufällig gewählt. $\boldsymbol{\vartheta}_i$ in Gleichung (6.1) ist der Ort der i -ten Galaxie. Die Elliptizität ϵ_i wird entsprechend der Gleichung (6.2) berechnet, wobei man die Konvergenz κ und die Scherung γ in der zweiten Gleichung von (6.2) durch Interpolation am Ort der Hintergrundgalaxien erhält. Da die

intrinsischen Elliptizitäten ein Rauschquelle für die Messung der Aperturmasse darstellen, werden wir im Folgenden von der Berechnung der Aperturmasse *mit Rauschen* sprechen.

Im zweiten Fall betrachten wir keine Hintergrundgalaxien. Die tangentielle Elliptizität in (6.1) wird nun direkt durch die in den Simulationen bestimmte Konvergenz und Scherung aus (6.2) berechnet, da $\epsilon^{(s)} = 0$ gilt. Innerhalb einer Apertur wird über die auf dem Gitter gegebene tangentielle Elliptizität summiert. Wir sagen im Folgenden, daß die Aperturmasse *ohne Rauschen* berechnet wird.

6.2 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Aperturmasse



Figur 6.1: Die normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung der M_{ap} -Statistik für verschiedene Filterradien θ . Die kosmologischen Modelle sind durch die Linienarten bezeichnet: SCDM (durchgezogene Linie), τ CDM (gepunktete Linie), OCDM (gestrichelte Linie) und Λ CDM (gestrichelt-gepunktete Linie). Die Aperturmasse ist ohne Rauschen berechnet worden.

In Figur 6.1 zeigen wir die normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung der ohne Rauschen berechneten Aperturmasse für die Filterradien $\theta = 2 \dots 9$ Bogenminuten. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung wurde für jeden Filterradius für die kosmologischen Modelle aus der Tabelle 6.1 berechnet. Man sieht klar, daß die

Wahrscheinlichkeitsverteilung eine positive Schiefeit besitzt, d.h. die Verteilung hat einen asymmetrischen, ausgedehnten Flügel hin zu hohen positiven Werten von M_{ap} . Die positive Schiefeit ist von Schneider et al. (1998) im Rahmen der quasilinearen Theorie der Strukturentwicklung vorhergesagt worden (siehe Abschnitt 4.4.2). Der Grund für das Auftreten der Schiefeit liegt in der Definition der Aperturmasse als projizierter Dichtekontrast. Wegen dieser Definition erbt die Aperturmasse die statistischen Eigenschaften des Dichtekontrasts (siehe Kapitel 4). Aufgrund des Gravitationskollaps', der zu massereichen nichtlinearen Objekten führt, erhält die anfänglich Gaußsche Wahrscheinlichkeitsverteilung des Dichtekontrasts nicht-Gaußsche Eigenschaften.

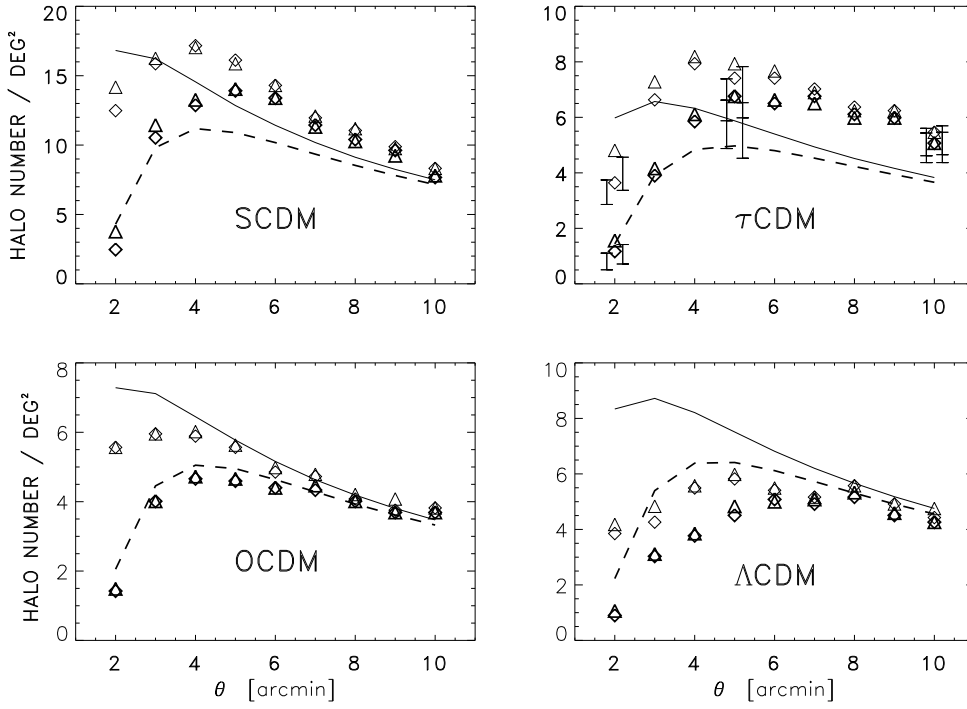
Die Ausprägung des ausgedehnten Flügels ist besonders deutlich für kleine Filterradien zu sehen, denn kleine Skalen sind charakteristisch für kollabierte Objekte. Größere Radien spiegeln eher Eigenschaften der linearen Entwicklung wieder, die durch ein Gaußsches Zufallsfeld beschrieben werden kann.

Wir haben im Kapitel 4 gezeigt, daß die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten großer Aperturmassen vom kosmologischen Modell abhängen und durch ein Exponentialgesetz beschrieben werden können. Beide Erwartungen werden qualitativ in Figur 6.1 bestätigt. Im Abschnitt 6.4 werden wir genauer untersuchen, ob die theoretischen Vorhersagen für den Anstieg und die Amplitude des Flügels der Wahrscheinlichkeitsverteilung von M_{ap} durch die Simulationsergebnisse bestätigt werden.

6.3 Anzahldichte der Halos

Wir haben in Kapitel 5 die Anzahldichte der Halos berechnet, die man erwartet, wenn man deren schwachen Linseneffekt mit der Aperturmasse messen würde. Dabei wurden Halos mit Werten der Aperturmasse identifiziert, die hohen S/R-Verhältnissen entsprechen. Wir wollen in diesem Abschnitt die in Kapitel 5 gemachten theoretischen Vorhersagen mit den Resultaten der oben beschriebenen Simulationen vergleichen. Da man sehr große Beobachtungsfelder benötigt, um den Einfluß eines nicht-Gaußschen anfänglichen Dichtekontrasts auf die Anzahldichte der massereichen Halos messen zu können, wir aber nur kleine Felder zur Verfügung haben (siehe Tabelle 6.1), werden wir uns auf den Vergleich mit den Ergebnissen beschränken, die mit einem Gaußschen anfänglichen Dichtekontrast berechnet wurden.

In Figur 6.2 vergleichen wir $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ (siehe Gleichung 5.3) und $N(> M_{\text{ap}}, > 0.6', \theta)$, d.h. die Anzahl der Halos pro Quadratgrad die eine Aperturmasse $> M_{\text{ap}}$ und einen Wirkungsquerschnittsradius > 0.6 Bogenminuten haben (siehe Gleichung 5.8), mit den numerischen Ergebnissen der Simulationen, wenn man die Aperturmasse ohne Rauschen berechnet. Wir bestimmen die Aperturmasse für die Näherung des schwachen Linseneffekts, $\epsilon = \gamma$, und für den allgemeinen Fall, $\epsilon = g$. Nachdem wir M_{ap} entsprechend 6.1 und 6.2 berechnet haben, suchen wir nach zusammenhängenden Bereichen in der zweidimensionalen M_{ap} -Karte, die einen Schwellenwert von M_{ap} überschreiten, der in Anwesenheit von Hintergrundgalaxien mit intrinsischen Elliptizitäten einem S/R-Verhältnis von 5 für einen gegebenen Filterradius θ entsprechen würde, $M_{\text{ap}} = 5\sigma_c(\theta)$. Die



Figur 6.2: Die Größen $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ (dünne durchgezogene Linie, dünne Symbole) und $N(> M_{\text{ap}}, > 0.6', \theta)$ (dicke gestrichelte Linie, dicke Symbole) als Funktion des Filterradius' für die kosmologischen Modelle aus Tabelle 6.1. Die Linien bezeichnen die theoretischen Ergebnisse und die Symbole die der Simulationen. Die Aperturmasse wurde ohne Rauschen für die Näherung des schwachen Linseneffekts, $\epsilon_t = \gamma_t$ (\diamond), und für den allgemeinen Fall, $\epsilon_t = g_t$ (\triangle), berechnet. Wir haben einen S/R-Verhältnis-Schwellenwert von $S_c > 5$ angenommen. Die Fehler im Fenster des τ CDM-Modells sind aus zehn Realisierungen dieses Modells berechnet. Die Fehlerbalken beziehen sich auf den Mittelwert, und sind nach links (für γ_t) bzw. nach rechts (für g_t) verschoben.

zusammenhängenden Bereiche identifizieren wir mit Halos. Wir bestimmen die Fläche A der Bereiche und berechnen den Wirkungsquerschnittsradius ζ entsprechend $\zeta = \sqrt{A/\pi}$. Ein auf diese Weise erhaltener Radius legt den Wirkungsquerschnitt für signifikante Linseneffekte fest, die in eine Aperturmasse $> M_{\text{ap}}$ resultieren. Wir bestimmen dann die Anzahldichte N_{tot} der Halos mit Aperturmassen $> M_{\text{ap}}$ und die Anzahldichte N_{rad} der Halos mit Wirkungsquerschnittsradius > 0.6 Bogenminuten. Ähnlich wie in Figur 5.5 berechnen wir die theoretischen Größen unter Annahme eines Schwellenwertes für das S/R-Verhältnis. Wir wählen $S_c > 5$. Wir vergleichen dann die Größen $N(> M_{\text{ap}}, \theta) \leftrightarrow N_{\text{tot}}$ und $N(> M_{\text{ap}}, > 0.6', \theta) \leftrightarrow N_{\text{rad}}$ jeweils für die kosmologischen Modelle aus der Tabelle 6.1 als Funktion des Aperturradius'. Die numerischen Ergebnisse wurden für die SCDM, OCDM und Λ CDM Modelle aus einer Realisierung dieser Modelle berechnet. JSW haben für das τ CDM-Modell zehn Realisierungen konstruiert, die sich in der Projektionsrichtung, der Translation und der Rotation

der projizierten Massenverteilung in den einzelnen Linsenebenen unterscheiden (siehe Jain et al. 1999). Die Fehlerbalken im Fenster des τ CDM-Modells sind durch Mittelung über die zehn Realisierungen berechnet und beziehen sich auf den Mittelwert der Realisierungen. Den so erhaltenen Fehler nennen wir *kosmische Varianz*. Die kosmische Varianz quantifiziert den Fehler, der sich aus der Verwendung einer endlichen Anzahl von Realisierungen des Dichtekontrasts ergibt. Wie wir der Figur 6.2 entnehmen können, sind die Übereinstimmungen zwischen theoretischen und numerischen Ergebnissen sehr gut. Für die SCDM, OCDM und Λ CDM Modelle sind die Abweichungen für Filterradien > 5 Bogenminuten kleiner als 10 Prozent. Den größten Unterschied beobachten wir dabei für kleine Filterradien beim Λ CDM-Modell. Dort sind die theoretischen Ergebnisse doppelt so groß wie die der Simulationen. Die Differenzen bleiben beim τ CDM-Modell auch für große Filterradien über 10 Prozent. Die Ursache für diese Abweichung ist wahrscheinlich die speziell gewählte Realisierung, die nicht die mittleren Eigenschaften der τ CDM-Realisierungen widerspiegelt.

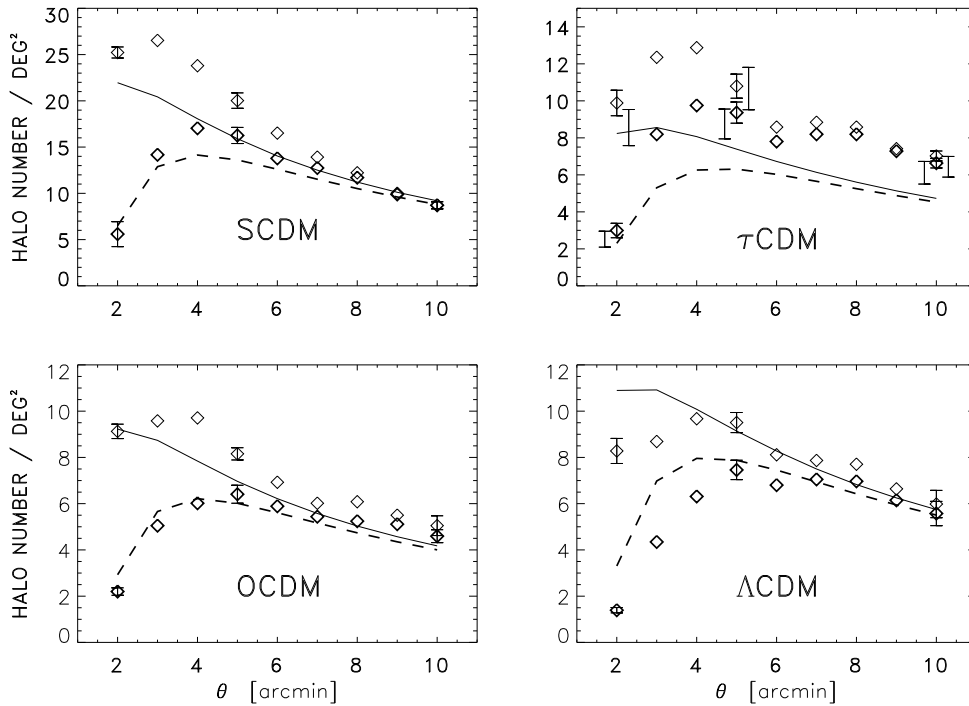
In Figur 6.3 haben wir die Aperturmasse mit Rauschen berechnet. Die oben erwähnten zusammenhängenden Bereiche werden von Werten der Aperturmasse gebildet, deren S/R-Verhältniss einen Schwellenwert $S_c > 5$ überschreitet. Die theoretischen Kurven werden mit der Faltung (5.7) berechnet. Wir haben für jedes kosmologische Modell für die Filterradien $\theta = 2, 5$ und 10 Bogenminuten die Fehler berechnet, die sich aus 7 Realisierungen der intrinsischen Elliptizitätsverteilung (6.3) ergeben. Im τ CDM-Modell ist, wie in Figur 6.2, die kosmische Varianz gezeigt. Die kosmische Varianz ist größer als der Fehler, der durch die intrinsische Elliptizitätsverteilung gegeben ist. Der Grund dafür ist die große Kurtosis der Verteilung von M_{ap} (siehe Reblinsky et al. 1999 und Schneider et al. 1998). Im Vergleich zu Figur 6.2 sind die Werte in Figur 6.3 allgemein höher, da die intrinsischen Elliptizitäten die Werte der Aperturmasse erhöhen. Die theoretischen Werte stimmen auch hier sehr gut mit den Ergebnissen der numerischen Simulationen überein.

Trotz vereinfachender Annahmen, wie der Gültigkeit der Press-Schechter-Theorie und des NFW-Massenprofils, sowie der Vernachlässigung von Projektionseffekten (siehe Reblinsky & Bartelmann 1999), erhalten wir eine erstaunlich gute Übereinstimmung zwischen theoretischen und numerischen Resultaten, was für die Qualität der gemachten Näherungen spricht.

6.4 Der Flügel der M_{ap} -Statistik

Die Berechnung der kumulativen Wahrscheinlichkeitsverteilung der M_{ap} -Statistik (4.39) und somit auch die der analytischen Fitformeln (4.40) und (4.41) beruht auf den gleichen physikalischen Modellen für die räumliche Anzahldichte und die Massendichte der Halos, deren Gültigkeit im letzten Abschnitt für die Observablen $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$ und $N(> M_{\text{ap}}, > \xi_t, \theta)$ getestet wurde. Wir werden im Folgenden den Verlauf und die Amplitude des Exponentialgesetzes (4.40) mit den Ergebnissen der numerischen Simulationen vergleichen.

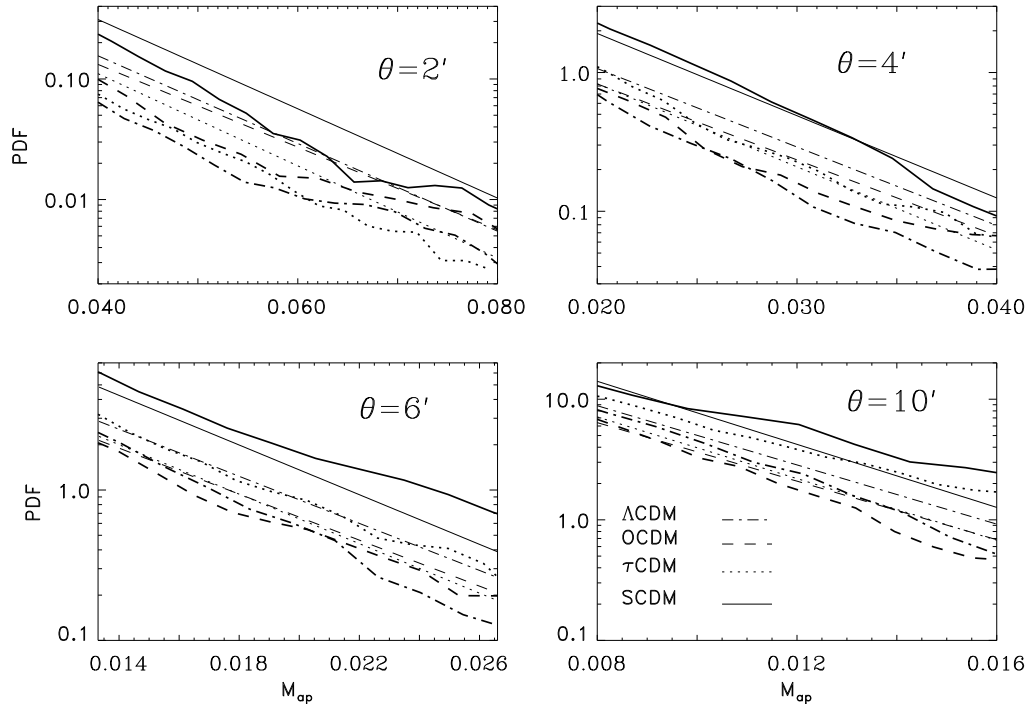
In Figur 6.4 zeigen wir Ausschnitte aus Figur 6.1 für den Aperturmassenbereich, der einem Bereich des S/R-Verhältnis' $S_c \in [5, 10]$ für die jeweilige



Figur 6.3: Diese Figur ist äquivalent zu Figur 6.2, mit dem Unterschied, daß die Aperturmasse mit Rauschen berechnet ist. Die theoretischen Werte sind durch Faltung mit einer durch die Dispersion der intrinsischen Elliptizitätsverteilung definierten Gaußverteilung berechnet worden (siehe Abschnitt 5.1). Die Simulationsergebnisse sind mit dem Diamanten bezeichnet und mit Gleichung (6.2) berechnet. Wir betrachten nur Halos mit $S_c > 5$. Die Fehlerbalken, deren Zentrum die Symbole sind, ergeben sich aus sieben Realisierungen der intrinsischen Elliptizitäten. Die im Fenster des τCDM -Modells nach rechts (für $N(> M_{\text{ap}}, \theta)$) bzw. links (für $N(> M_{\text{ap}}, > 0.6', \theta)$) verschobenen Fehlerbalken sind aus den zehn Realisierungen dieses Modells berechnet und um den Mittelwert aus den Realisierungen zentriert.

Filterskala entspricht. Die dicken Linien bezeichnen die Ergebnisse aus den Simulationen und die geraden dünnen Linien entsprechen der mit der Fitformel (4.41) berechneten normierten Wahrscheinlichkeitsverteilung der M_{ap} -Statistik. Für alle kosmologischen Modelle aus der Tabelle 6.1 folgen die ‘gemessenen’ Wahrscheinlichkeitsverteilungen einem Exponentialgesetz, dessen Anstieg in guter Übereinstimmung mit dem theoretisch Berechneten ist.

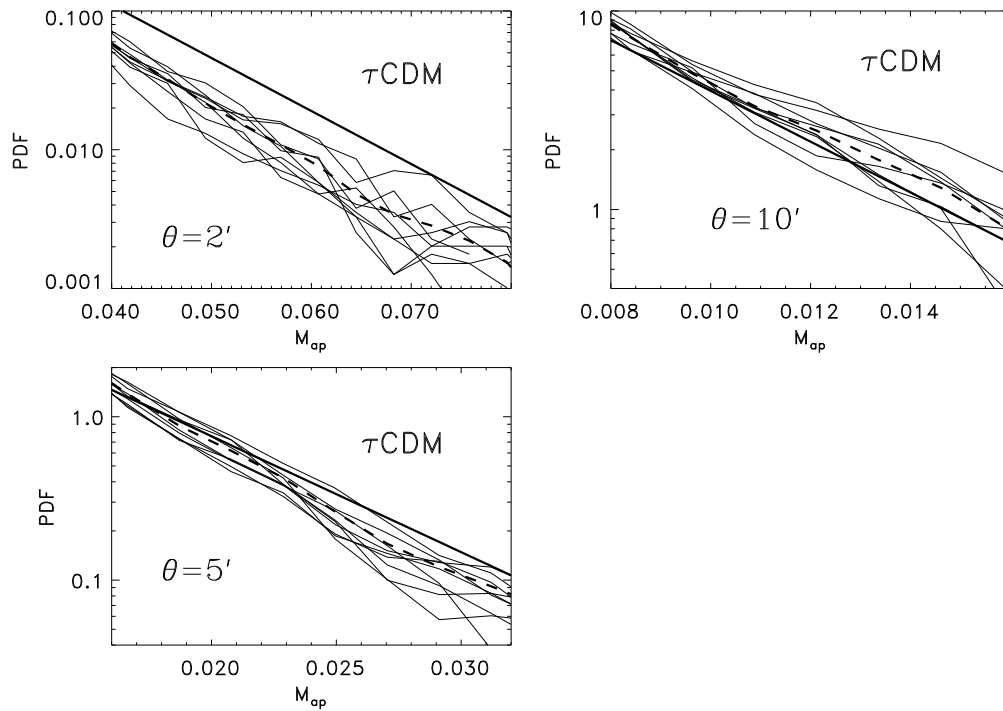
In Figur 6.5 zeigen wir für die Filterradien $\theta = 2, 5$ und 10 Bogenminuten die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der zehn Realisierungen des τCDM -Modells. Die dicke gestrichelte Linie ist der Mittelwert der Wahrscheinlichkeitsverteilung, der aus den verschiedenen Realisierungen berechnet wurde. Das theoretische Modell ist durch die dicke gerade Linie gegeben. Für $\theta = 2$ Bogenminuten liegen alle Realisierungen, und somit deren Mittelwert, unter der theoretisch berechneten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Mittelwerte, die sich für die beiden



Figur 6.4: Der Flügel der M_{ap} -Statistik für die kosmologischen Modelle aus der Tabelle 6.1 für vier Filterradien. Die dicken Linien sind Ergebnisse der Simulationen (siehe Figur 6.1) und die dünnen, geraden Linien sind mit dem Modell aus Abschnitt 4.4.3 berechnet. Der Aperturmassenbereich entspricht einem S/R-Verhältnis $S_c \in [5, 10]$.

größeren Filterradien ergeben, stimmen sehr gut mit der analytischen Rechnung überein.

Schneider et al. (1998), Kruse & Schneider (1999a), Kruse & Schneider (1999b), van Waerbeke et al. (1999), Bartelmann & Schneider (1999a) und Reblinsky et al. (1999) haben gezeigt, daß die Aperturmasse ein geeignetes Maß für die kosmische Scherung darstellt, mit dessen Hilfe man unabhängig von Annahmen über das Verhältnis der Masse zur Leuchtkraft Einschränkungen der kosmologischen Parameter erhalten kann. Um zukünftige Beobachtungsdaten interpretieren zu können, müssen Vorhersagen für die kosmologische Strukturentwicklung sehr genau bekannt sein. Die Ergebnisse dieses Kapitels haben gezeigt, daß die Resultate semi-analytischer Modelle (Press-Schechter-Theorie und NFW-Profil) in guter Übereinstimmung mit denen numerischer Simulationen sind. Somit erwarten wir, daß die Analyse zukünftiger Experimente mit der Aperturmassentechnik eine Einschränkung der kosmologischen Parameter ergeben wird.



Figur 6.5: Der Flügel der M_{ap} -Statistik für das τCDM -Modell für die Filterradien $\theta = 2, 5$ und 10 Bogenminuten. Die dünnen Linien entsprechen den zehn Realisierungen des τCDM -Modells. Die dicke, durchgezogene Linie entspricht dem theoretischen Modell und die dicke, gestrichelte Linie ist der Mittelwert aus den zehn Realisierungen.

Kapitel 7

Ausblick

Diese Dissertation diente der Untersuchung der Aperturmasse als einem neuen statistischen Maß für den schwachen kosmologischen Gravitationslinseneffekt.

Ein Großteil der Arbeit war der Analyse statistischer Eigenschaften der Aperturmasse M_{ap} gewidmet. Wir haben gezeigt, daß die Dispersion von M_{ap} ein eng lokalisiertes Maß für das Powerspektrum des Dichtefeldes ist, das somit direkt der Beobachtung zugänglich wird. Die Schiefeit der Wahrscheinlichkeitsverteilung von M_{ap} hängt empfindlich von den kosmologischen Parametern ab. Diese Größe kann somit zur Einschränkung des kosmologischen Modells benutzt werden.

Die theoretischen Vorhersagen für die Dispersion und die Schiefeit sind in Reblinsky et al. (1999) mit den in Kapitel 6 beschriebenen numerischen Simulationen verglichen worden. Während für die mit dem nichtlinearen Powerspektrum berechnete Dispersion eine gute Übereinstimmung numerischer und theoretischer Resultate festgestellt wurde, ergibt der Vergleich für die Schiefeit eine beträchtliche Abweichung zwischen beiden Resultaten. Der Grund hierfür ist in der störungstheoretischen Berechnung der Schiefeit zu finden, die die nichtlineare Entwicklung nicht adäquat berücksichtigt.

Wir haben weiterhin den durch Halos verursachten ausgedehnten Flügel der Wahrscheinlichkeitsverteilung von M_{ap} durch eine Fitformel beschrieben, die es uns ermöglichte, Dispersionen für die Fitparameter durch eine Maximum-Likelihood-Methode zu berechnen. Ausgehend von den auf diesen Dispersionen beruhenden Konfidenzregionen im Fitparameterraum haben wir gezeigt, daß die in der Dissertation betrachteten Kosmologien signifikant unterschieden werden können, wenn man ausreichend große und tiefe Beobachtungsfelder zur Verfügung hat.

Einen weiteren Schwerpunkt der Dissertation bildete die Berechnung der Anzahldichte von Halos, die man aus Beobachtungen mit der Aperturmasse erwarten würde. Wir haben gezeigt, daß die Anzahldichte der Halos hoch genug ist, um mit dem geplanten MEGACAM-Projekt (siehe Mellier et al. 1999) nachgewiesen werden zu können. Da die Anzahldichte der Halos in den hier betrachteten kosmologischen Modellen signifikant verschieden ist, kann die Statistik von Konzentrationen dunkler Materie zur Einschränkung der kosmologischen Parameter benutzt werden.

Wir haben die Amplitude und den Verlauf der Fitformel für den Flügel der M_{ap} -Statistik und die berechnete Anzahldichte der Halos mit numerischen Simulationen verglichen und eine ausgezeichnete Übereinstimmung festgestellt. Das spricht für die hohe Qualität der angenommenen Näherungen und zeigt, daß die Analyse zukünftiger Beobachtungsdaten mit der Aperturmassentechnik Einschränkungen des Powerspektrums des Dichtefeldes, der kosmischen Massenfunktion und der kosmologischen Parameter erlauben wird.

Die Hauptimpulse für die Entwicklung des Forschungsgebietes, das sich mit dem schwachen Gravitationslinseneffekt befaßt, werden von neuen Beobachtungsmethoden ausgehen, deren Potential das heutiger Verfahren um Größenordnungen übersteigen wird (siehe z.B. Schneider & Kneib 1998 [NGST], Schneider 1999 [SKA] und Mellier et al. 1999 [MEGAKAM,VLT]). Insbesondere werden es die technischen Parameter der neuen Beobachtungsgeräte erlauben, die Anzahldichte der Hintergrundgalaxien und deren mittlere Rotverschiebung zu erhöhen, was zu einem Anstieg des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses (kurz S/R-Verhältnis) führen wird. Weiterhin wird erwartet, daß die Fläche der Beobachtungsfelder ein Vielfaches der heutiger Felder betragen wird. Diese großen, tiefen Beobachtungsfelder sind ideal zum Nachweis von Konzentrationen dunkler Materie geeignet.

Wir sind in dieser Arbeit nicht auf die Probleme eingegangen, mit denen man bei wirklichen Beobachtungen konfrontiert wird. Dem experimentellen Nachweis des schwachen Gravitationslinseneffekts ist ein eigenständiges Forschungsgebiet gewidmet. Das Hauptproblem dieser Experimente ist, die sehr kleinen Verzerrungen der Hintergrundgalaxien, die durch den schwachen Linseneffekt verursacht werden, von den Formänderungen der Galaxienbilder zu trennen, die sich aus meßtechnisch bedingten oder atmosphärischen Einflüssen ergeben. Die zuletzt genannten Einflüsse werden durch die sogenannte ‘point spread function’ (PSF) beschrieben, die die Abbildung einer punktförmigen Quelle beschreibt (siehe z.B. Kuijken 1999). Die strenge Interpretation von Beobachtungsdaten erfordert die genaue Kenntnis der PSF, deren Einfluß durch den Einsatz verbesserter Beobachtungstechniken teilweise reduziert werden kann.

Trotz der technischen Schwierigkeiten ist in der Literatur über erste Erfolge in der praktischen Anwendung von Techniken, die auf dem schwachen Linseneffekt beruhen, berichtet worden (siehe z.B. Kaiser et al. 1998, Clowe et al. 1998, Seitz et al. 1998, Hoekstra et al. 1998 und Erben et al. 1999). Es ist gelungen, sowohl Aufschlüsse über die Massenverteilung großer Galaxienhaufen zu erhalten, als auch vollständig dunkle Materiekonzentrationen signifikant nachzuweisen.

Ausgehend von den bereits erzielten experimentellen Ergebnissen und dem Potential neuer Beobachtungstechniken erscheint es realistisch anzunehmen, daß die routinemäßige Auswertung geplanter Experimente mit Techniken zum Nachweis des schwachen Linseneffekts wertvolle Informationen über die kosmologischen Parameter und die Massenverteilung im Universum liefern wird. Insbesondere können die in der Dissertation gemachten Vorhersagen zur Interpretation zukünftiger Experimente genutzt werden.

Neben der experimentellen Überprüfung der Ergebnisse der Dissertation

können die begonnenen theoretischen Untersuchungen sowohl mit numerischen Methoden als auch mit der Verwendung von semi-analytischen Modellen, wie z.B. der Press-Schechter-Theorie, fortgesetzt werden.

Der im sechsten Kapitel durchgeführte Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit den numerischen Simulationen beruhte auf der Annahme, daß sich entlang einer Sichtlinie jeweils nur ein Halo befindet. Somit haben wir die Möglichkeit vernachlässigt, daß Aperturmassensignale durch diffuse Massenkomponten oder mehrere kollabierte Objekte entlang einer Sichtlinie erzeugt werden können. Um die durch Projektionseffekte verursachten Fehldetektionen quantifizieren zu können, muß man eine sogenannte ‘group finder’-Analyse der im sechsten Kapitel beschriebenen N -Körper Simulationen durchführen. In dieser Analyse werden räumlich zusammenhängende Gruppen von Teilchen in den N -Körper Simulationen identifiziert, die man dann als Halos interpretiert. Das Resultat einer ‘group finder’-Analyse ist ein Katalog massereicher Objekte, der die Koordinaten, Rotverschiebungen und Massen der Objekte enthält. Wenn man die dreidimensionalen Koordinaten der Objekte projiziert, kann man diese projizierten Koordinaten mit denen der großen M_{ap} -Werte in der zweidimensionalen M_{ap} -Karte vergleichen und auf diese Weise Fehldetektionen feststellen (siehe z.B. Reblinsky & Bartelmann 1999). In Abhängigkeit von der Koinzidenz der projizierten Koordinaten von Halos und großen Aperturmassen können dann Vorhersagen für die Massenfunktion kollabierter Objekte gemacht werden.

Ein weitere interessante Fragestellung betrifft die Autokorrelationsfunktion von Katalog-Objekten und großen M_{ap} -Werten. Von Mo & White (1996) ist ein Verfahren entwickelt worden, die Halo-Halo-Korrelationsfunktion auf der Grundlage der Press-Schechter-Theorie zu berechnen (siehe auch Jing 1998). Das Ergebnis dieser semi-analytischen Rechnung kann mit der Korrelationsfunktion der Katalog-Objekte verglichen werden. Basierend auf der Gleichung von Limber (1953) kann die projizierte Halo-Halo-Korrelationsfunktion berechnet werden. Wenn wir diese projizierte Korrelationsfunktion mit der zweidimensionalen Korrelation von M_{ap} -Werten mit hohen S/R-Verhältnissen identifizieren, erhalten wir eine analytische Abschätzung der Korrelation großer M_{ap} -Werte. Mißt man die Zweipunktkorrelation in der numerisch bestimmten M_{ap} -Karte (siehe Kapitel 6), dann kann diese mit der analytischen Abschätzung verglichen werden. Stellt sich heraus, daß die numerischen und analytischen Resultate in guter Übereinstimmung sind, kann man Vorhersagen für Beobachtungen machen.

Es wird erwartet, daß in naher Zukunft Techniken für die photometrische Bestimmung von Rotverschiebungen zur Verfügung stehen werden (siehe z.B. Pelló et al. 1999 und dort angegebene Referenzen). Diese Techniken versetzen uns in die Lage, die Rotverschiebungen der Hintergrundgalaxien zu bestimmen. Wenn die Konzentrationen dunkler Materie Galaxien enthalten (Galaxienhaufen), könnte auch die Rotverschiebung der Gravitationslinsen bestimmt werden. Diese zusätzliche Information kann zusammen mit den Elliptizitäten genutzt werden, um verbesserte Einschränkungen der kosmologischen

Parameter zu erhalten. Der Einfluß der Rotverschiebungsinformation kann studiert werden, indem man einen neuen, explizit von der Rotverschiebung der Quellen abhängenden Schätzer für die Aperturmasse konstruiert. Dieser neue Schätzer könnte dann dazu benutzt werden, um verbesserte Vorhersagen für die Massenfunktion des Universums zu erhalten.

Eine Möglichkeit, die Fehler in der Bestimmung der kosmologischen Parameter zu reduzieren, ist die Kombination von Messungen des schwachen Gravitationslinseneffekts mit anderen Beobachtungen. Hu & Tegmark (1999) haben gezeigt, daß die Genauigkeit der Messung der kosmologischen Parameter beträchtlich gesteigert werden kann, wenn man Messungen der Dispersion der kosmischen Scherung und der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMBR) kombiniert. Ausgehend von dem Ergebnis dieser Dissertation, daß die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung der Aperturmasse empfindlich von den kosmologischen Parametern abhängt, erwartet man, daß die Kombination von Informationen über den Flügel der M_{ap} -Statistik und die CMBR noch genauere Einschränkungen der kosmologischen Modelle ermöglichen wird.

Zusammenfassend können wir sagen, daß ausgehend von theoretischen Untersuchungen und im Hinblick auf neue Generationen von Experimenten der Nachweis des schwachen Linseneffekts eine genauere Bestimmung der Masse von Galaxienhaufen oder dunkler Halos sowie eine präzisere Einschränkung der kosmologischen Parameter und des Powerspektrums des Dichtekontrasts ermöglichen wird.

Anhang A

Fitformeln

Wir stellen in diesem Anhang die von Navarro et al. (1997) angegebenen Fitformeln zur Berechnung der charakteristischen Dichte zusammen.

Der lineare Wachstumsfaktor (siehe Abschnitt 1.2.1) ist als Funktion der Halorotverschiebung und der kosmologischen Parameter durch

$$D_+(z, \Omega_0, \Omega_\Lambda) = \begin{cases} 1/(1+z) & : \Omega_0 = 1, \Omega_\Lambda = 0 \\ F_1(w)/F_1(w_0) & : \Omega_0 < 1, \Omega_\Lambda = 0 \\ F_2(y)F_3(y)/(F_2(y_0)F_3(y_0)) & : \Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

gegeben. Die Variablen w, w_0, y und y_0 , sowie die Funktionen F_1, F_2 und F_3 in (A.1) sind durch

$$w_0 = \frac{1}{\Omega_0} - 1, \quad w = \frac{w_0}{1+z}, \quad y_0 = (2w_0)^{1/3}, \quad y = \frac{y_0}{1+z}, \quad (\text{A.2})$$

$$F_1(u) = 1 + \frac{3}{u} + \frac{3(1+u)^{1/2}}{u^{3/2}} \ln \left[(1+u)^{1/2} - u^{1/2} \right], \quad (\text{A.3})$$

$$F_2(u) = \frac{(u^3 + 2)^{1/2}}{u^{3/2}}, \quad (\text{A.4})$$

und

$$F_3(u) = \int_0^u du' \left(\frac{u'}{u'^3 + 2} \right)^{3/2} \quad (\text{A.5})$$

definiert.

Die Ω_0 -Abhängigkeit des in der sphärischen Kollapstheorie berechneten kritischen Dichtekontrasts (siehe Abschnitt 2.1) ist näherungsweise durch

$$\delta_{\text{crit}}^0(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = \begin{cases} 1.686 & : \Omega_0 = 1, \Omega_\Lambda = 0 \\ 1.686 \Omega_0^{0.0185} & : \Omega_0 < 1, \Omega_\Lambda = 0 \\ 1.686 \Omega_0^{0.0055} & : \Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

gegeben.

Die linear extrapolierte Dichtefluktuation für ein CDM-Modell, dessen Powerspektrum durch σ_8 normiert ist (siehe Abschnitt 1.2), wird durch die Formel

$$\sigma(M) = \sigma_8 \frac{F_4(M_8)}{F_4(M_h)} \quad (\text{A.7})$$

beschrieben, wobei

$$M_8 = 6.005 \times 10^{14} (h\Omega_0)^3, \quad M_h = \left(\frac{M}{h^{-1}M_\odot} \right) h^3 \Omega_0^2 \quad (\text{A.8})$$

und

$$F_4(u) = A_1 u^{0.67} [1 + (A_2 u^{-0.1} + A_3 u^{-0.63})^p]^{1/p} \quad (\text{A.9})$$

mit $A_1 = 8.6594 \times 10^{-12}$, $A_2 = 3.5$, $A_3 = 1.628 \times 10^9$, $p = 0.255$.

Literaturverzeichnis

- Bardeen J., Bond J., Kaiser N. & Szalay A.: *Astrophys. J.* **304** (1986) 15
- Bartelmann M.: *A&A* **313** (1996) 697
- Bartelmann M. et al.: *A&A* **330** (1998) 1
- Bartelmann M. & Schneider P.: *A&A* **313** (1999a) 697
- Bartelmann M. & Schneider P.: *Weak Gravitational Lensing*, Preprint submitted to Elsevier Preprint, (1999b)
- Bernardeau F., van Waerbeke L. & Mellier Y.: *A&A* **322** (1997) 1
- Blandford R. & Jaroszyński M.: *Astrophys. J.* **477** (1981) 27
- Blandford R., Saust A., Brainerd T. & Villumsen J.: *MNRAS* **251** (1991) 600
- Bonnet H. & Mellier Y.: *A&A* **303** (1995) 331
- Borgani S., Rosati P., Tozzi P. & Norman C.: *astro-ph/9901017* (1999)
- Brainerd T., Blandford R. & Smail I.: *Astrophys. J.* **466** (1996) 623
- Bromley B. & Tegmark M.: *astro-ph/9904254* (1999)
- Clowe D. et al.: *Astrophys. J.* **497** (1998) L61
- Efstathiou G.: *in: Cosmology and large scale structure, Les Houches Session LX, R. Schaeffer, J. Silk, M. Spiro and J. Zinn-Justin (eds.), North-Holland, p. 133.* (1996)
- Eke V., Cole S. & Frenk C.: *MNRAS* **282** (1996) 263
- Erben T.: *Diplomarbeit, unveröffentlicht* (1997)
- Erben T. et al.: *submitted to A&A* (1999) astro-ph/9907134
- Ferreira P., Gorski K. & Magueijo J.: *Astrophys. J.* **L1** (1998) 503
- Ferreira P., Gorski K. & Magueijo J.: *astro-ph/9904073* (1999)
- Fry J.: *Astrophys. J.* **279** (1984) 499
- Gunn J.: *Astrophys. J.* **147** (1967) 61

- Guth A.: *Phys. Rev. D* **23** (1981) 347
- Hamilton A., Kumar P., Lu E. & Matthews A.: *Astrophys. J.* **374** (1991) L1
- Hawking S.: *Astrophys. J.* **145** (1966) 544
- Hoekstra H., Franx M., Kuijken K. & Squires G.: *Astrophys. J.* **504** (1998) 636
- Hu W. & Tegmark M.: *Astrophys. J.* **514** (1999) L65
- Jain B. & Seljak U.: *Astrophys. J.* **484** (1997) 560
- Jain B., Mo H. & White S.: *MNRAS* **276** (1995) L25
- Jain B., Seljak U. & White S.: *in Fundamental Parameters in Cosmology, Recontres de Moriond 1998, in press* (1998)
- Jain B., Seljak U. & White S.: *submitted to Astrophys. J.* (1999) astro-ph/9901191
- Jenkins A. et al.: *Astrophys. J.* **499** (1998) 20
- Jing Y.: *Astrophys. J.* **503** (1998) L9
- Kaiser N.: *Astrophys. J.* **388** (1992) 272
- Kaiser N.: *Astrophys. J.* **439** (1995) L1
- Kaiser N.: *Astrophys. J.* **498** (1998) 26
- Kaiser N. et al.: *astro-ph/9809268* (1998)
- Kaiser N. & Squires G.: *Astrophys. J.* **404** (1993) 441
- Kaiser N., Squires G., Fahlman G. & Woods D.: *in: Clusters of Galaxies, proc. XIVth Moriond astrophysics meeting, Méribel, France, 1994, p.269* (1994)
- Kaiser N., Squires G. & Broadhurst T.: *Astrophys. J.* **449** (1995) 460
- Kibble T.: *J.Phys.* **A9** (1976) 1387
- Kruse G. & Schneider P.: *MNRAS* **302** (1999a) 821
- Kruse G. & Schneider P.: *accepted for publication in MNRAS* (1999b) astro-ph/9904192
- Kuijken K.: *astro-ph/9904418* (1999)
- Lacey C. & Cole S.: *MNRAS* **262** (1993) 627
- Lacey C. & Cole S.: *MNRAS* **271** (1994) 676
- Liddle A. & Lyth D.: *astro-ph/9303019* (1993)
- Limber D.: *Astrophys. J.* **117** (1953) 134

- Luppino G. & Kaiser N.: *Astrophys. J.* **475** (1997) 20
- Magueijo J., Ferreira P. & Gorski K.: *astro-ph/9903051* (1999)
- Mellier Y.: *astro-ph/9812172* (1998)
- Mellier Y., Bernardeau F., van Waerbeke L. & Le Fèvre O.: *Looking Deep in the Southern Sky, Proceedings of the ESO/Australia Workshop. Held at Sydney, Australia, 10-12 December 1997. Edited by Raffaella Morganti and Warrick J. Couch. Springer-Verlag, 1999., p.59.* (1999)
- Misner C., Thorne K. & Wheeler J.: *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, (1973)
- Mo H. & White S.: *MNRAS* **282** (1996) 347
- Narayan R. & Bartelmann M.: *Proceedings of the 1995 Jerusalem Winter School, eds. A.Dekel and J.Ostriker* (1997)
- Navarro J., Frenk C. & White S.: *Astrophys. J.* **462** (1996) 563
- Navarro J., Frenk C. & White S.: *Astrophys. J.* **490** (1997) 493
- Padmanabhan T.: *Structure formation in the universe*, CUP, Cambridge, (1995)
- Peacock J. & Dodds S.: *MNRAS* **280** (1996) L19
- Peebles P.: *The Large Scale Structure of the Universe*, Princeton Univ. Press, Princeton, (1980)
- Peebles P.: *Astrophys. J.* **510** (1999a) 523
- Peebles P.: *Astrophys. J.* **510** (1999b) 531
- Pelló R., Kneib J., Bolzonella M. & Miralles J.M.: *astro-ph/9907054* (1999)
- Press W. & Schechter P.: *Astrophys. J.* **187** (1974) 425
- Reblinsky K. & Bartelmann M.: *A&A* **345** (1999) 1
- Reblinsky K., Kruse G., Jain B. & Schneider P.: *submitted to A&A* (1999)
astro-ph/9904192
- Robinson J., Gawiser E. & Silk J.: *astro-ph/9805181* (1998)
- Rosati P. et al.: *Astrophys. J.* **445** (1995) L11
- Rosati P., Della Ceca R., Norman C. & Giacconi R.: *Astrophys. J.* **492** (1998)
L21
- Schneider P.: *A&A* **302** (1995) 639
- Schneider P.: *MNRAS* **283** (1996) 837
- Schneider P.: *astro-ph/9907146* (1999)

- Schneider P. & Kneib J.: *astro-ph/9807091* (1998)
- Schneider P., Ehlers J. & Falco E.: *Gravitational Lenses*, Springer-Verlag, Berlin, (1992)
- Schneider P., van Waerbeke L., Jain B. & Kruse G.: *MNRAS* **296** (1998) 873
- Schramm T. & Kayser R.: *A&A* **299** (1995) 1
- Seitz C. & Schneider P.: *A&A* **318** (1997) 687
- Seitz S. et al.: *MNRAS* **298** (1998) 945
- Seitz S., Schneider P. & Ehlers J.: *Class.Quant.Grav.* **11** (1994) 2345
- Smoot G. et al.: *Astrophys. J. Lett.* **396** (1992) L1
- Tyson J., Valdes F. & Wenk R.: *Astrophys. J.* **349** (1990) L1
- Vilenkin A. & Shellard E.: *Cosmic strings and other topological defects*, CUP, Cambridge, (1994)
- van Waerbeke L. et al.: *A&A* **317** (1997) 303
- van Waerbeke L., Bernardeau F. & Mellier Y.: *A&A* **342** (1999) 15
- White S.: in "Les Houches, Session LX, Cosmology and Large-Scale Structure", ed.s Schaeffer R., Silk J., Spiro M., and Zinn-Justin J., Elsevier Science B.V. (1996)
- White S., Efstathiou G. & Frenk C.: *MNRAS* **262** (1993) 1023
- Willick J.A.: *submitted to Astrophys. J.* (1999) astro-ph/9904367

Danksagung

Ich danke Peter Schneider, dem Betreuer meiner Arbeit, für eine angenehme und interessante Zusammenarbeit. Den Mitgliedern der 'Linsengruppe' des MPA danke ich für viele schöne gemeinsame Erlebnisse und anregende Diskussionen. Finanziell bin ich von der Max-Planck-Gesellschaft unterstützt worden.

Lebenslauf

Name: Guido Kruse
Anschrift: Sailerstrasse 14
80809 München
Geburtsdatum: 24.07.1967
Geburtsort: Mühlhausen

01.09.1974 - 10.07.1976 Polytechnische Oberschule in Jena
01.09.1976 - 14.07.1984 Spezialschule mit erweitertem Russischunterricht in Jena,
Abschluß zehnte Klasse, Abitur in Russisch
01.09.1984 - 01.10.1985 Erweiterte Oberschule in Jena
01.10.1985 Antrag auf Ausreise in die Bundesrepublik
01.11.1985 Ausschluß aus der Erweiterten Oberschule aufgrund dieses
Antrages; bis zum Zeitpunkt der Ausreise aus der DDR war
es mir nicht erlaubt, meine Ausbildung fortzusetzen, oder ei-
ne Lehre zu beginnen (15.05.1996, berufliche Rehabilitierung
und Bestätigung einer verfolgungsbedingten Unterbrechung
der Ausbildung während des oben genannten Zeitraumes)
01.12.1985 - 25.06.1988 Arbeit in einer Kunstwerkstatt in Gernewitz
01.07.1988 - 01.06.1989 Arbeit in einer Firma für Möbelrestauration in Gera
20.07.1989 Einreise in die Bundesrepublik, Notaufnahmelage in Gießen
20.07.1989 Umzug nach Goslar
01.09.1989 - 29.11.1989 Arbeit in einem Restaurant in Goslar
05.01.1990 - 13.12.1990 Göttinger Institut, Sonderlehrgänge für Spätaussiedler e.V.,
Erlangung der allgemeinen Hochschulreife
01.01.1991 - 23.03.1991 Arbeit als Pfleger in einem Londoner Altersheim
01.04.1991 Beginn des Studiums der Physik an der TU-Berlin
12.10.1993 Abschluß des Vordiploms in Physik an der TU-Berlin
01.10.1994 - 31.07.1995 Studium der Physik an der ETH-Zürich ermöglicht durch
ein Jahresstipendium des DAAD
01.10.1995 - 31.03.1997 Tutor für die Lehrveranstaltung 'Mathematik für Chemiker'
an der TU-Berlin
01.01.1996 - 01.01.1997 Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik der TU-
Berlin
28.01.1997 Diplom in Physik
seit 01.04.1997 Promotionsstudium am Max-Planck-Institut für Astrophy-
sik in Garching bei München